I 지수함수와 로그함수

① 지수
② 로그
③ 지수함수와 로그함수

슈티펠
(Stifel, M., 1487~1567)
지수라는 용어를 처음 사용하였고 정수 지수와 분수 지수에 대한 지수법칙을 보였다.

네이피어
(Napier, J., 1550~1617)
로그를 발견하고 로그표를 발간하였다.

(출처: Vivian Shaw Groza, Susanne M. Shelley, 『Precalculus Mathematics』)

학습목표

- 거듭제곱과 **거듭제곱근**의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.
- 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해하고, **지수법칙**을 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
- **로그**의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하며 **상용로그**를 활용할 수 있다.
- **지수함수**와 **로그함수**의 뜻을 알고, 그 그래프와 성질을 이해한다.
- 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

현상을 꿰뚫어 보는 힘

우리 주변의 자연 현상이나 사회 현상 중에는 일정한 비율로 증가하거나 감소하는 변화를 보이는 것들이 있다. 방사성 물질의 붕괴, 박테리아의 증식, 음의 높이와 주파수의 변화 등이 그러한 속성을 가지고 있다.

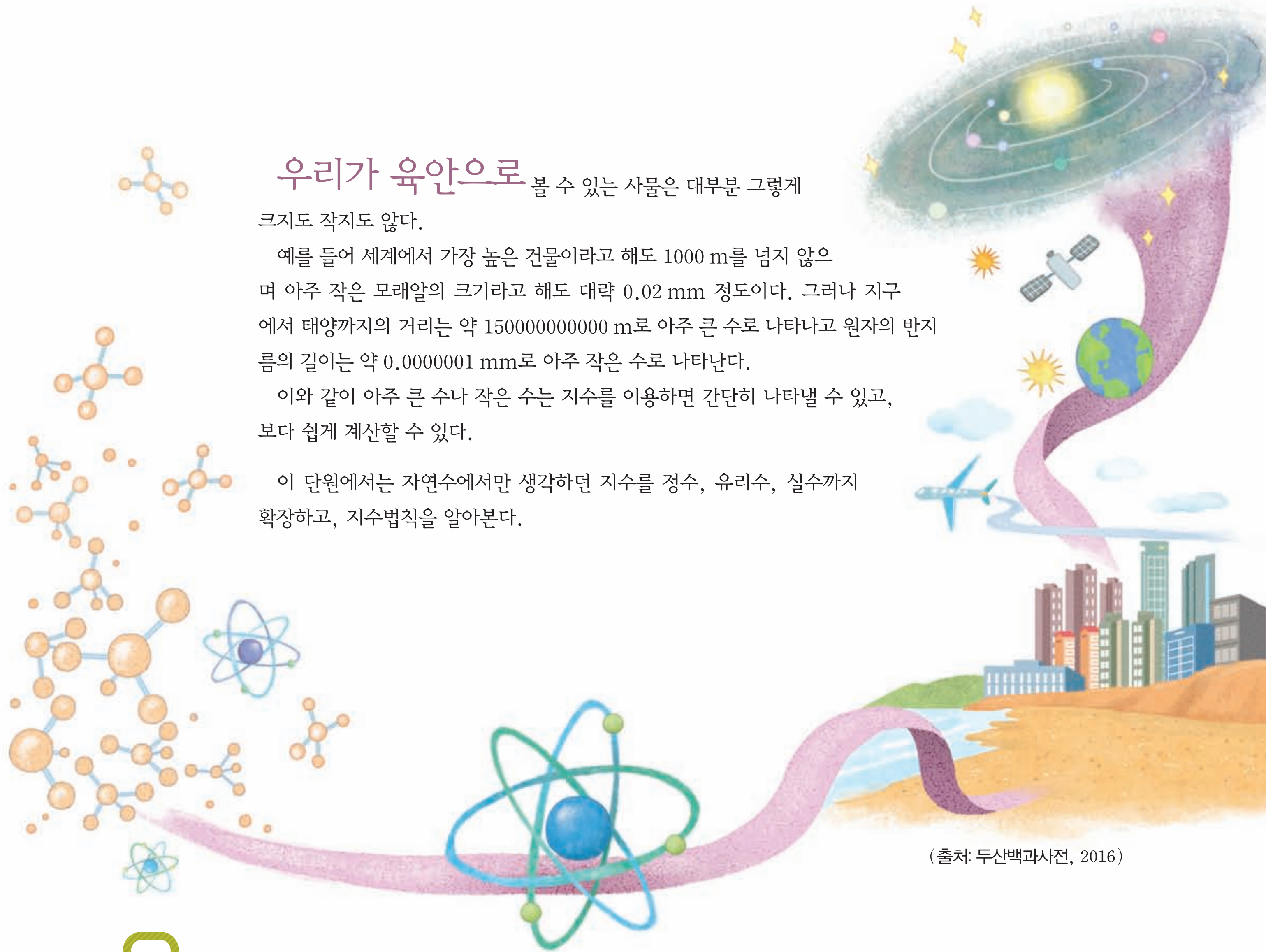
지수함수와 로그함수는 이처럼 일정한 비율로 증가하거나 감소하는 변화를 표현할 수 있기 때문에 사회, 과학, 정보, 경제 등 다양한 분야에서 여러 가지 현상을 설명하고 분석하는 데 유용한 도구가 된다.

