Ⅱ.평면벡터

1.벡터와 그 연산

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2017 학년도 대수능]

1 두 벡터 $\vec{a}=(1,3)$, $\vec{b}=(5,-6)$에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

2 [이과]좌표평면 위에 원점 O를 시점으로 하는 서로 다른 임의의 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$가 있다. 두 벡터의 종점 P, Q를 x축 방향으로 3만큼, y축 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점을 각각 P', Q'이라 할 때, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}\right|=\sqrt{10}$
ㄴ. $\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\right|=\left|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}\right|$
ㄷ. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

3 좌표 공간에 두 점 $A(3,1,1)$, $B(1,-3,-1)$이 있다. 평면 $x-y+z=0$에 있는 점 P에 대하여 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$의 최솟값은?[4점]

① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{5\sqrt{3}}{3}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

4 공간벡터 $\overrightarrow{OP}=(1,-1,1)$를 xy평면, yz평면, zx평면 에 정사영시켜 얻은 벡터를 각각 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$라고 하자. $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$일 때, 세 실수 a,b,c의 합 $a+b+c$는?

① 1　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

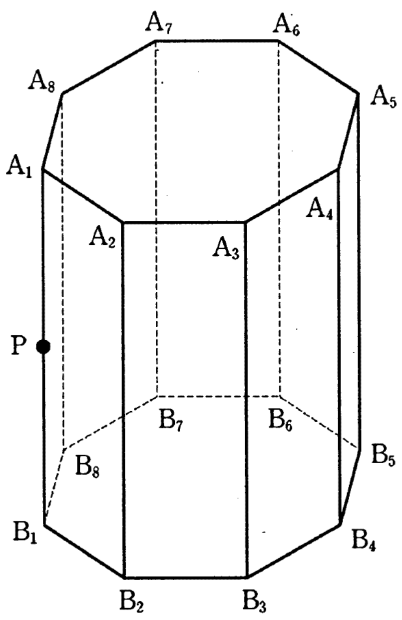
[난이도 : ★☆☆] [2016년 6월 모의평가]

5 벡터 $\vec{a}=(3,-1)$에 대하여 벡터 $5\vec{a}$의 모든 성분의 합은?[2점]

① -10　② -5　③ 0　④ 5　⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

6 다음 그림은 밑면이 정팔각형인 팔각기둥이다.

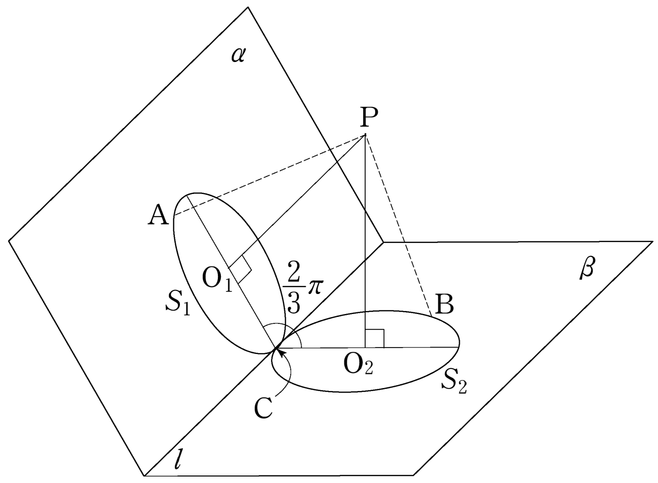


$\overline{A_1A_3}=3\sqrt{2}$ 이고, 점 P가 모서리 A_1B_1의 중점일 때, 벡터 $\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_1}\right)$의 크기를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

7 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α위에 있는 원 S_1과 평면 β위에 있는 원 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자.

