2016년 경상남도 남해군에 있는 천연기념물 제499호 '남해 가인리 화석산지'에서 중생대 백악기의 도마뱀 발자국 화석이 세계 최초로 발견되었다. 이 화석은 한국에서 발견된 새로운 종류의 도마뱀 발자국이라는 뜻의 '네오사우로이데스 코리아엔시스(*Neosauroides koreaensis*)'로 명명되었다. 이 화석의 발견으로 약 1억 년 전 중생대 백악기의 한반도에 공룡을 포함한 다양한 척추동물이 존재했음이 다시 확인되었다.

이와 같은 화석이 발견된 지층의 연대를 측정할 때에는 그 지층에 포함된 방사성 동위 원소의 양과 방사성 동위 원소의 양이 절반으로 감소하는 데 걸리는 기간인 반감기를 이용하는데, 방사성 동위 원소의 양과 반감기 사이의 관계는 지수함수로 나타난다.

이 단원에서는 지수함수와 로그함수의 뜻과 성질을 알아본다.

(출처: 동아사이언스, 2016)

3 지수함수와 로그함수

준비학습

1 다음 값을 구하시오.

(1) $81^{\frac{1}{4}}$ (2) $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}$

2 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 10 + \log_2 \frac{1}{5}$ (2) $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$

3 함수 $y=\frac{1}{2}x-1$의 역함수를 구하시오.

1 지수함수

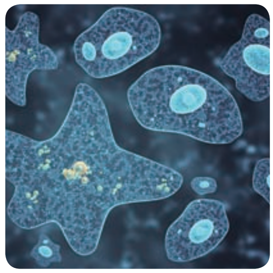
- 지수함수의 뜻을 안다.
- 지수함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

지수함수란 무엇일까

생각 톡

아메바는 한 번 분열할 때마다 개체 수가 2배가 된다고 한다. 다음은 아메바 한 마리가 x번 분열한 후의 개체 수 y를 나타낸 표의 일부이다.

x	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	2					$\cdots$



탐구 ① 위의 표를 완성해 보자.

탐구 ② x와 y 사이의 관계식을 구해 보자.

위의 생각 톡에서 x와 y 사이에는 $y=2^x$인 관계가 성립하고 x에 대하여 2^x의 값은 하나로 정해지므로 $y=2^x$은 x에 대한 함수이다.

일반적으로 a가 1이 아닌 양수일 때, 실수 x에 대하여 a^x의 값은 하나로 정해진다. 따라서 x에 a^x의 값을 대응시키면

$$y=a^x \ (a>0,\ a\neq 1)$$

은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

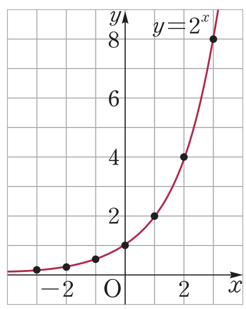
$y=a^x$에서 $a=1$이면 $y=1$이므로 이 함수는 상수함수이다.

지수함수 $y=2^x$의 그래프를 그려 보자.

지수함수 $y=2^x$에서 정수 x의 값에 대응하는 y의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
y	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\cdots$

위의 표로부터 얻은 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고 이 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같은 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 얻는다. 이때 함수 $y=2^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. 또 이 함수는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.



한편 x의 값이 한없이 작아지면 y의 값은 양수이면서 0에 한없이 가까워지므로 이 그래프의 점근선은 x축이다.

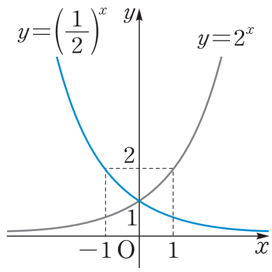
곡선 위의 점이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

예제 1 **지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그리시오.**

$y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

풀이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



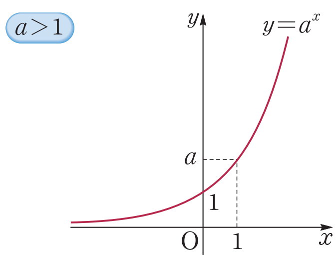
답 풀이 참조

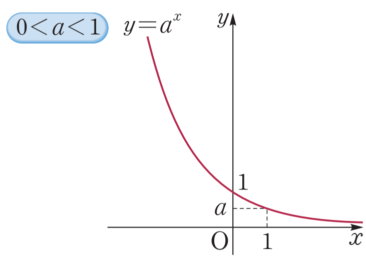
문제 1 **다음 지수함수의 그래프를 그리시오.**

(1) $y=3^x$ (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음 그림과 같다.

$a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$





이상에서 지수함수는 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

지수함수 $y=a^x$의 성질

지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$에 대하여

❶ 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

❷ $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

❸ 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 x축이다.

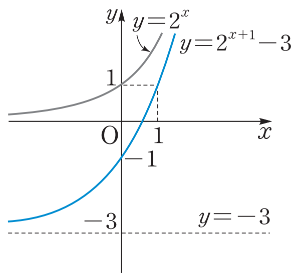
지수함수 $y=a^x$에서
(i) $a>1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}<a^{x_2}$
(ii) $0<a<1$일 때, $x_1<x_2$이면 $a^{x_1}>a^{x_2}$

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때, 함수 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

예제 2 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

풀이 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=2^{x+1}-3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은 $y=-3$이다.



