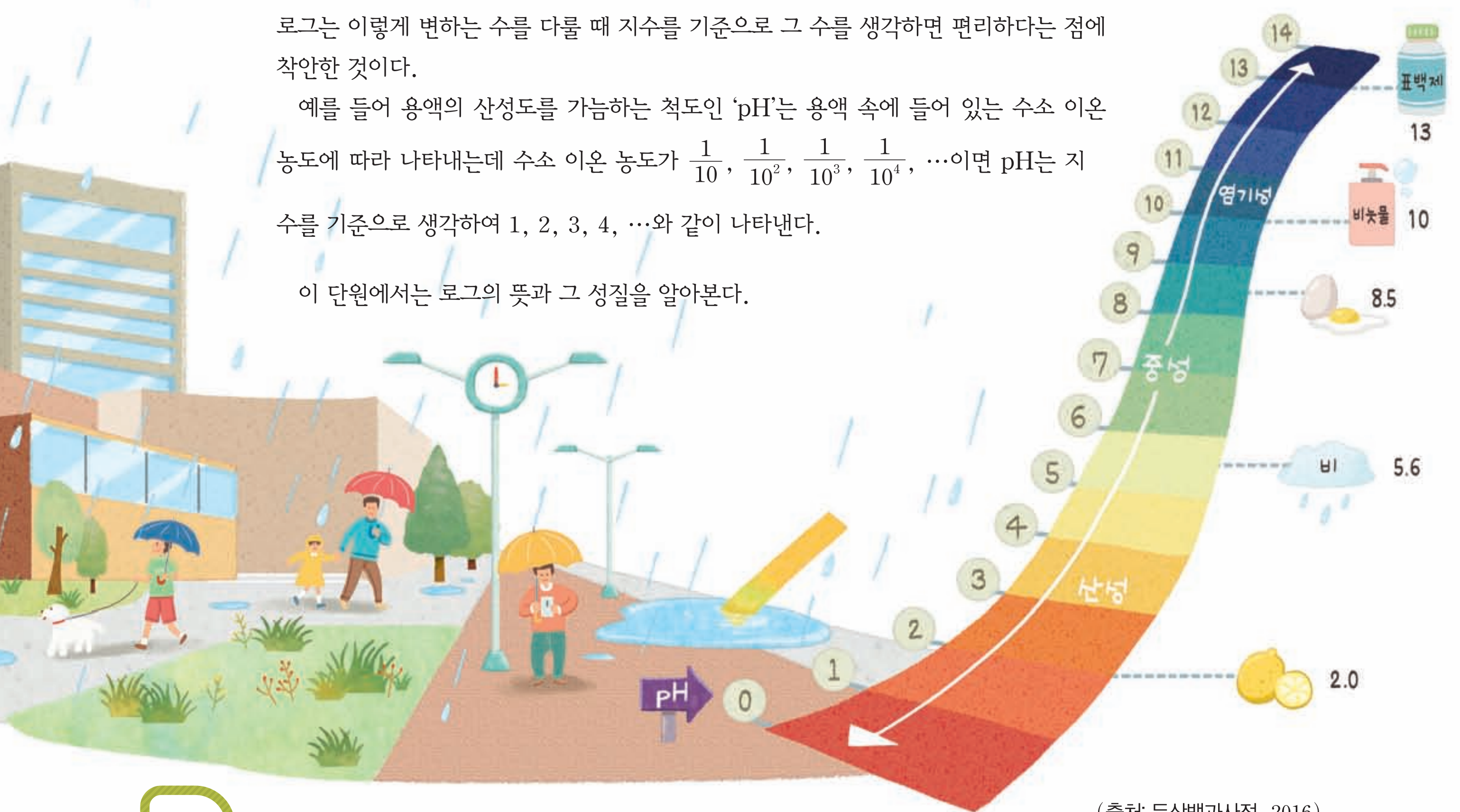
인간의 문명이 발달함에 따라 큰 수를 계산하는 일이 증가하였는데 로그는 이러한 큰 수의 복잡한 계산을 간단히 할 수 있는 도구로 고안되었다.

