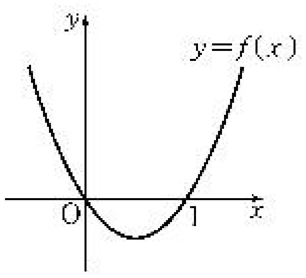
II.방정식과 부등식

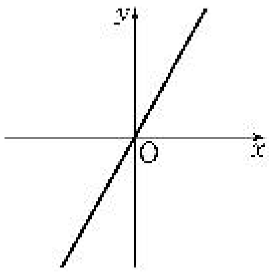
3.이차방정식과 이차함수

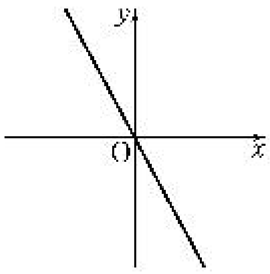
중단원 기출문제

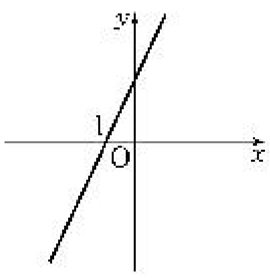
[난이도 : ★☆☆] [2005 학년도 대수능]

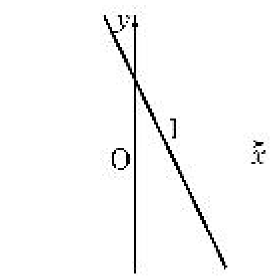
1 [문과]이차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y=f(x+1)-f(x)$의 그래프의 개형으로 가장 적합한 것은? [3점]

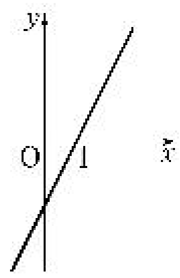


① 

② 

③ 

④ 

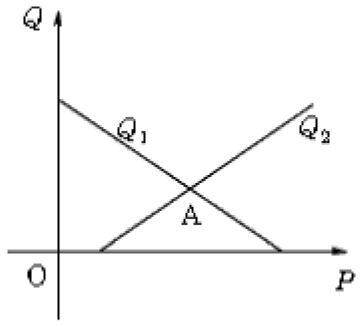
⑤ 

[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

2 두 실수 x와 y가 방정식 $x-y+4=0$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

3 다음은 어떤 상품의 수요와 공급에 관한 시장균형모형을 설명한 것이다. 이 상품의 가격 P의 변화에 따른 수요량을 Q_1, 공급량을 Q_2라고 하면 아래와 같이 이들을 각각 P에 대한 일차함수로 나타낼 수 있다.



$Q_1=a-bP$

$Q_2=-c+dP$

여기서 a, b, c, d는 양수이다.

두 함수 Q_1과 Q_2의 그래프의 교점 A가 제 1사분면에 있을 때 시장균형가격이 결정된다. 위의 모형에서 시장균형가격이 결정되기 위한 a, b, c, d 사이의 관계로 알맞은 것은? [3점]

① $ad-bc=0$　② $ac-bd=0$　③ $ad-bc>0$
④ $ad-bc<0$　⑤ $ac-bd>0$

[난이도 : ★★★] [2004 학년도 대수능]

4 [공통]실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$과 같이 정의한다.

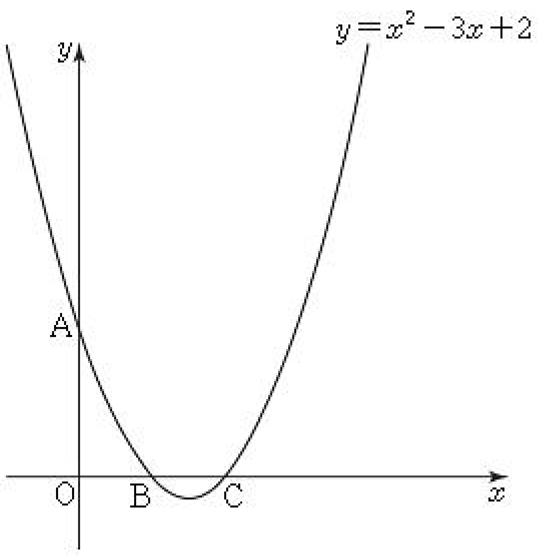
다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다. ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다. ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일 대응이면 $y=h(x)$도 일대일 대응이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

5 그림과 같이 이차 함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, x축과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 점 $P(a, b)$가 점 A에서 이차 함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프를 따라 점 B를 거쳐 점 C까지 움직일 때, $a+b+3$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

6 상수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 $y=ax-8$, $y=x+b$의 교점이 $(3, 4)$일 때, 두 직선과 x축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?[3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

7 상수 a, b, c에 대하여 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$이고, 이 그래프가 점 $(1, 4)$를 지날 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.[3점]

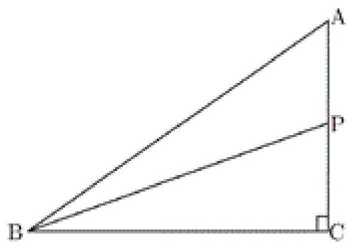
[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

8 이차 함수 $f(x)=x^2-2ax$ (a는 실수)의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 두 교점 사이의 거리의 최솟값은?[3점]

① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $\sqrt{26}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

9 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=12$ 이다.



점 P가 꼭짓점 A에서 출발하여 점 C를 지나 점 B까지 한 방향으로만 매초 2의 속력으로 변을 따라 움직인다. 점 P가 움직인 지 x초 후의 삼각형 ABP의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

〈보기〉
ㄱ. $f(x)=12x\ (0<x<10)$
ㄴ. $x=4$일 때 $f(x)$는 최댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(2)=f(7)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

10 이차 함수 $y=x^2-2x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 직선 $y=mx$와 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점이 원점일 때, 상수 m의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

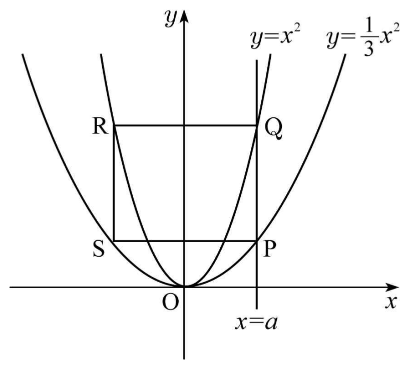
[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

11 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나고 $\alpha+\beta=20$일 때, 방정식 $f(2x-5)=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

12 그림은 두 이차 함수 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=x^2$의 그래프이다. 직선 $x=a(a>0)$가 두 포물선 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=x^2$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나면서 x축과 평행한 직선이 포물선 $y=\frac{1}{3}x^2$과 만나는 다른 한 점을 S라 하고, 점 Q를 지나면서 x축과 평행한 직선이 포물선 $y=x^2$과 만나는 다른 한 점을 R라 하자.

$\overline{PQ}=\overline{PS}$일 때, 사각형 $PQRS$의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

13 이차 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가)모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.
(나) $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, 2)$, $(4, 17)$을 지난다.

옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $1\le x\le 8$에서 이차 함수 $f(x)$의 최솟값은 -7이다.
ㄷ. $g(x)=f(x+3)$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

14 실수 전체의 집합에서 정의된 이차 함수 $f(x)=ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)+f(1)<0$
(나) $-1 \le x_1 < x_2 \le 1$이면 $-2<f(x_1)<f(x_2)<2$이다.

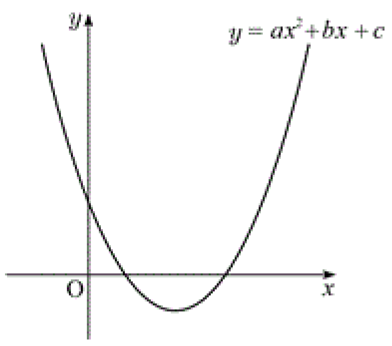
실수 a, b에 대한 설명으로 항상 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a^2<b^2$
ㄴ. $2a+b \ge 0$
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합은 2보다 작다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

15 그림은 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프이다.



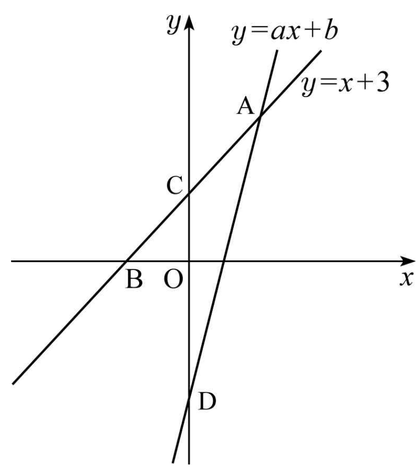
옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >
ㄱ. $a>0$
ㄴ. $bc>0$
ㄷ. $4a-2b+c>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

16 그림과 같이 두 직선 $y=x+3$, $y=ax+b(a>0)$가 제 1사분면의 점 A에서 만난다. 직선 $y=x+3$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하고 직선 $y=ax+b$가 y축과 만나는 점을 D라 하자. $\triangle ABO=2\triangle BOC$, $\triangle ACD=3\triangle BOC$일 때, 상수 a, b의 값은?(단, O는 원점이다.)[4점]



① $a=2, b=-4$ ② $a=3, b=-4$ ③ $a=3, b=-6$
④ $a=4, b=-6$ ⑤ $a=4, b=-8$

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 학력평가]

17 [공통]자연수 a, b는 7로 나누면 나머지가 각각 5, 6이다.