답 풀이 참조

문제 2 다음 함수의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2$ (2) $y=-2^x$

문제 3 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$일 때, 함수 $y=3^{x^2-1}+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

예제 3 두 수 $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{8}$의 대소를 비교하시오.

풀이 $\sqrt[3]{4}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{8}=(2^3)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{3}{5}}$
함수 $y=2^x$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
이때 $\frac{2}{3}>\frac{3}{5}$이므로 $2^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{8}$

답 $\sqrt[3]{4}>\sqrt[5]{8}$

문제 4 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[6]{49}$ (2) $\left(\frac{1}{27}\right)^3$, $\left(\frac{1}{9}\right)^5$

2 로그함수

- 로그함수의 뜻을 안다.
- 로그함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

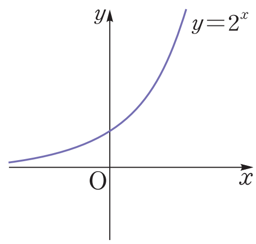
로그함수란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 그림은 지수함수 $y=2^x$의 그래프이다.

탐구 ① 지수함수 $y=2^x$의 역함수가 존재하는지 말해 보자.

탐구 ② 로그의 정의를 이용하여 x를 y에 대한 식으로 나타내 보자.



지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq 1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

지수함수의 역함수를 구해 보자.

로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \Longleftrightarrow x=\log_a y$$

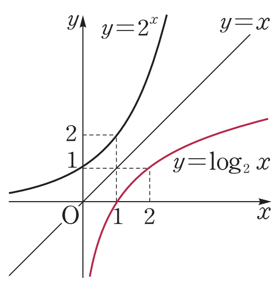
가 성립하므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 바꾸면 지수함수 $y=a^x$의 역함수

$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$$

를 얻는다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 그려 보자.

로그함수 $y=\log_2 x$는 지수함수 $y=2^x$의 역함수이므로 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 그릴 수 있다.



이때 함수 $y=\log_2 x$의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또 이 그래프의 점근선은 y축이다.

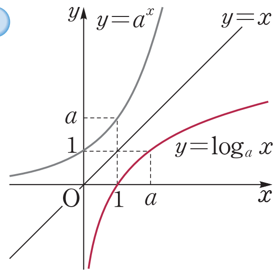
일반적으로 $a>0,\ a\neq 1$일 때, 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

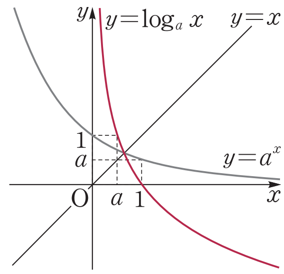
문제 1 다음 로그함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=\log_3 x$ (2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 다음 그림과 같다.

$a>0$, $a\neq1$일 때,
$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$





이상에서 로그함수는 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

로그함수 $y=\log_a x$의 성질

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$에 대하여

❶ 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

❷ $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

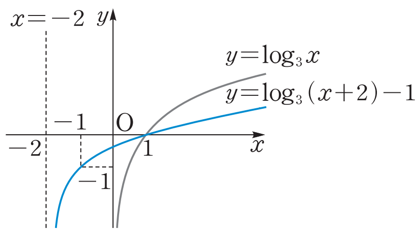
❸ 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 y축이다.

로그함수 $y=\log_a x$에서
(i) $a>1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1<\log_a x_2$
(ii) $0<a<1$일 때,
$x_1<x_2$이면
$\log_a x_1>\log_a x_2$

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때, 함수 $y=\log_a x$와 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

예제 1 함수 $y=\log_3(x+2)-1$의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

풀이 함수 $y=\log_3(x+2)-1$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\log_3(x+2)-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 점근선의 방정식은 $x=-2$이다.



답 풀이 참조

문제 2 다음 함수의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-3$ (2) $y=\log_2(-x)+2$

문제 3 정의역이 $\{x|-2\le x\le 1\}$일 때, 함수 $y=\log_2(x+3)+2$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

예제 2 두 수 $\log_2 11$, $2\log_2 2\sqrt{3}$의 대소를 비교하시오.

풀이 $2\log_2 2\sqrt{3}=\log_2(2\sqrt{3})^2=\log_2 12$

함수 $y=\log_2 x$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이때 $11<12$이므로 $\log_2 11<\log_2 12$

$\log_2 11<2\log_2 2\sqrt{3}$

답 $\log_2 11<2\log_2 2\sqrt{3}$

문제 4 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $8\log_7 2$, $3\log_7 6$ (2) $2\log_{\frac{1}{3}} 4$, $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 64$

분석하기 두 함수 f, g가 다음과 같다.

$$f(x)=2\log_2 x, \qquad g(x)=\log_2 x^2$$

1 두 함수 f, g의 정의역을 구해 보고 두 함수가 같은지 다른지를 말해 보자.

2 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 보자.

3 지수함수와 로그함수의 활용

- 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

지수함수를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까

생각 톡

'플래시몹(flash mob)'이란 불특정 다수의 사람들이 인터넷, 전자 우편, 휴대 전화 등의 연락을 통해 약속된 시간과 장소에 모여 짧은 시간 동안 약속된 행동을 하고 흩어지는 모임이나 행위이다.
경복궁에서 시행하는 아리랑 플래시몹을 홍보하는데 최초의 한 명이 홍보를 시작한 지 x일이 지난 후 행사를 알게 되는 사람은 2^x명이라고 한다.

