줄 끝에 추를 매달아 좌우로 왔다 갔다 하게 만든 물체를 진자라고 한다. 진자는 시간이 지남에 따라 왕복하는 거리가 점점 줄어드는데 진자가 멈출 때까지 움직인 총거리는 수열의 합을 이용하여 구할 수 있다.

또 부분을 확대하면 전체와 닮아 있는 기하적 형태를 프랙털이라고 한다. 프랙털은 우리 주변의 나무, 해안선, 몸의 신경계 등에서 찾아볼 수 있다. 이러한 구조 중에는 부피는 유한하지만 겉넓이가 무한하거나 넓이는 유한하지만 둘레의 길이가 무한한 경우가 있다. 이들의 길이, 넓이, 부피는 수열의 합을 이용하여 구할 수 있다.

이 단원에서는 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 등비급수의 합을 구하는 방법을 알아본다.

2 급수

준비학습

1 다음 등비수열의 합을 구하시오.

(1) $1+3+3^2+\cdots+3^6$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^9}$

2 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

1 급수의 수렴과 발산

- 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

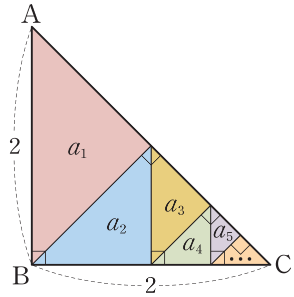
급수의 수렴과 발산이란 무엇일까

생각 톡

다음과 같은 등비수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$\{a_n\}: 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$$

탐구 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=2$인 직각이등변삼각형 ABC를 이용하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$의 값은 n의 값이 한없이 커짐에 따라 어떤 값에 가까워지는지 생각해 보자.



수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 **급수**라 하고, 이것을 기호 $\sum$를 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

과 같이 나타낸다. 이때 a_n을 이 급수의 제n항이라고 한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n, 즉

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 급수의 제n항까지의 **부분합**이라고 한다.

$n=1, 2, 3, \cdots$일 때,
$S_1=a_1$
$S_2=a_1+a_2$
$S_3=a_1+a_2+a_3$
$\vdots$
$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 한다.

이때 S를 이 **급수의 합**이라 하고,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

와 같이 나타낸다.

발산하는 급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않는다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 이 급수는 발산한다고 한다.

예제 1 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$의 합을 구하시오.

풀이 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $A\neq B$)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 1

문제 1 다음 급수의 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

예제 2 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$이 발산함을 보이시오.

증명 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

문제 2 다음 급수가 발산함을 보이시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 사이에는 어떤 관계가 있을까

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 수열 $\{a_n\}$의 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 사이의 관계를 알아보자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴할 때, 이 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S,\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S$$

이다. 이때 $a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0$$

이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

어떤 명제가 참이면 그 대우도 참이다.

또 이 명제의 대우 '$\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.'도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

급수와 수열의 극한값 사이의 관계

❶ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

❷ $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

참고 일반적으로 위의 명제 ❶의 역은 성립하지 않는다. 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이라고 해서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아니다. 예를 들어 앞의 **예제 2**에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$은 양의 무한대로 발산한다.

예제 3 다음 급수가 발산함을 보이시오.

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$$

증명 주어진 급수의 제n항을 a_n이라고 하면

$$a_n=\frac{n}{2n-1}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

문제 3 다음 급수가 발산함을 보이시오.

(1) $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{5}{8}+\cdots+\frac{n+2}{3n-1}+\cdots$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$

급수에는 어떤 성질이 있을까

수열의 극한에 대한 기본 성질로부터 수렴하는 급수에 대해서도 다음과 같은 성질이 성립함을 알 수 있다.

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴할 때

❶ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

❷ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

❸ $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (단, c는 상수)

보기 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2$일 때,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+6b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_n+\sum_{n=1}^{\infty}6b_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+6\sum_{n=1}^{\infty}b_n=2\times3+6\times2=18$$

문제 4 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$일 때, 다음 급수의 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n+2b_n)$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-4b_n)$

문제 해결하기

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같다.

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

1 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n(n+1)}+\frac{b}{(n+1)(n+2)}$일 때, 상수 a, b의 값을 구해 보자.

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합을 구해 보자.

수학 역량 플러스

문제 해결 추론

1−1+1−1+1−1+⋯의 값

극한의 개념이 확립되지 않았던 18세기에 수학자들 사이에서는 급수의 수렴, 발산에 대하여 많은 논란이 있었다.

