

I.평면곡선

2.평면 곡선의 접선

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 곡선  $2x + x^2y - y^3 = 2$  위의 점  $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

2 좌표평면에서 포물선  $y^2 = 8x$ 에 접하는 두 직선  $l_1, l_2$ 의 기울기가 각각  $m_1, m_2$ 이다.  $m_1, m_2$ 가 방정식  $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 근일 때,  $l_1$ 과  $l_2$ 의 교점의  $x$ 좌표는? [3점]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3
- ④ 4                      ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

3 쌍곡선  $x^2 - 4y^2 = a$  위의 점  $(b, 1)$ 에서의 접선이 쌍곡선의 한 점근선과 수직이다.

$a+b$ 의 값은?(단,  $a, b$ 는 양수이다.)[3점][2013학년도 수능]

- ① 68                      ② 77                      ③ 86
- ④ 95                      ⑤ 104

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

4 포물선  $y^2 = nx$ 의 초점과 포물선 위의 점  $(n, n)$ 에서의 접선 사이의 거리를  $d$ 라 하자.  $d^2 \geq 40$ 을 만족시키는 자연수  $n$ 의 최솟값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

5 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점  $P(a, b)$ 에서의 접선이  $x$ 축과 만나는 점을  $Q$ 라 하자.

$\overline{PQ} = 4\sqrt{5}$  일 때,  $a^2 + b^2$ 의 값은?[3점]

- ① 21                      ② 32                      ③ 45
- ④ 60                      ⑤ 77

[난이도 : ★★★] [2002 학년도 대수능]

6 쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선이  $y$ 축과 만나는 점의  $y$ 좌표는?[3점]

- ① -2                      ② -1                      ③ 0
- ④ 2                        ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

7 포물선  $y = -\frac{1}{4}x^2$  위의 점  $(2, -1)$ 에서의 접선과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

- ①  $\frac{1}{2}$                       ②  $\frac{1}{4}$                       ③  $\frac{3}{4}$
- ④  $\frac{3}{2}$                       ⑤  $\frac{5}{4}$

[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

8 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선과  $x$  축,  $y$  축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?(단,  $a > 0, b > 0$ )

- ①  $\frac{36}{ab}$                       ②  $\frac{54}{ab}$                       ③  $\frac{72}{ab}$
- ④  $\frac{90}{ab}$                         ⑤  $\frac{108}{ab}$

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

9 곡선  $e^x - e^y = y$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가 1 일 때,  $a+b$ 의 값은? [3점]

- ①  $1 + \ln(e+1)$       ②  $2 + \ln(e^2+2)$       ③  $3 + \ln(e^3+3)$
- ④  $4 + \ln(e^4+4)$       ⑤  $5 + \ln(e^5+5)$

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

10 0이 아닌 실수  $p$ 에 대하여 좌표평면 위의 두 포물선  $x^2 = 2y$ 와  $(y + \frac{1}{2})^2 = 4px$ 에 동시에 접하는 직선의 개수를  $f(p)$ 라 하자.  $\lim_{p \rightarrow k^+} f(p) > f(k)$ 를 만족시키는 실수  $k$ 의 값은?

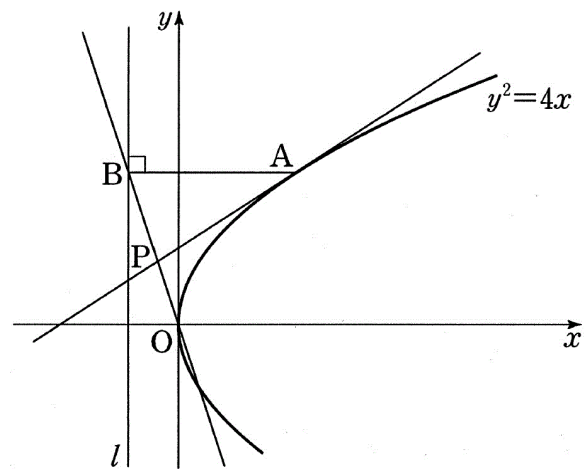
[4점]

- ①  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$                       ②  $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$                       ③  $-\frac{\sqrt{3}}{9}$
- ④  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$                         ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

11 그림과 같이 포물선  $y^2 = 4x$  위의 점  $A(t^2, 2t)$ 에서 이 포물선의 준선  $l$ 에 내린 수선의 발을  $B$ 라 하자.

다음은 점  $A$ 에서의 접선과 직선  $OB$ 가 만나는 점을  $P$ 라 할 때, 점  $P$ 의 좌표를 구하는 과정이다.(단,  $t \neq 0$ 이고,  $O$ 는 원점이다.)



포물선의 방정식  $y^2 = 4x$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하여 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \text{ (단, } y \neq 0 \text{)}$$

이므로 점  $A(t^2, 2t)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{1}{2t}x + t \dots\dots \textcircled{1}$$

이다.

$B(t^2, 2t)$ 이므로 직선  $OB$ 의 방정식은

$$y = \frac{2t}{t^2}x \dots\dots \textcircled{2}$$

이다.  $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 점  $P$ 의 좌표를 구하면

$$\left( \frac{1}{2t}x, \frac{2t}{t^2}x \right) = \left( \frac{t^2}{2t^2+1}, \frac{2t^3}{2t^2+1} \right)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각  $f(y), g(t)$ 라 하고,

(다)에 알맞은 수를  $a$ 라 할 때,  $f(a) \times g(a)$ 의 값은? [4점]

- ① 2                              ② 4                              ③ 6
- ④ 8                              ⑤ 10

[난이도 : ★★☆☆] [2015년 6월 모의평가]

12 매개변수  $t$  ( $t > 0$ )으로 나타내어진 함수

$$x = t^2 + 1, \quad y = \frac{2}{3}t^3 + 10t - 1$$

에서  $t = 1$  일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오.[3점]

