I 함수의 극한과 연속

① 함수의 극한

② 함수의 연속

코시
(Cauchy, A. L., 1789~1857)
함수의 극한과 연속의 개념을 수학적으로 체계화하고, 해석학의 엄밀한 토대를 세웠다.
(출처: Bell, E. T., 『The Development of Mathematics』)

바이어슈트라스
(Weierstrass, K. T. W., 1815~1897)
극한과 연속의 개념을 엄밀하게 정의하였고, 해석학의 이론을 정밀화하는 데 기여하였다.
(출처: 박세희, 『수학의 세계』)

학습목표

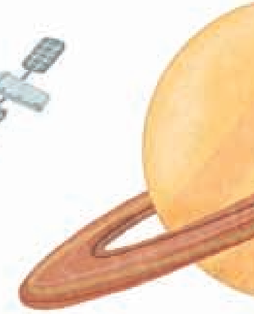
- **함수의 극한**의 뜻을 안다.
- **함수의 극한에 대한 성질**을 이해하고, **함수의 극한값**을 구할 수 있다.
- **함수의 연속**의 뜻을 안다.
- **연속함수의 성질**을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

과거와 미래를 다루는 수학 도구

우리가 살아가며 경험하는 다양한 자연 현상과 사회 현상은 함수로 나타낼 수 있다.

예를 들어 조수 간만의 차, 천체의 운동, 인구의 변화, 주가 지수나 화폐 가치의 변동 등은 시간에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

함수의 극한과 연속의 개념은 우리를 둘러싼 여러 가지 현상이 어떻게 변하는지 분석하고 이를 바탕으로 미래를 예측하는 데 유용한 도구이다.



우주 공간에서 중력이 너무 강해 빛조차도 빠져나올 수 없는 공간을 블랙홀이라고 한다. 블랙홀은 무거워서 아주 작은 크기의 블랙홀이라도 매우 큰 질량을 갖는데, 큰 블랙홀은 수백만 개의 태양을 합쳐 놓은 것과 같은 엄청난 질량을 갖는다고 한다. 블랙홀이 이러한 특징을 갖는 이유는 블랙홀이 생성되는 과정에서 그 크기는 한없이 작아지면서 밀도는 한없이 커지는 현상이 발생하기 때문이다. 이와 같은 자연 현상을 이해하고 설명하는 데에는 함수의 극한을 이용할 수 있다.

이 단원에서는 함수의 극한의 개념과 성질을 알아본다.

(출처: 두산백과사전, 2016년)

1 함수의 극한

준비학습

1 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\dfrac{x}{x-1}$ (2) $y=\sqrt{x-2}+1$

2 다음 식의 분모를 유리화하시오.

(1) $\dfrac{n}{\sqrt{n+1}-1}$ (2) $\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$

1 함수의 극한

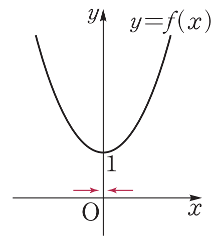
● 함수의 극한의 뜻을 안다.

함수의 극한이란 무엇일까

생각 톡

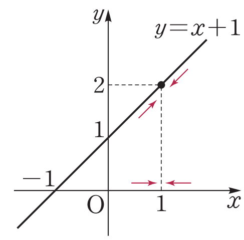
오른쪽 그림은 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프이다.

탐구 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말해 보자.



함수 $f(x)$에서 x의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떻게 변하는지 그래프를 이용하여 알아보자.

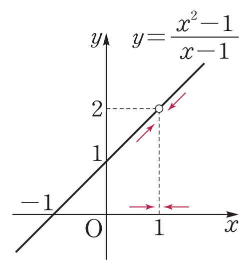
오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=x+1$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



한편 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 정의되지 않고, $x\neq1$인 모든 실수 x에 대하여

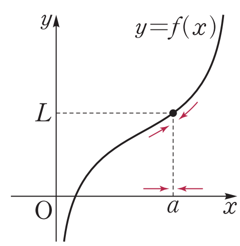
$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

이다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



x의 값이 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a$와 같이 나타낸다.