이탈리아의 수학자 그란디(Grandi, L. G., 1671~1742)는 1703년에 급수 $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$의 합을 다음과 같은 두 가지 방법으로 구하였다.

방법 1 $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$

$=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$

$=0+0+0+\cdots=0$

방법 2 $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$

$=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$

$=1+0+0+0+\cdots=1$

그는 급수의 합은 두 가지 값이 될 수 없다고 생각하여 결국

$$S=1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+1-1+\cdots)=1-S$$

로부터 $2S=1$, 즉 $S=\frac{1}{2}$이라고 주장하였다.

독일의 수학자 라이프니츠(Leibniz, G. W., 1646~1716)는 철학자 볼프(Wolff, C., 1679~1754)에게 쓴 편지에서 그란디의 주장에 동조하며 S의 값은 0 또는 1이 될 확률이 같기 때문에 0과 1의 평균인 $\frac{1}{2}$이라고 하였다.

라이프니츠가 볼프에게 보낸 편지

또 베르누이(Bernoulli, J., 1654~1705)와 오일러(Euler, L., 1707~1783)도 비슷한 오류를 범하였는데, 이와 같이 유명한 수학자들도 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$에 대해서 의견이 분분하였다.

발산하는 급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않음을 이해하면 이러한 오류는 생기지 않는다.

(출처: Fauvel, J., van Maanen, J. A., 『History in Mathematics Education』)

활동 급수와 수열의 극한값 사이의 관계를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$이 발산함을 보이시오.

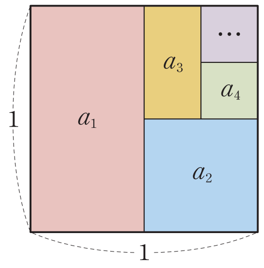
2 등비급수

- 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.
- 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

등비급수의 합은 어떻게 구할까

생각 톡

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형을 반으로 나누어 그중 한 직사각형에 색을 칠하고 그 넓이를 a_1이라고 하자. 또 나머지 직사각형을 다시 반으로 나누어 그중 한 직사각형에 색을 칠하고 그 넓이를 a_2라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복한다.



탐구 ① n번째에 색칠한 직사각형의 넓이를 a_n이라고 할 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구해 보자.

탐구 ② 색칠한 모든 직사각형의 넓이의 합을 $\sum$를 사용하여 나타내고, 그 합이 어떤 값에 가까워지는지 생각해 보자.

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$로 연결한 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 a이고 공비가 r인 **등비급수**라고 한다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서 $a=0$이면 각 항이 0이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=0$이다.

이제 $a \neq 0$일 때 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산에 대하여 알아보자.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 제$n$항까지의 부분합 S_n은

$r \neq 1$이면 $\quad S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$,

$r = 1$이면 $\quad S_n = a + a + \cdots + a = na$

이다.

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 r의 값에 따라 다음과 같이 수렴하거나 발산한다.

(i) $|r| < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

이다. 따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

(ii) $|r| \geq 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\ (a\neq0)$은

❶ $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

❷ $|r|\geq1$일 때, 발산한다.

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}(a\neq0)$이 수렴하기 위한 필요충분조건은

$-1<r<1$

이다.

예제 1 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}+\cdots$

(2) $1+2+4+8+\cdots$

풀이 (1) 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{1}{3}$이다.

이때 $\left|-\dfrac{1}{3}\right|<1$이므로 이 등비급수는 수렴하고, 그 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$$

(2) 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비가 2이다.

이때 $|2|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

답 (1) 수렴, $\dfrac{3}{4}$ (2) 발산

문제 1 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $2+\sqrt{2}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots$

(2) $1-\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{2^{n-1}}$

문제 2 다음 등비급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

(1) $1-3x+9x^2-27x^3+\cdots$

(2) $1+\dfrac{1-x}{2}+\dfrac{(1-x)^2}{4}+\dfrac{(1-x)^3}{8}+\cdots$

예제 2 다음 급수의 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos n\pi$

풀이 (1) $\dfrac{2^n+3^n}{4^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$이고, 두 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$이 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=1+3=4$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos n\pi=\frac{1}{2}\cos\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos 2\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos 3\pi+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cos 4\pi+\cdots$$
$$=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cdots$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{3}$$