탐구 최초의 한 명이 홍보를 시작한 지 x일이 지난 후 행사를 알게 되는 사람이 512명일 때, x를 구하는 식을 세워 보자.

방정식 $2^x=4$와 같이 지수에 미지수가 있는 방정식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$$a>0,\ a\neq 1\text{일 때,}\qquad a^{x_1}=a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1=x_2$$

예제 1 다음 방정식을 푸시오.

(1) $5^x=\dfrac{1}{125}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}=81^{-x+2}$

풀이 (1) $\dfrac{1}{125}=5^{-3}$이므로 주어진 방정식은　$5^x=5^{-3}$,　$x=-3$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}=(3^{-1})^{2x}=3^{-2x}$, $81^{-x+2}=(3^4)^{-x+2}=3^{-4x+8}$이므로 주어진 방정식은

$3^{-2x}=3^{-4x+8}$,　$-2x=-4x+8$

$2x=8$,　$x=4$

답 (1) $x=-3$　(2) $x=4$

문제 1 다음 방정식을 푸시오.

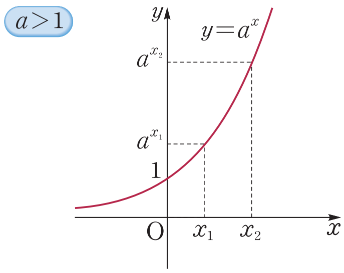
(1) $7^x=49$　　(2) $3^{2x+1}=27$

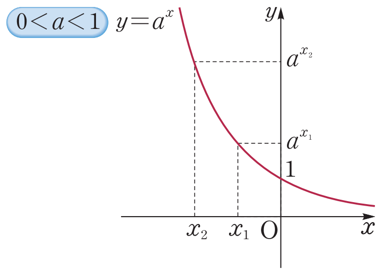
(3) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x+2}=\left(\dfrac{1}{32}\right)^x$　　(4) $0.2^{x-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

지수에 미지수가 있는 부등식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

$a>1$일 때, $\quad a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1<x_2$

$0<a<1$일 때, $\quad a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1>x_2$





주의 지수에 미지수가 있는 부등식을 풀 때에는 밑이 1보다 큰지 작은지에 따라 부등호의 방향이 달라짐에 유의한다.

예제 2 다음 부등식을 푸시오.

(1) $4^x<8^{x-1}$ $\qquad$ (2) $\left(\frac{1}{125}\right)^x \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}$

풀이 (1) $4^x=(2^2)^x=2^{2x}$, $8^{x-1}=(2^3)^{x-1}=2^{3x-3}$이므로 주어진 부등식은

$$2^{2x}<2^{3x-3}$$

밑이 1보다 크므로

$$2x<3x-3, \qquad x>3$$

(2) $\left(\frac{1}{125}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^3\right\}^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{3x}$, $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}=\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4}$이므로

주어진 부등식은

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4}$$

밑이 1보다 작으므로

$$3x \leq 2x-4, \qquad x \leq -4$$

답 (1) $x>3$ (2) $x\leq -4$

문제 2 다음 부등식을 푸시오.

(1) $3^{x+2}-81<0$ $\qquad$ (2) $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^x>24$

(3) $0.25^{x-3} \leq 0.5^{x+1}$ $\qquad$ (4) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{3x} \geq 49^{3-x}$

예제 3

어느 금융 상품에 A만 원을 투자할 때 t년 후의 이익금은 $A\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$만 원이라고 한다. 이 금융 상품에 100만 원을 투자할 때, 이익금이 225만 원이 되는 것은 투자한 지 몇 년 후인지 구하시오.

풀이 100만 원을 투자한 지 x년 후의 이익금은 $100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$만 원이므로

$$100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=225, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=\frac{225}{100}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$$

$$\frac{x}{4}=2, \qquad x=8$$

따라서 이익금이 225만 원이 되는 것은 투자한 지 8년 후이다.

답 8년

문제 3

어느 공장에서 625만 원을 투자하여 제품 생산을 위한 기계를 구매하였다. 이 기계의 가치가 매년 20 %씩 감소한다고 할 때, 기계의 가치가 256만 원이 되는 것은 구매한 지 몇 년 후인지 구하시오.

예제 4

우라늄의 방사성 동위 원소 ^{235}U는 7억 년마다 그 양이 반으로 줄어든다고 한다. 즉 최초의 ^{235}U의 양이 a g이었을 때 x억 년 후에 남아 있는 양을 $M(x)$ g이라 하면

$$M(x)=a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}}$$

이라고 한다. ^{235}U의 양이 처음으로 최초의 양의 25 % 이하가 되는 것은 몇 년 후인지 구하시오.

풀이 x억 년 후 최초의 양의 25 % 이하가 된다고 하면

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}}\le\frac{1}{4}a, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\frac{x}{7}\ge 2, \qquad x\ge 14$$

따라서 ^{235}U의 양이 처음으로 최초의 양의 25 % 이하가 되는 것은 14억 년 후이다.

답 14억 년

문제 4

어떤 치료제를 인체에 투여한 직후의 혈중 농도는 0.64 μg/mL이고 혈중 농도는 매시간 25 %씩 줄어든다고 한다. 이 치료제의 혈중 농도가 처음으로 0.27 μg/mL 이하가 되는 것은 인체에 투여한 지 몇 시간 후인지 구하시오. (단, μg/mL는 치료제의 혈중 농도를 나타내는 단위이다.)