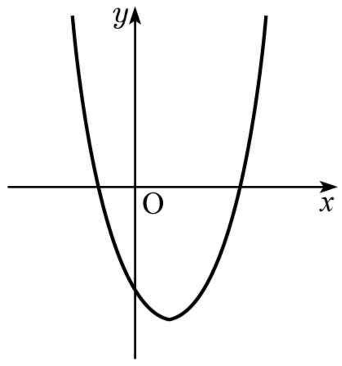
x에 대한 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 9이하의 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2009년 3월 학력평가]

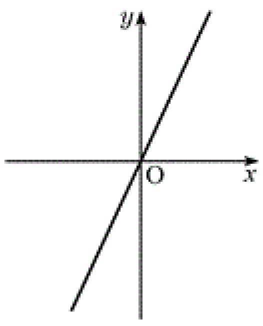
18 등식 $x+2y=5$를 만족하는 양의 실수 x, y에 대하여 $(\sqrt{17-2x}+\sqrt{11-4y})^2$의 최댓값을 구하시오.[3점]

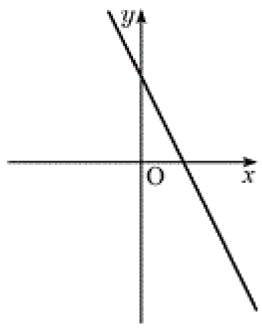
[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

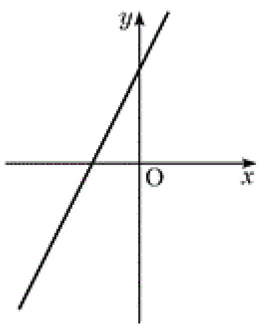
19 그림은 이차 함수 $y=x^2+mx+n$의 그래프이다.

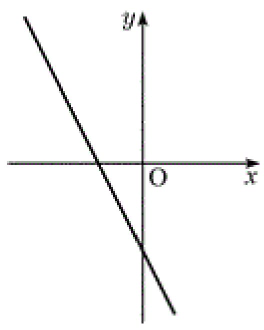


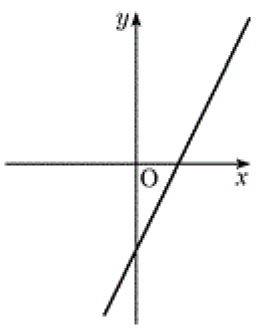
일차함수 $y=mx+n$의 그래프의 모양으로 옳은 것은?(단, m, n은 실수이다.)[3점]

①


②


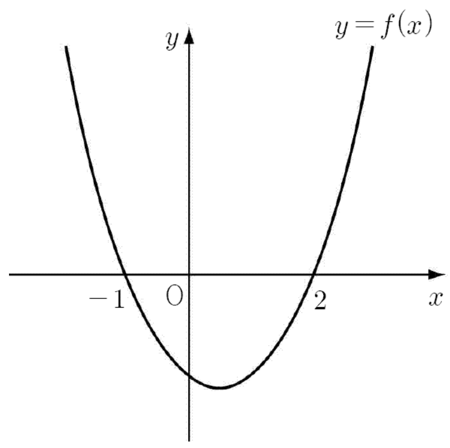
③


④


⑤


[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

20 그림은 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$을 지나는 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\le 0$의 해가 $-3\le x\le 3$일 때, 상수 k의 값은?[4점]



① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

21 좌표평면 위의 두 점 $A(0, 0)$, $B(0, 2)$가 있다. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=4$를 만족하는 점 $P(x, y)$에 대하여 $y-x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?[4점]

① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

22 어떤 이차 함수의 그래프는 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(2, 0)$에서 만나고, 이 이차 함수의 최댓값은 18이다. 이 그래프의 y절편을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

23 이차 함수 $y=-2x^2+ax+b$의 축의 방정식이 $x=1$이고, 최댓값이 3이다.

이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 03월 학력평가]

24 이차 함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 두 직선 $y=-x+4$와 $y=5x+7$에 동시에 접할 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

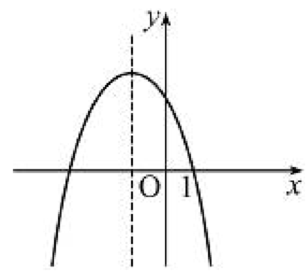
25 모든 실수에서 정의된 이차 함수 $f(x)=a(x-1)^2+b$가 최댓값 $3a$를 가질 때, 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, a, b는 상수이다.)

[보기]
ㄱ. $a<0$
ㄴ. $b=3a$
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

26 그림은 점 $(1, 0)$을 지나는 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 나타낸 것이다.



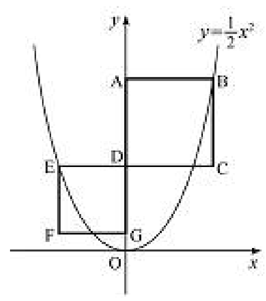
이때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $b>0$
ㄴ. $ab+c>0$
ㄷ. $a-b+c>0$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 3월 학력평가]

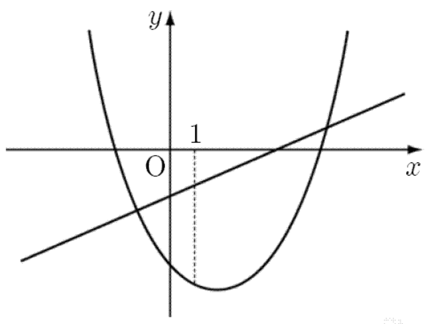
27 좌표평면에서 점 $A(0, 8)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 이차 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프와 만나는 한 점을 B라 하고, 선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형 $ABCD$를 그림과 같이 그렸다. 또 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 그래프와 만나는 한 점을 E라 하고, 선분 DE를 한 변으로 하는 정사각형 $DEFG$를 그렸다. 이때 두 정사각형 $ABCD$와 $DEFG$의 넓이의 합을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

28 그림은 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$와 일차함수 $y=dx+e$의 그래프의 개형이다.

상수 a, b, c, d, e의 관계로 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?[4점]



[보기]
ㄱ. $e-c>0$
ㄴ. $\lvert a\rvert<\lvert b\rvert$
ㄷ. $a+b+c>d+e$(단, $a>b$)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 학력평가]

29 이차 함수 $f(x)=ax^2+b(a>0)$과 원 $x^2+y^2=4$의 교점이 원의 둘레를 삼등분할 때, $f(5)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2007년 5월 학력평가]

30 임의의 실수 x에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}$, $(x+1,\ x)$의 모든 성분의 합을 $f(x)$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?[3점]

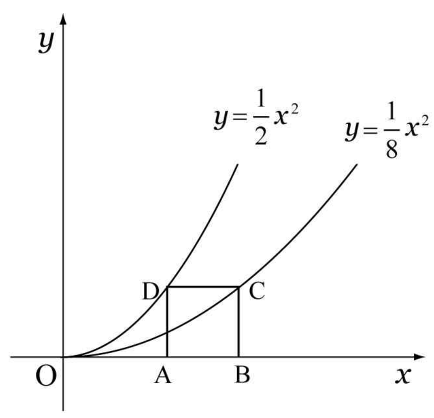
① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

31 [공통]이차 함수 $y=x^2-kx+3$의 최솟값이 -1일 때, k^2의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

32 $x\geq 0$인 범위에서 정의되는 두 이차 함수 $y=\frac{1}{2}x^2$과 $y=\frac{1}{8}x^2$의 그래프가 있다. 그림과 같이 점 $A(a, 0)$에서 y축에 평행한 선분을 그어 $y=\frac{1}{2}x^2$과 만나는 점을 D라 하고, $\overline{AD}$를 한 변으로 하는 정사각형 $ABCD$를 만들 때, 점 C가 $y=\frac{1}{8}x^2$ 위에 있다. a의 값은?[3점]



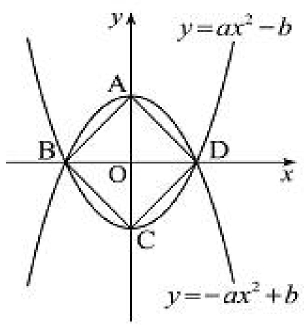
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

33 [공통]양수 a에 대하여 이차 함수 $y=x^2-ax$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, 꼭짓점은 C이다. $\triangle ABC$가 정삼각형을 이룰 때, a^2의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

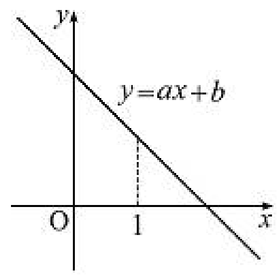
34 그림과 같이 두 이차 함수 $y=ax^2-b$, $y=-ax^2+b$의 그래프가 좌표축과 만나는 점을 A, B, C, D라 하자. 사각형 $ABCD$가 정사각형일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?(단, a, b는 양수이다.)[4점]

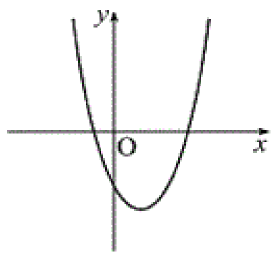


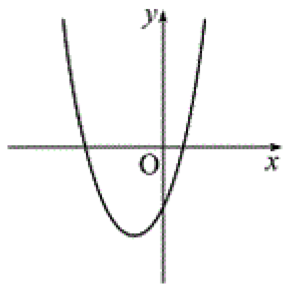
① $ab=1$ ② $a-b=0$ ③ $a+b=1$
④ $a+b=2$ ⑤ $a^2+b^2=2$

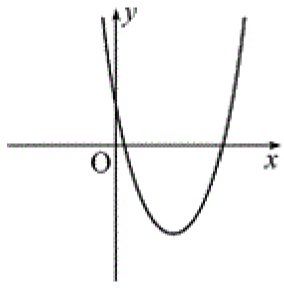
[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

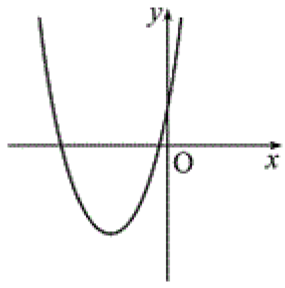
35 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 중 이차 함수 $y=x^2-(a+b)x+ab$의 그래프의 모양으로 옳은 것은?[4점]

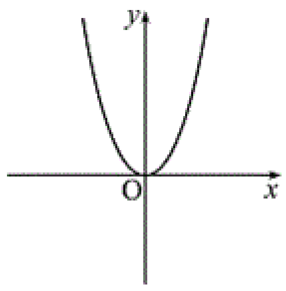


① 

② 

③ 

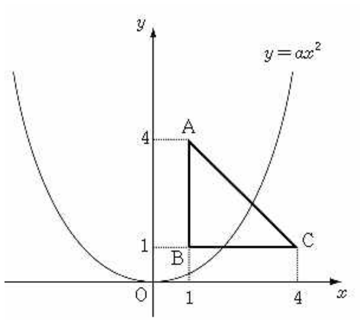
④ 

⑤ 

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

36 좌표평면에 $A(1,\ 4),\ B(1,\ 1),\ C(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다.

