기온, 해수면의 높이, 태양의 고도 등은 시간의 흐름에 따라 연속적으로 변한다. 전류가 흐르려면 전기 회로가 이어져 있어야 하고, 강을 사이에 두고 마주 보는 두 지역을 자동차나 기차로 이동하려면 두 지역을 잇는 도로나 철도가 끊어지지 않고 연결되어 있어야 한다.

이와 같이 끊어지지 않고 이어져 있는 것, 즉 연속의 개념은 자연 현상이나 우리의 실생활과 밀접하게 관련되어 있다.

이 단원에서는 함수의 연속을 알아본다.

2 함수의 연속

준비학습

1 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=-x^2+5$ (2) $y=x^2-4x+6\ (-1\leq x\leq 3)$

2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+2)$ (2) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2+x-6}$

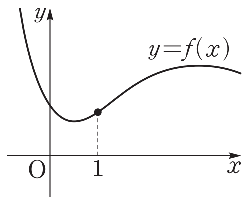
1 함수의 연속

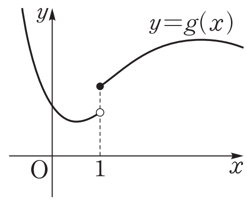
- 함수의 연속의 뜻을 안다.

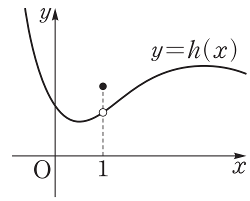
함수의 연속이란 무엇일까

생각 톡

다음은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프이다.







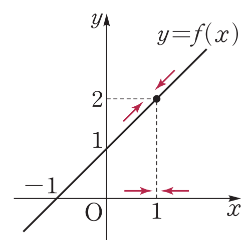
탐구 ① 그래프가 $x=1$에서 끊어져 있는 함수를 말해 보자.

탐구 ② 그래프가 $x=1$에서 이어져 있는 함수를 말해 보자.

함수

$$f(x)=x+1$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 이어져 있다.



이때 $f(1)=2$이고 $\lim_{x \to 1} f(x)=2$이므로

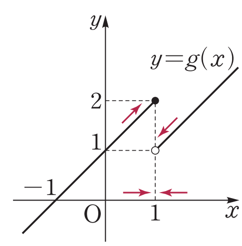
$$\lim_{x \to 1} f(x)=f(1)$$

이다.

한편 함수

$$g(x)=\begin{cases} x & (x>1) \\ x+1 & (x \le 1) \end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 끊어져 있다.



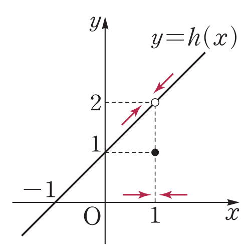
이때 $g(1)=2$이지만 $x=1$에서 극한값이 존재하지 않는다.

함수 $g(x)$에 대하여
$\lim_{x \to 1+} g(x)=1$, $\lim_{x \to 1-} g(x)=2$
이므로 우극한과 좌극한이 같지 않다.

또 함수

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x \ne 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 끊어져 있다.



이때 $h(1)=1$이지만 $\lim_{x \to 1} h(x)=2$이므로

$\lim_{x \to 1} h(x) \ne h(1)$이다.

$\lim_{x \to 1} h(x)$
$=\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$
$=\lim_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$
$=\lim_{x \to 1}(x+1)=2$

코시(Cauchy, A. L., 1789~1857)
프랑스의 수학자로 함수의 연속을 현대적 개념으로 엄밀하게 정의했다.
(출처: Larson, R. 외, 『Essential Calculus: Early Transcendental Functions』)

일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

> (ⅰ) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.
> (ⅱ) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.
> (ⅲ) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다. 즉 함수 $f(x)$가 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

예제 1 **다음 함수가 $x=2$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.**

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & (x\neq 2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$

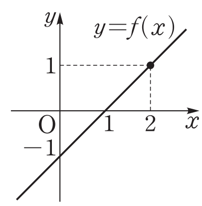
풀이 (1) 함수 $f(x)$에 대하여

(ⅰ) $f(2)=1$

(ⅱ) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$

(ⅲ) $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.