1이 아닌 어떤 양수를 반복해서 곱해 나가면 그 값은 급격히 증가하거나 감소하는데 로그는 이렇게 변하는 수를 다룰 때 지수를 기준으로 그 수를 생각하면 편리하다는 점에 착안한 것이다.

예를 들어 용액의 산성도를 가늠하는 척도인 'pH'는 용액 속에 들어 있는 수소 이온 농도에 따라 나타내는데 수소 이온 농도가 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^4}$, $\cdots$이면 pH는 지수를 기준으로 생각하여 1, 2, 3, 4, $\cdots$와 같이 나타낸다.

이 단원에서는 로그의 뜻과 그 성질을 알아본다.



(출처: 두산백과사전, 2016)

2 로그

준비학습

1 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $2^{\square}=16$ (2) $3^{\square}=1$

(3) $5^{\square}=\sqrt{5}$ (4) $4^{\square}=\frac{1}{4}$

2 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $3^7\times3^{-2}=3^{\square}$ (2) $2^{\frac{5}{2}}\div2^{\frac{1}{2}}=2^{\square}$

(3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=5^{\square}$ (4) $(3^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{4}})^8=3^{\square}\times5^{\square}$

1 로그

● 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

로그란 무엇일까

생각톡

오른쪽은 실수 k에 대하여 2^k의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 표의 일부이다.

k	2^k
2.0	4.0000
2.1	4.2871
2.2	4.5948
2.3	4.9246
2.4	5.2780
2.5	5.6569
⋮	⋮
3.0	8.0000

탐구 ① $2^m=4$, $2^n=8$을 만족시키는 실수 m, n의 값을 구해 보자.

탐구 ② 오른쪽 표를 이용하여 $2^k=5$를 만족시키는 실수 k의 값의 범위를 추측해 보자.

위의 생각톡에서 $2^m=4$, $2^n=8$을 만족시키는 실수 m, n의 값은 $m=2$, $n=3$임을 알 수 있지만 $2^k=5$를 만족시키는 실수 k의 값은 알 수 없다.

이제 $a^x=N$을 만족시키는 실수 x에 대하여 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$일 때, 양수 N에 대하여

$$a^x=N$$

을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재함이 알려져 있다.

이 실수 x를

$$\log_a N$$

으로 나타내고, a를 **밑**으로 하는 N의 **로그**라고 한다.

이때 N을 $\log_a N$의 **진수**라고 한다.

진수

$\log_a N$

밑

log는 logarithm의 약자이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때,

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

앞으로 특별한 언급 없이 $\log_a N$으로 쓸 때에는 밑 a와 진수 N이 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$을 모두 만족시키는 것으로 본다.

보기

① $2^3=8 \iff 3=\log_2 8$

② $5^{-2}=\dfrac{1}{25} \iff -2=\log_5 \dfrac{1}{25}$

문제 1 다음 등식을 $x=\log_a N$의 꼴로 나타내시오.

(1) $2^5=32$ (2) $7^0=1$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

문제 2 다음 등식을 $a^x=N$의 꼴로 나타내시오.

(1) $\log_3 81=4$ (2) $\log_4 \frac{1}{16}=-2$ (3) $\log_{\frac{1}{5}} 125=-3$

예제 1 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 16$ (2) $\log_{\frac{1}{7}} 49$

풀이 (1) $\log_2 16=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여 $2^x=16$

$16=2^4$이므로 $x=4$, $\log_2 16=4$

(2) $\log_{\frac{1}{7}} 49=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여 $\left(\frac{1}{7}\right)^x=49$

$49=7^2=\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$이므로 $x=-2$, $\log_{\frac{1}{7}} 49=-2$

답 (1) 4 (2) -2

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_4 64$ (2) $\log_3 \frac{1}{27}$

(3) $\log_2 \sqrt{2}$ (4) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$

설명하기

다음은 로그의 밑에 대한 두 학생의 대화이다.

진수가 음수일 때와 0일 때 로그를 정의하지 않는 이유를 예를 들어 설명해 보자.

로그에는 어떤 성질이 있을까

생각톡

실수 m, n에 대하여 $2^m=3$, $2^n=5$이다.