이차 함수 $y=ax^2$의 그래프와 삼각형 ABC의 교점의 개수를 $F(a)$라고 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

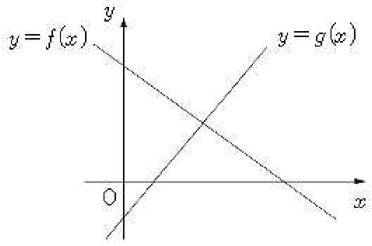


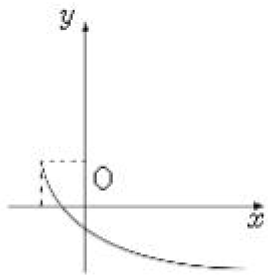
[보기]
ㄱ. $F(3)=2$
ㄴ. $a>4$이면 $F(a)=0$이다.
ㄷ. $\frac{1}{16}\le a\le 4$이면 $F(a)=2$이다.

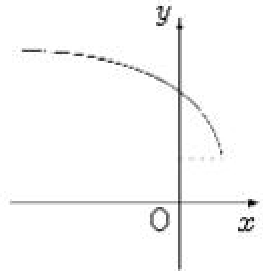
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

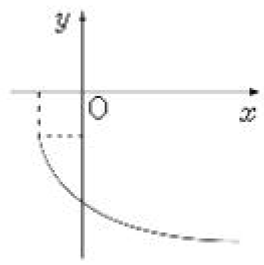
[난이도 : ★☆☆] [2006년 6월 학력평가]

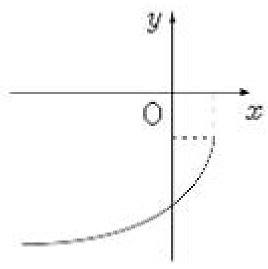
37 [공통]두 일차함수 $f(x)=ax+b,\ g(x)=cx+d$의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프의 개형은?[3점]

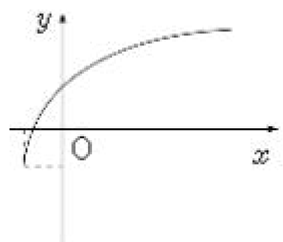


①


②


③


④


⑤


[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

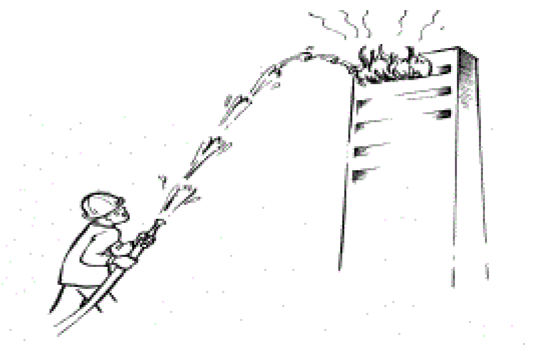
38 이차 함수 $y=-2x^2-8x+15$의 최댓값을 구하시오.[3 점]

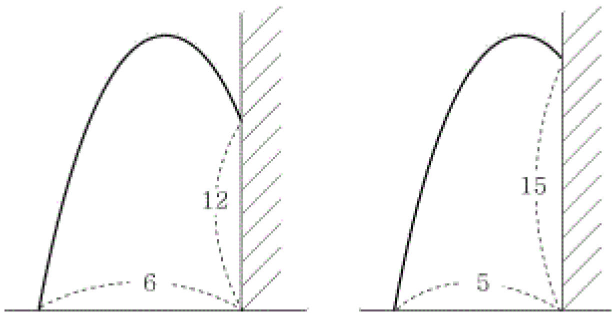
[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

39 화재 재난을 대비해 소방호스로 소방훈련을 하려고 한다.

똑같은 각도와 물의 세기로 물을 뿌리면 물줄기가 이차 함수의 곡선을 그리며 뿌려진다고 할 때, 그림과 같이 목표 건물의 $6m$ 앞에서 뿌리면 건물의 $12m$ 지점에 뿌려지고, 건물의 좀 더 높은 곳을 뿌리기 위해 $5m$ 앞에서 뿌리면 건물의 $15m$ 지점에 뿌려진다.

같은 각도와 물의 세기로 물을 뿌릴 때, 이 소방호스로 뿌릴 수 있는 최고의 높이는 몇 m 인지 구하시오.[3점]





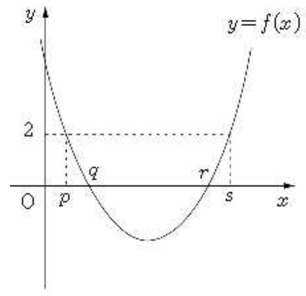
[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

40 이차 함수 $y=2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식이 $y=2x^2+ax+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?[3 점]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

41 [공통]이차 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]



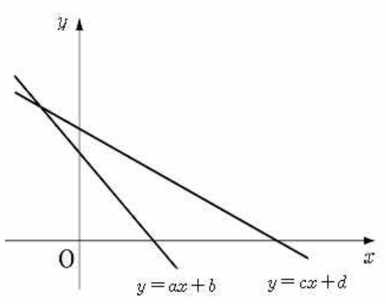
[보기]
ㄱ. 방정식 $f(-x)=0$ 의 근은 $x=-q$ 또는 $x=-r$ 이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-2=0$ 의 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다.
ㄷ. $p+s=q+r$ 이다.

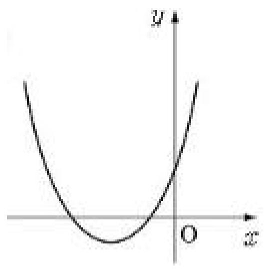
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

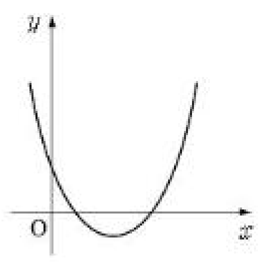
[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

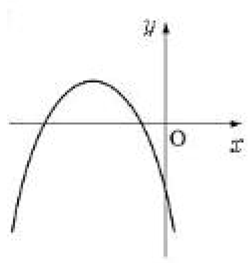
42 그림은 $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 그래프의 개형이다.

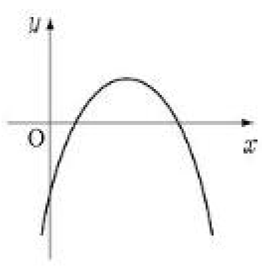
$y=(ax+b)(cx+d)$의 그래프의 개형은?[4점]

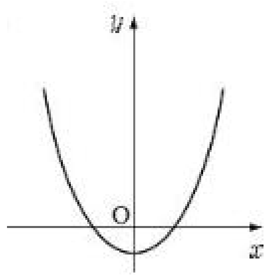


①


②


③


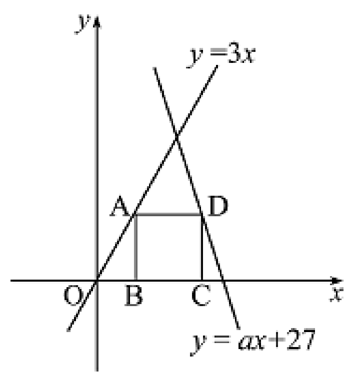
④


⑤


[난이도 : ★★★] [2006년 3월 학력평가]

43 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 $ABCD$가 있다.

일차함수 $y=3x$의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y=ax+27$의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a의 값은?(단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)[4 점]

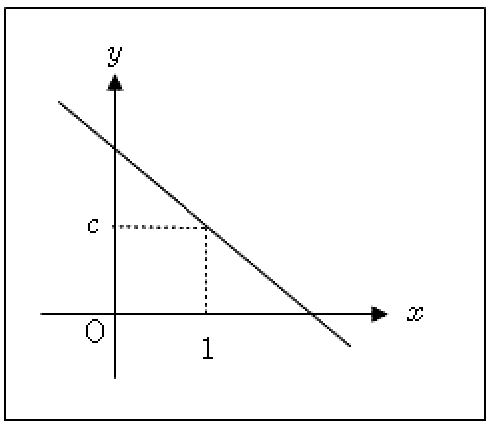


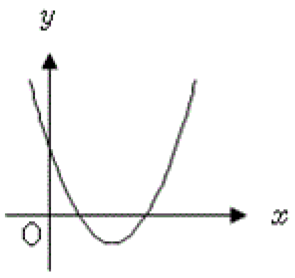
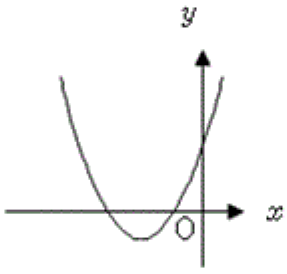
① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5

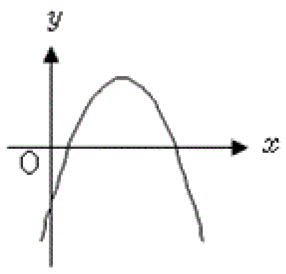
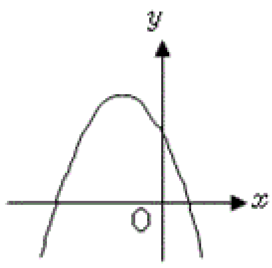
④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