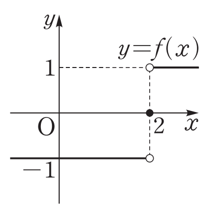
(2) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 $f(2)=0$으로 정의되어 있지만

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} \frac{x-2}{x-2}=1,$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} \frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

이므로 극한값 $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.



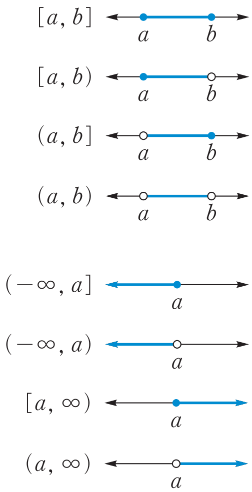
답 (1) 연속　(2) 불연속

문제 1 **다음 함수가 $x=-1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.**

(1) $f(x)=x^2+1$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & (x\neq -1) \\ -4 & (x=-1) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & (x\geq -1) \\ x^2-2 & (x< -1) \end{cases}$

연속함수란 무엇일까



두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 집합

$$\{x \mid a \le x \le b\},\ \{x \mid a \le x < b\},\ \{x \mid a < x \le b\},\ \{x \mid a < x < b\}$$

를 각각 **구간**이라 하고, 이것을 기호로 각각

$$[a,\ b],\ [a,\ b),\ (a,\ b],\ (a,\ b)$$

와 같이 나타낸다.

이때 $[a,\ b]$를 **닫힌구간**, $(a,\ b)$를 **열린구간**이라고 하며 $[a,\ b)$와 $(a,\ b]$를 **반닫힌 구간** 또는 **반열린 구간**이라고 한다.

또 집합

$$\{x \mid x \le a\},\ \{x \mid x < a\},\ \{x \mid x \ge a\},\ \{x \mid x > a\}$$

도 각각 구간이라 하고, 이것을 기호로 각각

$$(-\infty,\ a],\ (-\infty,\ a),\ [a,\ \infty),\ (a,\ \infty)$$

와 같이 나타낸다.

특히 실수 전체의 집합은 기호로 $(-\infty,\ \infty)$와 같이 나타낸다.

문제 2 다음 함수의 정의역을 구간의 기호로 나타내시오.

(1) $f(x)=x^2-3x-1$　　(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$

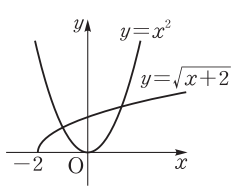
어떤 구간에서 연속인 함수의 그래프는 그 구간에서 이어져 있다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 **연속함수**라고 한다.

특히 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다.

(i) 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b-} f(x)=f(b)$



보기 ❶ 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

❷ 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$는 구간 $(-2,\ \infty)$에서 연속이고 $\lim\limits_{x\to -2+} f(x)=f(-2)$이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[-2,\ \infty)$에서 연속이다.

문제 3 다음 함수가 연속인 구간을 구하시오.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$　　(2) $f(x)=\sqrt{2x-1}$

예제 2 **다음 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.**

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & (x\geq 2) \\ x^2+3x+a & (x<2) \end{cases}$$

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2) \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+}(2x+1)=5,$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-}(x^2+3x+a)=10+a,$$

$$f(2)=2\times 2+1=5$$

이므로 ①에서 $\quad 10+a=5$

$$a=-5$$

답 -5

문제 4 **다음 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.**

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x+a} & (x>-1) \\ -x^2+2x+7 & (x\leq -1) \end{cases}$$

찾아보기

다음은 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속인 경우이다.

(1) $x=1$에서 정의되지 않고, 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지 않는다.

(2) $x=1$에서 정의되지 않고, 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재한다.

(3) $x=1$에서 정의되어 있고, 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지 않는다.