우리가 육안으로 볼 수 있는 사물은 대부분 그렇게 크지도 작지도 않다.

예를 들어 세계에서 가장 높은 건물이라고 해도 1000 m를 넘지 않으며 아주 작은 모래알의 크기라고 해도 대략 0.02 mm 정도이다. 그러나 지구에서 태양까지의 거리는 약 150000000000 m로 아주 큰 수로 나타나고 원자의 반지름의 길이는 약 0.0000001 mm로 아주 작은 수로 나타난다.

이와 같이 아주 큰 수나 작은 수는 지수를 이용하면 간단히 나타낼 수 있고, 보다 쉽게 계산할 수 있다.

이 단원에서는 자연수에서만 생각하던 지수를 정수, 유리수, 실수까지 확장하고, 지수법칙을 알아본다.



(출처: 두산백과사전, 2016)

1 지수

준비학습

1 다음 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $2^3 \times 2^5 = 2^{\square}$

(2) $(2^2)^3 = 2^{\square}$

(3) $3^7 \div 3^5 = 3^{\square}$

(4) $(2 \times 3^2)^4 = 2^{\square} \times 3^{\square}$

2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

(2) $\sqrt{6} \div \sqrt{3}$

(3) $\sqrt{6} \times \sqrt{10} \div \sqrt{15}$

(4) $\sqrt{14} \div \sqrt{\frac{3}{5}} \times \sqrt{\frac{21}{10}}$

1 거듭제곱과 거듭제곱근

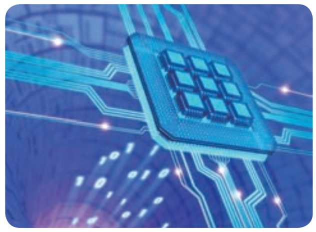
- 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

거듭제곱이란 무엇일까

생각 톡

데이터 용량을 나타내는 단위로 메비바이트(MiB), 기비바이트(GiB)를 넘어 테비바이트(TiB)가 사용되고 있다.

탐구 1 TiB$=2^{10}$ GiB, 1 GiB$=2^{10}$ MiB일 때, 1 TiB는 몇 MiB인지 구해 보자.



$a^1=a$이다.