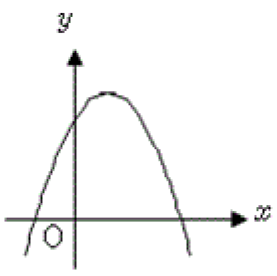
[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

44 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 그림과 같을 때, 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프로 적당한 것은?[3점]



① 
② 

③ 
④ 

⑤ 

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

45 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(a, 0)$과 $(b, 0)$을 지나고 $a+b=6$일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

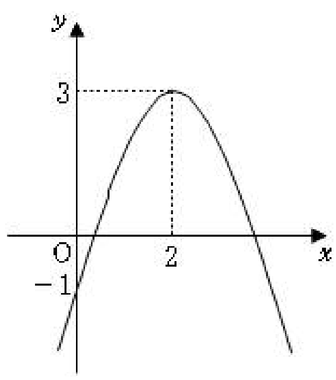
[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

46 [공통]방정식 $x^2-4x+k+1=0$의 한 실근을 m이라 할 때, $[m]=3$을 성립시키는 k의 범위가 $\alpha<k\le\beta$이다. α와 β의 곱은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)[4점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

47 그래프는 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$를 나타낸 것이다. 이때, abc의 값은?(단, a, b, c는 상수)[3점]



① -6 ② -4 ③ -1
④ 4 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

48 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 한 근을 반올림한 것이 3일 때, 정수 k값들의 합을 구하시오.[4점]

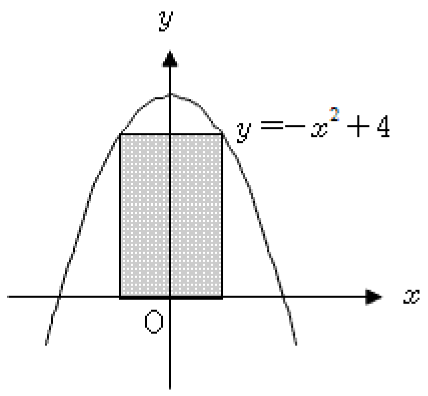
[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

49 이차 함수 $y=-a(x+p)^2-q$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?[3점]

① 꼭지점의 좌표는 $(p, -q)$이고, 대칭축의 방정식은 $x=p$이다.
② $-a$의 절대값이 클수록 그래프의 폭은 넓어진다.
③ $a<0$일 때, $x<-p$에서 x의 값이 커지면, y의 값도 커진다.
④ $y=a(x+p)^2+q$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
⑤ $y=-a(x+p)^2$의 그래프를 y축 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

50 그림과 같이 직사각형이 이차 함수 $y=-x^2+4$의 그래프와 x축에 내접할 때, 둘레의 길이가 최대인 직사각형의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

51 공을 지표면 위에서 수직으로 던져 올렸을 때, 이 공이 던져진 순간부터 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간을 t초, 공의 최고 높이를 hm라 하면 t와 h사이에는 $h=\frac{1}{2}gt^2$(단, g는 중력가속도)인 관계가 있다고 한다.

이때 공이 던져진 순간부터 다시 땅에 떨어질 때까지 걸린 시간 $2t$초를 이 공의 체공시간이라고 한다. 두 개의 공 A, B를 지표면 위에서 수직으로 던져 올렸을 때, 공 B의 체공시간은 공 A의 체공시간의 2배이었다.

공 A의 최고 높이가 $15m$이었을 때, 공 B의 최고 높이는 몇 m인지 구하시오.[3점]

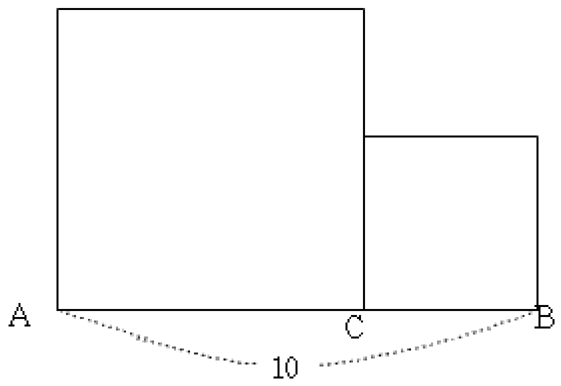
[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

52 이차 함수 $y=a(x+p)^2-q$의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?[4점]

① 꼭지점의 좌표는 $(p, -q)$이고, 대칭축의 방정식은 $x=p$이다.
② a의 절대값이 클수록 그래프의 폭은 넓어진다.
③ $a<0$일 때, $x>-p$에서 x의 값이 증가하면, y의 값도 증가한다.
④ $y=-a(x+p)^2+q$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.
⑤ $y=a(x+p)^2$의 그래프를 y축 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

53 그림과 같이 길이가 10인 선분 AB위에 점 C을 잡아 선분 AC와 선분 CB를 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2005년 6월 학력평가]

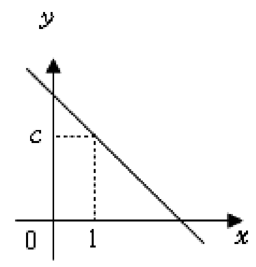
54 이차 함수 $y=x^2-2x-3$에 대한 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

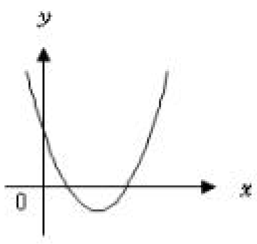
[보기]
ㄱ. 최솟값은 -4이다. ㄴ. 그래프를 평행이동하면 $y=x^2$의 그래프와 겹쳐진다. ㄷ. 원점을 O, 그래프의 꼭짓점을 A, y축과의 교점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는 4이다.

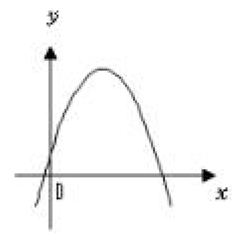
① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

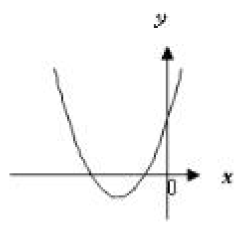
[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

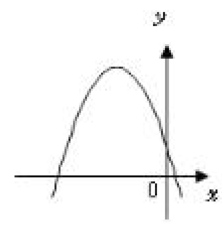
55 일차함수 $y=ax+b$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프로 적당한 것은?[4점]

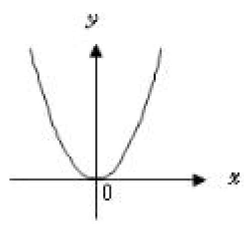


①


②


③


④


⑤


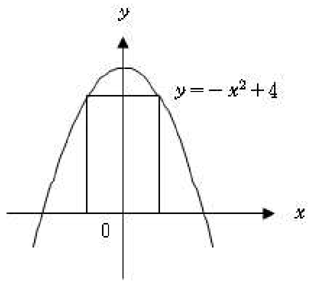
[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

56 [공통] $f(x)=|x-2|$ 일 때, $f(f(x))=\frac{1}{5}|x|$ 의 실근의 개수는?[4점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

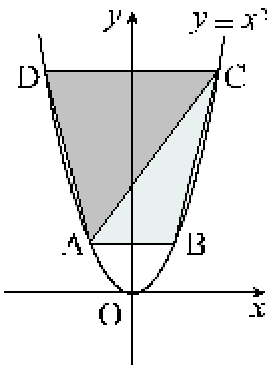
[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

57 아래 그림과 같이 이차 함수 $y=-x^2+4$의 그래프에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이가 최대일 때, 그 직사각형의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2004년 9월 학력평가]

58 그림과 같이 x축에 평행한 두 직선과 이차 함수 $y=x^2$의 그래프와의 교점을 각각 A, B, C, D라 하자.



$\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 넓이의 비가 $1:2$이고, 사다리꼴 $ABCD$의 대각선 AC의 길이가 $6\sqrt{5}$일 때, 사다리꼴의 높이를 구하시오.[4점]

3.이차방정식과 이차함수

중단원 기출문제

1) 답 : ①

[해설]

$f(x)=ax(x-1)$ (단, $a>0$)으로 놓으면

$y=f(x+1)-f(x)$

$=a(x+1)x-ax(x-1)=2ax$

이고, $a>0$이므로 적당한 것은 ① 이다.

[정답] ①

2) 답 : 8

[해설]

$x-y+4=0$으로부터 $y=x+4$이므로

$x^2+y^2=x^2+(x+4)^2=2x^2+8x+16=2(x+2)^2+8$

이 함수는 $x=-2$일 때, 최솟값 8을 가지므로

구하는 x^2+y^2의 최솟값은 8이다.

3) 답 : ③

[해설]

시장균형가격이 결정될 때는 A가 제 1사분면 위의 점이면 되므로

교점 A의 P, Q의 값을 구하면 $a-bP=-c+dP$에서 x좌표

즉, P의 값은 $(b+d)P=a+c$

$\therefore P=\dfrac{a+c}{b+d}>0$ (a, b, c, d는 양수이므로 항상 성립)

이때, y좌표 Q의 값은

$a-b\times\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{ab+ad-b(a+c)}{b+d}=\dfrac{ad-bc}{b+d}>0$

$b+d>0$이므로 $ad-bc>0$

4) 답 : ②

[해설]

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 $x=a$인 점에서 만난다고 하면

$f(a)=g(a)$이다.

이때 $h(a)=\dfrac{1}{3}f(a)+\dfrac{2}{3}g(a)=\dfrac{1}{3}f(a)+\dfrac{2}{3}f(a)=f(a)$이므로

$y=h(x)$의 그래프도 같은 교점을 지난다.

ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$f(-x)=f(x), g(-x)=g(x)$,

$\therefore h(-x)=\dfrac{1}{3}f(-x)+\dfrac{2}{3}g(-x)$

$=\dfrac{1}{3}f(x)+\dfrac{2}{3}g(x)=h(x)$

즉, $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다. ∴ 참

ㄷ. $f(x)=2x, g(x)=-x$로 놓으면 $y=f(x), y=g(x)$는 모두 일대일대응이다.

하지만, $h(x)=\dfrac{1}{3}f(x)+\dfrac{2}{3}g(x)=0$이므로

$y=h(x)$는 일대일대응이 아니다. ∴ 거짓

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

5) 답 : 9

[해설]

[출제 의도] 이차 함수의 최대, 최소 문제 해결하기

점 $P(a, b)$는 이차 함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-3a+2$이다.

$A(0, 2), B(1, 0), C(2, 0)$이므로 $0\le a\le 2$이다.

$a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3$

$=a^2-2a+5$

$=(a-1)^2+4$ ($0\le a\le 2$)

∴ $a=0$ 또는 $a=2$일 때, 최댓값은 5

$a=1$일 때, 최솟값은 4

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 9

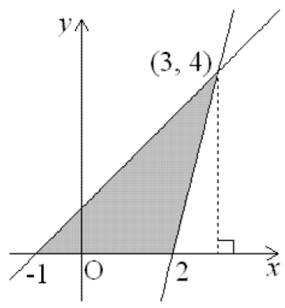
6) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]일차함수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$y=ax-8, y=x+b$의 교점이 $(3, 4)$이므로

$4=3a-8, 4=3+b$즉 $a=4, b=1$이다.



따라서 두 직선의 x절편은 2와 -1이므로 구하는

삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 3\times 4=6$이다.

7) 답 : 18

[해설]

[출제 의도]이차 함수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

꼭짓점의 좌표가 $(2, 5)$이므로

이차 함수의 식은 $y=a(x-2)^2+5$이고,

점 $(1, 4)$를 지나므로 $4=a+5$즉 $a=-1$이다.

따라서 $y=-(x-2)^2+5=-x^2+4x+1$이므로

$a^2+b^2+c^2=(-1)^2+4^2+1^2=18$이다.

8) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프와 직선의 두 교점 사이의 거리를 구할 수가 있는가를 묻는 문제이다.

이차 함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의

서로 다른 두 교점의 좌표를 $P(\alpha, 2\alpha+1), Q(\beta, 2\beta+1)$이라 하면

α, β는 이차방정식 $x^2-2(a+1)x-1=0$의 서로 다른 두 실근이다.

$\begin{cases}\alpha+\beta=2(a+1)\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+1-2\alpha-1)^2}=\sqrt{5(\beta-\alpha)^2}$

정답 및 해설

$$= \sqrt{20(\alpha+1)^2+20} \geq \sqrt{20}$$

$\therefore$ $n=-1$일 때, 최솟값은 $2\sqrt{5}$

9) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]일차함수를 활용하여 명제를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$0 < x \leq 4 : f(x) = \frac{1}{2} \times 2x \times 12 = 12x$

$4 < x < 10 : f(x) = \frac{1}{2} \times (20-2x) \times 8 = -8x+80$

ㄱ. 구간 따라 함수 $f(x)$가 달리 표현된다.(거짓)

ㄴ. $x=4$일 때 최댓값 48을 갖는다.(참)

ㄷ. $f(2)=f(7)=24$ (참)

그러므로 ㄴ, ㄷ이 참이다.

10) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$를 x축의 방향으로 -2, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면

$y+1=(x+2-1)^2-1$

$y=(x+1)^2-2 \cdots$①

① 과 직선 $y=mx$와의 교점의 x좌표는 $(x+1)^2-2=mx$의 근이다.

두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 $x^2+(2-m)x-1=0$의 두 근의 합이 0이다. 근과 계수의 관계에서

$-(2-m)=0$

$\therefore$ $m=2$

11) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]이차 함수와 이차방정식의 관계를 이해하기

이차 함수 $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면, 방정식 $f(2x-5)=a(2x-5-\alpha)(2x-5-\beta)=0$에서

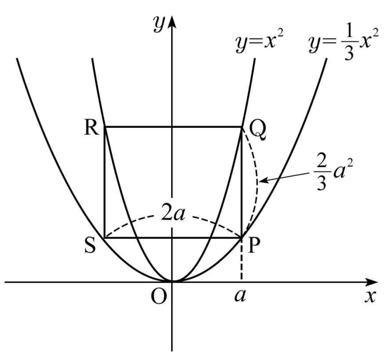
$x=\frac{\alpha+5}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{2}$이다.

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{\alpha+\beta+10}{2}=15$

12) 답 : 36

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프를 이해하고, 이차방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



두 이차 함수 $y=\frac{1}{3}x^2$, $y=x^2$에 $x=a$를 대입하면,

$P\left(a, \frac{1}{3}a^2\right)$, $Q(a, a^2)$이다.

$\therefore$ $\overline{PQ}=a^2-\frac{1}{3}a^2=\frac{2}{3}a^2$

두 이차 함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$S\left(-a, \frac{1}{3}a^2\right)$이다.

$\therefore$ $\overline{PS}=2a$

$\overline{PQ}=\overline{PS}$이므로 $\frac{2}{3}a^2=2a$

$a^2-3a=0$

$\therefore$ $a=3$ 또는 $a=0$

$a>0$이므로 $a=3$

따라서 정사각형 $PQRS$의 한 변의 길이는 $2a=6$ 이므로 정사각형의 넓이는 $6^2=36$이다.

13) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f(x)=a(x-3)^2+b$라 놓으면,

$y=f(x)$가 두 점 $(1-, 2)$, $(4, 17)$를 지나므로 대입하면

$16a+b=2 \ldots$①

$a+b=17 \ldots$②이다.

이때 ①과 ②을 연립하여 풀면 $a=-1, b=18$

그러므로 $f(x)=-(x-3)^2+18$은 $1 \leq x \leq 8$에서

$x=8$일 때, 이차 함수 $f(x)$는 최솟값 -7을 갖는다. (참)

ㄷ. $g(x)=f(x+3)=-x^2+18$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=g(x)$이다.

$\therefore$ $g(-x) \neq -g(x)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

14) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]제한된 범위에서 정의된 이차 함수의 성질을 추론할 수 있는가를

묻는 문제이다.

$f(-1)=a-b, f(0)=0, f(1)=a+b$

조건㈎에서

$f(-1)+f(1)=(a-b)+(a+b)=2a<0$이므로

$a<0 \cdots$ ①

조건 ㈏에서

$-2<a-b<0<a+b<2 \cdots$②

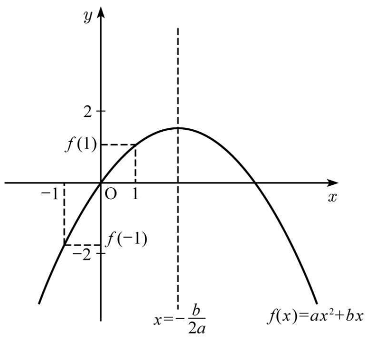
ㄱ. ②에서 $a-b<0$이고 $a+b>0$이므로

$(a+b)(a-b)<0$

$\therefore$ $a^2<b^2$ (참)

ㄴ. 그림과 같이 조건 ㈎를 만족시키는 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프는

위로 볼록한 포물선이므로 조건 ㈏를 만족시키기 위해서는



$y=f(x)$의 그래프의 대칭축 $x=-\dfrac{b}{2a}$가 직선 $x=1$보다

왼쪽에 있지 않다.

$\therefore\ -\dfrac{b}{2a}\geq 1$

그런데 ①에서 $a<0$이므로

양변에 $-2a$를 곱하면 $b\geq -2a$

$\therefore\ 2a+b\geq 0$(참)

ㄷ. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근의 합은 근과 계수의 관계에 의해 $-\dfrac{b}{a}$이다.

그런데 $-\dfrac{b}{2a}\geq 1$에서 $-\dfrac{b}{a}\geq 2$이므로

이차방정식 $f(x)=0$의 두 실근의 합은 2보다 크거나 같다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

15) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프와 계수의 부호 사이의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$는 아래로 볼록인 그래프이므로

$a>0$이다.(참)

ㄴ. 대칭축의 방정식이 $x=-\dfrac{b}{2a}(>0)$이므로 $b<0$이고

y절편이 양수이므로 $c>0$이다.

따라서 $bc<0$이다.(거짓)

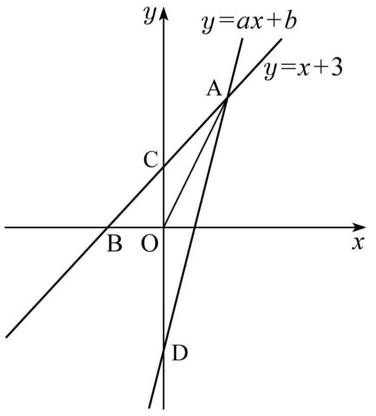
ㄷ. $x=-2$일 때 함숫값은 $4a-2b+c>0$이다.(참)

따라서 ㄱ, ㄷ이 참이다.

16) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]일차함수 그래프의 절편과 기울기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



$\triangle ABO=\triangle ACO+\triangle BOC=2\triangle BOC$이므로

$\triangle ACO=\triangle BOC$

$B(-3,\ 0)$, $C(0,\ 3)$이고 두 삼각형 ACO, BOC는 밑변 CO를 공유하고

넓이가 같으므로 점 A의 x의 좌표는 3이다.

$\therefore\ A(3,\ 6)$

또, $\triangle ACD=\triangle ACO+\triangle AOD=3\triangle ACO$

$\triangle AOD=2\triangle ACO$이므로 $\overline{OD}=2\overline{OC}$

$\therefore\ D(0,\ -6)$

직선 $y=ax+b$의 y절편이 -6이므로 $b=-6$

또 직선 $y=ax-6$이 점 $A(3,\ 6)$을 지나므로

$6=3a-6$이다.