(4) $x=1$에서 정의되어 있고, 극한값 $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지만 $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$이다.

(1)~(4)에 속하는 함수 $f(x)$의 예를 각각 하나씩 찾아 그래프를 그려 보자.

수학 역량 플러스

창의·융합 문제 해결

주차 요금 함수

오른쪽은 어느 주차장의 소형차에 대한 주차 요금 안내표이다. 다음과 같이 이 주차장에 소형차를 주차할 때, 표를 이용하여 주차 요금을 구해 보자.

주차 요금 안내

차량	시간	요금
소형	최초 60분	2000원
	60분 초과 시 30분당	1000원
	1일 최대 주차 요금	10000원

1 오후 2시부터 오후 4시 30분까지 주차할 때

최초 60분의 요금 ➡ 2000(원)

추가 90분의 요금 ➡ $1000\times3=3000$(원)

합계 ➡ 5000(원)

2 오후 2시부터 오후 4시 40분까지 주차할 때

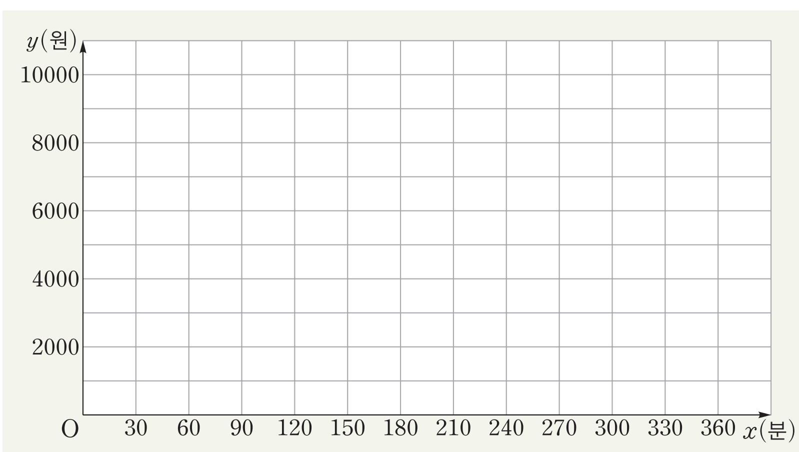
최초 60분의 요금 ➡ 2000(원)

추가 100분의 요금 ➡ $1000\times3+1000=4000$(원)

합계 ➡ 6000(원)

활동 1 오전 10시부터 오후 1시 50분까지 소형차를 주차할 때, 주차 요금을 구해 보자.

활동 2 소형차를 x분 동안 주차할 때의 주차 요금을 $f(x)$원이라고 하자. 다음 좌표평면에 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보고, 불연속인 x의 값의 개수를 구해 보자. (단, $0<x\le360$)



2 연속함수의 성질

● 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

연속함수에는 어떤 성질이 있을까

생각 톡

두 함수 $f(x)=x^2-1$과 $g(x)=2x$는 모두 $x=0$에서 연속이다.

탐구 ① $f(0)+g(0)$의 값과 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$의 값을 구하여 비교해 보자.

탐구 ② 탐구 ①의 결과로부터 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 연속이라고 할 수 있는지 말해 보자.

연속함수의 성질을 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cf(a)\ (\text{단, } c\text{는 상수})$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=f(a)-g(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}\ (\text{단, } g(a)\neq0)$$

따라서 함수 $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

❶ $cf(x)$ (단, c는 상수)

❷ $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

❸ $f(x)g(x)$

❹ $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq0$)

함수 $y=x$는 모든 실수에서 연속이므로 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4,\ \cdots$$

은 연속함수의 성질 ❸에 의하여 모든 실수에서 연속이다. 또 상수함수도 모든 실수에서 연속이다.

따라서 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

도 연속함수의 성질 ❶, ❷에 의하여 모든 실수에서 연속이다.

또한 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 유리함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 연속함수의 성질 ❹에 의하여 $g(x)\neq0$인 모든 실수에서 연속이다.