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 **수렴**한다고 한다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로



lim는 극한을 뜻하는 limit의 약자이다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

예를 들어 앞의 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$에 대하여

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)=2,$$

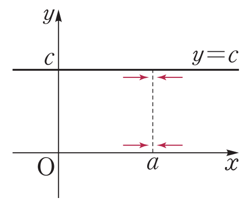
$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않을 때도 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재할 수 있다.

특히 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 c이므로 a의 값에 관계없이 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c$$



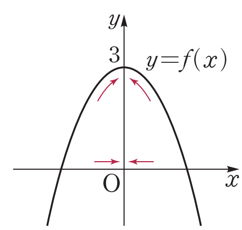
예제 1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to0}(-x^2+3)$　　(2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

풀이 (1) $f(x)=-x^2+3$이라고 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to0}(-x^2+3)=3$$



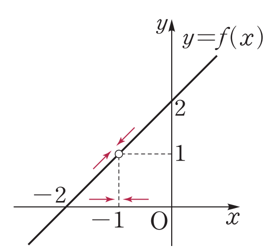
(2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$라고 하면 $x\neq-1$일 때,

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

x의 값이 -1이 아니면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x+1}=1$$



답 (1) 3　(2) 1

문제 1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x\to7}(-x+4)$　　(2) $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-1}$

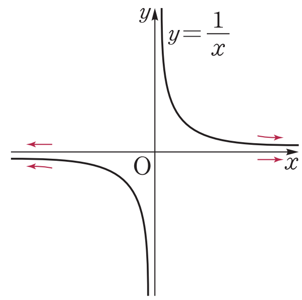
(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$　　(4) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{2}$

월리스(Wallis, J., 1616 ~1703)
영국의 수학자로 1655년 무한대의 기호를 처음 사용하였다.
(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 II』)

x의 값이 한없이 커지는 것을 기호 **∞**를 사용하여 $x \to \infty$와 같이 나타내고 ∞를 **무한대**라고 읽는다. 또 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 기호로 $x \to -\infty$와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 극한을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때도 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \to \infty\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 이것을 기호로

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \to -\infty\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다.

예를 들어 위의 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

이다.

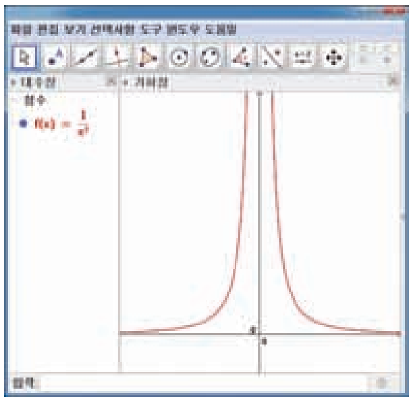
문제 2 **다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.**

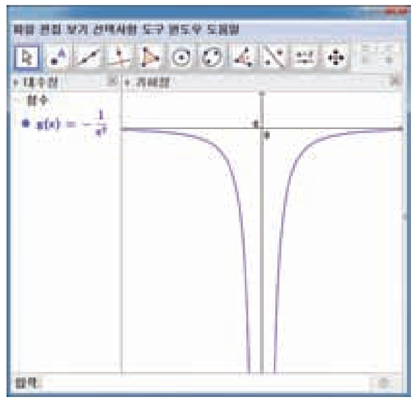
(1) $\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{|x-1|}$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 어느 값으로도 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 **발산**한다고 한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$가 발산하는 경우를 알아보자.

다음은 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프를 그린 것이다.





함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다.

또 함수 $g(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 앞의 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=-\frac{1}{x^2}$에 대하여

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

이다.

문제 3 **다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하시오.**

(1) $\lim_{x\to-1}\frac{1}{|x+1|}$ (2) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{1}{|x|}\right)$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 각각 기호로

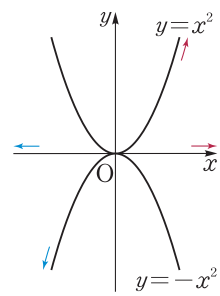
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2=\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$$

이다.