어떤 수 a를 여러 번 곱한 a, a^2, a^3, …을 통틀어 a의 거듭제곱이라고 하며, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라고 한다.

a^n ← 지수 (n), 밑 (a)

지수가 자연수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 자연수일 때의 지수법칙

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때

❶ $a^m a^n = a^{m+n}$

❷ $(a^m)^n = a^{mn}$

❸ $(ab)^n = a^n b^n$

❹ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

❺ $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ $(a \neq 0)$

문제 1 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

(1) $a^2b \times a^3b^2$

(2) $(ab^2)^3$

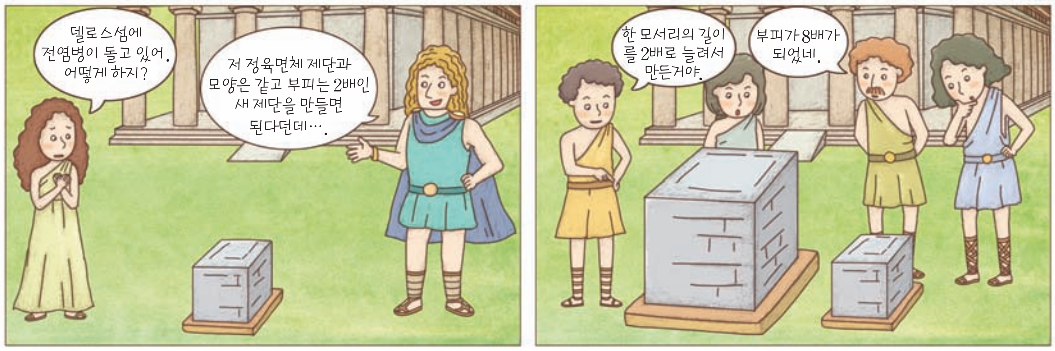
(3) $\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^4$

(4) $a^2b^3 \div a^5b$

거듭제곱근이란 무엇일까

생각톡

다음은 정육면체의 부피와 관련된 이야기이다.



탐구 ① 한 모서리의 길이가 1인 정육면체의 부피를 구해 보자.

탐구 ② 한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피가 **탐구 ①**에서 구한 부피의 2배일 때, x의 값을 구하는 방정식을 세워 보자.

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 예를 들어 $2^3=8$이므로 2는 8의 세제곱근이다.

또 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라고 한다.

x의 n제곱

$x^n = a$

a의 n제곱근

예제 1 다음 거듭제곱근을 구하시오.

실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있음이 알려져 있다.

(1) -1의 세제곱근　　　　(2) 16의 네제곱근

풀이 (1) -1의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=-1$이므로

$x^3+1=0$,　$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(2) 16의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$,　$(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)=0$

$x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

답 (1) -1, $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$　(2) ±2, $\pm2i$

문제 2 다음 거듭제곱근을 구하시오.

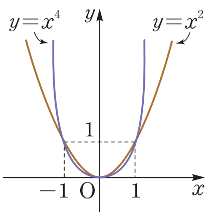
(1) -8의 세제곱근　　　　(2) 1의 네제곱근

거듭제곱근 중에서 실수인 것을 알아보자.

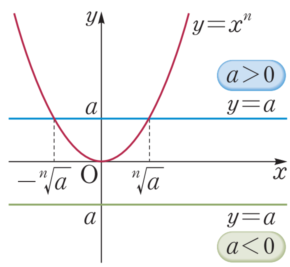
n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=x^n$의 그래프를 이용하여 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 구해 보자.

❶ n이 짝수일 때,



실수 x에 대하여 $(-x)^n=x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y축에 대하여 대칭이다.



(i) $a>0$이면 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 양수, 음수의 두 개가 있고 그 절댓값은 같다.
이때 양수인 것과 음수인 것을 각각

$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$

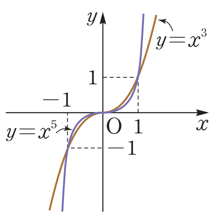
와 같이 나타낸다.

$\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽는다.

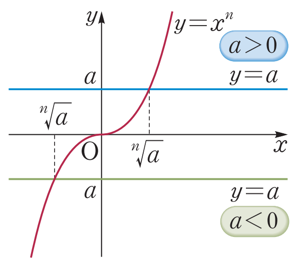
(ii) $a=0$이면 0의 n제곱근은 0뿐이다. 즉 $\sqrt[n]{0}=0$이다.

(iii) $a<0$이면 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

❷ n이 홀수일 때,



실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이다.