보기

❶ 함수 $f(x)=2x^2-x+1$은 모든 실수에서 연속이다.

❷ 함수 $f(x)=\dfrac{3}{x+1}$은 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이다.

문제 1 다음 함수의 연속성을 조사하시오.

(1) $f(x)=x^2+5x$ (2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$

찾아보기

다음은 다항함수가 아닌 유리함수에 대한 두 학생의 대화이다.

다항함수가 아닌 유리함수 중에서 모든 실수에서 연속인 함수의 예를 찾아보자.

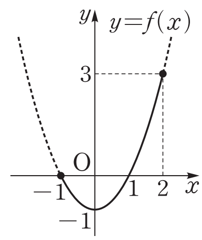
최대·최소 정리란 무엇일까

연속함수의 최댓값과 최솟값을 알아보자.

함수 $f(x)=x^2-1$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.
이때 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서

$$x=2\text{일 때 최댓값 } f(2)=3$$
$$x=0\text{일 때 최솟값 } f(0)=-1$$

을 갖는다.

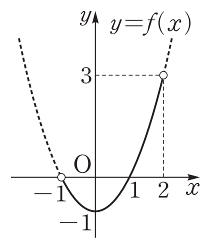


닫힌구간이 아닌 구간에서는 연속함수이더라도 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않을 수 있다.

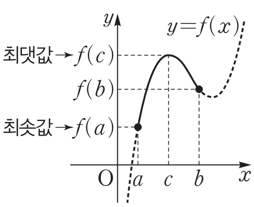
한편 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 2)$에서

$$x=0\text{일 때 최솟값 } f(0)=-1$$

을 갖지만 최댓값은 갖지 않는다.



일반적으로 닫힌구간에서 연속인 함수에 대하여 다음이 성립하고, 이것을 **최대·최소 정리**라고 한다.



> **최대·최소 정리**
>
> 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

문제 2 **주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.**

(1) $f(x)=x^2+2x-1\quad[-2,\ 1]$ (2) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}\quad[0,\ 3]$

이야기 수학

아날로그와 디지털

자연이나 물질의 연속적인 정보나 신호를 그대로 다루는 방식을 아날로그라 하고, 한 자리씩 끊어서 불연속적인 정보로 전환하여 나타내는 방식을 디지털이라고 한다.

예를 들어 알코올 온도계에서 알코올의 높이로 온도를 나타내는 것은 아날로그 방식이며, 측정된 온도를 0.1 ℃ 단위의 숫자로 나타내는 것은 디지털 방식이다.

음악이나 영상을 저장하거나 전송하는 방식에도 아날로그 방식과 디지털 방식이 있는데, 최근에는 저장과 전달이 쉽고 전송된 데이터의 변형이 거의 없는 디지털 방식이 많이 사용된다.

(출처: 두산백과사전, 2016년)

사잇값의 정리란 무엇일까

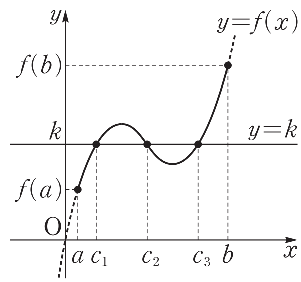
생각톡

인천국제공항을 출발하여 어느 도시로 이동하는 비행기가 있다. 오른쪽은 이 비행기가 출발한 지 4시간이 지났을 때의 비행 정보를 나타낸 것이다.

탐구 이 비행기가 출발할 때 인천국제공항의 외부 기온이 10 ℃이었다면 출발한 후 4시간 동안 외부 기온이 0 ℃인 순간이 있었는지 말해 보자.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 이어져 있다.

따라서 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 직선 $y=k$는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 적어도 한 점에서 만남을 알 수 있다.



즉 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 **사잇값의 정리**라고 한다.