문제 4 **다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하시오.**

(1) $\lim_{x\to\infty}(1-3x^2)$ (2) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-2x}$

이야기 수학

극한의 역사

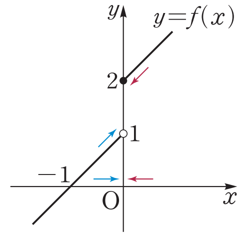
극한의 개념은 고대 그리스 시대부터 도형의 넓이나 부피를 구하는 데 이용되었으나 오랜 기간 동안 명확히 정의되지 않은 채 사용되었다. 극한의 개념을 최초로 명확히 정의한 사람은 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)이었는데, 그는 극한을 '주어진 어떠한 차보다도 더 가까이 접근한 양'이라고 정의하였다. 이 개념은 19세기에 코시(Cauchy, A. L., 1789~1857)와 바이어슈트라스(Weierstrass, K. T. W., 1815~1897)를 통해 현대의 극한의 개념으로 발전되었다. 특히 바이어슈트라스는 기호 'lim'를 도입하였다.

(출처: Stewart, J., 『Calculus』)

함수의 우극한과 좌극한이란 무엇일까

생각톡

오른쪽 그림은 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x \ge 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$의 그래프이다.



탐구 ① x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말해 보자.

탐구 ② x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말해 보자.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **우극한**이라 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a+} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \to a+\text{일 때 } f(x) \to L$$

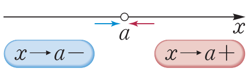
과 같이 나타낸다.

또 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌극한**이라 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a-} f(x)=M \quad \text{또는} \quad x \to a-\text{일 때 } f(x) \to M$$

과 같이 나타낸다.

x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a+$와 같이 나타내고, x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a-$와 같이 나타낸다.



예를 들어 위의 생각톡의 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+}(x+2)=2,$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-}(x+1)=1$$

이다.

문제 5 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>1) \\ -x & (x \le 1) \end{cases}$의 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to 1+} f(x)$ (2) $\lim_{x \to 1-} f(x)$

문제 6 실내 온도가 26 °C 이상일 때만 작동하도록 설정된 에어컨이 있다. 실내 온도가 x °C일 때 이 에어컨의 작동 함수 $f(x)$에 대하여 에어컨이 작동할 때와 작동하지 않을 때의 함숫값을 각각 1과 0이라고 하자. 다음에 답하시오.

(1) 함수 $f(x)$를 구하고, 그 그래프를 그리시오.

(2) $\lim_{x \to 26+} f(x)$, $\lim_{x \to 26-} f(x)$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 L이면 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 모두 L과 같다. 또 그 역도 성립하므로 다음이 성립한다.

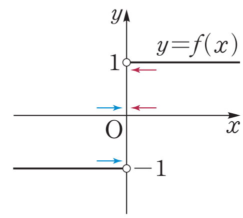
$$\lim_{x\to a} f(x)=L \iff \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L$$

한편 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 같지 않으면 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

예를 들어 함수

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$$\lim_{x\to 0+} f(x)=1,$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$$

이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

이다.

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$는 존재하지 않는다.

문제 7 **다음 극한값이 존재하는지 조사하고, 존재하면 그 값을 구하시오.**

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|}$ (2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{|x-1|}$

찾아보기

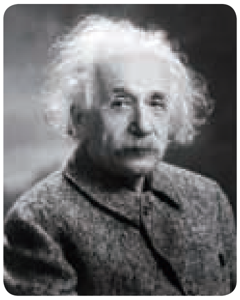
다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 예를 각각 하나씩 찾아보자.

(1) $x=2$에서 우극한은 존재하지만 좌극한은 존재하지 않는 함수 $f(x)$
(2) $x=2$에서 좌극한은 존재하지만 우극한은 존재하지 않는 함수 $f(x)$
(3) $x=2$에서 우극한과 좌극한이 모두 존재하지만 극한값은 존재하지 않는 함수 $f(x)$

수학 역량 플러스

아인슈타인의 특수 상대성 이론

창의·융합 의사소통



1905년 아인슈타인(Einstein, A., 1879~1955)이 발표한 특수 상대성 이론은 시간과 공간, 물질과 에너지 등에 대한 기존 관념을 새롭게 바꾸는 계기가 되었다.

이 이론은 다음의 두 가지를 가정하고 있다.

❶ 등속으로 움직이는 모든 관측자에게 적용되는 물리 법칙은 동일하다.

❷ 빛은 등속으로 움직이는 모든 관측자에 대하여 같은 속도로 움직인다.