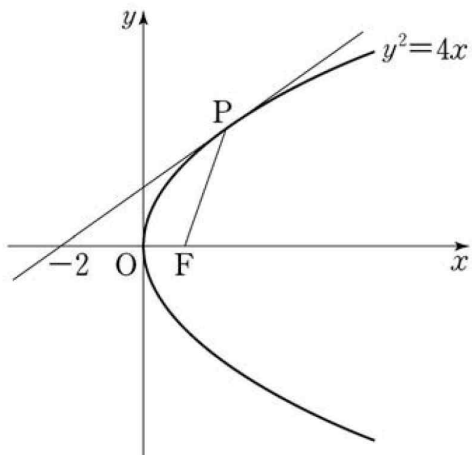
[난이도 : ★★☆☆] [2015년 6월 모의평가]

13 포물선  $y^2 = 20x$ 에 접하고 기울기가  $\frac{1}{2}$ 인 직선의  $y$ 절편을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆☆] [2015년 9월 모의평가]

14 그림과 같이 초점이  $F$ 인 포물선  $y^2 = 4x$  위의 한 점  $P$ 에서의 접선이  $x$ 축과 만나는 점의  $x$ 좌표가  $-2$ 이다.

$\cos(\angle PFO)$ 의 값은? (단,  $O$ 는 원점이다.)[3점]



- ①  $-\frac{5}{12}$       ②  $-\frac{1}{3}$       ③  $-\frac{1}{4}$
- ④  $-\frac{1}{6}$       ⑤  $-\frac{1}{12}$

[난이도 : ★★☆☆] [2014년 6월 모의평가]

15 쌍곡선  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$  위의 점  $A(4, 1)$ 에서의 접선이  $x$ 축과

만나는 점을  $B$ 라 하자. 이 쌍곡선의 두 초점 중  $x$ 좌표가 양수인 점을  $F$ 라 할 때, 삼각형  $FAB$ 의 넓이는? [3점]

- ①  $\frac{5}{12}$       ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{7}{12}$
- ④  $\frac{2}{3}$       ⑤  $\frac{3}{4}$

[난이도 : ★★☆☆] [2014년 9월 모의평가]

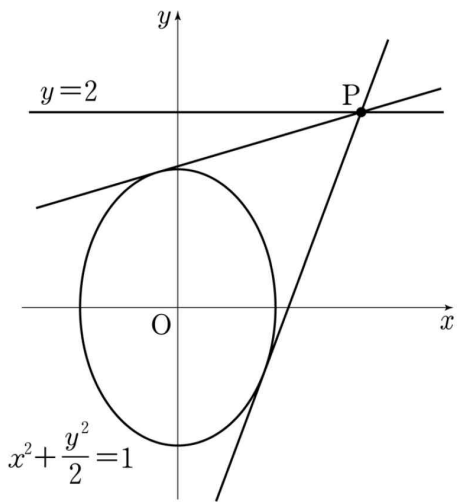
16 자연수  $n$ 에 대하여 직선  $y = nx + (n+1)$ 이 꼭짓점의 좌표가  $(0, 0)$ 이고 초점이  $(a_n, 0)$ 인 포물선에 접할 때,  $\sum_{n=1}^5 a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 70      ② 72      ③ 74
- ④ 76      ⑤ 78

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

17 직선  $y=2$  위의 점  $P$ 에서 타원  $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 그은 두 접선의 기울기의 곱이  $\frac{1}{3}$ 이다.

점  $P$ 의  $x$ 좌표를  $k$ 라 할 때,  $k^2$ 의 값은? [4점]



- ① 6                      ② 7                      ③ 8
- ④ 9                      ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

18 원  $(x-4)^2 + y^2 = r^2$ 과 쌍곡선  $x^2 - 2y^2 = 1$ 이 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 양수  $r$ 의 최댓값은? [3점][2011년 6월 평가원]

- ① 4                      ② 5                      ③ 6
- ④ 7                      ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

19 쌍곡선  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선이 타원  $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분할 때,  $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.[4점][2011년 9월 평가원]

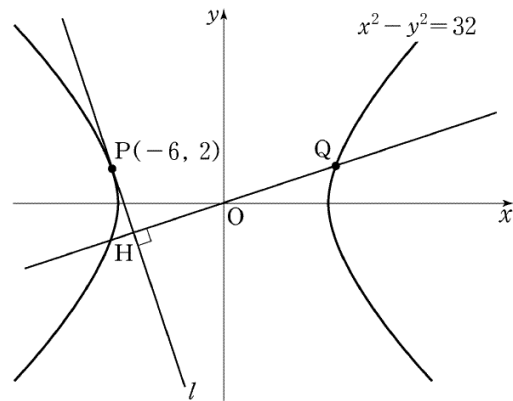
[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

20 좌표평면 위의 점  $(-1, 0)$ 에서 쌍곡선  $x^2 - y^2 = 2$ 에 그은 접선의 방정식을  $y = mx + n$ 이라 할때,  $m^2 + n^2$ 의 값은?(단,  $m, n$ 은 상수이다.)[3점]

- ①  $\frac{5}{2}$                       ② 3                      ③  $\frac{7}{2}$
- ④ 4                      ⑤  $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

21 쌍곡선  $x^2 - y^2 = 32$  위의 점  $P(-6, 2)$ 에서의 접선  $l$ 에 대하여 원점  $O$ 에서  $l$ 에 내린 수선의 발을  $H$ , 직선  $OH$ 와 이 쌍곡선이 제 1사분면에서 만나는 점을  $Q$ 라 하자.