사잇값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여

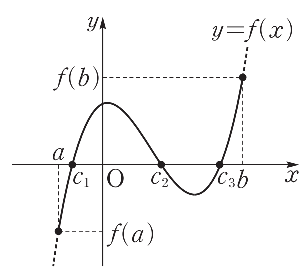
$$f(c)=k$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

사잇값의 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면

$$f(c)=0$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



즉 방정식 $f(x)=0$은 a와 b 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

예제 1 **방정식 $x^3-3x-1=0$이 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.**

증명 $f(x)=x^3-3x-1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$$f(1)=-3<0,\ f(2)=1>0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3x-1=0$은 열린구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

문제 3 **다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.**

(1) $x^3-x^2+9x+1=0\quad(-2,\ 1)$　　(2) $x^4-3x^3+2=0\quad(2,\ 3)$

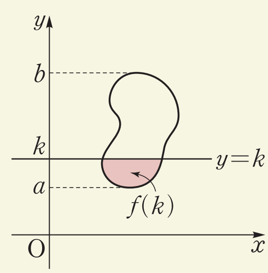
설명하기

사잇값의 정리를 이용하면 평면도형의 넓이를 이등분하는 직선이 존재함을 다음과 같이 보일 수 있다.

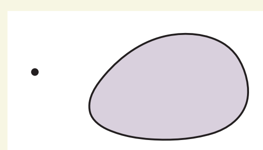
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 넓이가 S인 도형이 있다. 직선 $y=k\ (a\le k\le b)$에 의하여 나누어진 도형의 아래쪽 부분의 넓이를 $f(k)$라고 하면 함수 $f(k)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고

$$f(a)=0,\ f(b)=S$$

이다. 따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=\frac{1}{2}S$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉 주어진 도형의 넓이를 이등분하는 직선 $y=c$가 존재한다.



오른쪽 그림과 같이 평면 위에 한 점과 도형이 있다. 주어진 점을 지나면서 도형의 넓이를 이등분하는 직선이 존재하는지 설명해 보자.



수학 역량 플러스

추론 정보 처리

실근의 어림수 찾기

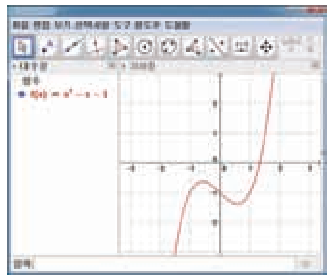
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 이때 구간을 $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$와 같이 절반으로 나누어 실근이 존재하는 구간의 범위를 줄여 나가면 방정식 $f(x)=0$의 실근의 어림수를 구할 수 있는데, 이 방법을 이분법(Bisection Method)이라고 한다.

이분법을 이용하여 방정식 $x^3-x-1=0$의 실근의 어림수를 찾아보자.

$f(x)=x^3-x-1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고

$$f(1)=-1<0,\ f(2)=5>0$$

이므로 방정식 $x^3-x-1=0$의 한 실근 k는 열린구간 $(1, 2)$에 있음을 알 수 있다.



또 $x=\dfrac{1+2}{2}=1.5$이고 $f(1.5)=0.875>0$이므로 k는 열린구간 $(1, 1.5)$에 있음을 알 수 있다.

이와 같은 과정을 반복하면 k의 어림수를 구할 수 있다.

활동 1 다음은 스프레드 시트를 이용하여 위의 과정을 반복한 것이다. 이를 이용하여 열린구간 $(1.25, 1.3125)$와 $(1.3125, 1.375)$ 중에서 k가 존재하는 구간을 찾아보자.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		x	f(x)		x	f(x)		x	f(x)		x	f(x)	
2		1	-1		1	-1		1.25	-0.2969		1.25	-0.2969	
3		1.5	0.875	→	1.25	-0.2969	→	1.375	0.22461	→	1.3125	-0.0515	…
4		2	5		1.5	0.875		1.5	0.875		1.375	0.22461	
5													

활동 2 방정식 $x^3+2x+2=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 위와 같은 방법으로 주어진 방정식의 실근이 존재하는 열린구간을 2개 찾아보자.