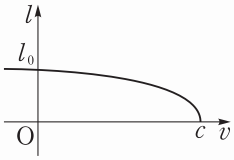
이러한 가정 아래에서 시간과 공간은 절대적인 것이 아니라 변화 가능한 것으로 간주되며 운동하는 물체의 길이와 질량도 그 운동 속도에 따라 변하는 것으로 파악된다.

정지 상태에서 길이가 l_0이고 질량이 m_0인 물체가 관측자에 대하여 속도 v로 움직일 때, 관측자가 측정한 물체의 길이 l과 질량 m은 다음과 같다.

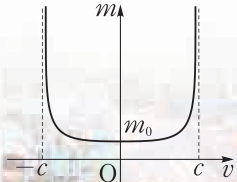
$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\quad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ (단, c는 빛의 속도로, 약 3×10^8 m/s이다.)

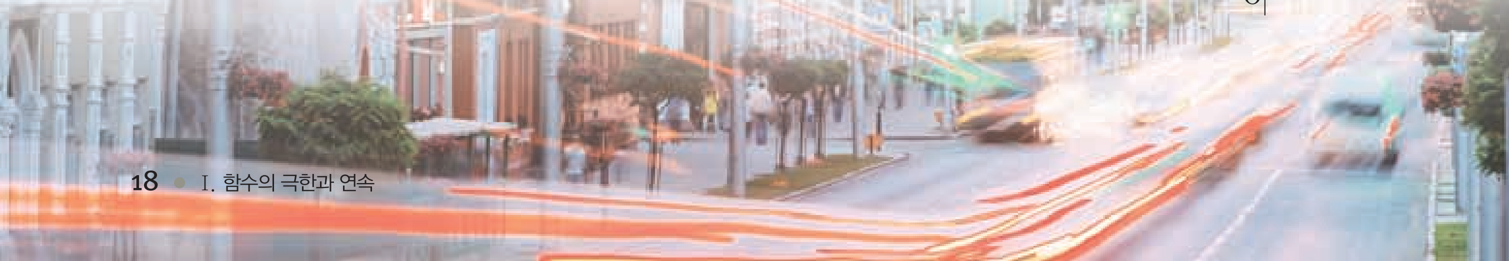
(출처: Katz, R., 『An Introduction to the Special Theory of Relativity』)

활동 1 오른쪽 그림은 함수 $l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$의 그래프이다. 극한 $\lim\limits_{v\to c-} l$을 조사하고, 위의 내용을 바탕으로 그 의미를 설명해 보자.



활동 2 오른쪽 그림은 함수 $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$의 그래프이다. 극한 $\lim\limits_{v\to c-} m$을 조사하고, 위의 내용을 바탕으로 그 의미를 설명해 보자.





2 함수의 극한에 대한 성질

- 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

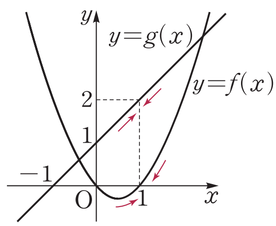
함수의 극한에는 어떤 성질이 있을까

생각 톡

오른쪽 그림은 두 함수 $f(x)=x^2-x$, $g(x)=x+1$의 그래프이다.

탐구 ① $\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)$의 값을 구해 보자.

탐구 ② $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값을 구해 보고 **탐구 ①**의 결과와 비교해 보자.



위의 생각 톡의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서

$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)$$

가 성립함을 알 수 있다.

함수의 극한에 대하여 다음과 같은 성질이 성립함이 알려져 있다.

> **함수의 극한에 대한 성질**
>
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재할 때
>
> ① $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$ (단, c는 상수)
>
> ② $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$
>
> ③ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$
>
> ④ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$
>
> ⑤ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $\lim_{x\to a} g(x)\neq0$)

함수의 극한에 대한 성질은 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ 일 때도 성립한다.

실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} c=c$ (c는 상수)이고, $\lim_{x\to a} x=a$이다. 이 사실과 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 그래프를 이용하지 않고도 함수의 극한값을 구할 수 있다.