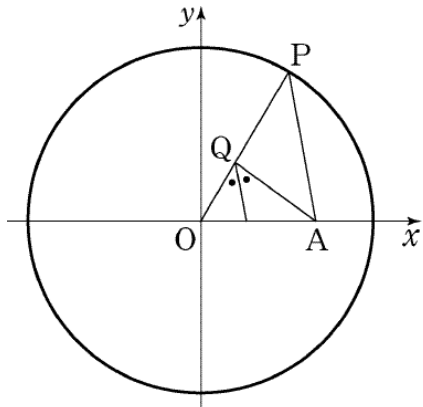


두 선분  $OH$ 와  $OQ$ 의 길이의 곱  $\overline{OH} \cdot \overline{OQ}$ 를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

22 좌표평면에서 원  $x^2 + y^2 = 36$  위를 움직이는 점  $P(a, b)$ 와 점  $A(4, 0)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점  $Q$ 전체의 집합을  $X$ 라 하자.(단,  $b \neq 0$ )

(가) 점  $Q$ 는 선분  $OP$  위에 있다.  
 (나) 점  $Q$ 를 지나고 직선  $AP$ 에 평행한 직선이  $\angle OQA$ 를 이등분한다.



집합의 포함관계로 옳은 것은? [4점]

- ①  $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \right\}$
- ②  $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1 \right\}$
- ③  $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$
- ④  $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$
- ⑤  $X \subset \left\{ (x, y) \mid \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \right\}$

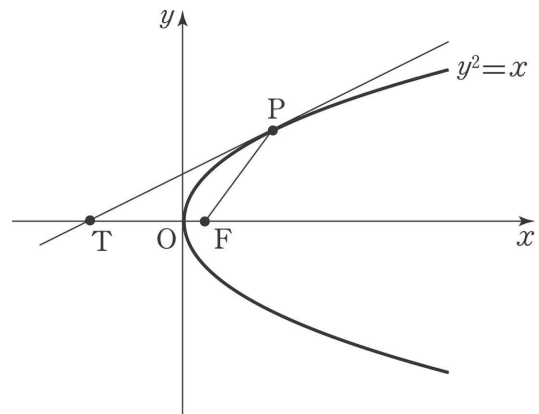
[난이도 : ★★☆☆] [2006년 9월 모의평가]

23 직선  $y = 3x + 5$ 가 쌍곡선  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접할 때, 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는? [3점]

- ①  $\sqrt{7}$                       ②  $2\sqrt{3}$                       ③ 4
- ④  $2\sqrt{5}$                       ⑤  $4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

24 다음은 포물선  $y^2 = x$  위의 꼭짓점이 아닌 임의의 점  $P$ 에서의 접선과  $x$  축과의 교점을  $T$ , 포물선의 초점을  $F$ 라고 할 때,  $\overline{FP} = \overline{FT}$ 임을 증명한 것이다.



점  $P$ 의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라고 하면, 접선의 방정식은 [ ]...(가)  
 이 식에  $y=0$ 을 대입하면 교점  $T$ 의 좌표는  $(-x_1, 0)$ 이다.  
 초점  $F$ 의 좌표는(나)이므로  
 $\overline{FT} =$  (다)  
 한편  $\overline{FP} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + y_1^2} =$  (다)  
 따라서  $\overline{FP} = \overline{FT}$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [3점]

- ①  $y_1 y = \frac{1}{2}(x + x_1), \left(\frac{1}{2}, 0\right), x_1 + \frac{1}{2}$
- ②  $y_1 y = \frac{1}{2}(x + x_1), \left(\frac{1}{4}, 0\right), x_1 + \frac{1}{4}$
- ③  $y_1 y = \frac{1}{2}(x + x_1), \left(\frac{1}{4}, 0\right), x_1 + \frac{1}{2}$
- ④  $y_1 y = x + x_1, \left(\frac{1}{4}, 0\right), x_1 + \frac{1}{4}$
- ⑤  $y_1 y = x + x_1, \left(\frac{1}{2}, 0\right), x_1 + \frac{1}{2}$

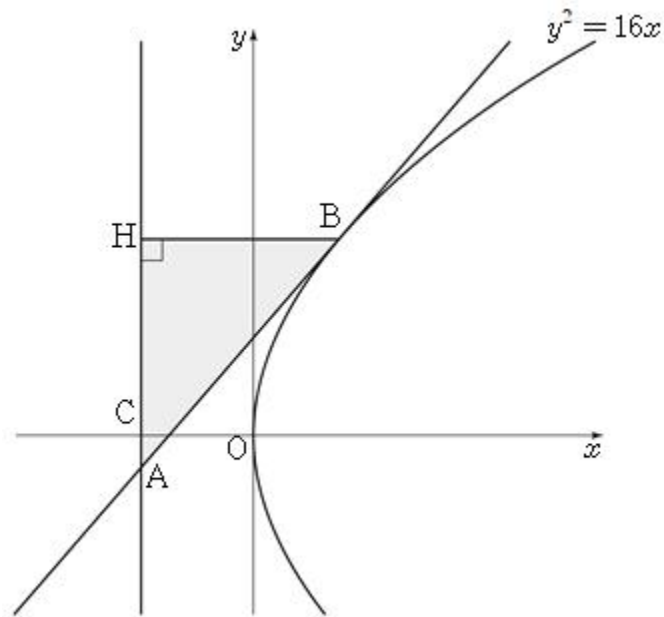
[난이도 : ★★☆☆] [2018년 4월 학력평가]

25 곡선  $x^3 + xy - y^2 = 0$  위의 점  $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ①  $\frac{13}{6}$                       ②  $\frac{7}{3}$                       ③  $\frac{5}{2}$
- ④  $\frac{8}{3}$                          ⑤  $\frac{17}{6}$

[난이도 : ★★☆☆] [2018년 4월 학력평가]

26 그림과 같이 포물선  $y^2 = 16x$ 에 대하여 포물선의 준선 위의 한 점  $A$ 가 제3사분면에 있다. 점  $A$ 에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을  $B$ , 점  $B$ 에서 준선에 내린 수선의 발을  $H$ , 준선과  $x$ 축이 만나는 점을  $C$ 라 하자.  $\overline{AC} \times \overline{CH} = 8$ 일 때, 삼각형  $ABH$ 의 넓이는? [4점]



- ①  $15\sqrt{3}$                       ②  $\frac{46}{3}\sqrt{3}$                       ③  $\frac{47}{3}\sqrt{3}$
- ④  $16\sqrt{3}$                       ⑤  $\frac{49}{3}\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆☆] [2016년 7월 학력평가]

27 좌표평면 위를 움직이는 점  $P$ 의 좌표  $(x, y)$ 가  $t (t > 0)$ 을 매개변수로 하여  $x = 2t + 1, y = t + \frac{3}{t}$ 으로 나타내어진다.