탐구 ① m, n의 값을 로그를 사용하여 나타내 보자.

탐구 ② **탐구 ①**의 결과를 이용하여 $m+n$의 값을 로그를 사용하여 나타내 보자.

탐구 ③ 지수법칙에 의하여 $2^m\times2^n=2^{m+n}=15$이다. 이를 이용하여 $m+n$의 값을 로그를 사용하여 나타내고 **탐구 ②**의 결과와 비교해 보자.

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$일 때,

$$a^0=1,\ a^1=a$$

이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1$$

이다.

또 $M>0$, $N>0$일 때,

$$\log_a M=m,\ \log_a N=n$$

으로 놓으면 $a^m=M$, $a^n=N$이므로 지수법칙에 의하여

$$MN=a^m a^n=a^{m+n}$$

$$\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

이다.

따라서 로그의 정의에 의하여 다음이 성립한다.

$$\log_a MN=m+n=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N}=m-n=\log_a M-\log_a N$$

스스로 개념탐구 $a>0$, $a\neq1$, $M>0$일 때, 위와 같은 방법으로 $\log_a M^k=k\log_a M$이 성립함을 확인해 보자. (단, k는 실수)

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

❶ $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

❷ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

❸ $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

❹ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

보기

❶ $\log_2 1=0$, $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$

❷ $\log_2 6=\log_2(2\times3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

❸ $\log_3 \dfrac{2}{3}=\log_3 2-\log_3 3=\log_3 2-1$

❹ $\log_5 25=\log_5 5^2=2\log_5 5=2$

문제 4 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_2 6+\log_2 \dfrac{1}{6}$　　(2) $\log_3 15-\log_3 5$　　(3) $\log_{10}1000$

예제 2 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_3 \dfrac{9}{5}+2\log_3\sqrt{5}$　　(2) $\log_2\sqrt{10}-\dfrac{1}{2}\log_2 5$

풀이 (1) $\log_3 \dfrac{9}{5}+2\log_3\sqrt{5}=\log_3\dfrac{9}{5}+\log_3(\sqrt{5})^2=\log_3\dfrac{9}{5}+\log_3 5$

$=\log_3\left(\dfrac{9}{5}\times5\right)=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

(2) $\log_2\sqrt{10}-\dfrac{1}{2}\log_2 5=\log_2\sqrt{10}-\log_2 5^{\frac{1}{2}}=\log_2\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

$=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

답 (1) 2　(2) $\dfrac{1}{2}$

문제 5 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_{10}\sqrt{5}+\log_{10}2\sqrt{5}$　　(2) $\log_6 3\sqrt{2}-\log_6\sqrt{3}$

(3) $\log_4 6+\log_4 8-2\log_4\sqrt{3}$　　(4) $4\log_7\sqrt{5}-\log_7 5+\log_7\dfrac{1}{35}$

예제 3 $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$일 때, 다음을 a, b에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_{10}18$　　(2) $\log_{10}\frac{3}{5}$

풀이 (1) $\log_{10}18=\log_{10}(2\times3^2)=\log_{10}2+\log_{10}3^2$

$=\log_{10}2+2\log_{10}3=a+2b$

(2) $\log_{10}\frac{3}{5}=\log_{10}3-\log_{10}5=\log_{10}3-\log_{10}\frac{10}{2}$

$=\log_{10}3-(1-\log_{10}2)=b-(1-a)=a+b-1$

답 (1) $a+2b$　(2) $a+b-1$

문제 6 $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$일 때, 다음을 a, b에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_5 48$　　(2) $\log_5\frac{27}{4}$

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때, a를 밑으로 하는 로그 $\log_a b$를 1이 아닌 양수 c를 밑으로 하는 로그로 나타내 보자.

$\log_a b=m$, $\log_c a=n$으로 놓으면

$$b=a^m,\ a=c^n$$

이므로 지수법칙에 의하여

$$b=a^m=(c^n)^m=c^{mn}$$

이다. 이때 로그의 정의에 의하여 $mn=\log_c b$이므로

$$\log_a b\times\log_c a=\log_c b$$

$a\neq1$이므로 $\log_c a\neq0$

이다. 따라서 양변을 $\log_c a$로 나누면 다음이 성립한다.