로그함수를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까

생각 톡

어느 해저에서 발생한 지진이 지진 해일을 일으킬 때, 높이가 H m인 지진 해일의 규모 M은

$$M=\log_8 H$$

라고 한다.

탐구 지진 해일의 규모가 2일 때, 지진 해일의 높이를 구하는 식을 세워 보자.

방정식 $\log_2 x=3$과 같이 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

> $a>0$, $a\neq1$이고 $x_1>0$, $x_2>0$일 때
>
> ❶ $\log_a x_1=b \Longleftrightarrow x_1=a^b$
>
> ❷ $\log_a x_1=\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2$

예제 5 다음 방정식을 푸시오.

(1) $\log_3(2x-1)=2$　　(2) $\log_5(x+4)=\log_5(3x-2)$

로그의 진수에 미지수가 있는 방정식을 풀 때에는 로그의 진수가 양수임에 유의한다.

풀이 (1) 주어진 방정식에서　$2x-1=3^2$

$x=5$　…… ①

그런데 $2x-1$은 로그의 진수이므로　$2x-1>0$

$x>\frac{1}{2}$　…… ②

①, ②에서　$x=5$

(2) 주어진 방정식에서　$x+4=3x-2$

$x=3$　…… ①

그런데 $x+4$, $3x-2$는 로그의 진수이므로　$x+4>0$, $3x-2>0$

$x>\frac{2}{3}$　…… ②

①, ②에서　$x=3$

답 (1) $x=5$　(2) $x=3$

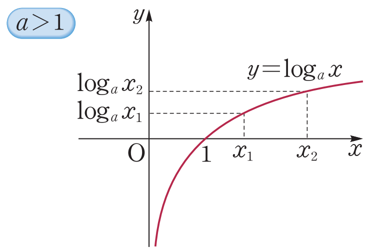
문제 5 다음 방정식을 푸시오.

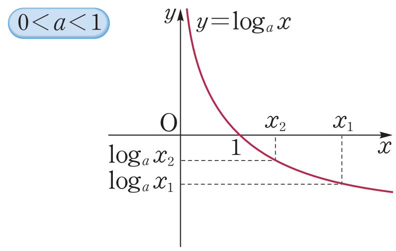
(1) $\log_{\frac{1}{3}} 4x=-1$　　(2) $\log_2(2x+5)=3$

(3) $\log_{\frac{1}{5}} 3x=\log_{\frac{1}{5}}(x+4)$　　(4) $\log x+\log(x-3)=1$

로그의 진수에 미지수가 있는 부등식은 다음 성질을 이용하여 풀 수 있다.

> $x_1>0$, $x_2>0$에 대하여
>
> $a>1$일 때, $\quad \log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1<x_2$
>
> $0<a<1$일 때, $\quad \log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1>x_2$





주의 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식을 풀 때에는 밑이 1보다 큰지 작은지에 따라 부등호의 방향이 달라짐에 유의한다.

예제 6 다음 부등식을 푸시오.

(1) $\log_3(x-2)<1$ $\qquad$ (2) $\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)\geq\log_{\frac{1}{5}}(3x-2)$

로그의 진수에 미지수가 있는 부등식을 풀 때에는 로그의 진수가 양수임에 유의한다.

풀이 (1) 주어진 부등식에서 $\quad \log_3(x-2)<\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\quad x-2<3, \quad x<5 \quad \cdots\cdots ①$

그런데 $x-2$는 로그의 진수이므로 $\quad x-2>0$

$x>2 \quad \cdots\cdots ②$

①, ②에서 $\quad 2<x<5$

(2) 밑이 1보다 작으므로 $\quad 2x+1\leq 3x-2, \quad x\geq 3 \quad \cdots\cdots ①$

그런데 $2x+1$, $3x-2$는 로그의 진수이므로 $\quad 2x+1>0$, $3x-2>0$

$x>\dfrac{2}{3} \quad \cdots\cdots ②$

①, ②에서 $\quad x\geq 3$

답 (1) $2<x<5$ (2) $x\geq 3$

문제 6 다음 부등식을 푸시오.

(1) $\log_3(2x-3)>2$ $\qquad$ (2) $\log_{\frac{1}{2}}(5x+2)<1$

(3) $\log_5(4x-1)\geq\log_5(x+8)$ $\qquad$ (4) $\log_{0.7}(x+1)\leq\log_{0.7}(3x-5)$

예제 7 세기가 I W/m^{2}인 소리의 크기를 A dB(데시벨)이라 하면

$$A=10\log\frac{I}{10^{-12}}$$

라고 한다. 지하철 소음의 크기가 80 dB일 때, 소음의 세기는 몇 W/m^{2}인지 구하시오. (단, W/m^{2}는 소리의 세기를 나타내는 단위이다.)

풀이 지하철 소음의 크기가 80 dB일 때, 소음의 세기를 x W/m^{2}라고 하면

$$80=10\log\frac{x}{10^{-12}},\qquad \log\frac{x}{10^{-12}}=8$$

$$\frac{x}{10^{-12}}=10^8,\qquad x=10^{-4}$$

따라서 지하철 소음의 크기가 80 dB일 때, 소음의 세기는 10^{-4} W/m^{2}이다.