점  $P$ 가 그리는 곡선 위의 한 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가  $-1$ 일 때,  $a + b$ 의 값은? [3점]

- ① 6                                      ② 7                                      ③ 8
- ④ 9                                      ⑤ 10

[난이도 : ★★☆☆] [2015년 10월 학력평가]

28 좌표평면에서 포물선  $y^2 = 16x$ 에 접하는 기울기가  $\frac{1}{2}$ 인 직선과  $x$ 축,  $y$ 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆☆] [2014년 4월 학력평가]

29 좌표평면에서 곡선  $3x^3 - xy^2 = 6$  위의 점  $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기를  $m$ 이라 할 때,  $40m$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆☆] [2012년 10월 학력평가]

30 쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  위의 점  $(2, 3)$ 에서의 접선이  $y$ 축과 만나는 점의  $y$ 좌표는? [3점]

- ①  $-1$                                       ②  $-\frac{1}{2}$                                       ③ 0
- ④  $\frac{1}{2}$                                       ⑤ 1

[난이도 : ★★☆☆] [2011년 4월 학력평가]

31 매개변수  $\theta$ 로 나타내어진 함수  $x = \tan \theta, y = \cos^2 \theta$  (단,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ )에 대하여 이 곡선 위의 점  $(1, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① -1                      ②  $-\frac{1}{2}$                       ③ 0
- ④  $\frac{1}{2}$                       ⑤ 1

[난이도 : ★★☆☆] [2008년 10월 학력평가]

32 세 이차곡선  $x^2 = 4py (p \neq 0), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \neq \pm a), \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (|x| > a)$

각각에 대하여 곡선 위에 있는 임의의 점에서의 접선의 기울기들의 집합을  $M_1, M_2, M_3$ 라 하자. 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

[보기]
ㄱ. $\left  \frac{2b}{a} \right  \in M_3$ ㄴ. $M_1 = M_2$ ㄷ. $M_2 \supset M_3$

- ① ㄱ                      ② ㄱ, ㄴ                      ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆☆] [2006년 10월 학력평가]

33 쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{18} = 1$ 과 직선  $y = ax + b (a, b \text{는 상수})$ 의 교점의 개수에 대한 설명 중 옳은 내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은? [3점]

[보기]
ㄱ. $a = -4$ 이고 $b = 0$ 일 때 교점은 없다. ㄴ. $a = 3$ 이고 $b > 0$ 일 때 교점은 1개이다. ㄷ. $a = \frac{1}{3}$ 이고 $b < 0$ 일 때 교점은 2개이다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 정답 및 해설

## 2.평면 곡선의 접선

### 중단원 기출문제

1) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 음함수의 미분을 할 수 있는가?

$2x + x^2y - y^3 = 2$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2 + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(xy+1)}{x^2-3y^2} \text{ (단, } x^2-3y^2 \neq 0 \text{) 이다.}$$

따라서  $x=1, y=1$ 일 때의 접선의 기울기는  $\frac{-2(1 \times 1 + 1)}{1-3} = 2$

이다.

2) 답 : ④

[해설]

$2x^2 - 3x + 1 = 0$ 이며 정리하면

$$(2x-1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, 1$$

따라서 직선  $l_1, l_2$ 의 기울기는 각각  $\frac{1}{2}, 2$ 라고 할 수 있다.

포물선  $y^2 = 8x$ 의 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{2}{m} \text{ 이므로}$$

구하는 두 접선은  $y = \frac{1}{2}x + 4, y = x + 2$ 이다.

두 식을 연립하면 교점의  $x$ 좌표는 4이다.

3) 답 : ①

[해설]

[기존 문제 풀이]

점  $(b, 1)$ 이 쌍곡선  $x^2 - 4y^2 = a$  위의 점이므로 대입하면

$$b^2 - 4 = a \dots \textcircled{1}$$

이 쌍곡선의 점근선은  $y = \pm \frac{1}{2}x$ 이고, 점  $(b, 1)$ 에서의 접선의 방정

식은  $bx - 4y = a$

$$\text{즉 } y = \frac{b}{4}x - \frac{a}{4} \text{ 이다.}$$

직선  $y = \frac{b}{4}x - \frac{a}{4}$ 와 직선  $y = -\frac{1}{2}x$ 가 수직이므로

$$\frac{b}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore b = 8 \text{ } b = 8 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = 8^2 - 4 = 60$$

$$\therefore a + b = 60 + 8 = 68$$

4) 답 : 12

[해설]

포물선  $y^2 = nx$ 의 초점은  $\left(\frac{n}{4}, 0\right)$ 이고,

포물선 위의 점  $(n, n)$ 에서의 접선의 방정식은  $ny = \frac{n}{2}(x+n),$

$$nx - 2ny + n^2 = 0 \text{ 이다.}$$

초점  $\left(\frac{n}{4}, 0\right)$ 과 접선의 방정식  $nx - 2ny + n^2 = 0$ 사이의 거리는

$$d = \frac{\left|\frac{n^2}{4} + n^2\right|}{\sqrt{n^2 + 4n^2}} = \frac{5n}{4\sqrt{5}} \text{ 이다.}$$

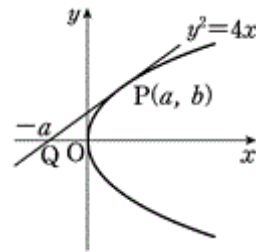
$$d^2 = \frac{5n^2}{16} \geq 40 \text{ 이고 } n^2 \geq 128 \text{ 이므로}$$

만족하는 자연수  $n$ 의 최솟값은 12이다.