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때,

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

보기 $\log_8 4=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}=\frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3}=\frac{2}{3}$

문제 7 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_4 32$ (2) $\log_{27} \frac{1}{9}$

(3) $\log_2 3 \times \log_3 2$ (4) $\log_3 5 \times \log_5 7 \times \log_7 9$

문제 8 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$일 때, 다음을 a, b에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log_4 3$ (2) $\log_6 24$

문제 9 $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$일 때, 다음을 증명하시오.

(1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b \neq 1$)

(2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$ (단, m, n은 실수, $m \neq 0$)

오류 찾기

다음은 $\log_2 12$와 $(\log_2 8)^2$의 값을 구한 과정이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 그 이유를 말해 보자.

$$\log_2 12 = \log_2 (4+8) = \log_2 4 + \log_2 8$$
$$= \log_2 2^2 + \log_2 2^3 = 2+3 = 5$$

$$(\log_2 8)^2 = 2\log_2 8 = 2\log_2 2^3 = 2 \times 3 = 6$$

이야기 수학

로그의 발견

네이피어

로그는 스코틀랜드의 수학자 네이피어(Napier, J., 1550~1617)가 발견하였다. 당시는 망원경의 발명과 더불어 천문학, 항해술, 상업 등이 급속하게 발전하던 시대로 여러 분야에서 매우 크고 복잡한 수를 계산하는 일이 증가하였고 그러한 계산은 엄청난 고역이었다.

하지만 로그의 발견으로 천문학자들의 계산 작업량이 현저하게 줄어들었는데 이는 로그가 곱셈과 나눗셈을 계산이 더 간단한 덧셈과 뺄셈으로 전환시키기 때문이었다. 이러한 측면에서 프랑스의 수학자 라플라스(Laplace, P. S., 1749~1827)는 '로그가 천문학자의 수명을 두 배로 늘렸다.'고 말했다고 한다.

(출처: 허민, 『수학자의 뒷모습 Ⅱ』)

2 상용로그

● 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

상용로그란 무엇일까

생각 톡

A사는 웹 사이트의 방문자 수로 인기도 지수를 측정하는데 웹 사이트의 방문자 수가 N일 때, 인기도 지수는 $\log_{10} N$이라고 한다.

탐구 ① 다음 표를 완성해 보자.

방문자 수	10	10^2	10^3	10^4	10^5
인기도 지수	1				

탐구 ② 인기도 지수가 4일 때의 방문자 수는 인기도 지수가 2일 때의 방문자 수의 몇 배인지 구해 보자.

우리는 수를 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리, …와 같이 10의 거듭제곱을 자릿수로 사용하여 나타낸다. 이와 같이 나타낸 수의 계산에서는 10을 밑으로 하는 로그를 사용하는 것이 편리하다.

10을 밑으로 하는 로그를 **상용로그**라 하고, 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

예를 들어 $\log_{10} 2$를 간단히 $\log 2$로 나타낸다.

n이 실수일 때, $\log 10^n = \log_{10} 10^n = n$이므로 10^n의 꼴의 수에 대한 상용로그의 값은 로그의 성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

보기
❶ $\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$
❷ $\log 0.1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

문제 1 **다음 값을 구하시오.**

(1) $\log 10000$ (2) $\log 0.001$

(3) $\log \sqrt{10^3}$ (4) $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{100}}$

이 책의 180쪽에 있는 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구해 보자.

상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

예를 들어 $\log 3.12$의 값을 구할 때, 상용로그표에서 3.1의 가로줄과 2의 세로줄이 만나는 곳의 수 0.4942를 찾으면 된다.

즉

$$\log 3.12 = 0.4942$$

이다.

수	0	1	2	3	⋯	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128		.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531		.0719	.0755
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814		.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955		.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092		.5159	.5172
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮

상용로그표에서 .4942는 0.4942를 의미한다.

상용로그표에 있는 상용로그의 값은 어림한 값이지만 편의상 등호를 사용하여 나타낸다.