$\therefore\ a=4$

$\therefore\ a=4,\ b=-6$

17) 답 : 39

[해설]

$f(x)=x^2-ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$이다.

$1\leq\alpha\leq 9,\ 1\leq\beta\leq 9$이므로 $2\leq\alpha+\beta\leq 18$에서

$2\leq a\leq 18$이다.

따라서 $a=5,\ 12$이다.

(ⅰ) $a=5$일 때, $f(x)=x^2-5x+b=0$의 두 근이 1이상 9이하이므로

$D=25-4b\geq 0,\ f(1)=-4+b\geq 0$,

$f(9)=36+b\geq 0$에서 $4\leq b\leq\dfrac{25}{4}$이다.

따라서 $b=6$이다.

$b=6$을 대입하면 $x^2-5x+6=0$에서 두 근이 $2,\ 3$이므로 성립한다.

(ⅱ) $a=12$일 때,

$f(x)=x^2-12x+b=0$의 두 근이 1이상 9이하이므로

$D=12^2-4b\geq 0,\ f(1)=-11+b\geq 0$,

$f(9)=-27+b\geq 0$에서 $27\leq b\leq 36$이다.

따라서 $b=27,\ 34$이다.

$a=12,\ b=27$이면 $x^2-12x+27=0$에서 두 근이 $3,\ 9$이므로 성립한다.

$a=12,\ b=34$이면 $x^2-12x+34=0$에서 두 근이 $6\pm\sqrt{2}$이므로 성립하지 않는다.

따라서 $(a,\ b)=(5,\ 6),\ (12,\ 27)$이다.

$\therefore\ a+b$의 최댓값은 39이다.

18) 답 : 36

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 최댓값을 이용하여 무리식의 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 식은

$(\sqrt{17-2x}+\sqrt{11-4y})^2$

$17-2x+11-4y+2\sqrt{17-2x}\sqrt{11-4y}$

이 식을 정리하면

$28-2(x+2y)+2\sqrt{(17-2x)(11-4y)}\cdots①$

$x+2y=5$에서 $2y=5-x$이므로 ①은

$18+2\sqrt{(17-2x)(1+2x)}$

$=18+2\sqrt{-4x^2+32x+17}$

$=18+2\sqrt{-4(x-4)^2+81}$ ⋯②

$-4(x-4)^2+81$ 은 $x=4$ 일 때, 최댓값 81 을 갖는다.

따라서 ②의 최댓값은 $18+2\sqrt{81}=36$ 이다.

[참고]

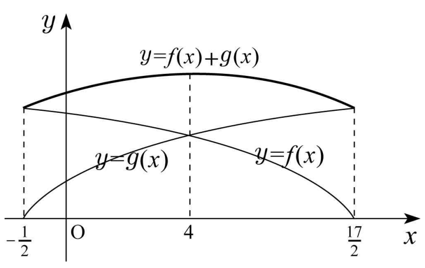
$x+2y=5$ 에서 $2y=5-x$ 이므로

$\sqrt{17-2x}+\sqrt{11-4y}=\sqrt{17-2x}+\sqrt{1+2x}$

$f(x)=\sqrt{17-2x}$, $g(x)=\sqrt{1+2x}$ 라 하자.

$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{17}{2}$ 에서 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는

다음과 같다.



$y=f(x)+g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이고 위로 볼록이므로 $y=f(x)+g(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값 $f(4)+g(4)=6$ 을 갖는다.

따라서 구하는 값은 $6^2=36$ 이다.

19) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프를 이해하고 일차함수의 그래프를 그릴 수 있는가를 묻는 문제이다.

이차 함수의 그래프의 y 절편이 음수이므로 $n<0$ 이다.

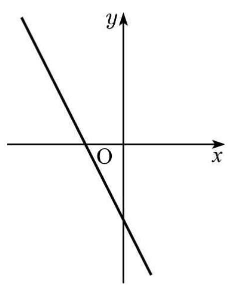
$y=x^2+mx+n=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2-4n}{4}$ 에서

꼭짓점의 x 좌표가 양수이므로

$-\frac{m}{2}>0$ 이다.

$\therefore\ m<0$

일차함수 $y=mx+n$ 에서 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로 그래프의 모양은 그림과 같다.



20) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]이차 함수와 이차부등식의 관계를 이해하기

이차 함수와 이차부등식의 관계에 의하여

주어진 그림으로부터 이차부등식 $f(x)\le 0$ 의 해는 $-1\le x\le 2$ 이다.

이때, $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\le 0$ 에서 $\frac{x+k}{2}=t$ 라 하면 $f(t)\le 0$ 이고,

이차부등식 $f(t)\le 0$ 의 해는 $-1\le t\le 2$ 이다.

그러므로 $-1\le\frac{x+k}{2}\le 2$

$\Leftrightarrow -2\le x+k\le 4$

$\Leftrightarrow -2-k\le x\le 4-k$ ⋯ ①이다.

또한, $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\le 0$ 의 해가 $-3\le x\le 3$ ⋯ ②

이라 하였으므로 ①의 식과 ②의 식은 같아야 한다.

따라서 $-2-k=-3 \Leftrightarrow 4-k=3$ 에서 $k=1$ 이다.

21) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 최대, 최소를 이해하여 문제 해결하기

주어진 조건 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=4$ 를 만족하는

점 P 는 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 위의 점이고 y 의

범위는 $0\le y\le 2$ 이다.

그러므로 $y-x^2=y-\{1-(y-1)^2\}$

$=y^2-y$

$=\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ (0\le y\le 2)$

에서 $y-x^2$ 은 $y=2$ 일 때, 최댓값 2 를 갖고

$y=\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

따라서 $y-x^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{7}{4}$ 이다.

22) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]주어진 조건을 만족하는 이차 함수의 식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x 축과 두 점 $(2,0)$, $(-4,0)$ 에서 만나므로 축의 방정식은

$x=\frac{2+(-4)}{2}=-1$

이고 최댓값은 18 이므로 이 이차 함수의 식은 다음과 같다.

$y=a(x+1)^2+18$ ⋯ ①

이 포물선이 $(2,0)$ 을 지나므로 ①에 대입하면

$0=a(2+1)^2+18$ ∴ $a=-2$

이것을 다시 ①에 대입하여 정리하면

$y=-2(x+1)^2+18=-2x^2-4x+16$

따라서 구하는 y 절편은 16 이다.

23) 답 : 5

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프의 성질 이해하기

축의 방정식이 $x=1$, 최댓값이 3 이므로

이차 함수의 꼭짓점의 좌표는 $(1,3)$ 이다.

따라서 $y=-2x^2+ax+b=-2(x-1)^2+3=-2x^2+4x+1$

$\therefore\ a=4,\ b=1$

24) 답 : 24

[해설]

[출제 의도] 이차 함수의 그래프와 직선이 접할 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(i) $y=x^2+ax+b$ 와 $y=-x+4$ 가 접할 때

$x^2+ax+b=-x+4$ 에서 $x^2+(a+1)x+b-4=0$

$D=(a+1)^2-4(b-4)=0$ ⋯⋯㉠

(ⅱ) $y=x^2+ax+b$와 $y=5x+7$이 접할 때,

$x^2+ax+b=5x+7$에서 $x^2+(a-5)x+b-7=0$

$D=(a-5)^2-4(b-7)=0$ ……㉡

㉠-㉡에서 $12a-36=0$ ∴ $a=3$

또, ㉠에서 $b=8$

∴ $ab=3\times8=24$

25) 답 : ⑤

[해설]

이차 함수의 최대, 최소

ㄱ. 이차 함수가 최댓값을 가지므로

위로 볼록한 그래프이고, 따라서 이차항의 계수 a는 음수이다. (참)

ㄴ. $y=a(x-1)^2+b$

이차 함수의 최댓값은 $x=1$일 때 b이다.

최댓값이 $3a$라고 하였으므로 $b=3a$이다.

∴ $b=3a$ (참)

ㄷ. $y=a(x-1)^2+b$의 그래프는 대칭축인 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.(참)

26) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프의 모양을 보고 $y=ax^2+bx+c$에서 a, b, c의 부호를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이고,

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $-\dfrac{b}{2a}<0$이다. 따라서 $b<0$ (거짓)

ㄴ. y절편이 양이므로 $c>0$이다. 따라서 $ab+c>0$ (참)

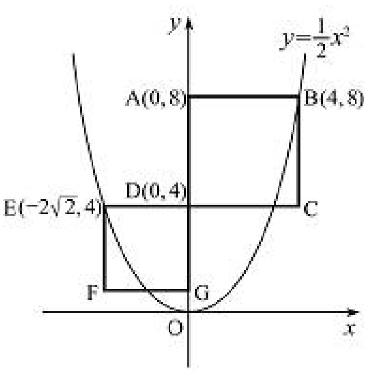
ㄷ. $x=-1$일 때 $y>0$이므로 $a-b+c>0$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

27) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프를 이해하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.



점 B의 y좌표가 8이므로

$\dfrac{1}{2}x^2=8$에서 $x=\pm4$ ∴ $B(4,8)$

따라서 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이는 4이다.

점 D의 y좌표는 $8-4=4$

또한 점 E의 y좌표도 4이므로

$\dfrac{1}{2}x^2=4$에서 $x=\pm2\sqrt{2}$ ∴ $E(-2\sqrt{2},4)$

따라서 정사각형 $DEFG$의 한 변의 길이는 $2\sqrt{2}$이다.

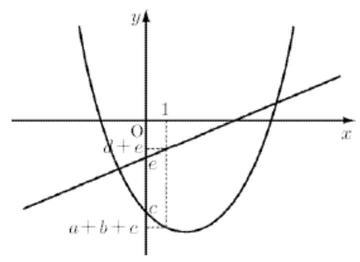
정사각형 $ABCD$의 넓이는 $4^2=16$이고,

정사각형 $DEFG$의 넓이는 $(2\sqrt{2})^2=8$이다.