답 10^{-4} W/m^2

문제 7 어느 제품의 광고 비용이 a만 원일 때의 제품 판매량을 N개라 하면

$$N=2500+500\log 2a\ (a\ge 1)$$

라고 한다. 이 제품을 4000개 이상 판매하려면 광고 비용은 최소 몇 만 원을 사용해야 하는지 구하시오.

문제 해결하기

어두운 방에서는 전등을 한 개만 켜도 매우 밝게 느껴진다. 그러나 전등을 한 개 더 켜면 더 밝아지기는 하지만 처음 전등을 켰을 때만큼 환해진 느낌은 들지 않는다.

독일의 심리학자 베버(Weber, E. H., 1795~1878)와 물리학자 페히너(Fechner, G. T., 1801~1887)는 이와 같은 현상을 연구했는데, 감각의 세기 E와 자극의 크기 I 사이의 관계를

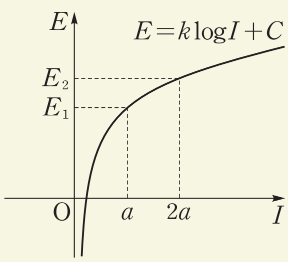
$$E=k\log I+C\ (k,\ C\text{는 상수})$$

와 같이 나타내었다. 이것을 그들의 이름을 따서 '베버-페히너의 법칙'이라고 한다.

(출처: Steven Yantis, 『Sensation and Perception』, 최행진, 『감각측정에 관한 베버-페히너 법칙 이야기』)

1 전등 한 개를 켤 때의 자극의 크기를 a, 감각의 세기를 E_1, 전등 두 개를 켤 때의 자극의 크기를 $2a$, 감각의 세기를 E_2라고 하자. E_2-E_1의 값을 구해 보자.

2 전등이 5개 켜져 있을 때, **1**의 결과와 같은 감각의 세기의 차이를 느끼려면 전등을 몇 개 더 켜야 하는지 구해 보자.



공학 도구 활용

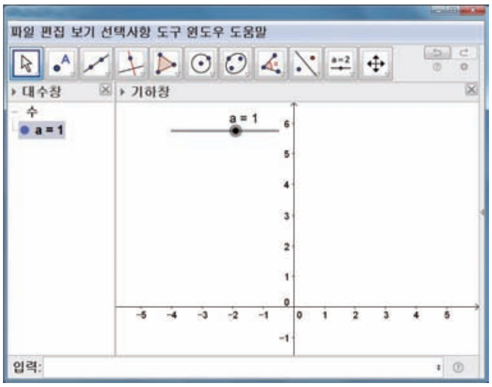
지수함수와 로그함수의 그래프의 이해

정보 처리 / 추론

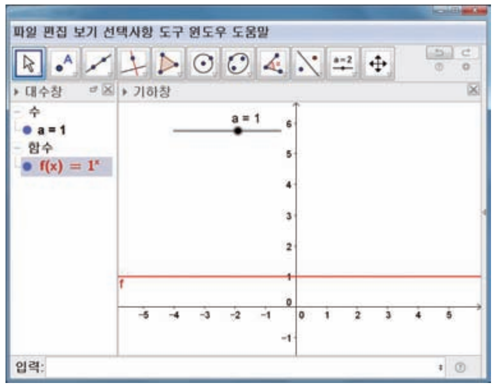
컴퓨터 기하 프로그램을 이용하면 지수함수와 로그함수의 그래프의 모양을 쉽고 정확하게 알 수 있다.

다음은 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 그리고 a의 값에 따른 그래프의 모양의 변화를 나타낸 것이다.

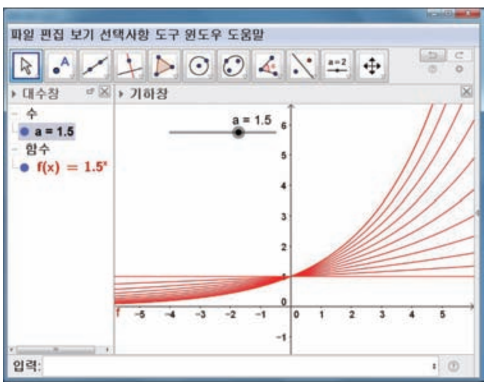
❶ 입력 창에 'a'를 입력하고 Enter↵를 누른 후 **슬라이더 만들기**를 선택하여 a에 대한 슬라이더를 만든다.



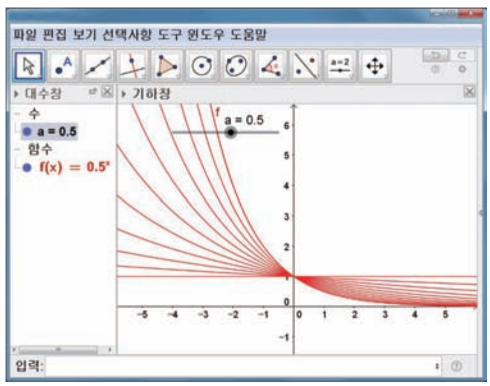
❷ 입력 창에 'y=a^x'를 입력하고 Enter↵를 누르면 처음에는 함수 $f(x)=1^x$의 그래프가 그려진다.



❸ $a>1$인 범위에서 슬라이더의 점을 움직일 때, a의 값에 따른 그래프의 모양의 변화는 다음과 같다.