답 (1) 4 (2) $-\dfrac{1}{3}$

문제 3 다음 급수의 합을 구하시오.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$

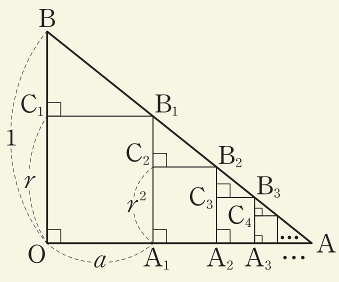
설명하기

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}=1$인 직각삼각형 OAB의 내부에 $\overline{OC_1}=r\,(0<r<1)$, $\overline{OA_1}=a$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$을 그린다. 또 직사각형 $OA_1B_1C_1$과 닮음비가 $1:r$인 직사각형 $A_1A_2B_2C_2$를 그리고 이와 같은 방법으로 직사각형을 한없이 반복하여 그리면 $\overline{A_1A_2}=ar$, $\overline{A_2A_3}=ar^2$, $\cdots$이다.

삼각형의 닮음을 이용하여

$$\overline{OA}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-r}$$

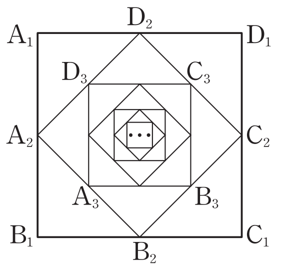
임을 설명해 보자.



등비급수를 활용하여 어떻게 문제를 해결할까

등비급수를 이용하면 같은 과정이 한없이 반복되는 도형에 대한 문제를 해결할 수 있다.

예제 3 **오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 만들고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 각 변의 중점을 연결하여 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 만든다. 이와 같은 방법으로 정사각형을 한없이 만들 때, 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합을 구하시오.**

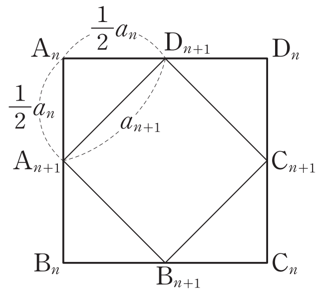


풀이 오른쪽 그림과 같이 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라고 하면

$$a_{n+1}{}^2=\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2+\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2=\frac{1}{2}a_n{}^2$$

이므로 $$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$$

$$a_n=a_1\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 둘레의 길이를 l_n이라고 하면

$$l_n=4a_n=8\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합은

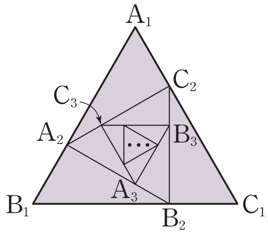
$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{8\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{8}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{16}{2-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{16(2+\sqrt{2})}{2}=16+8\sqrt{2}$$

답 $16+8\sqrt{2}$

문제 4 **오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 각 변을 $2:1$로 내분하는 점을 연결하여 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 만들고, 정삼각형 $A_2B_2C_2$의 각 변을 $2:1$로 내분하는 점을 연결하여 정삼각형 $A_3B_3C_3$을 만든다. 이와 같은 방법으로 정삼각형을 한없이 만들 때, 모든 정삼각형의 넓이의 합을 구하시오.**

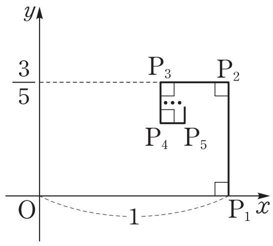


문제 5 오른쪽 그림에서 자연수 n에 대하여 점 P_n이

$$\overline{\mathrm{OP}_1}=1,\ \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\frac{3}{5}\overline{\mathrm{OP}_1},\ \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\frac{3}{5}\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2},\ \cdots,$$

$$\angle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2=\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\angle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4=\cdots=90^\circ$$

를 만족시킬 때, 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



등비급수를 이용하면 순환소수를 분수로 나타낼 수 있다.