보기

① $\lim_{x\to1}(x^2-3)=\lim_{x\to1} x^2-\lim_{x\to1} 3=\lim_{x\to1} x\cdot\lim_{x\to1} x-\lim_{x\to1} 3=1\times1-3=-2$

② $\lim_{x\to2}\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{\lim_{x\to2} 2x}{\lim_{x\to2}(x+1)}=\dfrac{2\lim_{x\to2} x}{\lim_{x\to2} x+\lim_{x\to2} 1}=\dfrac{2\times2}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

문제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 2}(2x-1)$ (2) $\lim_{x\to -1}(-x^2+6)$

(3) $\lim_{x\to 0}(10x+1)(-7x+2)$ (4) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-x}{x+1}$

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 여러 가지 함수의 극한값을 구해 보자.

극한 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$일 때, $f(x)$, $g(x)$가 다항식이면 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 분자와 분모를 인수분해하여 극한값을 구하고, $f(x)$ 또는 $g(x)$에 근호가 있으면 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 분자 또는 분모를 유리화하여 극한값을 구한다.

예제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2-1)=0$
$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$

(2) $\lim_{x\to 2}(\sqrt{x-1}-1)=0$
$\lim_{x\to 2}(x-2)=0$

풀이 (1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

(2) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{1}{2}$

문제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ (2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$ (4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x+1}-1}$

극한 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$일 때에는 $\frac{f(x)}{g(x)}$의 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 나눈 후 극한값을 구한다.

또 극한 $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$에서 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$일 때에는 $f(x)-g(x)$를 적절하게 변형한 후 극한값을 구한다.

예제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+5}{4x^2-x-1}$ (2) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^2-x+5)=\infty$
$\lim_{x\to\infty}(4x^2-x-1)=\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}=\infty$
$\lim_{x\to\infty}x=\infty$

풀이 (1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+5}{4x^2-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{4}$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)&=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

문제 3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2-3}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(3x-1)}{x^2-x+1}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2-x}-x}$ (4) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 함수의 극한에 대한 성질에 의하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)\\&=\alpha\cdot 0=0\end{aligned}$$

즉 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

예제 3 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$가 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

풀이 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}$가 존재하고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$$

즉 $1+a+b=0$이므로

$$b=-a-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+a+1)\\&=a+2\end{aligned}$$

이므로

$$a+2=5, \qquad a=3$$

$a=3$을 ①에 대입하면 $\qquad b=-3-1=-4$

답 $a=3$, $b=-4$

문제 4 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

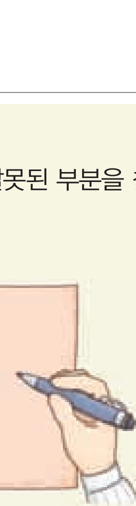
(1) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax-b}{x+1}=-4$

(2) $\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}=\frac{1}{4}$

오류 찾기

다음은 민우가 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-1}$의 값을 구한 과정이다. 민우의 풀이에서 잘못된 부분을 찾아 바르게 고쳐 풀어 보자.

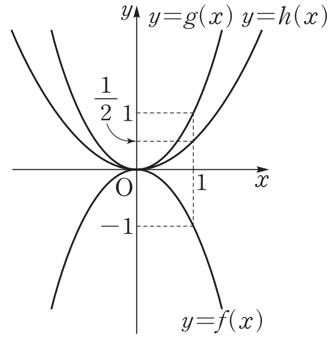
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1$$



함수의 극한의 대소 관계는 어떻게 알까

오른쪽 그림과 같은 세 함수 $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\frac{1}{2}x^2$의 그래프에서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le h(x)\le g(x)$가 성립한다.

또 $\lim_{x\to1} f(x)=-1$, $\lim_{x\to1} g(x)=1$, $\lim_{x\to1} h(x)=\frac{1}{2}$ 이므로 부등식 $\lim_{x\to1} f(x)\le\lim_{x\to1} h(x)\le\lim_{x\to1} g(x)$가 성립함을 알 수 있다.



함수의 극한에 대하여 다음의 대소 관계가 성립함이 알려져 있다.

함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

① $f(x)\le g(x)$이고 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재하면

$$\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$$

② $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L$이면

$$\lim_{x\to a} h(x)=L$$

함수의 극한의 대소 관계는 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ 일 때도 성립한다.

참고 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)$인 경우가 있다. 예를 들어 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2$일 때, 0에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x\to0} f(x)=0$, $\lim_{x\to0} g(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} g(x)$이다.