❹ $0<a<1$인 범위에서 슬라이더의 점을 움직일 때, a의 값에 따른 그래프의 모양의 변화는 다음과 같다.



활동 1 a의 값에 따라 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 설명해 보자.

활동 2 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 위와 같은 방법으로 로그함수 $y=\log_a x\,(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 그려 보고, a의 값에 따라 그래프의 모양이 어떻게 변하는지 설명해 보자.

수학 역량 플러스

창의·융합 문제 해결

벤포드의 법칙

우리는 주가, 경제 지표, 세계 인구수 등에서 수를 자주 접한다. 이들 수의 첫 자리에는 어떤 숫자가 가장 빈번하게 나타날까?

첫 자리에 1부터 9까지의 각 숫자가 나타나는 빈도는 비슷할 것이라고 예상하겠지만 다양한 수치 자료에서 1이 가장 빈번하게 나타난다고 한다.

이러한 사실은 1881년 미국의 천문학자 뉴컴(Newcomb, S., 1835~1909)이 처음 발견했다. 그는 자신이 사용하던 로그표가 수록된 책에서 처음 몇 장이 뒤쪽 장에 비해 더 닳아 있는 것을 발견하고 실생활에서 1로 시작하는 수가 다른 숫자로 시작하는 수보다 자주 나타난다는 결론을 이끌어 냈다.

그 후 미국의 물리학자 벤포드(Benford, F., 1883~1948)는 통계표나 목록에서 첫 자리에 1부터 9까지의 각 숫자가 나올 확률은 다르며 1이 나올 확률이 전체의 30 % 정도로 가장 크다는 것을 알아내어 첫 자리 숫자의 분포를 발견하였다.

이 법칙을 '벤포드의 법칙(Benford's Law)'이라 하고, 첫 자리 숫자에 x가 나올 확률 $B(x)$는 다음과 같다.

$$B(x)=\log(x+1)-\log x$$

이 식으로부터 확률을 구하면 다음 표와 같이 숫자가 커질수록 첫 자리에 그 숫자가 나올 확률은 낮아짐을 알 수 있다.

x	1	2	3	…	7	8	9
$B(x)$	0.301	0.176	0.125	…	0.058	0.051	0.046

벤포드의 법칙은 금융 자료의 신빙성을 따질 때 유용하게 사용되는데 자료의 수치가 벤포드의 법칙을 따르면 그 자료의 신빙성이 높아지고, 그렇지 않으면 조작의 가능성이 있다고 본다. 특수한 자료의 경우에는 벤포드의 법칙이 성립하지 않기도 하지만 대체로 벤포드의 법칙을 크게 벗어나지 않는다.

(출처: Steven J. Miller, 『Benford's Law: Theory and Applications』)

활동 벤포드의 법칙에 따라 어떤 수의 첫 자리 숫자가 4일 확률을 구해 보자.

(단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

중단원 마무리

❶ 지수함수 $y=a^x\,(a>0,\ a\neq1)$의 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\boxed{\quad}$ 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 $\boxed{\quad}$한다.

③ 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 점근선은 $\boxed{\quad}$이다.

❷ 로그함수 $y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$의 성질

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\boxed{\quad}$ 전체의 집합이다.

② $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 $\boxed{\quad}$한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

③ 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 점근선은 $\boxed{\quad}$이다.

❸ 지수함수와 로그함수의 활용

(1) 지수함수의 활용

① $a>0,\ a\neq1$일 때,

$$a^{x_1}=a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1=x_2$$

② $a>1$일 때,

$$a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow x_1<x_2$$

$0<a<1$일 때,

$$a^{x_1}<a^{x_2} \Longleftrightarrow \boxed{\quad}$$

(2) 로그함수의 활용

$x_1>0,\ x_2>0$에 대하여

① $a>0,\ a\neq1$일 때,

$$\log_a x_1=b \Longleftrightarrow x_1=\boxed{\quad}$$

$$\log_a x_1=\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2$$

② $a>1$일 때,

$$\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow \boxed{\quad}$$

$0<a<1$일 때,

$$\log_a x_1<\log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1>x_2$$

기본 문제

1 다음 함수의 그래프를 그리고 점근선의 방정식을 구하시오.

(1) $y=2^{x-1}+2$

(2) $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$

(3) $y=\log_2(x+1)-2$

(4) $y=\log_{\frac{1}{3}}(-x+2)+1$

2 다음 두 수의 대소를 비교하시오.

(1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{5}},\ \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{4}}$

(2) $2\log_3 5,\ 6\log_9 4$

3 다음 방정식을 푸시오.

(1) $7^{x+1}=7^{3x-5}$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x+6)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)$

4 다음 부등식을 푸시오.

(1) $11^{2x-1}<11$

(2) $\log_{0.9}(x^2-7)>\log_{0.9}2$

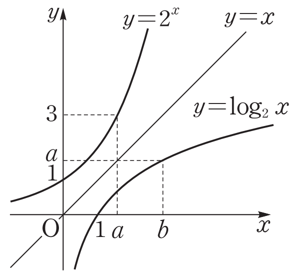
표준 문제

5 정의역이 $\{x|-2\le x\le 2\}$일 때, 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

(1) $y=3^{-x+2}+1$

(2) $y=\log_2(x+6)-2$

6 오른쪽 그림은 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$이다. a, b의 값을 구하시오.