5) 답 : ②

[해설]

점  $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은



$$by = 2(x+a)$$

$$\therefore Q(-a, 0)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{4a^2 + b^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore 4a^2 + b^2 = 80 \dots \textcircled{1}$$

점  $P$ 는 포물선 위의 점이므로,

$$b^2 = 4a \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서  $a^2 + a - 20 = 0$ 이며 정리하면

$$(a+5)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0), b = 4$$

$$\therefore b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16 + 16 = 32$$

6) 답 : ②

[해설]

$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  위의 점  $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{2} - 1 \cdot y = 1$$

$$x - y = 1 \therefore y = x - 1$$

따라서, 구하는 이 접선의  $y$ 절편의 값은  $-1$ 이다.

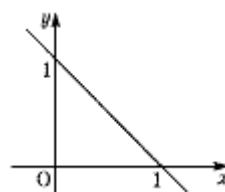
7) 답 : ①

[해설]

$y = -\frac{1}{4}x^2$ 에서  $y' = -\frac{1}{2}x$ 이므로

점  $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는  $-1$ 이다.

따라서, 접선의 방정식은  $y + 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 1$



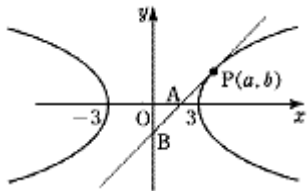
# 정답 및 해설

따라서,  $x$  축,  $y$  축으로 둘러싸인 부분의 넓이는  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

8) 답 : ③

[해설]

$P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은  $\frac{ax}{9} - \frac{by}{16} = 1$



접선은  $A\left(\frac{9}{a}, 0\right), B\left(0, -\frac{16}{b}\right)$ 을 지나므로

$$\triangle ABC \text{의 넓이 } S = \frac{1}{2} \times \frac{9}{a} \times \frac{16}{b} = \frac{72}{ab}$$

9) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 음함수 미분에 대해서 물어보는 문제이다.

$e^x - e^y = y$ 의 양변을  $x$ 로 미분하면

$$e^x - e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{가 된다.}$$

$(a, b)$ 를 대입하면  $e^a - e^b \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^a}{1+e^b} = 1$$

$$e^a = 1 + e^b$$

$(a, b)$ 는 곡선 위의 점이므로  $e^a - e^b = b$  또한 성립한다.

두 식을 연립하면

$$e^a = 1 + e^b = b + e^b$$

$$b = 1 \dots \textcircled{1}$$

$$e^a = 1 + e$$

$$a = \ln(1+e) \dots \textcircled{2}$$

$$a+b = \ln(1+e) + 1$$

[다른 풀이]

$e^x - e^y = y \dots \textcircled{1}$ 의 양변을  $x$ 에 대해 미분하면

$$e^x - e^y \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \dots \textcircled{2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^y} \text{이다.}$$

$(a, b)$ 를  $\textcircled{1}$ 과  $\textcircled{2}$ 에 대입하면  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^a}{1+e^b}$ 이고  $e^a - e^b = b$ 이다.

$$\frac{e^a}{1+e^b} = 1$$

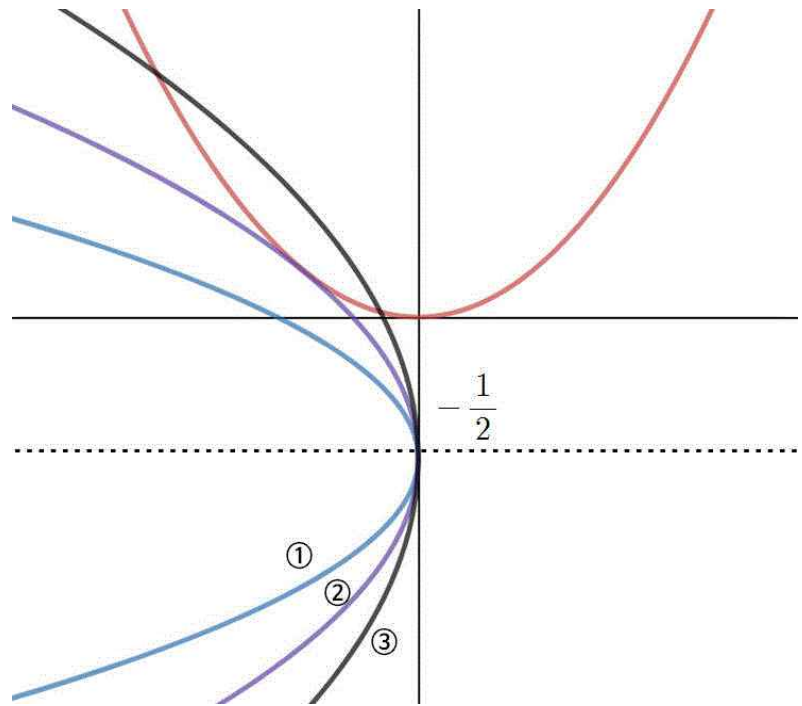
$$e^a - e^b = b$$

연립하면  $e^a - e^b = 1$ 이므로  $b = 1 \dots \textcircled{2}$ 이고,  $a = \ln(1+e)$ 이다.

따라서 정답은  $a+b = 1 + \ln(1+e)$ 이다.

10) 답 : ③

[해설]



이차곡선  $\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px$ 이 위 그림에서

①의 경우 공통접선이 3개,

②의 경우 공통접선이 2개

③의 경우 공통접선이 1개 이므로

$\lim_{p \rightarrow k^+} f(p) > f(k)$ 를 만족하는 경우는  $p$ 의 크기가 증가하며  $\textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2}$

임을 알 수 있다.

