I 순열과 조합

바스카라
(Bhaskara, A., 1114~1185)
수학적 대상으로서의 경우의 수를 찾고, 순열과 조합을 처음으로 발견하였다.

파스칼
(Pascal, B., 1623~1662)
이항계수의 배열에서 이항계수와 조합 사이의 관계를 보였다.

학습목표

- **원순열**, **중복순열**, **같은 것이 있는 순열**을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.
- **중복조합**을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.
- **이항정리**를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

최선의 선택을 위하여

우리는 일상생활에서 선택을 해야 하는 여러 상황을 만난다. 상품을 구매할 때에는 상품의 디자인과 색상 등을 결정해야 하고, 여행을 계획할 때에는 방문할 장소와 이용할 교통수단 등을 결정해야 한다. 합리적인 의사 결정을 위해서는 가능한 모든 경우를 파악하여 분석해야 하는데, 이때 순열과 조합을 이용하면 이를 편리하게 할 수 있다.

바코드는 굵기가 다른 흑백의 수직 막대를 나열하여 만든 것으로 상품의 포장이나 꼬리표에 표시되어 상품의 가격, 매출 정보 등을 나타낸다. 바코드는 편리함과 정확성 때문에 널리 사용되나 정보를 1차원으로 저장하는 방식이기 때문에 표현할 수 있는 정보의 용량에 한계가 있다.

이 점을 보완하고자 사각형 모양의 2차원 바코드를 만들었는데, 그중 대표적인 것이 QR 코드이다. QR 코드에는 사진, 동영상, 지도, 명함 등의 다양한 정보를 담을 수 있고, QR 코드 인식 애플리케이션을 사용하여 그 내용을 확인할 수 있다.

바코드와 QR 코드를 만드는 방법에는 순열의 원리가 숨어 있다.

이 단원에서는 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열 등 여러 가지 순열을 알아본다.

(출처: 박은숙, 박윤선, 『소셜 모바일 시대, QR 코드 마케팅 전략』)

1 순열

준비학습

1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_5\mathrm{P}_2$　　(2) ${}_3\mathrm{P}_0$　　(3) $4!$

2 다음을 구하시오.

(1) 회원이 15명인 자전거 동호회에서 회장 1명, 총무 1명을 뽑는 경우의 수

(2) 1부터 6까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 이용하여 만들 수 있는 두 자리 자연수의 개수

1 여러 가지 순열

● 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.

원순열이란 무엇일까

생각 톡

상은, 주석, 지환, 하림이가 원탁에 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같이 앉아서 식사하려고 한다.

[그림 1]

[그림 2]

탐구 ① [그림 1]에서 하림이의 왼편, 맞은편, 오른편에 앉은 사람을 말해 보자.

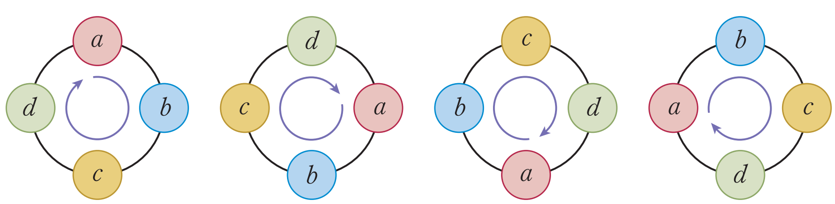
탐구 ② [그림 2]에서 하림이의 왼편, 맞은편, 오른편에 앉은 사람을 말해 보자.

탐구 ③ [그림 1]과 [그림 2]에서 네 사람이 앉은 배열은 서로 같은 배열이라고 할 수 있는지 말해 보자.

서로 다른 것을 원형으로 배열하는 경우를 알아보자.

네 개의 문자 a, b, c, d를 원형으로 배열할 때, 다음의 경우는 서로 다른 것처럼 보이지만 어느 한 문자를 기준으로 나머지 세 문자의 상대적 위치가 같으므로 모두 같은 배열로 볼 수 있다.