중단원 마무리

• 정답 및 풀이 159쪽

❶ 함수의 연속

(1) 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(i) 함수 $f(x)$는 $\boxed{\quad}$에서 정의되어 있다.

(ii) 극한값 $\boxed{\qquad}$가 존재한다.

(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\boxed{\quad}$

(2) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, $f(x)$는 $x=a$에서 $\boxed{\quad}$이라고 한다.

(3) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 실수에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 $\boxed{\quad}$함수라고 한다.

(4) 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라고 한다.

(i) 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

(ii) $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=\boxed{\quad}$, $\lim\limits_{x \to b-} f(x)=\boxed{\quad}$

❷ 연속함수의 성질

(1) **연속함수의 성질**

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

① $cf(x)$ (단, c는 상수)

② $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$

③ $f(x)g(x)$

④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

(2) **최대·최소 정리**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $\boxed{\quad}$이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

(3) **사잇값의 정리**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $\boxed{\qquad}$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

기본 문제

1 다음 함수가 $x=-2$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.

(1) $f(x)=x^3-3x+1$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & (x \neq -2) \\ 0 & (x=-2) \end{cases}$

2 다음 함수가 연속인 구간을 구하시오.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+x+1$

(2) $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$

3 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

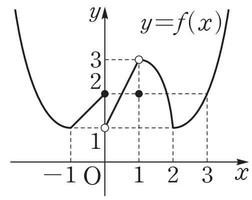
(1) $f(x)=x^2-4x+1$

(2) $f(x)=\dfrac{x+6}{x+4}$

4 방정식 $x^3+2x^2-4x-2=0$이 열린구간 $(-1,\ 0)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

표준 문제

5 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.



보기

ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)=3$　　　ㄴ. $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

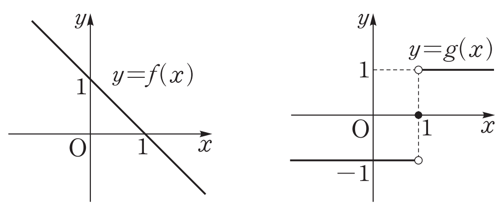
ㄷ. 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 2개이다.

ㄹ. 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 2개이다.

6 다음 함수가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+a}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$　　　(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$

7 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하시오.



서술형

8 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)f(x)}{x^2-9}=2$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

• 정답 및 풀이 159쪽

9 연속함수 $f(x)$가 $f(-2)<0$, $f(-1)>0$, $f(1)<0$을 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2,\ 1)$에서 적어도 2개의 실근을 가짐을 보이시오.

발전 문제

문제 해결 **10** 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원을 C_1, 중심이 점 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $x\ (x>0)$인 원을 C_2라고 하자. 두 원 C_1, C_2의 교점의 개수를 $f(x)$라고 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리시오.
(2) 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값을 구하시오.

서술형 **11** 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+a & (0\le x<1) \\ bx+1 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시킬 때, 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론 **12** 세 실수 a, b, $c\ (a<b<c)$에 대하여 이차방정식

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가짐을 보이시오.

대단원 마무리

01 다음 중 극한값이 존재하는 것은?

① $\lim_{x\to0}\frac{3}{x}$
② $\lim_{x\to\infty}(x^2-5x)$
③ $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{|x-1|}$
④ $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}$
⑤ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x^2}$

02 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\lim_{x\to2}(x^2-3x-2)=-4$
② $\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=5$
③ $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{2x^2-3x+1}=\frac{3}{2}$
④ $\lim_{x\to1}\frac{6}{x-1}\left(x-\frac{3}{x+2}\right)=6$
⑤ $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}=\frac{1}{4}$

03 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-3}{x-2}$의 값을 구하시오.

04 함수 $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4x+9}-3}{x-4}$에 대하여

$\lim_{x\to\infty}f(x)=a$, $\lim_{x\to4}f(x)=b$

일 때, $3ab$의 값을 구하시오.