추론 **7** 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 하는 상수 k의 최댓값을 구하시오.

8 다음 방정식을 푸시오.

(1) $4^x=4\times 2^x$

(2) $0.09^x=\sqrt{0.3}$

(3) $\log_3(2x-1)=2\log_3 x$

(4) $\log_2(x+2)+\log_2 x=3$

9 다음 부등식을 푸시오.

(1) $0.125\ge 0.5^x$

(2) $\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2+3x+2}<\left(\frac{7}{2}\right)^{3x+3}$

(3) $\log_2(2x+1)<3$

(4) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)^2\le\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)$

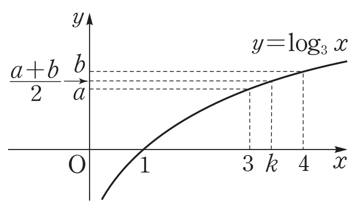
서술형 **10** 함수 $y=\log_a x+m(a>1)$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 이 두 점의 x좌표가 각각 1, 3일 때, am의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.(단, m은 상수이다.)

발전 문제

서술형 **11** 함수 $f(x)=a^x-a^{-x}(a>0,\ a\neq1)$과 실수 k에 대하여 $f(k)=2$일 때, $f(2k)$를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

창의·융합 **12** 어떤 식물성 플랑크톤은 바다 수면에 비치는 햇빛의 양의 5 % 이상이 도달하는 깊이까지 살 수 있다고 한다. 어떤 지역에서 햇빛이 수면으로부터 10 m씩 내려갈 때마다 햇빛의 양이 16 %씩 감소된다고 할 때, 이 식물성 플랑크톤이 살 수 있는 깊이는 최대 몇 m인지 구하시오. (단, $\log 2=0.3$, $\log 8.4=0.9$로 계산한다.)

13 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(3,\ a)$, $(4,\ b)$는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이다. 함수 $y=\log_3 x$의 그래프가 점 $\left(k,\ \dfrac{a+b}{2}\right)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.



• 정답 및 풀이 163쪽

01 $\sqrt[3]{a}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=2$일 때, $a-\dfrac{1}{a}$의 값을 구하시오.

02 $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}=2^k$일 때, k의 값을 구하시오.

03 $2^{a+1}=6$, $3^{5b}=7$일 때, $7^{\frac{1}{ab}}$의 값을 구하시오.

04 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 4\sqrt{3}+\log_{\sqrt{2}}\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}\log_2 3$

(2) $\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 8$

05 $\log\left(1+\dfrac{1}{1}\right)+\log\left(1+\dfrac{1}{2}\right)+\log\left(1+\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\log\left(1+\dfrac{1}{99}\right)$의 값을 구하시오.

06 $a=10^x$, $b=10^y$일 때, $\log_{a^3}\sqrt{b}$를 x, y에 대한 식으로 나타내시오. (단, $x\neq0$)

07 $\log 9.2=0.9638$일 때, $\log x=2.9638$을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

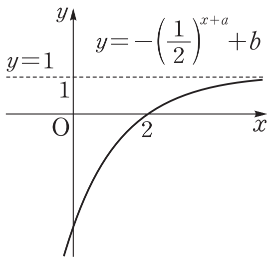
08 다음 함수의 그래프 중에서 함수 $y=3^x$의 그래프를 평행이동하거나 대칭이동하여 포갤 수 없는 것은?

① $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ ② $y=3^x+2$

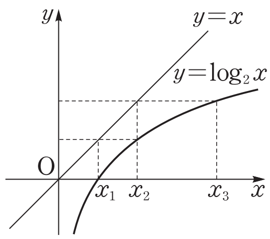
③ $y=\log_3\dfrac{1}{x}$ ④ $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

⑤ $y=\log_3\sqrt{x}$

09 오른쪽 그림은 함수 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프이다. 상수 a, b의 값을 구하시오.



10 오른쪽 그림은 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=x$이다. x_3-x_1의 값을 구하시오.



11 함수 $f(x)=4^x-2^{x+1}+a$가 $x=b$에서 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

12 부등식 $3^{2x+1}-28\times3^x+9\leq0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오.

13 방정식 $(\log x)^2-2\log x-3=0$을 푸시오.

14 화재가 발생한 건물의 온도는 시간에 따라 변한다. 어느 건물의 초기 온도를 T_0 °C, 화재가 발생한 지 x분 후의 온도를 $f(x)$ °C라 하면

$f(x)=T_0+k\log(8x+1)$ (k는 상수)

이라고 한다. 초기 온도가 20 °C인 이 건물에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 만에 온도가 250 °C까지 올라갔다고 할 때, 화재가 발생한 후 온도가 480 °C가 되는 데 걸리는 시간은 몇 분인지 구하시오.

서술형

• 정답 및 풀이 163쪽

15 $40^x=2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^y=8$, $a^z=4$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=1$이 성립할 때, 양수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 1이 아닌 양수 a, b, c에 대하여

$$\log a+\log b+\log c=0$$

일 때, $\log_a b+\log_b a+\log_a c+\log_c a+\log_b c+\log_c b$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

17 함수 $y=f(x)$의 역함수를 $y=g(x)$라고 하자. $f(x)=4^x$이고 $g(a)=\frac{1}{6}$, $g(b)=\frac{1}{3}$일 때, $g(ab)$를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

18 세계 석유 소비량이 매년 4%씩 감소된다고 할 때, 세계 석유 소비량이 처음으로 현재 소비량의 $\frac{1}{2}$ 이하가 되는 것은 몇 년 후인지 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, $\log 2=0.3$, $\log 9.6=0.98$로 계산한다.)