가장 위쪽에 있는 문자부터 시곗바늘이 도는 방향으로 일렬로 나열한 $abcd$, $dabc$, $cdab$, $bcda$는 서로 다른 경우이지만 원형으로 배열하면 모두 같은 것으로 본다.



이와 같이 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 **원순열**이라고 한다. 원순열에서 회전하여 일치하는 배열은 모두 같은 것으로 본다.

원순열의 수를 구하는 방법을 알아보자.

서로 다른 네 개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_4=4!$이지만 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있으므로 서로 다른 네 개의 문자를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{4!}{4}=3!=6$$

이다.

일반적으로 서로 다른 n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $n!$이지만 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 n가지씩 있으므로 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$\frac{n!}{n}=(n-1)!$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

원순열의 수

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$(n-1)!$$

예제 1 **2명의 주연 배우를 포함하여 한 영화에 출연한 5명의 배우가 시상식에 참석해 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하시오.**

(1) 모든 경우의 수

(2) 2명의 주연 배우가 이웃하게 앉는 경우의 수

풀이 (1) 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)!=4!=24$$

(2) 2명의 주연 배우를 한 사람으로 생각하면 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

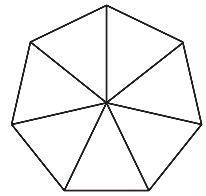
$$(4-1)!=3!=6$$

이때 각 경우에 대하여 2명의 주연 배우가 자리를 바꾸는 경우의 수가 $2!$이므로 구하는 경우의 수는

$$6\times 2!=12$$

답 (1) 24 (2) 12

문제 1 오른쪽 그림은 정칠각형을 7등분 한 도형이다. 빨간색, 주황색, 노란색, 초록색, 파란색, 남색, 보라색을 모두 사용하여 이 도형의 각 영역을 칠할 때, 다음을 구하시오.(단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



(1) 빨간색과 주황색을 이웃한 영역에 칠하는 경우의 수

(2) 남색과 보라색을 이웃하지 않은 영역에 칠하는 경우의 수

문제 2 남학생 대표 1명과 여학생 대표 1명을 포함하여 남학생 4명과 여학생 4명이 원탁에 둘러 앉을 때, 다음을 구하시오.

(1) 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수

(2) 남학생 대표와 여학생 대표가 마주 보고 앉는 경우의 수

문제 해결하기

민기는 n명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 다음과 같이 설명했다.

다음 문제를 원순열을 이용하는 방법과 민기의 방법으로 각각 풀어 보자.

클라리넷 5중주는 클라리넷, 제1바이올린, 제2바이올린, 비올라, 첼로로 구성된 연주 형태이다. 클라리넷 5중주 공연 연습을 하기 위하여 지휘자 1명과 연주자 5명이 원형으로 앉을 때, 바이올린 연주자 2명이 이웃하게 앉는 경우의 수를 구하시오.

중복순열이란 무엇일까

서로 다른 것에서 중복을 허용하여 택하는 순열을 알아보자.

두 개의 숫자 8, 9에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 네 자리 자연수를 만들 때, 각 자리에 올 수 있는 숫자는 8, 9의 2가지씩이므로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$$2\times2\times2\times2=16$$

이다.

이와 같이 중복을 허용하여 만든 순열을 **중복순열**이라 하고, 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복순열의 수를 기호로

$${}_n\Pi_r$$

와 같이 나타낸다.

${}_n\Pi_r$의 Π는 곱을 뜻하는 Product의 첫 글자 P에 해당하는 그리스 문자이다.

중복순열의 수 ${}_n\Pi_r$를 구해 보자.

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택한 후 일렬로 나열할 때, 첫 번째, 두 번째, 세 번째, …, r 번째에 올 수 있는 경우는 각각 n가지씩이다.

첫 번째	두 번째	세 번째	…	r 번째
↑	↑	↑		↑
n가지	n가지	n가지	…	n가지

따라서 곱의 법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\times n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{개}}=n^r$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

중복순열의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_n\Pi_r=n^r$$

${}_n\mathrm{P}_r$에서는 $0\le r\le n$이어야 하지만 ${}_n\Pi_r$에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $r>n$일 수도 있다.