그러므로 두 정사각형의 넓이의 합은 $16+8=24$

28) 답 : ③

[해설]



ㄱ. c는 이차 함수의 y절편, e는 일차함수의 y절편이고

그림에서 $c<e$이므로 $e-c>0$ (참)

ㄴ. 축의 방정식은 $x=-\dfrac{b}{2a}>1$이고 $a>0$이다.

$b<-2a<0$이므로 $|b|>|-2a|=2|a|>|a|$이다.(참)

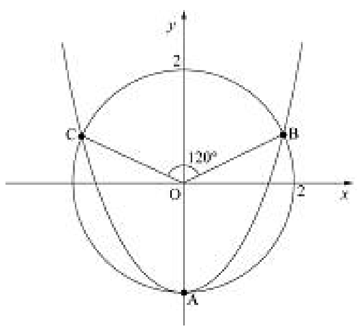
ㄷ. $x=1$일 때의 두 그래프의 y값을 비교해보면

$a+b+c<d+e$ (거짓)

29) 답 : 23

[해설]

[출제 의도]이차 함수와 원의 그래프 이해하기



이차 함수 $f(x)=ax^2+b$의 그래프와 원 $x^2+y^2=4$의 그래프가 세 점 $A(0,-2)$, $B(c,d)$, $C(-c,d)$ $(c>0)$에서 만날 때, 세 점 A, B, C가 원의 둘레를 삼등분한다.

원점 O에 대하여 $\angle AOB=120^\circ$이므로,

$c=\sqrt{3}d$ … ①

또 $B(c,d)$는 원 위의 점이므로 $c^2+d^2=4$ … ②

①, ②에 의하여 $c=\sqrt{3}$, $d=1$

한편 $f(x)=ax^2+b$는 점 $A(0,-2)$를 지나므로, $b=-2$이고, 점 $B(\sqrt{3},1)$은 포물선 위의 점이므로 $1=3a-2$, $a=1$이다.

∴ $f(x)=x^2-2$이므로 $f(5)=23$

30) 답 : ②

[해설]

$$\begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}(x+1x)=\left(\left(x(x+1),\ x^2\right),\ \begin{pmatrix} x-1 \\ x+1 \\ ft(x-1) \end{pmatrix}\right)$$

$f(x)=(x^2+x)+x^2+(x^2-1)+(x^2-x)$

$=4x^2-1$

x는 임의의 실수이므로 $x^2\geq0$이다.

∴ $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

31) 답 : 16

[해설]

$y=x^2-kx+3=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+3-\frac{k^2}{4}$ 이므로

최솟값은 $3-\frac{k^2}{4}=-1$

$\therefore\ k^2=16$

32) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]이차 함수에서의 수학 내적문제 해결하기

$A(a,\ 0),\ D\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right),\ B(b,\ 0)$ (단, $b>a>0$)이라 하면

$C\left(b,\ \frac{1}{8}b^2\right)$

사각형 $ABCD$는 정사각형이므로 $\overline{AD}=\overline{BC}$

$\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{8}b^2,\ b=2a\ (\because\ a>0,\ b>0)\cdots$ ①

$\overline{AD}=\overline{AB}$에서 $\frac{1}{2}a^2=b-a\cdots$ ②

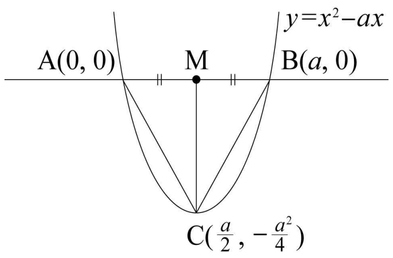
①, ②에서 $\frac{1}{2}a^2=2a-a=a$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

33) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프 이해하기



이차 함수 $y=x^2-ax$가 x축과 만나는 두 점 $A,\ B$의 좌표는

$A(0,\ 0),\ B(a,\ 0)$이고, 꼭짓점 C의 좌표는 $C\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}\right)$이다.

선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\triangle AMC$에서

$$\tan 60^\circ=\frac{\overline{MC}}{\overline{AM}}=\frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}=\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$\therefore\ a=2\sqrt{3}$

따라서, $a^2=12$

34) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사각형 $ABCD$가 정사각형이므로 $\overline{OA}=\overline{OD}$이다.

점 A의 좌표는 $(0,\ b)$이므로 $\overline{OA}=b$

$y=ax^2-b$에 $y=0$을 대입하면

$ax^2-b=0$에서 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이므로 점 D의 좌표는 $\left(\sqrt{\frac{b}{a}},\ 0\right)$

따라서 $\overline{OD}=\sqrt{\frac{b}{a}}$

$\overline{OA}=\overline{OD}$에서 $b=\sqrt{\frac{b}{a}}$

양변을 제곱하면 $b^2=\frac{b}{a},\ ab^2-b=0$

$b(ab-1)=0$

$b\neq 0$이므로 $ab=1$

35) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]주어진 조건을 이용하여 이차 함수의 그래프의 모양을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

일차함수 $y=ax+b$의 그래프에서

기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로 $a<0$, $b>0$이다.

$\therefore\ ab<0\ .\ .\ .$ ①

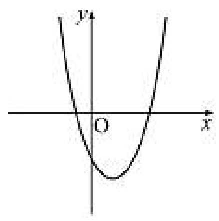
그래프에서 $x=1$일 때의 y의 값이 양수이므로

$a+b>0\ .\ .\ .$ ②

한편 이차 함수 $y=x^2-(a+b)x+ab$의 그래프에서

축의 식은 $x=\frac{a+b}{2}$이고, y절편은 ab이다.

따라서 ①, ② 에 의해 그래프의 모양은 다음과 같다.



[다른 풀이]

$y=ax+b$의 그래프에서 기울기는 음수이고 y절편은 양수이므로

$a<0,\ b>0$

또, $f(x)=ax+b$라 할 때, $f(1)=a+b>0$이므로

(a의 절대값) < (b의 절대값)이다.

$y=x^2-(a+b)x+ab$

$y=(x-a)(x-b)$이므로

$y=x^2-(a+b)x+ab$의 그래프는 아래로 볼록하고

x축 위의 두 점 $(a,\ 0),\ (b,\ 0)$을 지나는 포물선이다.

이때 $a<0,\ b>0$이고(a의 절대값) < (b의 절대값)이므로

그래프의 모양은 ① 과 같다.

36) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]이차 함수 이해하기

ㄱ. $a=3$일 때, $y=3x^2$과 $\triangle ABC$의 교점의 개수는 2개이므로 $F(3)=2$ ∴ 참

ㄴ. $a>4$이면 $y=ax^2$과 $\triangle ABC$의 교점은 없으므로 $F(a)=0$ ∴ 참

ㄷ. $a=\frac{1}{16}$ 또는 $a=4$이면 $y=ax^2$과

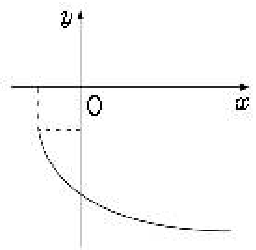
$\triangle ABC$의 교점의 개수는 1개이므로 $F(a)=1$ ∴ 거짓

37) 답 : ③

[해설]

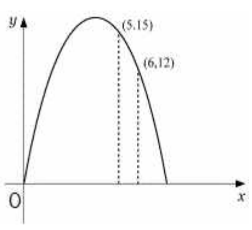
[출제 의도]무리함수의 그래프 이해하기

$f(x)=ax+b$에서 $a<0,\ b>0$
$g(x)=cx+d$에서 $c>0,\ d<0$
따라서 무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프 개형은 아래의 그림과 같다.



38) 답 : 23
[해설]
[출제 의도]이차 함수의 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$y=-2x^2-8x+15$
$=-2(x^2+4x)+15$
$=-2(x+2)^2+23$
따라서 최댓값은 23이다.

39) 답 : 16
[해설]
[출제 의도]이차 함수를 이용한 실생활 문제 해결하기



물줄기에 대한 이차 함수를 $y=ax^2+bx+c$라 하면
이 함수는 세 점 $(0,0),\ (6,12),\ (5,15)$를 지나므로
$a=-1,\ b=8,\ c=0$이다.
따라서 $y=-x^2+8x$
$=-(x-4)^2+16$
$\therefore$ 최대 높이는 16

40) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]이차 함수의 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
이차 함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼,
y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것은
이차 함수 $y=2(x-2)^2+3$의 그래프이다.
$y=2(x-2)^2+3$
$=2x^2-8x+11$
따라서 $a=-8,\ b=11$이다.
$\therefore\ a+b=3$
[오답풀이]
이차 함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로
3만큼 평행이동한 것은 이차 함수 $y=2(x+2)^2+3$의 그래프라고 잘못 생각할 수 있다.

41) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]이차 함수의 성질 이해하기
ㄱ. $x=-q$일 때, $f(q)=0$
$x=-r$일 때, $f(r)=0$이므로
$f(-x)=0$의 근은 $x=-q$또는 $x=-r$ $\therefore$ 참
ㄴ. $f(x)-2=0$의 두 근은 $p,\ s$이다.
$p+s=q+r$이므로
두 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$ $\therefore$ 참
ㄷ. 대칭축을 이용하면 $\dfrac{p+s}{2}=\dfrac{q+r}{2}$
$p+s=q+r$ $\therefore$ 참

42) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]일차함수의 그래프 개형을 해석하여 이차 함수의 그래프 개형 그리기
$y=ax+b$에서 $a<0,\ b>0$
$y=cx+d$에서 $c<0,\ d>0$
따라서 $y=(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$
$ac>0,\ ad+bc<0,\ bd>0$이다.
또한, $y=ax+b$와 $y=cx+d$의 x절편과
$y=(ax+b)(cx+d)$의 x절편이 일치하는 그래프이다.

43) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]일차함수의 그래프를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
$\overline{AB}=3$이므로
점 A의 y좌표는 3이고, 점 A는 일차함수 $y=3x$의
그래프 위의 점이므로 x좌표가 1이다.
점 A와 x좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,0)$이고, $\overline{BC}=3$이므로
점 C의 좌표는 $(4,0)$이다.

점 C와 x좌표가 같고, 점 A와 y좌표가 같은 점 D의 좌표는 $(4,3)$이다.
점 D가 일차함수 $y=ax+27$위의 점이므로
$x=4,\ y=3$을 대입하면 $3=a\times4+27$
$\therefore\ a=-6$

44) 답 : ⑤
[해설]
【출제 의도】일차함수와 이차 함수 그래프 이해하기
일차함수의 그래프에서 $a<0$, $b>0$, $c>0$이므로
*
이차 함수 $y=ax^2+bx+c$는 위로 볼록하고 대칭축 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$이고 y절편이 양이다.

45) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]이차 함수와 이차방정식의 관계 이해하기
$y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(a,0),\ (b,0)$를 지나므로

$f(x)=k(x-a)(x-b)=0$이 성립한다.

이때 $f(2x-3)=k(2x-3-a)(2x-3-b)=0$에서

두 근은 $x=\dfrac{a+3}{2}$, $x=\dfrac{b+3}{2}$이다.

따라서 두 근의 합은 $\dfrac{a+b+6}{2}=\dfrac{12}{2}=6$

[정답]③

46) 답 : ②

[해설]

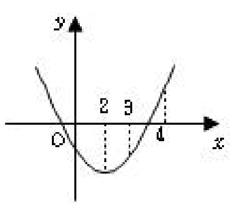
[출제 의도]이차 함수와 이차방정식의 관계를 이해하고 문제를 해결하기

$[m]=3$이면 $3 \le m < 4$이다.

이때 $f(x)=x^2-4x+k+1$이라 하면

$f(x)$는 $3 \le x < 4$범위에서 하나의 실근을 가져야 하므로

다음 그림에서와 같이



$f(3)=9-12+k+1 \le 0$에서 $k \le 2 \cdots$①

$f(4)=16-16+k+1>0$에서 $k>-1 \cdots$②이어야 한다.

$\therefore$ ①, ②의 공통범위는 $-1<k \le 2 \cdots$③

한편, 방정식 $x^2-4x+k+1=0$이 실근을 가져야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-(k+1) \ge 0$에서 $k \le 3 \cdots$④

따라서 ③과 ④의 공통범위를 구하면 $-1<k \le 2$

$\therefore$ $\alpha=-1, \beta=2$이므로 $\alpha\beta=-2$

[정답]②

47) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프의 성질 이해하기

그래프에서 꼭짓점의 좌표가 $(2, 3)$이므로,

이차 함수는 $y=a(x-2)^2+3$이다.

여기에 $(0, -1)$을 대입하면 $-1=4a+3$

$\therefore$ $a=-1$이다.

그러므로 이차 함수는 $y=-(x-2)^2+3=-x^2+4x-1$

따라서, $a=-1, b=4, c=-1$이므로 $abc=4$이다.

[정답]④

48) 답 : 5

[해설]

【출제 의도】이차방정식의 근 이해하기

이차방정식 $x^2-4x+k=0$에서 근은

$x=2\pm\sqrt{4-k}$이다.

이 근 중 반올림 하여 3이 될 수 있는 근은 $2+\sqrt{4-k}$이다.

따라서 $\dfrac{5}{2} \le 2+\sqrt{4-k} < \dfrac{7}{2}$

$\dfrac{7}{4}<k \le \dfrac{15}{4}$

만족하는 정수 $k=2, 3$

$\therefore$ $2+3=5$

(별해) $f(x)=x^2-4x+k$라 할 때,

$f\left(\dfrac{5}{2}\right) \le 0$, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)>0$이므로 만족하는 k의 범위는 $\dfrac{7}{4}<k \le \dfrac{15}{4}$

49) 답 : ④

[해설]

① 꼭짓점 $(-p, -q)$, 대칭축의 방정식은 $x=-p$이다.

② 이차계수의 절대값이 클수록 그래프의 폭은 좁아진다.

③ $a<0$일 때,

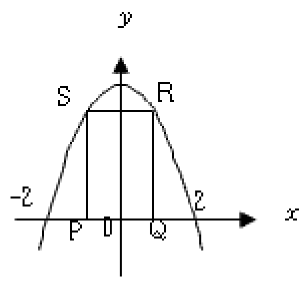
아래로 볼록하므로 $x<-p$에서는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

⑤ $y=-a(x+p)^2$을 y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동한 것이다.

50) 답 : 6

[해설]

【출제 의도】이차 함수의 최댓값 구하기



그림과 같이 내접하는 사각형 PQRS에서 Q의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

R의 좌표는 $(a, -a^2+4)$이다.$(0<a<2)$

따라서, 직사각형의 둘레는

$2\overline{QR}+2\overline{PQ}=-2a^2+8+4a$

$-2a^2+4a+8$

$-2(a-1)^2+10$

$\therefore$ $a=1$일 때, 둘레의 길이가 최대이므로

그 때, 직사각형의 넓이는

$\overline{PQ}\times\overline{QR}=2\times3=6$

51) 답 : 60

[해설]

[출제 의도]이차방정식을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 공 A, B가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간을 각각 t_1, t_2라 하면

A, B의 체공시간은 각각 $2t_1, 2t_2$이다.

B의 최고 높이를 x라 하면 주어진 조건에 의해

$15=\dfrac{1}{2}gt_1 \cdots$ ①

$x=\dfrac{1}{2}gt_2 \cdots$ ②

① 에서 $t_1=\sqrt{\dfrac{30}{g}}$이고 $2t_2=4t_1$에서 $t_2=2t_1=2\sqrt{\dfrac{30}{g}}$이므로

이를 ②에 대입하면 $\dfrac{1}{2}g\left(\sqrt{\dfrac{30}{g}}\right)^2$

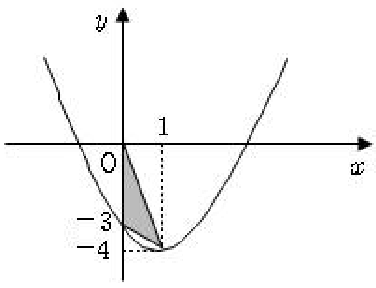
$=\dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{120}{g}\right)=60$

52) 답 : ④

[해설]

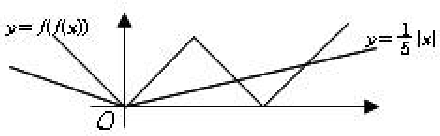
【출제 의도】이차 함수의 그래프 이해하기
① 꼭짓점 $(-p, -q)$, 대칭축의 방정식은 $x=-p$이다.
② a의 절대값이 클수록 그래프의 폭은 좁아진다.
③ $a<0$일 때, 위로 볼록하므로 $x>-p$에서는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
⑤ $y=a(x+p)^2$을 y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동한 것이다.

53) 답 : 5
[해설]
【출제 의도】이차 함수 문제 해결하기
$\overline{AC}=x$라 두면, $\overline{BC}=10-x$이고,
$0<x<10$이다. 두 정사각형의 넓이의 합 S는
$S=x^2+(10-x)^2=2x^2-20x+100=2(x-5)^2+50$
그러므로 $x=5$일 때 S의 최솟값은 50이다.

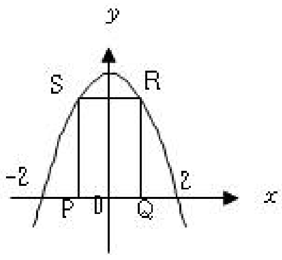
54) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]이차 함수의 그래프 이해하기


ㄱ. $y=(x^2-2x+1)-4$
$y=(x-1)^2-4$이므로 최솟값 -4
ㄴ. 두 이차 함수의 이차항의 계수가 같으므로 두 그래프는 평행이동하면 겹쳐진다.
ㄷ. 그림에서 삼각형의 넓이는 $\frac{3}{2}$

55) 답 : ②
[해설]
$a<0, b>0$이므로 위로 볼록하고
대칭축 $x=-\frac{b}{2a}>0$
그래프에서 $x=1$일 때, $c>0$
따라서, y절편이 양이므로 그래프는 ②이다.

56) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]함수의 합성을 이해하고 활용하기
$f(f(x))=||x-2|-2|-2\}$와 $y=\frac{1}{5}|x|$의 그래프를 그려보면
아래 그림과 같고 두 함수는 3개의 교점을 가지므로 실근은 3개이다.


[정답]②

57) 답 : 6
[해설]


그림과 같이 내접하는 사각형 $PQRS$에서 Q의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면
R의 좌표는 $(a, -a^2+4)$이다. $(0<a<2)$
따라서, 직사각형의 둘레는
$2\overline{QR}+2\overline{PQ}=-2a^2+8+4a$
$=-2a^2+4a+8$
$=-2(a-1)^2+10$
$\therefore$ $a=1$일 때, 둘레의 길이가 최대이므로
그 때, 직사각형의 넓이는
$\overline{PQ}\times\overline{QR}=2\times3=6$

58) 답 : 12
[해설]
[출제 의도]이차 함수의 성질을 이용하여 방정식의 근을 구할 수 있다.
$\triangle ABC$와 $\triangle ACD$의 넓이의 비가 $1:2$
두 밑변의 비 $\overline{AB}:\overline{CD}=1:2$
$A(-a, a^2)(a>0)$라 하면, $C(2a, 4a^2)$이고
$\overline{AC}=\sqrt{(3a)^2+(3a^2)^2}=6\sqrt{5}$
양변을 제곱하여 정리하면, $a^4+a^2-20=0$
$(a^2+5)(a^2-4)=0$
$\therefore$ $a=2$
따라서, $B(2, 4)$, $C(4, 16)$이므로
사다리꼴 $ABCD$의 높이는 12이다.