05 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=6$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2+3f(x)}{x^3-1}$의 값을 구하시오.

06 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오. (단, a는 실수)

보기

ㄱ. 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$가 존재하면 극한값 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재한다.

ㄴ. 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$가 존재하면 극한값 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재한다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이면 $\lim_{x\to a}f(x)<\lim_{x\to a}g(x)$이다.

ㄹ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=k$ (k는 실수)이면 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이다.

• 정답 및 풀이 160쪽

07 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=3$이고 $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=1$일 때, $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$의 값을 구하시오.

08 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
>
> (나) $\lim_{x\to\infty}\{2f(x)-g(x)\}=5$

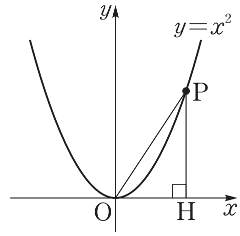
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{3f(x)+g(x)}{9f(x)-4g(x)}$의 값을 구하시오.

09 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=2,\ \lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=-4$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

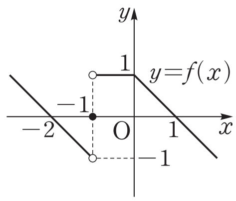
10 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P가 제1사분면 위에 있다. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{OH}}=x$라고 할 때, $\lim_{x\to\infty}(\overline{\mathrm{PO}}-\overline{\mathrm{PH}})$의 값을 구하시오. (단, O는 원점)



11 $x>0$일 때, $\dfrac{3x^2-1}{x+3}\le f(x)\le\dfrac{6x^2}{2x+1}$을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

12 함수 $f(x)=\begin{cases}-x+a & (x\ge 1)\\ x^2+3x-1 & (x<1)\end{cases}$이 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.

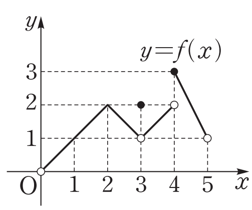
13 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)g(x)$가 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$로 알맞은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.



보기
ㄱ. $g(x)=x^2-1$
ㄴ. $g(x)=|x|-1$
ㄷ. $g(x)=x-1$

14 함수 $f(x)=\begin{cases} 0 & (|x|>1) \\ 1 & (x=1) \\ 1-|x| & (|x|<1) \\ -1 & (x=-1) \end{cases}$에 대하여 두 함수 $f(x)+f(-x)$, $f(x)-f(-x)$가 불연속인 x의 값의 개수를 각각 m, n이라고 할 때, $m+n$의 값을 구하시오.

15 열린구간 $(0,\ 5)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.



보기
ㄱ. 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 최댓값을 갖는다.
ㄴ. 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 최솟값을 갖는다.
ㄷ. 닫힌구간 $[3,\ 4]$에서 최댓값을 갖지 않는다.

16 닫힌구간 $[1,\ 3]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{4x+1}{2x-1}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

17 두 곡선 $y=2x^4-7x^3+x^2$, $y=-2x^2-7x+1$은 $-1<x<0$에서 적어도 하나의 교점을 가짐을 보이시오.

18 다음 조건을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$가 있다. 방정식 $f(x)=0$이 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 적어도 3개의 실근을 가짐을 보이시오.

(가) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=2$　　(나) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=1$

서술형

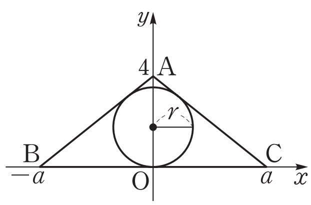
• 정답 및 풀이 161쪽

19 $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x-2)}{x-2}=5$일 때, $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-6f(x)}{x+f(x)}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

20 다음 그림과 같이 세 점 A$(0,\ 4)$, B$(-a,\ 0)$, C$(a,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라고 할 때, $\lim_{a\to 0+}\dfrac{a}{r}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, $a>0$)



풀이

21 두 함수

$$f(x)=x^3+2x+3,\ g(x)=x^2+ax+4$$

에 대하여 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

22 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-5)f(x)=x^2-x+a$$

를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, a는 상수)