따라서  $p$ 는 음수이고 극한값  $k$ 는 두 이차곡선이 접할 때  $p$ 의 값이 된다.

두 곡선의 접점을  $(x_1, y_1)$ 이라고 하면

$$x^2 = 2y \text{에서 } \frac{dy}{dx} = x_1 \text{이고,}$$

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px \text{에서 } \frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_1 + \frac{1}{2}} \text{이므로 두 식을 연립하면}$$

$$2p = x_1 \left(y_1 + \frac{1}{2}\right) \text{이고 이 식을 } \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 4px_1 \text{에 대입하면}$$

$$y_1 = \frac{1}{6}, x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{가 된다. } p \text{가 음수이므로}$$

$$\therefore p = -\frac{\sqrt{3}}{9}$$

11) 답 : ①

[해설]

포물선의 방정식  $y^2 = 4x$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \text{이고 정리하면 } \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \text{ (단, } y \neq 0 \text{)}$$

이므로, 점  $A(t^2, 2t)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{1}{t}(x - t^2) + 2t \text{이고 정리하면}$$

$$y = \frac{1}{t}x + t \dots \textcircled{1} \text{이다.}$$

$B(-1, 2t)$ 이므로 직선  $OB$ 의 방정식은  $y = \frac{2t}{-1}x \dots \textcircled{2}$ 이다.

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 점  $P$ 의 좌표를 구하면

$$\left(-1 \times \frac{t^2}{2t^2+1}, 2 \frac{t^3}{2t^2+1}\right)$$

# 정답 및 해설

이다.

따라서  $f(y) = \frac{2}{y}, g(t) = \frac{1}{t}, a = -1$  이므로

$f(a) \times g(a) = f(-1) \times g(-1) = (-2) \times (-1) = 2$  이다.

12) 답 : 4

[해설]

$x = t^2 + 1$ 의 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면  $\frac{dx}{dt} = 2t$

$y = \frac{2}{3}t^3 + 10t - 1$ 의 양변을  $t$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dt} = 2t^2 + 10$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t^2 + 10}{2t} = \frac{t^2 + 5}{t}$$

따라서  $t = 1$ 일 때,  $\frac{dy}{dx} = \frac{12}{2} = 6$

13) 답 : 10

[해설]

포물선  $y^2 = 20x = 4 \cdot 5x$ 이므로 기울기가  $\frac{1}{2}$ 인 접선의 방정식은

$y = mx + \frac{p}{m} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x + 10$ 이므로  $y$  절편은 10이다.

14) 답 : ②

[해설]

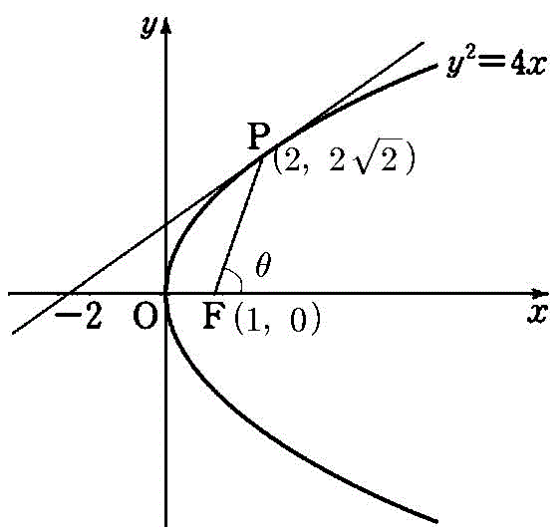
점  $P(x_1, y_1)$ 라 하면

주어진 접선의 방정식은  $y_1 y = 2(x + x_1)$ 이고

$x$  절편이  $-2$ 이므로

$$x_1 = -2$$

또한  $y_1 = 2\sqrt{2}$



직선  $PF$ 의 기울기를  $\tan \theta$ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{2} - 0}{2 - 1} = 2\sqrt{2}$$

따라서  $\cos \theta = \frac{1}{3}$

$$\therefore \cos(\angle PFO) = \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta = -\frac{1}{3}$$

15) 답 : ②

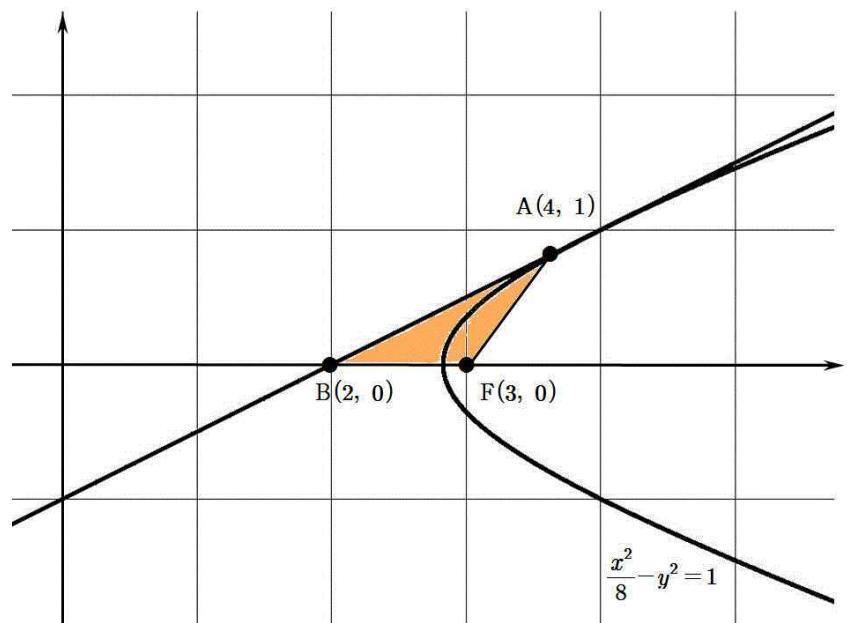
[해설]

[쌍곡선]

쌍곡선  $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$  위의 점  $A(4, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$\frac{x}{2} - y = 1$ 이므로  $x$  축과 만나는 점은  $B(2, 0)$ 이다.