예제 4 **함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여**

$$-x^2+3\le f(x)\le x^2-4x+5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1} f(x)$의 값을 구하시오.

풀이 $-x^2+3\le f(x)\le x^2-4x+5$이고

$$\lim_{x\to1}(-x^2+3)=2,\ \lim_{x\to1}(x^2-4x+5)=2$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계 ②에 의하여 $\lim_{x\to1} f(x)=2$

답 2

문제 5 **$x>0$일 때, $x-1<f(x)<x+1$을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.**

수학 역량 플러스

함수의 극한의 도형에의 활용

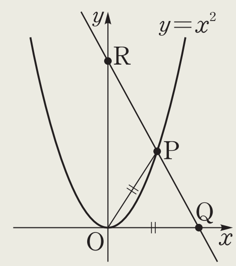
문제 해결 추론

함수의 극한을 이용하면 여러 가지 도형에 대한 문제를 해결할 수 있다.

활동 1 다음은 도형에 대한 문제와 그 풀이 과정이다. (가)~(다)에 알맞은 것을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키도록 점 Q를 x축 위에 잡고, 두 점 P, Q를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 R라고 하자. 점 P가 원점에 한없이 가까워질 때, 점 R가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하시오.

(단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표는 양수이다.)



점 P의 좌표를 $(a,\ a^2)$ $(a>0)$이라고 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=a\sqrt{\boxed{\text{(가)}}}$이므로

$\mathrm{Q}\left(a\sqrt{\boxed{\text{(가)}}},\ 0\right)$

두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-a^2=\frac{-a}{\boxed{\text{(나)}}}(x-a)$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{a^2}{\boxed{\text{(나)}}}+a^2\right)$이다.

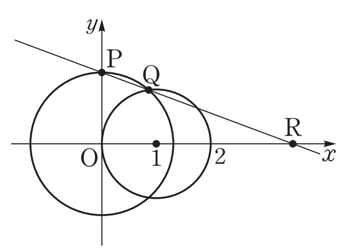
점 P가 원점에 한없이 가까워질 때, $a \longrightarrow 0+$이므로

$$\lim_{a\to0+}\left(\frac{a^2}{\boxed{\text{(나)}}}+a^2\right)=\boxed{\text{(다)}}$$

따라서 점 P가 원점에 한없이 가까워질 때, 점 R는 점 $\left(0,\ \boxed{\text{(다)}}\right)$에 한없이 가까워진다.

활동 2 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 y축과 만나는 점을 P, 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 만나는 점을 Q라 하고 직선 PQ와 x축이 만나는 점을 R라고 하자. r가 0에 한없이 가까워질 때, 점 R가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구해 보자.

(단, 두 점 P, Q의 y좌표는 양수이다.)



공학 도구 활용

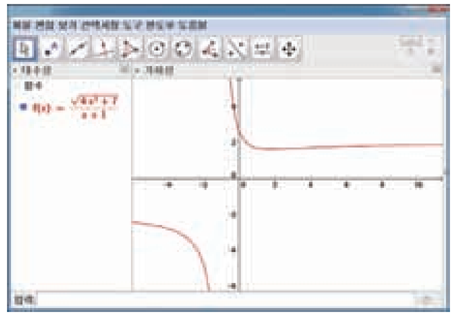
정보 처리

함수의 극한값 확인하기

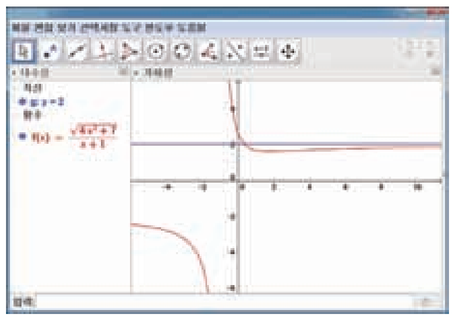
컴퓨터 기하 프로그램을 이용하면 함수의 극한값을 그래프를 통해 확인할 수 있다.

다음과 같은 방법으로 등식 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+7}}{x+1}=2$가 성립함을 확인해 보자.

❶ 입력창에 'f(x)=sqrt(4x^2+7)/(x+1)'을 입력한 후 Enter↵ 를 누르면 함수 $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+7}}{x+1}$의 그래프가 그려진다.