보기 ❶ ${}_5\Pi_2=5^2=25$ ❷ ${}_2\Pi_3=2^3=8$

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_4\Pi_2$ (2) ${}_3\Pi_5$

예제 2 **0부터 9까지 10개의 숫자에서 중복을 허용하여 네 자리의 비밀번호를 만들려고 한다. 다음을 구하시오.**

(1) 모든 비밀번호의 개수
(2) 마지막 자리의 숫자가 홀수인 비밀번호의 개수

풀이 (1) 구하는 비밀번호의 개수는 서로 다른 10개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_{10}\Pi_4=10^4=10000$$

(2) 마지막 자리의 숫자가 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5개이다.
또 각 경우에 대하여 나머지 세 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 ${}_{10}\Pi_3$이므로 구하는 비밀번호의 개수는

$$5\times{}_{10}\Pi_3=5\times10^3=5000$$

답 (1) 10000 (2) 5000

문제 4 **0, 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 5개를 뽑아 다섯 자리 자연수를 만들 때, 다음을 구하시오.**

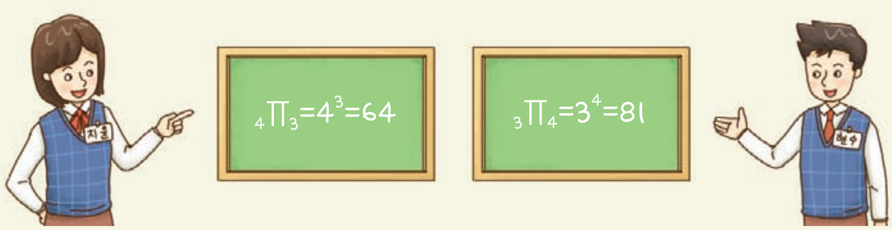
(1) 모든 자연수의 개수
(2) 짝수의 개수

문제 5 **두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c, d\}$에 대하여 다음을 구하시오.**

(1) X에서 Y로의 함수 f의 개수
(2) X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)=b$인 함수의 개수

판별하기

지윤이와 현수는 '4명의 여행가가 3곳의 여행지 중 하나를 택하는 경우의 수'를 다음과 같이 구했다. 누구의 풀이가 옳은지 말해 보자.



같은 것이 있는 순열의 수는 어떻게 구할까

생각톡

사람들은 문자로 대화를 나눌 때, 다양한 기호를 사용하여 자신의 감정과 상태를 표현한다. 예를 들어 :—)와 ^.^는 웃는 얼굴을 나타낸다.

탐구 ① 기호 :, —,)를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

탐구 ② 기호 ^, ., ^를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

같은 것이 있는 순열의 수를 구하는 방법을 알아보자.

크기와 모양이 같은 빨간 공 2개와 파란 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구해 보자.

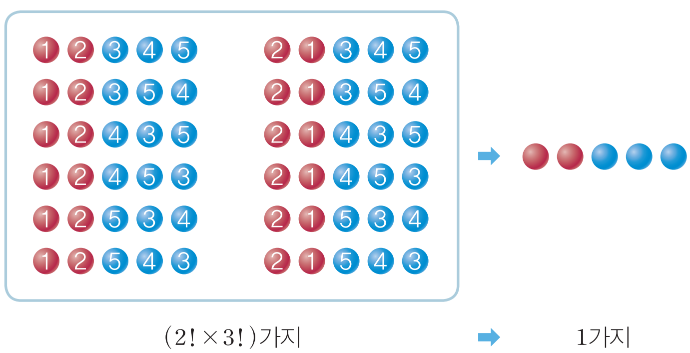
빨간 공 2개를 구별하여 ①, ②라 하고 파란 공 3개를 구별하여 ③, ④, ⑤라고 할 때, 이 공들을 일렬로 나열하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$_5P_5=5!$$

이다.

그런데 번호의 구별이 없다면 $5!$가지 중에서 다음 그림의 $(2!\times3!)$가지의 순열은 모두 ●●●●●와 같다.

빨간 공 2개를 나열하는 경우의 수는 $2!$, 파란 공 3개를 나열하는 경우의 수는 $3!$이다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times3!}=10$$

이다.