따라서 모든 실수 a에 대하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이고, 이것을 **$\sqrt[n]{a}$**와 같이 나타낸다. 특히 $\sqrt[n]{0}=0$이다.

이상을 정리하면 n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

n이 홀수일 때,
$a>0$이면 $\sqrt[n]{a}>0$
$a<0$이면 $\sqrt[n]{a}<0$

보기 ❶ 16의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.
❷ -8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{-8}=-2$이다.

문제 3 다음 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{27}$　(2) $\sqrt[4]{625}$　(3) $-\sqrt[6]{64}$　(4) $\sqrt[5]{-243}$

거듭제곱근에는 어떤 성질이 있을까

지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

이때 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다.

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 다음이 성립한다.

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[n]{a}$는 a의 n제곱근이므로 $(\sqrt[n]{a})^n=a$이다.

한편 $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$$

이때 $\sqrt[n]{a}>0$이므로 $(\sqrt[n]{a})^m>0$이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$은 a^m의 양의 n제곱근이므로 다음이 성립한다.

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

스스로 개념탐구

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, 위와 같은 방법으로 다음이 성립함을 확인해 보자.

(1) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　(2) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

이상을 정리하면 다음과 같다.

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

❶ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　❷ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

❸ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　❹ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

보기 ❶ $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ ❷ $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$

❸ $(\sqrt[4]{25})^2=\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{5^4}=5$ ❹ $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

문제 4 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{27}\times\sqrt[4]{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $(\sqrt[6]{49})^3$

(4) $\sqrt[11]{\sqrt[3]{125^{11}}}$

문제 5 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{3}-2\sqrt{\sqrt[3]{36}}$

(2) $\sqrt[3]{189}-\dfrac{\sqrt[3]{42}}{\sqrt[3]{6}}$

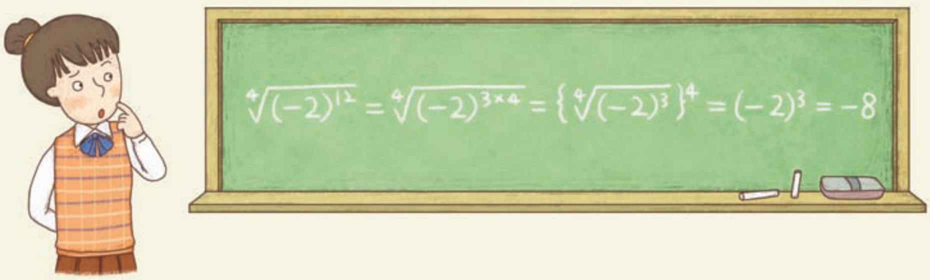
문제 6 한 모서리의 길이가 a인 정사면체의 부피를 V라고 하면

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

이다. 이 정사면체의 부피의 2배가 되는 정사면체를 만들려면 한 모서리의 길이를 원래 정사면체의 한 모서리의 길이의 몇 배로 하여야 하는지 구하시오.

오류 찾기

다음은 진경이가 거듭제곱근의 성질을 이용하여 $\sqrt[4]{(-2)^{12}}$의 값을 구한 과정이다. 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 그 이유를 말해 보자.



2 지수의 확장

- 지수가 정수, 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
- 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

지수가 0 또는 음의 정수일 때에는 어떻게 정의할까

생각 톡

다음은 길이의 단위를 나타낸 표이다.

단위	나노미터(nm)	마이크로미터(μm)	밀리미터(mm)	미터(m)	킬로미터(km)	메가미터(Mm)
길이	$\frac{1}{10^9}$ m	$\frac{1}{10^6}$ m	$\boxed{}$ m	1 m	$\boxed{}$ m	10^6 m

탐구 ① 위의 표에서 $\boxed{}$ 안에 알맞은 값을 써넣어 보자.

탐구 ② 1킬로미터는 1밀리미터의 몇 배인지 말해 보자.

지수가 자연수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 0 또는 음의 정수일 때도 성립하도록 지수의 범위를 정수까지 확장해 보자.

$a\neq0$이고 m, n이 양의 정수일 때, 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이 성립한다.