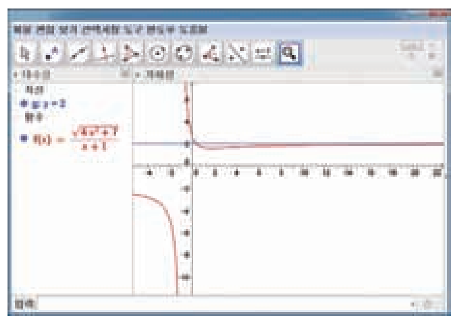


❷ 입력창에 'y=2'를 입력한 후 Enter↵ 를 누르면 직선 $y=2$가 그려진다.



❸ 작게 보기를 선택하여 그래프를 축소하면 x의 값이 한없이 커질 때 함수 $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+7}}{x+1}$의 그래프가 직선 $y=2$에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

즉 등식 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+7}}{x+1}=2$가 성립함을 확인할 수 있다.



활동 위와 같은 방법으로 다음 등식이 성립함을 확인해 보자.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{3x+1}=\frac{1}{3}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=\frac{1}{2}$

중단원 마무리

❶ 함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때

(1) $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 $\boxed{\quad}$한다고 한다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 $\boxed{\quad\quad}$ 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow a\text{일 때 } f(x) \longrightarrow L$$

(2) $f(x)$가 어느 값으로도 수렴하지 않으면 함수 $f(x)$는 $\boxed{\quad}$한다고 한다.

❷ 우극한과 좌극한

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Longleftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=\boxed{\quad\quad\quad}=L$$

❸ 함수의 극한에 대한 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에서 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재할 때

(1) $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{\boxed{\quad\quad\quad}\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$

(4) $\lim_{x\to a}\boxed{\quad\quad\quad}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

(5) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (단, $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$)

❹ 함수의 극한의 대소 관계

세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$와 a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이고 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재하면

$$\lim_{x\to a} f(x)\le\lim_{x\to a} g(x)$$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L$이면

$$\lim_{x\to a} h(x)=L$$

기본 문제

1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}(x+2)$ (2) $\lim_{x\to 0}(-x^2+1)$

(3) $\lim_{x\to -2}\dfrac{3}{x-1}$ (4) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}$

2 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x\to 5}|x-5|$ (2) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{|x+2|}$

3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 1}(3x^2+x-1)$

(2) $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2+2}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{x}\right)$

(4) $\lim_{x\to -\infty}\left(4+\dfrac{5}{x^2}\right)$

4 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

(2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+2}{x^2+1}$

(4) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+3x})$

표준 문제

5 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & (x<-1) \\ x^2 & (-1\leq x<1) \\ \dfrac{1}{x} & (x\geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 다음 극한을 조사하시오.

(1) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (2) $\lim_{x\to -1} f(x)$

(3) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ (4) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

서술형

6 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\geq 0) \\ x+k & (x<0) \end{cases}$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재할 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

7 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$일 때, $\lim_{x\to 0}\dfrac{7x^2+2f(x)}{f(x)}$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$)

서술형

8 등식 $\lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x+1}=\dfrac{1}{2}$이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

9 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$의 값을 구하시오.

10 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$-x^2+2x+2\le f(x)\le \frac{1}{2}x^2-4x+8$$

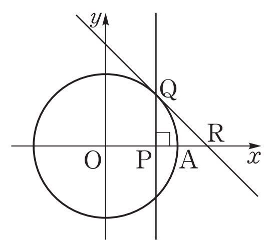
을 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2} f(x)$의 값을 구하시오.

발전 문제

11 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-1}{1-x}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

추론

12 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 원점 O를 중심으로 하는 원이 있다. 이 원이 x축과 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점을 A라고 할 때, 선분 OA 위의 점 P를 지나고 선분 OA에 수직인 직선과 원이 제1사분면에서 만나는 점을 Q, 점 Q를 지나면서 원에 접하는 직선과 x축이 만나는 점을 R라고 하자. 점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PA}}$가 한없이 가까워지는 값을 구하시오.



(단, 점 P는 점 O와 점 A가 아니다.)

문제 해결

13 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)-2x|<1$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2-x+1}$의 값을 구하시오.