$F(3, 0)$ 이므로 삼각형  $FAB$ 의 넓이는  $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ 이다.



16) 답 : ①

[해설]

꼭짓점의 좌표가  $(0, 0)$ 이고 초점이  $(a_n, 0)$ 인 포물선은

$y^2 = 4a_n x$ 이고 기울기가  $n$ 인 접선의 방정식은  $y = nx + \frac{a_n}{n}$ 이다.

따라서  $\frac{a_n}{n} = n + 1$ 이고  $a_n = n(n + 1)$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^5 a_n = \sum_{n=1}^5 n(n+1) = 70$$

17) 답 : ②

[해설]

$P(k, 2)$ 로 두면 기울기가  $m$ 인 접선은  $y = mx \pm \sqrt{m^2 + 2}$ 이고  $P(k, 2)$ 를 지나므로

$$2 = mk \pm \sqrt{m^2 + 2}$$

$$2 - mk = \pm \sqrt{m^2 + 2}, \quad k^2 m^2 - 4mk + 4 = m^2 + 2$$

$$(k^2 - 1)m^2 - 4km + 2 = 0$$

$$\text{두 근을 } m_1, m_2 \text{라 두면 } m_1 \times m_2 = \frac{2}{k^2 - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore k^2 = 7$$

18) 답 : ②

[해설]

해설

원  $(x - 4)^2 + y^2 = r^2$ 과 쌍곡선  $x^2 - 2y^2 = 1$ 이 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 양수  $r$ 의 최댓값은

원  $(x - 4)^2 + y^2 = r^2$ 이 쌍곡선의 꼭짓점  $(-1, 0)$ 을 지날 때가  $r$ 이

# 정답 및 해설

최대가 된다.

따라서  $r^2 = 5 \therefore r = 5$

19) 답 : 52

[해설]

[출제 의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선  $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$  위의 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1 \text{ 이고,}$$

접선이 타원  $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하므로

접선은 타원의 중심  $(2, 0)$ 을 지난다.

따라서,  $\frac{2a}{12} - 0 = 1$ 에서  $a = 6$

또한,  $\frac{a^2}{12} - \frac{b^2}{8} = 1$ 이므로

$$\frac{36}{12} - \frac{b^2}{8} = 1 \text{에서 } \frac{b^2}{8} = 2, b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36 + 16 = 52$$

20) 답 : ④

[해설]

쌍곡선에 접하는 직선의 기울기를  $m$ 이라 하면

$(-1, 0)$ 을 지나고 기울기가  $m$ 인 직선의 방정식은

$$y = m(x+1) \dots \text{①이다.}$$

그런데  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 기울기가  $m$ 인 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{2m^2 - 2} \dots \text{②이다.}$$

그러므로

①, ②는 같은 직선이므로  $m = \sqrt{2m^2 - 2}$ 이 된다.

위식의 양변을 제곱하면

$$m^2 = 2m^2 - 2, m^2 = 2, m = \pm\sqrt{2} \text{이다.}$$

따라서 구하는 접선은  $y = \pm\sqrt{2}x \pm \sqrt{2}$ 이다.

그러므로  $m^2 + n^2 = 2 + 2 = 4$

21) 답 : 32

[해설]

점 P에서의 접선  $l$ 의 방정식은  $-6x - 2y = 32$  정리하면

$$l: 3x + y + 16 = 0$$

직선  $OH$ 는  $l$ 과 수직이므로 기울기는  $\frac{1}{3}$ 이고, 원점을 지나므로

$$y = \frac{1}{3}x \text{이다.}$$

i)  $\overline{OH}$ 는 원점과 직선  $l$ 사이의 거리이므로

$$\frac{|16|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}}$$

ii) 점 Q의 좌표를 구하기 위해

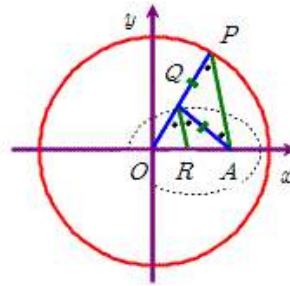
$$x^2 - y^2 = 32, y = \frac{1}{3}x \text{ 두 식을 연립하면 } Q(6, 2) \text{이다.}$$

$$\therefore \overline{OQ} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{OH} \cdot \overline{OQ} = 32$$

22) 답 : ⑤

[해설]



$\overline{QR} // \overline{PA}$ 이므로,

$\angle RQA = \angle QAP, \angle OQR = \angle QPA$ 가 성립한다.

$\therefore \triangle PQA$ 는 이등변삼각형

또한, 주어진 원위의 점 P에 대하여  $\overline{OP} (=6)$ 는 항상 일정하다.

따라서 점 Q의 자취는 점 O, A를 초점으로 하는

타원(거리의 합 = 6)이 된다.

타원의 방정식을 아래와 같이 두면,

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b > 0$$

중심으로부터 초점까지의 거리는 2이므로,

$$3^2 - b^2 = 2^2$$

$$\therefore b = \sqrt{5}$$

따라서 점 Q의 자취의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

23) 답 : ④

[해설]

쌍곡선  $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{a \cdot 3^2 - 2}$$

이때,  $\sqrt{9a - 2} = 5$ 이어야 하므로  $9a - 2 = 25$

$$\therefore a = 3$$

이때 쌍곡선의 두 초점의 좌표는  $(\pm\sqrt{5}, 0)$ 이므로

구하는 두 초점 사이의 거리는  $2\sqrt{5}$ 이다. [정답]④

24) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 이차곡선

점 P의 좌표를  $(x_1, y_1)$ 이라고 하면,

$$\text{접선의 방정식은 } y_1 y = \frac{1}{2}(x + x_1)$$

이 식에  $y = 0$ 을 대입하면  $x = -x_1$ 이므로

교점 T의 좌표는  $(-x_1, 0)$ 이다.