그런데 $m=0$일 때도 ①이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

이므로 $a^0=1$이어야 한다.

또 $m=-n$일 때도 ①이 성립한다고 하면

$$a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

이므로 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$이어야 한다.

이상에서 지수가 0 또는 음의 정수일 때에는 다음과 같이 정의한다.

0^0은 정의하지 않는다.

지수가 0 또는 음의 정수인 경우

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때,

$$a^0=1, \quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

문제 1 **다음 값을 구하시오.**

(1) $(-2)^0$　　(2) 10^{-1}　　(3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

지수가 정수일 때도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.

$a\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때, $m=-p$, $n=-q$(p, q는 양의 정수)로 놓으면

$$a^m a^n=a^{-p}a^{-q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{(-p)+(-q)}=a^{m+n}$$

$$(a^m)^n=(a^{-p})^{-q}=\left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q}=\frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}}=a^{pq}=a^{(-p)(-q)}=a^{mn}$$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$a^m a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn}$$

이 지수법칙은 지수 m 또는 n이 0일 때도 성립한다.

스스로 개념탐구

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때, 위와 같은 방법으로 다음이 성립함을 확인해 보자.

(1) $a^m\div a^n=a^{m-n}$　　(2) $(ab)^n=a^n b^n$

일반적으로 지수가 정수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 정수일 때

❶ $a^m a^n=a^{m+n}$　　❷ $a^m\div a^n=a^{m-n}$

❸ $(a^m)^n=a^{mn}$　　❹ $(ab)^n=a^n b^n$

❷는 m, n의 대소에 관계없이 성립한다.

보기

❶ $2^4\times2^{-2}=2^{4+(-2)}=2^2=4$

❷ $3\div3^{-3}=3^{1-(-3)}=3^4=81$

❸ $(a^{-2})^{-1}=a^{(-2)\times(-1)}=a^2$ (단, $a\neq0$)

❹ $(x^2y)^{-3}=(x^2)^{-3}y^{-3}=x^{-6}y^{-3}=\frac{1}{x^6y^3}$ (단, $x\neq0$, $y\neq0$)

문제 2 **다음 식을 간단히 하시오.** (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

(1) $3^3\times3^{-5}$　　(2) $5^4\div(5^{-1})^{-2}$

(3) $(ab^{-2})^3$　　(4) $(a^{-5}b^3)^{-3}\div(a^2b^{-2})^5$

지수가 유리수일 때에는 어떻게 정의할까

지수의 범위를 유리수까지 확장해 보자.

$a>0$이고 p, q가 정수일 때, 지수법칙

$$(a^p)^q=a^{pq} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이 성립한다.

그런데 p, q가 유리수일 때도 ①이 성립한다고 하면 두 정수 m, $n(n\geq 2)$에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

이므로 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이다. 즉

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

이다.

이상에서 지수가 유리수일 때에는 다음과 같이 정의한다.

지수가 유리수인 경우

$a>0$이고 m, $n(n\geq 2)$이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

특히 $\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

보기

① $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

② $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$

문제 3 다음에서 지수를 사용한 것은 근호를 사용하여 나타내고, 근호를 사용한 것은 지수를 사용하여 나타내시오. (단, $a>0$)

(1) $a^{\frac{3}{2}}$ (2) $a^{-0.3}$

(3) $\sqrt[4]{a^5}$ (4) $\sqrt[3]{a^{-4}}$

지수가 유리수일 때도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.

$a>0$이고 r, s가 유리수일 때, $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n\geq2$, $q\geq2$)로 놓으면

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{np}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a^r)^s &= (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} \\ &= \sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} \\ &= \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} \\ &= a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}} = a^{rs} \end{aligned}$$

이다. 즉 다음이 성립한다.

$$a^r a^s = a^{r+s},\ (a^r)^s = a^{rs}$$

스스로 개념탐구 $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, 위와 같은 방법으로 다음이 성립함을 확인해 보자.