일반적으로 같은 것이 있는 순열의 수는 다음과 같다.

같은 것이 있는 순열의 수

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{n!}{p!q!\cdots r!} \quad (\text{단, } p+q+\cdots+r=n)$$

보기 6개의 문자 a, a, b, b, b, b에서 a가 2개, b가 4개 있으므로 a, a, b, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수는

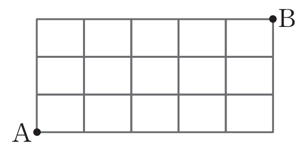
$$\frac{6!}{2!\times 4!}=15$$

문제 6 infinite에 있는 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.

(1) 모든 경우의 수

(2) e, t를 양 끝에 나열하는 경우의 수

예제 3 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.

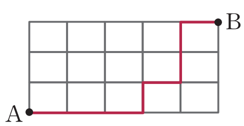


풀이 최단 거리로 가려면 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸을 가야 한다.
오른쪽으로 1칸 가는 것을 a, 위쪽으로 1칸 가는 것을 b로 나타내면 최단 거리로 가는 경우의 수는 8개의 문자 a, a, a, a, a, b, b, b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5!\times 3!}=56$$

답 56

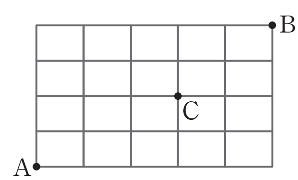
$aaababba$를 도로망에 나타내면 다음과 같다.



문제 7 오른쪽 그림과 같은 도로망에서 다음을 구하시오.

(1) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

(2) A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수

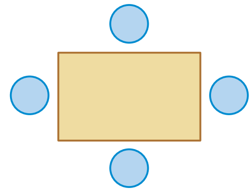


수학 역량 플러스

문제 해결

다각형 모양의 탁자에 앉는 경우의 수

원순열을 이용하면 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구할 수 있다. 다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는 어떻게 구할 수 있을까?

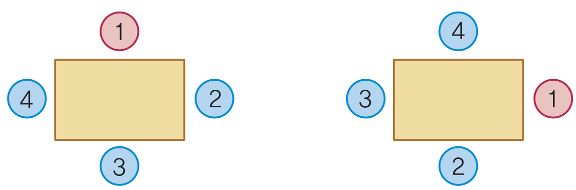


오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 4명이 둘러앉는 경우의 수를 구해 보자.

4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)!=3!$$

이고, 직사각형 모양의 탁자에 앉으면 원형으로 앉는 각 경우에 대하여 다음과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 생긴다.



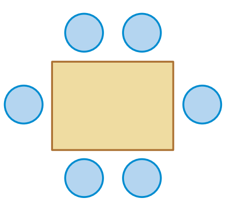
따라서 구하는 경우의 수는 다음과 같다.

$$3!\times 2=12$$

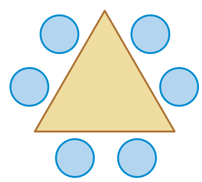
이와 같이 다각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수도 원순열을 이용하여 구할 수 있다.

활동 1 다음 그림과 같은 직사각형과 정삼각형 모양의 탁자에 6명이 둘러앉는 경우의 수를 구해 보자.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

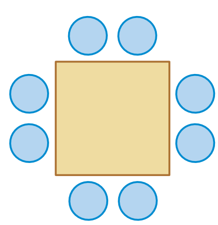
(1)

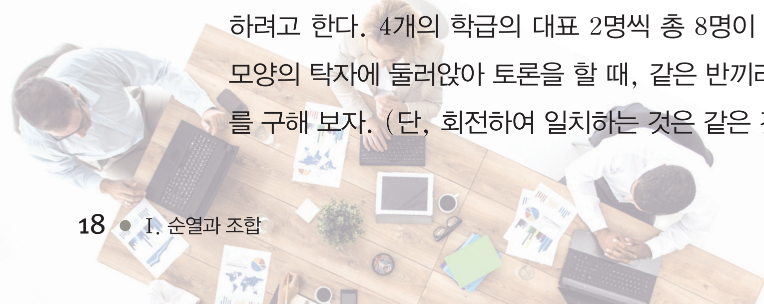


(2)