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 함수의 극한의 뜻을 알고 있다.			
❷ 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.			
❸ 함수의 연속의 뜻을 알고 있다.			
❹ 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

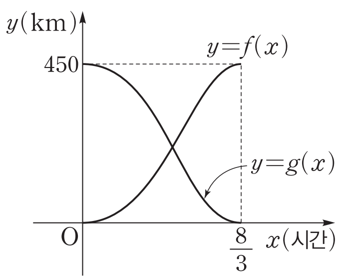
창의·융합 프로젝트

같은 시각에 같은 지점을 지날 수 있을까

서울역에서 450 km 떨어진 부산역까지 고속 열차를 타고 이동하면 약 2시간 40분이 걸린다.

어느 날 정오에 서울역에서 하행선 고속 열차를 타고 부산역에 갔다가 다음 날 정오에 부산역에서 상행선 고속 열차를 타고 서울역으로 돌아왔다고 한다. 부산역에서 서울역으로 돌아올 때, 전날과 같은 시각에 같은 지점을 지나는 순간이 있었음을 사잇값의 정리를 이용하여 확인해 보자.

하행선 고속 열차가 출발한 지 x시간 후 서울역으로부터의 거리를 $f(x)$ km, 상행선 고속 열차가 출발한 지 x시간 후 서울역으로부터의 거리를 $g(x)$ km라고 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{8}{3}\right]$에서 연속이고, 그 그래프는 다음과 같다.



과제 1 상행선 고속 열차가 전날의 하행선 고속 열차와 같은 시각에 같은 지점을 지나는 순간이 있었음을 알아보기 위한 방정식을 세우고 사잇값의 정리를 이용하여 설명해 보자.

과제 2 다음에 제시된 소재 중 하나를 사용하여 사잇값의 정리를 이용하는 문제를 만들고, 이를 풀어 보자.

몸무게	높이	키	기온

디지털 영상 복원과 연속함수

몇백 년 전에 그려진 그림이 얼마 되지 않은 그림처럼 보일 때가 있는데 이것은 미술품 복원가들이 꾸준히 복원 작업을 한 덕분이다. 미술품 복원가는 오염된 표면을 깨끗이 하고 들뜬 부분을 접합하며, 없어진 부분을 메우면서 오래된 미술품들을 복원한다.

오래된 미술품을 복원하는 것처럼 훼손된 영상도 원본을 복원할 수 있는데 복원 작업을 하면 좀 더 질이 좋은 영상을 얻을 수 있다.

한국 장편 영화 중 처음으로 복원된 영화는 1976년에 개봉하였던 만화 영화인데 이 영화는 개봉 당시의 원본 필름의 복사본을 디지털 복원하여 2007년 극장에서 재개봉하였다. 원본 필름이 상당 부분 손상된 상태였으나 2년이 넘는 기간 동안 복원 작업을 하여 90 % 가까이 복원하였으며 이 과정에서 영상의 색감도 향상되었다.

디지털 영상을 복원할 때에는 수학을 이용한 여러 가지 알고리즘이 쓰이는데 특히 연속함수의 개념이 이용된다. 손상된 부분 주위의 색상, 남아 있는 선들과 없어진 선들 사이의 경계가 변하는 방향 등 손상된 부분 주위의 알려진 정보가 손상된 부분까지 연속적으로 변한다고 가정하고, 수많은 계산을 거쳐 복원 작업을 진행한다.

(출처: 대한수학회, 2016년,
『Beautiful Life with Seoul Arts Center』, 2009년 5월호)

진로 탐색

영화 복원원 | 시간이 경과하여 상영이 불가능하거나 영상 품질이 떨어진 필름을 원상태에 가깝게 복원하는 사람으로, 영화 필름을 디지털 방식으로 복원하여 상영용 필름, 디지털 콘텐츠 파일 등을 만든다.

(출처: 워크넷, 2016년)