(1) $a^r \div a^s = a^{r-s}$

(2) $(ab)^r = a^r b^r$

일반적으로 지수가 유리수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

❶ $a^r a^s = a^{r+s}$

❷ $a^r \div a^s = a^{r-s}$

❸ $(a^r)^s = a^{rs}$

❹ $(ab)^r = a^r b^r$

문제 4 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a>0$, $b>0$)

(1) $a^{\frac{4}{3}} \times a^{-2}$

(2) $a^{-\frac{3}{2}} \div a^{-\frac{5}{2}}$

(3) $(a^{-2})^{\frac{5}{6}}$

(4) $(a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{5}{4}})^{\frac{4}{3}}$

지수가 실수일 때에는 어떻게 정의할까

생각톡

컴퓨터 계산기 프로그램에서 2, x^y, 1, ., 4, = 를 차례대로 누르면 $2^{1.4}$의 값을 구할 수 있다.

탐구 컴퓨터 계산기 프로그램을 사용하여 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수들에 대하여 다음 표를 완성해 보자.
(단, 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸다.)

x	1	1.4	1.41	1.414	1.4142
2^x	2	2.6390			

지수의 범위를 실수까지 확장해 보자.

$\sqrt{2}=1.41421356\cdots$이므로 무리수 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지는 유리수

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ \cdots$$

을 생각할 수 있다. 이 유리수를 지수로 갖는 수들

$$2^1,\ 2^{1.4},\ 2^{1.41},\ 2^{1.414},\ 2^{1.4142},\ 2^{1.41421},\ \cdots$$

은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이때 그 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

이와 같은 방법으로 $a>0$이고 x가 실수일 때, a^x을 정의할 수 있다.

일반적으로 지수가 실수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

❶ $a^x a^y=a^{x+y}$ ❷ $a^x \div a^y=a^{x-y}$

❸ $(a^x)^y=a^{xy}$ ❹ $(ab)^x=a^x b^x$

문제 5 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a>0$, $b>0$)

(1) $2^{3\sqrt{2}}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}}$ (2) $3^{\sqrt{5}+1}\div 3^{\sqrt{5}}$ (3) $(a^{\sqrt{3}}b^{2\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$

설명하기 지수의 범위를 자연수로부터 정수, 유리수, 실수로 확장할 때, 밑의 조건이 어떻게 달라지는지 정리해 보고 밑의 조건이 달라지는 이유를 설명해 보자.

수학 역량 플러스

창의·융합 문제 해결

반음계와 거듭제곱

음파의 주파수(진동수)가 높으면 높은 소리가 나고 주파수가 낮으면 낮은 소리가 난다. 주파수의 단위로는 Hz(헤르츠)를 사용하는데 1초에 1번 진동하는 것을 1 Hz라고 한다.

서양 음악의 반음계(chromatic scale)에서 한 옥타브는

도, 올림도(도$^\#$), 레, 올림레(레$^\#$), 미, 파, 올림파(파$^\#$),

솔, 올림솔(솔$^\#$), 라, 올림라(라$^\#$), 시

의 12개의 반음으로 이루어져 있다. 이때 인접한 두 음 사이의 주파수의 비는 일정하다.

또 어떤 음보다 한 옥타브 높은 음은 그 음의 두 배의 주파수를 갖는다.

예를 들어 피아노 중앙의 '도'음보다 반음 3개만큼 낮은 '라'음의 주파수를 F_0 Hz라 하고 이보다 한 옥타브 높은 '라'음의 주파수를 F_1 Hz라고 하면 보통 $F_0=220$, $F_1=440$이다.

(출처: Cynthia Young, 『Precalculus』, 김홍종, 『문명, 수학의 필하모니』)

활동 1 '라$^\#$'음의 주파수가 이보다 반음 낮은 '라'음의 주파수의 a배라고 할 때, F_1은 F_0의 몇 배인지 a를 이용하여 나타내 보자.

활동 2 어떤 음보다 한 옥타브 높은 음은 그 음의 두 배의 주파수를 가짐을 이용하여 활동 1의 a를 구해 보자.