$\angle O_1CO_2=\frac{2}{3}$일 때, S_1위에 있는 임의의 점 A와 S_2위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2016년 7월 학력평가]

8 두 벡터 $\vec{a}=(-1, 2)$, $\vec{b}=(3, 1)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은?[2점]

① $\sqrt{10}$　② $\sqrt{11}$　③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{14}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

9 두 벡터 $\vec{a}=(2, 3)$과 $\vec{b}=(1, 1)$에 대하여 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

10 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$, $\vec{c}=(-4,\ y)$에 대하여 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$가 성립할 때, 두 실수 $x,\ y$의 곱을 구하시오.[3점]

정답 및 해설

1.벡터와 그 연산

중단원 기출문제

1) 답 : ⑤

[해설]

$\vec{a}-\vec{b}=(1,3)-(5,-6)=(-4,9)$

따라서 모든 성분의 합은 $-4+9=5$

2) 답 : ③

[해설]

벡터 $\overrightarrow{OP}=(a,b)$, $\overrightarrow{OQ}=(c,d)$라 하면

$\overrightarrow{OP'}=(a+3,b+1)$, $\overrightarrow{OQ'}=(c+3,d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}=(a,b)-(a+3,b+1)=(-3,-1)$이므로

$\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄴ.

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=(a+3,b+1)-(c+3,d+1)$

$(a-c,b-d)$

이므로 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}$

$\therefore\ \left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\right|=\left|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}\right|$ (참)

ㄷ.(반례)

$\overrightarrow{OP}=(1,1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,2)$일 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1\cdot1+1\cdot2=3$이다.

그런데, $\overrightarrow{OP'}=(4,2)$, $\overrightarrow{OQ'}=(4,5)$이므로

$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}=4\cdot4+2\cdot5=26$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\neq\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

3) 답 : ③

[해설]

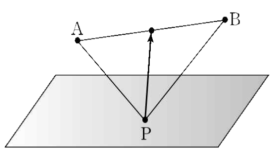
벡터 $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$는 두 점 $A(3,1,1)$, $B(1,-3,-1)$의 중점을 나타내는 위치벡터이므로

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)=\frac{1}{2}(3,1,1)+(1,-3,-1=(2,-1,0)$

$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$의 최솟값은 선분 AB의 중점에서 평면까지의 거리 d 이므로

$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|$의 최솟값 m은

$m=2d=\frac{2|2+1+0|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$



4) 답 : ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OA}=(1,-1,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$, $\overrightarrow{OC}=(1,0,1)$이므로

$\overrightarrow{OP}=a(1,-1,0)+b(0,-1,1)+c(1,0,1)=(1,-1,1)$

$\therefore\ (a+c,-a-b,b+c)=(1,-1,1)$

$a+c=1\ldots$①

$-a-b=-1\rightarrow a+c=1\ldots$②

$b+c=1\ldots$③

① + ② + ③ 을 하면 $2(a+b+c)=3$

$\therefore\ a+b+c=\frac{3}{2}$

5) 답 : ⑤

[해설]

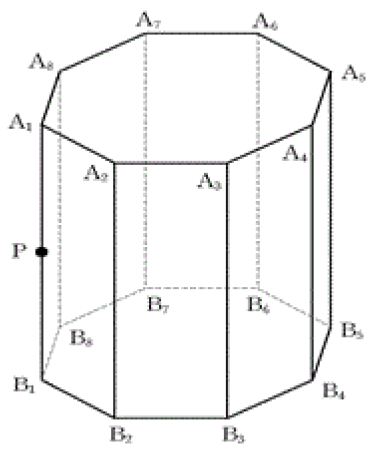
$\vec{a}=(3,-1)$에 대하여 $k\vec{a}=(3k,-1k)$

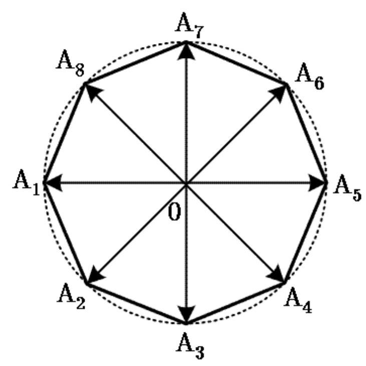
따라서 $5\vec{a}=(15,-5)$이므로 $5\vec{a}$의 모든 성분의 합은

$15+(-5)=10$ 이다.

6) 답 : 48

[해설]





정팔각형의 성질을 이용하여 대각선의 교점을 O라면

삼각형 OA_1A_3는 직각삼각형이 되고 $\overline{A_1O}=3$이다.