문제 2 **상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.**

(1) $\log 4.73$　　　(2) $\log 8.9$

상용로그표와 로그의 성질을 이용하면 상용로그표에 나와 있지 않은 양수의 상용로그의 값을 구할 수도 있다.

예제 1 **상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.**

(1) $\log 236$　　　(2) $\log 0.236$

풀이 (1) $\log 236 = \log(2.36\times 10^2)$
$= \log 2.36 + \log 10^2$
$= 0.3729 + 2 = 2.3729$

(2) $\log 0.236 = \log(2.36\times 10^{-1})$
$= \log 2.36 + \log 10^{-1}$
$= 0.3729 - 1 = -0.6271$

답 (1) 2.3729　(2) -0.6271

문제 3 **상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.**

(1) $\log 56.2$　　　(2) $\log 0.0562$

참고 컴퓨터 계산기 프로그램을 이용하여 상용로그의 값을 구할 수도 있다. 입력 창에 양수의 값을 입력한 후 log 를 누르면 구하려는 상용로그의 값이 나타난다. 오른쪽 그림은 $\log 42.8$의 값을 구한 것이다.

상용로그를 이용하여 여러 가지 실생활 문제를 해결할 수 있다.

예제 2

광년(光年)은 빛이 진공 속에서 1년 동안 진행한 거리로 천체 사이의 거리를 나타낼 때 쓴다.

별의 밝기를 나타내는 방법으로는 절대 등급과 겉보기 등급이 있다. 절대 등급은 별이 지구와 32.6광년 떨어져 있다고 생각하고 정한 별의 밝기이고, 겉보기 등급은 지구에서 본 별의 상대적 밝기이다.
지구로부터 x광년 떨어진 별의 겉보기 등급을 m, 절대 등급을 M이라 하면

$$m-M=5\log x-5$$

라고 한다.
지구로부터 631광년 떨어진 별의 절대 등급이 -5일 때, 이 별의 겉보기 등급을 상용로그표를 이용하여 구하시오.

풀이 $x=631$, $M=-5$를 $m-M=5\log x-5$에 대입하면

$$m-(-5)=5\log 631-5$$
$$\begin{aligned} m&=5\log 631-10=5\log(6.31\times10^2)-10 \\ &=5(\log 6.31+\log 10^2)-10 \\ &=5(0.8+2)-10=4 \end{aligned}$$

따라서 구하는 별의 겉보기 등급은 4이다.

답 4

문제 4 **세기가 A W(와트)인 전파가 어떤 벽을 투과하면 세기가 B W가 될 때, 그 벽의 전파 감쇠비 f dB(데시벨)은**

$$f=10\log\frac{B}{A}$$

라고 한다.
세기가 1 W인 전파가 어떤 벽을 투과하면 세기가 0.302 W가 될 때, 그 벽의 전파 감쇠비를 상용로그표를 이용하여 구하시오.

수학 역량 플러스

상용로그와 지진

창의·융합 문제 해결

지진은 지구 내부의 에너지가 지표로 나오면서 발생하는데, 지진이 지구 내부에서 최초로 발생된 지점을 진원(震源, earthquake focus), 진원에서 수직으로 연결된 지표면 위의 지점을 진앙(震央, epicenter)이라고 한다.

지진의 크기를 절대적 수치로 나타내는 방법인 ‘규모’는 미국의 지진학자 리히터(Richter, C. F., 1900~1986)가 도입한 것으로 진앙에서 100 km 떨어진 지점에서 지진계로 측정한 지진파의 최대 진폭이 A μm(마이크로미터)일 때, 지진의 규모 M은

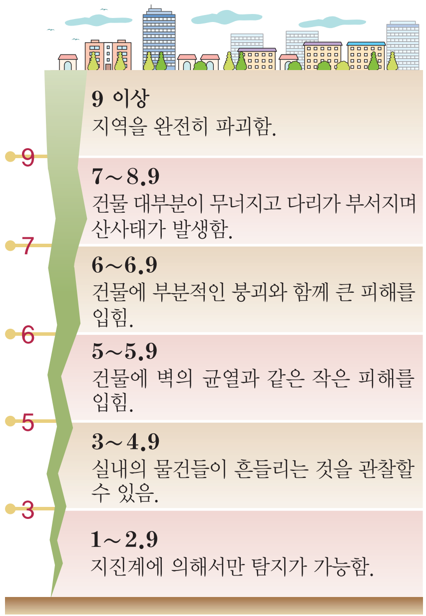
$$M=\log A$$

라고 한다.