활동 3 주파수가 440 Hz인 '라'음보다 반음 3개만큼 높은 '도'음의 주파수를 F_2 Hz라고 할 때, F_2를 구해 보자. (단, 반올림하여 소수점 아래 둘째 자리까지 나타낸다.)

중단원 마무리

❶ 거듭제곱과 거듭제곱근

(1) 어떤 수 a를 여러 번 곱한 것을 a의 거듭제곱이라고 하며, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 $\boxed{\quad}$ 라고 한다.

(2) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 $\boxed{\qquad}$이라고 한다.

(3) **a의 실수인 n제곱근**

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\boxed{\quad}$

(4) **거듭제곱근의 성질**

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\boxed{\quad}$　② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\boxed{\quad}$

❷ 지수의 확장

(1) **지수가 0 또는 음의 정수인 경우**

$a\neq 0$이고 n이 양의 정수일 때,

$$a^0=\boxed{\quad},\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

(2) **지수가 유리수인 경우**

$a>0$이고 m, $n(n\geq 2)$이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}}=\boxed{\quad},\ a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

(3) **지수법칙**

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$　② $a^x\div a^y=\boxed{\quad}$

③ $(a^x)^y=\boxed{\quad}$　④ $(ab)^x=a^xb^x$

기본 문제

1 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 구하시오.

(1) 256의 네제곱근

(2) -27의 세제곱근

2 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}$　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{5^7}}{\sqrt[3]{5^4}}$

(3) $(\sqrt[6]{27})^2$　(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4^6}}$

3 다음 값을 구하시오.

(1) $(-5)^0$　(2) 4^{-2}

(3) $81^{\frac{3}{4}}$　(4) $16^{0.25}$

4 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a>0$, $b>0$)

(1) $a^{\frac{\sqrt{5}}{2}}\times a^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}$

(2) $(a^{3\sqrt{2}})^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

(3) $a^{\sqrt{3}}\div(a^{\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(4) $\sqrt[3]{a^2b^4}\times\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt{ab}$

• 정답 및 풀이 158쪽

표준 문제

5 다음 중에서 옳은 것은?

① 0의 세제곱근은 없다.
② -64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다.
③ 5의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[4]{5}$뿐이다.
④ n이 짝수일 때, -1의 n제곱근 중에서 실수인 것은 2개이다.
⑤ n이 홀수일 때, 2의 n제곱근 중에서 실수인 것은 하나뿐이다.

6 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[3]{a^4}\times\sqrt[6]{a^5}$
(2) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}\times\sqrt[4]{a^3}\div\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$
(3) $(a^3b^4)^{\frac{1}{2}}\div(a^5b^{-2})^{-\frac{1}{2}}$
(4) $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

추론 **7** $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 정수 n의 값을 모두 구하시오.

8 $x>1$이고 $x+x^{-1}=3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) x^2+x^{-2}
(2) $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$

9 $2^{2x}=5$일 때, $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$의 값을 구하시오.

10 $a=(2^{\sqrt{3}})^{3-\sqrt{3}}$, $b=(2^{3+\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$일 때, $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오.

서술형 **11** 실수 x, y에 대하여 $3^x=30^y=10$일 때, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

발전 문제

12 실수 a, b, c에 대하여 $a^2+b^2+c^2=12$, $a+b+c=\sqrt{10}$일 때, $(2^a)^{b+c}\times(2^b)^{c+a}\times(2^c)^{a+b}$의 값을 구하시오.

서술형 **13** 양수 a, b, c에 대하여 $a^2=7$, $b^5=13$, $c^6=15$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

창의·융합 **14** 아인슈타인(Einstein, A., 1879~1955)의 상대성 이론에 따르면 정지 상태에서 질량이 m_0 mg인 입자가 v m/s의 속도로 움직일 때의 질량 m mg은 $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$이다. 정지 상태에서 질량이 12 mg인 입자가 $\dfrac{9}{5}\times10^8$ m/s의 속도로 움직일 때의 질량을 구하시오.

(단, 상수 c는 빛의 속도를 나타내고 3×10^8 m/s로 계산한다.)