활동 2 어느 고등학교에서 '청소년에게 투표권을 부여할 것인가?'라는 주제로 토론을 하려고 한다. 4개의 학급의 대표 2명씩 총 8명이 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉아 토론을 할 때, 같은 반끼리 한 모서리에 앉는 경우의 수를 구해 보자. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)





중단원 마무리

• 정답 및 풀이 128쪽

❶ 원순열

(1) 서로 다른 것을 원형으로 배열하는 순열을 $\boxed{\quad}$이라고 한다.

(2) 서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$(\boxed{\quad})!$

❷ 중복순열

(1) 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 순열을 $\boxed{\quad}$이라 하고, 그 수를 기호로 $\boxed{\quad}$와 같이 나타낸다.

(2) ${}_n\Pi_r=\boxed{\quad}$

❸ 같은 것이 있는 순열

n개 중에서 같은 것이 각각 p개, q개, $\cdots$, r개씩 있을 때, n개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{n!}{\boxed{\quad}}$ (단, $p+q+\cdots+r=n$)

기본 문제

1 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.

2 0, 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오.

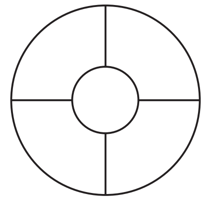
3 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 2\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f의 개수를 구하시오.

4 여섯 개의 숫자 1, 1, 2, 2, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

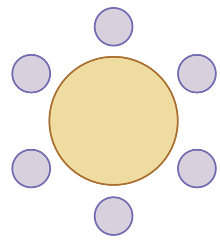
5 college에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, c 또는 e가 첫 번째에 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

표준 문제

6 오른쪽 그림은 중심이 같은 두 원 사이를 4등분 한 도형이다. 서로 다른 5개의 색을 모두 사용하여 이 도형의 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



7 오른쪽 그림과 같은 원탁에 세 쌍의 부부가 둘러앉을 때, 부부끼리 이웃하게 앉는 경우의 수를 구하시오.



8 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A\cup B=U,\ A\cap B=\varnothing$$

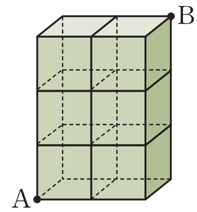
이 성립하도록 하는 A, B의 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.

서술형 **9** 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중에서 $f(1)+f(2)=4$를 만족시키는 함수의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

10 일곱 개의 숫자 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3을 모두 사용하여 만들 수 있는 일곱 자리 자연수 중에서 짝수의 개수를 구하시오.

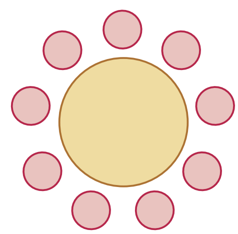
11 여섯 개의 문자 a, b, c, d, e, f를 일렬로 나열할 때, b가 c보다 앞에 오도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

12 오른쪽 그림은 크기가 같은 정육면체 6개를 쌓아 만든 직육면체이다. 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



발전 문제

서술형 **13** 오른쪽 그림과 같이 9개의 자리가 있는 원탁에 남학생 3명과 여학생 3명이 둘러앉으려고 한다. 남학생 1명과 여학생 1명이 한 조씩 총 3개의 조를 이루어 다른 조원 사이에는 빈자리를 두고 같은 조원들끼리는 이웃하게 앉는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



창의·융합 **14** 발명가 모스(Morse, S., 1791~1872)가 고안한 모스 부호는 짧은 발신 전류(·)와 긴 발신 전류(−)를 적절히 조합하여 문자와 숫자 등을 나타내는 전신 부호이다. 예를 들어 '· −'는 알파벳 A를, '· − − − −'는 숫자 1을 나타낸다. 두 기호 ·과 −를 합해서 3개 이상 6개 이하로 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수를 구하시오.

추론 **15** 6개의 계단을 한 번에 한 계단 또는 두 계단씩 올라가는 경우의 수를 구하시오.