$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$ 에서 초점 F의 좌표는  $(\frac{1}{4}, 0)$ 이므로

$$\overline{FT} = x_1 + \frac{1}{4}$$

$$\overline{FP} = \sqrt{\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + y_1^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{16} + x_1} \quad (\because y_1^2 = x_1)$$

# 정답 및 해설

$$= \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= x_1 + \frac{1}{4}$$

25) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 음함수의 미분법 이해하기

$x^3 + xy - y^2 = 0$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + y + x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y}{-x + 2y} \quad (x \neq 2y)$$

따라서 점  $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는  $\frac{8}{3}$

26) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 포물선의 접선을 활용하여 문제 해결하기

점  $A$ 에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을  $B(x_1, y_1)$ 이라 하면

점  $B$ 에서의 접선의 방정식은  $y = \frac{8}{y_1}(x + x_1)$

포물선의 준선의 방정식이  $x = -4$ 이므로  $A\left(-4, \frac{8}{y_1}(x_1 - 4)\right)$ ,

$H(-4, y_1)$

점  $A$ 가 제3사분면 위의 점이므로  $\overline{AC} = \frac{8}{y_1}(4 - x_1)$

$$\overline{AC} \times \overline{CH} = \frac{8}{y_1}(4 - x_1) \times y_1 = 8$$

$$\therefore x_1 = 3, y_1 = 4\sqrt{3}$$

$$A\left(-4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), B(3, 4\sqrt{3}), H(-4, 4\sqrt{3})$$

따라서 삼각형  $ABH$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{14}{3} \sqrt{3} = \frac{49}{3} \sqrt{3}$$

27) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 매개변수로 나타낸 함수의 미분 이해하기

점  $P\left(2t+1, t+\frac{3}{t}\right)$ 이 그리는 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{t^2}\right)$$

곡선 위의 한 점  $(a, b)$ 에서의 접선의 기울기가  $-1$ 이므로

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{t^2}\right) = -1$$

$$t = 1 (t > 0)$$

따라서  $a = 3, b = 4$ 에서  $a + b = 7$

28) 답 : 64

[해설]

[출제 의도] 포물선의 접선의 방정식을 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

기울기가  $\frac{1}{2}$ 인 접선의 방정식은  $y = \frac{1}{2}x + 8$ 이므로

구하는 넓이는  $\frac{1}{2} \times 16 \times 8 = 64$

29) 답 : 90

[해설]

[출제 의도] 음함수의 미분법 이해하기

$3x^3 - xy^2 = 6$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$9x^2 - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \text{이며 정리하면}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9x^2 - y^2}{2xy} \text{이며}$$

따라서 점  $(2, 3)$ 에서  $m = \frac{9}{4}$ 이고  $40m = 90$

30) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 쌍곡선의 접선의 방정식을 이해한다.

쌍곡선  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  위의 점  $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은 교과서 공식에 의해

$$2x - \frac{3y}{3} = 1 \text{이며 정리하면}$$

$$y = 2x - 1 \dots \text{①}$$

문제에서 접선 ①과  $y$ 축과의 만나는 점을 구하기 위해 ①에  $x = 0$ 을 대입하면

$$y = 2 \times 0 - 1 = -1$$

따라서  $y$ 축과 만나는 점의  $y$ 좌표는  $-1$

31) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 매개변수로 나타내어진 함수를 미분하기

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2\theta, \frac{dy}{d\theta} = -2\cos\theta\sin\theta \text{ 이고}$$

$x = 1$ 일 때,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$(\text{접선의 기울기}) = \frac{-2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\sec^2\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}$$

32) 답 : ⑤

[해설]

포물선  $x^2 = 4py (p \neq 0)$  위의 점에서 그은 접선의 기울기들의 모임은 실수 전체의 집합이 된다.

$$\text{즉, } M_1 = R \dots \text{①}$$

마찬가지로, 타원  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (x \neq \pm a)$  위의 점에서 그은

접선의 기울기들의 모임도 실수 전체의 집합이 된다,

$$\text{즉 } M_2 = R \dots \text{②}$$

## 정답 및 해설

하지만, 쌍곡선  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $|x| > a$ ) 위의 접선 중 기울기가

$m$  인 것은  $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$  이므로

$$a^2m^2 - b^2 > 0 \text{ 즉, } m > \left| \frac{b}{a} \right| \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{결국, } M_3 = \left\{ m \mid m > \left| \frac{b}{a} \right| \right\} \cdots \textcircled{3} \text{ 이 된다.}$$

[보기]를 살펴보면

ㄱ.  $\textcircled{3}$ 에 의해  $\left| \frac{2b}{a} \right| \in M_3$  이므로 참이다.

ㄴ.  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ 에 의해  $M_1 = M_2$  이므로 참이다.

ㄷ.  $\textcircled{2}$ ,  $\textcircled{3}$ 에 의해  $M_2 \supset M_3$  이므로 참이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이므로 ㉠

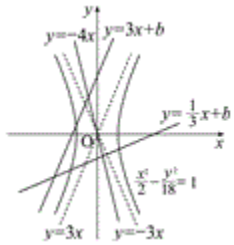
33) 답 : ㉠

[해설]

[출제 의도] 쌍곡선의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하는가를 묻는 문제이다.

쌍곡선  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{18} = 1$  의

점근선의 방정식은  $y = \pm 3x$  이다.



ㄱ.  $a = -4, b = 0$  이면 교점 0개

ㄴ.  $a = 3, b > 0$  이면

점근선과 평행하므로 교점 1개

ㄷ.  $a = \frac{1}{3}, b < 0$  이면 교점이 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.