또 규모가 M인 지진의 에너지의 크기를 E라 하면

$$\log E=11.8+1.5M$$

이라고 한다.



(출처: 기상청, 2016)

우리나라에서 크고 작은 지진이 발생하였는데, 2016년 9월 경주 지역에서 발생한 지진은 리히터 규모 5.8로서 서울에서도 집이 흔들리는 것을 느낄 수 있는 정도였다.

기상청은 지진 관측을 위해 전국에 150여 개의 지진 관측소를 설치하여 운영하고 있으며 지진의 조기 관측 및 분석 정확도 향상을 위해 노력하고 있다.

(출처: 두산백과사전, 2016)

활동 1 지진의 규모가 7.8인 지진파의 최대 진폭은 지진의 규모가 4.8인 지진파의 최대 진폭의 몇 배인지 구해 보자.

활동 2 지진의 규모가 2만큼 증가할 때 에너지의 크기는 몇 배 증가하는지 구해 보자.

중단원 마무리

❶ 로그

(1) **로그의 정의**

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때,

$$a^x=N \Longleftrightarrow x=\boxed{}$$

(2) **로그의 성질**

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=\boxed{}$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \dfrac{M}{N}=\boxed{}$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

(3) **로그의 밑의 변환**

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때,

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\boxed{}}$$

❷ 상용로그

(1) 10을 밑으로 하는 로그를 $\boxed{}$라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

(2) 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이며, 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값을 구할 수 있다.

기본 문제

1 다음 등식을 만족시키는 N의 값을 구하시오.

(1) $\log_2 N=3$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} N=-2$

2 다음 값을 구하시오.

(1) $\log_3 2+\log_3 \dfrac{3}{2}$

(2) $2\log_5 2-\log_5 20$

(3) $\dfrac{\log_7 16}{\log_7 2}$

3 $\log 2=a$, $\log 3=b$일 때, 다음을 a, b에 대한 식으로 나타내시오.

(1) $\log 24$ (2) $\log_3 16$

4 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.

(1) $\log 712$ (2) $\log 0.712$

• 정답 및 풀이 160쪽

표준 문제

5 다음이 정의되도록 하는 x의 값의 범위를 구하시오.

(1) $\log_{x-1}(3-x)$　　(2) $\log_{x+2}(-x^2+2x+3)$

6 $\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}=0$을 만족시키는 x의 값을 구하시오.

7 다음 값을 구하시오.

(1) $5\log_2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_2 3-\log_2\sqrt{6}$

(2) $\log\frac{8}{9}-2\log\frac{1}{3}+\log\frac{5}{4}$

(3) $\log_2 7\times\log_3 4\times\log_7 3$

서술형 **8** 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\log_3 a$, $\log_3 b$일 때, ab의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

추론 **9** 1이 아닌 양수 a, b, c에 대하여 로그의 성질을 이용하여 $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$임을 증명하시오.

10 상용로그표를 이용하여 다음에 답하시오.

(1) $\log N=0.5647$인 N의 값을 구하시오.

(2) (1)을 이용하여 $\log M=4.5647$인 M의 값을 구하시오.

발전 문제

11 $\log_2 3=a$, $\log_3 15=b$일 때, $\log_{30} 54$를 a, b에 대한 식으로 나타내시오.

문제 해결

12 $a>1$, $b>1$일 때, $(\log_a b)^2+(\log_b a^2)^2$의 최솟값을 구하시오.

서술형

13 어느 출판사는 앞으로 10년 동안 도서 판매량을 매년 7 %씩 증가시키려는 목표를 가지고 있다. 이 출판사가 목표를 달성했을 때, 10년 후 도서 판매량은 현재 도서 판매량의 몇 배가 되는지를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(단, $\log 1.07=0.03$, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)