$\overline{A_iB_i}$의 중점을 P_i라하면 $\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=2\overrightarrow{PP_i}$이다.

$\therefore\ \sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}\right)=2\sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{P_1P_i}$

$2\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{OP_i}-\overrightarrow{OP_1}\right)\left(\because\ \sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{OP_i}=\vec{0}\right)$

$=-2\left(8\overrightarrow{OP_1}\right)=-2\left(8\overrightarrow{OA_1}\right)=-16\overrightarrow{OA_1}$

따라서 크기는 $\left|-16\overrightarrow{OA_1}\right|=48$이다.

다른 풀이

$\overrightarrow{PA_i}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{A_1A_i}$,

$\overrightarrow{PB_i}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1B_i}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{A_1A_i}$이므로

$\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+2\overrightarrow{A_1A_i}=2\overrightarrow{A_1A_i}\ \left(\because\ \overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}=\vec{0}\right)$

따라서

$\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}\right)=\sum_{i=1}^{8}\left(2\overrightarrow{A_1A_i}\right)$

$=2\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_8}\right)$

정팔각형의 외접원의 중심을 O, 반지름을 R이라 하면 $\overline{A_1A_3}=3\sqrt{2}=R\sqrt{2}$, $\overrightarrow{A_1A_i}=\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_1}$,

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_8}=\vec{0}$이므로

$\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}\right)$

$=2\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_8}\right)$

$=2\left\{\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_1}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{OA_8}-\overrightarrow{OA_1}\right)\right\}$

$=2\left(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{OA_8}-7\overrightarrow{OA_1}\right)$

$=2\left(-8\overrightarrow{OA_1}\right)=-16\overrightarrow{OA_1}$

따라서 $\left|\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}\right)\right|=16R=48$

7) 답 : 12

[해설]

두 직각삼각형 PCO_1, PCO_2는 합동이므로 $\angle PCO_1=\angle PCO_2=60^\circ$ 이다.

따라서 두 원 위의 임의의 두 점 A, B에 대하여 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=4$ 이다.

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=32+2|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|\cos\theta=32+32\cos\theta$

$\therefore\ |\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=4\sqrt{2+2\cos\theta}$

이때, $\cos\theta$의 값은 두 점 A, B가 점 C와 일치할 때 $\cos\theta=\cos 0=1$로 최대이고,

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $M=8$이다.

또, $\cos\theta$의 값은 두 점 A, B가 각각 두 반직선 CO_1, CO_2와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때,

$\cos\theta=\cos(\angle APB)=\cos(\angle APC+\angle BPC)$

$\cos(2\cdot\angle CPO_1+\angle CPO_2)=$

$\cos(4\cdot\angle CPO_1)=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$ 로

최소이고,

$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 의 최솟값은 $m=4$이다.

$\therefore\ M+m=12$

(다른 풀이)

두 점 A, B가 점 C와 모두 일치할 때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 는 최대이고 $\overline{PC}=4$이므로 최댓값은 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}|=|2\overrightarrow{PC}|=8$이다.

또, 두 점 A, B가 각각 두 반직선 $\overrightarrow{CO_1}$, $\overrightarrow{CO_2}$와 두 원 S_1, S_2와 점 C가 아닌 점에서 만나는 점일 때 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 는 최소이다. 이때, 이 두 교점을 각각 M, N이라 하면 $\overline{PM}=\overline{PN}=4$이고

$\angle MPN=\frac{2}{3}\pi$이므로 평행사변형법에 의해 최솟값은

$2\times4\times\cos\frac{1}{3}\pi=4$이다. [정답] 12

8) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 벡터의 크기 계산하기

$\vec{a}+\vec{b}=(2,3)$이므로 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

9) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 벡터의 성질을 이해하여 크기를 구한다.

$\vec{a}+\vec{b}\ =(2,3)+(1,1)\ =(3,4)$

$|\vec{a}+\vec{b}|\ =\sqrt{3^2+4^2}\ =5$

10) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]벡터의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2\vec{a}-2\vec{b}=\vec{c}$이므로 $(4-2x,8)=(-4,y)$

따라서 $x=4$, $y=8$이므로 $xy=32$