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하고, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.			
❷ 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하며 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			
❸ 지수함수와 로그함수의 뜻을 알고, 그 그래프와 성질을 이해하며 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

누가 음료수를 마셨을까

유정이는 학교 체육대회에서 반 친구들과 나누어 마실 음료수 한 상자를 체육대회 이틀 전에 구입하여 집 냉장고에 넣어 두었다. 체육대회 전날 저녁, 학교에서 돌아온 유정이는 누군가가 냉장고에서 몇 개의 음료수를 꺼내어 그중 일부를 마신 것을 발견하였다. 유정이가 음료수를 마신 사람을 알아내기 위하여 찾은 단서는 다음과 같다.

❶ 집의 실내 온도는 20 °C로 일정하다.
❷ 꺼내져 있던 음료수 중 개봉하지 않은 음료수의 온도를 오후 7시에 측정하였더니 12 °C이었다.

뉴턴(Newton, I., 1642~1727)은 시간에 따른 물체의 온도 변화는 그 물체의 온도와 물체 주변의 온도 차에 비례한다는 것을 발견하였는데 이를 '뉴턴의 냉각 법칙'이라고 한다. 즉 물체의 처음 온도를 $f(0)$, 물체 주변의 온도를 S, t시간 후 물체의 온도를 $f(t)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$f(t)-S=\{f(0)-S\}\times 2.7^{-kt} \text{ (단, } k\text{는 상수)}$$

이를 이용하여 유정이는 음료수를 마신 사람을 찾아낼 수 있을까?

(출처: James Stewart, 『Calculus(eighth edition)』, 이지현, 『뉴턴이 들려주는 지수함수와 로그함수 이야기』)

과제 1 유정이가 뉴턴의 냉각 법칙을 이용하여 누군가가 냉장고에서 음료수를 꺼낸 시각을 알아내기 위해서는 어떤 단서를 추가로 찾아야 하는지 말해 보자.

과제 2 음료수를 냉장고에서 꺼낸 직후의 온도가 4 °C일 때, 누군가가 음료수를 냉장고에서 꺼낸 시각과 음료수를 마신 사람을 추측해 보자. (단, $k=0.1$로 계산한다.)

Math ✕ Technology

피츠의 법칙

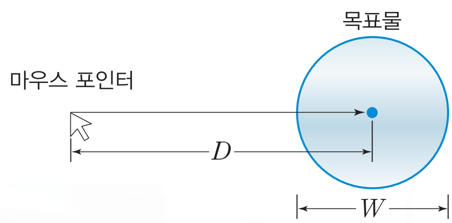
목표물의 크기가 작고 목표물과의 거리가 멀수록 목표물에 도달하는 데 시간이 오래 걸리고 정확도가 떨어진다. 이를 피츠의 법칙(Fitts's Law)이라고 한다. 이 법칙은 1954년 피츠(Fitts, P. M., 1912~1965)가 발표한 것으로 목표에 접근하는 데 필요한 평균 시간을 T, 출발점에서 목표물의 중심에 이르는 거리를 D, 목표물에 접근하는 방향을 축으로 하였을 때 목표물의 폭을 W라고 하면 다음이 성립한다.

$$T=a+b\log_2\left(\frac{D}{W}+1\right)\ (\text{단, } a,\ b\text{는 상수})$$

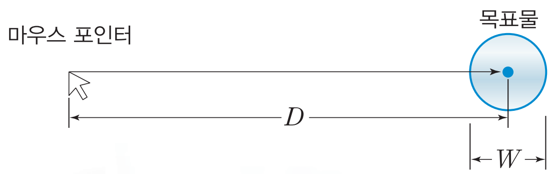
피츠의 법칙은 물건에 손이나 손가락을 직접 대거나 컴퓨터 화면 안의 물체에 마우스와 같은 위치 지정 도구를 이용하여 접촉하는 행동을 설명하는 모델이 된다.

예를 들어 웹 페이지에서 링크가 걸린 버튼이 작고 멀리 있을수록 클릭하기 힘들어지는 이유를 설명할 수 있다.

❶ 목표물의 크기가 크고 거리가 가까운 경우



❷ 목표물의 크기가 작고 거리가 먼 경우



작고 멀리 있는 물체는 크고 가까이에 있는 물체보다 클릭하기 어렵고 닿는 데 시간이 오래 걸리므로 버튼 크기가 크고 가까이에 있을수록 사용자가 조작하기 편하다.

피츠의 법칙은 실제 촬영한 화면에 가상의 정보를 덧붙여 보여 주는 기술인 증강 현실(AR)을 활용한 기기와 같이 인간과 컴퓨터의 상호작용과 관련된 여러 분야에 활용되고 있다.

(출처: MacKenzie, I.S., 『Fitts' Law as a Research and Design Tool in Human−Computer Interaction』)

진로 탐색

웹디자이너 | 인터넷 홈페이지를 디자인하고 구축하는 작업을 한다.
디자인 감각과 함께 통신 분야의 전반적인 지식을 갖추고 있어야 하며 컴퓨터에 대한 지식도 필요하다.