예제 4 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{1}\dot{6}$　　　　(2) $0.3\dot{4}$

풀이 (1) $0.\dot{1}\dot{6}=0.16+0.0016+0.000016+\cdots$

$$=\frac{16}{100}+\frac{16}{100^2}+\frac{16}{100^3}+\cdots$$

이 급수는 첫째항이 $\frac{16}{100}$이고 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수이다.

$$0.\dot{1}\dot{6}=\frac{\frac{16}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{16}{99}$$

(2) $0.3\dot{4}=0.3+0.04+0.004+0.0004+\cdots$

$$=0.3+\left(\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots\right)$$

이때 급수 $\frac{4}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{4}{10000}+\cdots$는 첫째항이 $\frac{4}{100}$이고 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비급수이다.

$$0.3\dot{4}=0.3+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=0.3+\frac{4}{90}=\frac{31}{90}$$

답 (1) $\frac{16}{99}$　(2) $\frac{31}{90}$

문제 6 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.\dot{2}4\dot{6}$　　　　(2) $1.0\dot{1}\dot{2}$

중단원 마무리

❶ 급수

(1) 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식을 $\square$라 하고, 이것을 기호로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다.

(2) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n, 즉 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$를 이 급수의 제n항까지의 $\square$이라고 한다.

(3) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉 $\lim_{n\to\infty} S_n=S$일 때, 이 급수는 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 이 급수의 합이라 하고,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

와 같이 나타낸다.

❷ 급수와 수열의 극한값 사이의 관계

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\square$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 $\square$한다.

❸ 급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때

① $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

❹ 등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ $(a\neq 0)$은

① $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\square$이다.

② $|r|\geq 1$일 때, 발산한다.

기본 문제

1 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $3+6+9+\cdots+3n+\cdots$

(2) $1+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\cdots$

(3) $(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})+(\sqrt{8}-\sqrt{6})$
$+\cdots+(\sqrt{2n+2}-\sqrt{2n})+\cdots$

2 다음 급수의 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

3 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하시오.

(1) $3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$

(2) $\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

4 다음 급수의 합을 구하시오.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-2)^n}{5^n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n}-\frac{4}{3^n}\right)$

5 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내시오.

(1) $0.1\dot{8}$ (2) $0.\dot{5}0\dot{5}$

표준 문제

6 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\dfrac{5n^2+2n}{2(n+1)(2n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.

서술형 **7** 자연수 n에 대하여 직선 $(2n-1)x+(2n+1)y=1$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 a_n이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

8 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)=2$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{3a_n-2}$의 값을 구하시오.

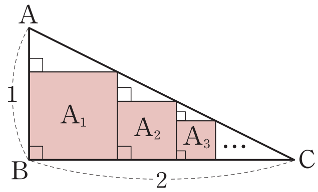
9 다음 급수가 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하시오.

$$x+x(x^2-1)+x(x^2-1)^2+\cdots+x(x^2-1)^{n-1}+\cdots$$

추론 **10** 급수 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{2}{3^4}+\dfrac{1}{3^5}+\dfrac{2}{3^6}+\cdots+\dfrac{1}{3^{2n-1}}+\dfrac{2}{3^{2n}}+\cdots$의 합을 구하시오.

11 자연수 n에 대하여 9^n-1을 10으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$의 값을 구하시오.

12 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 직각삼각형 ABC의 내부에 정사각형 A_1, A_2, A_3, $\cdots$을 한없이 만든다고 하자. 정사각형 A_n의 둘레의 길이를 l_n, 넓이를 S_n이라고 할 때, 다음을 구하시오.



(1) $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$

발전 문제

13 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^n$의 접선 중 기울기가 -1이고 제1사분면을 지나는 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_n, 0)$이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오.

서술형 **14** 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{4}{3}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

창의·융합 **15** 어느 장학 재단에서 12억 원의 기금을 조성하였다. 매년 초에 기금을 운용하여 연말까지 10 %의 이익을 내고 기금과 이익을 합한 금액의 20 %를 매년 말에 장학금으로 지급하려고 한다. 장학금으로 지급하고 남은 금액을 기금으로 하여 기금의 운용과 장학금의 지급을 매년 이와 같은 방법으로 실시할 계획이다. 기금을 조성한 후 n번째 해에 지급하는 장학금을 a_n억 원이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오.

대단원 마무리

01 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=6$, $\lim_{n\to\infty} b_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n-2b_n)$의 값을 구하시오.

02 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} na_n=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2a_n}$의 값을 구하시오.

03 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+2}}-\sqrt{S_n})$의 값을 구하시오.

04 자연수 n에 대하여 $\sqrt{4n^2+3n+1}$보다 크지 않은 최대 정수를 a_n이라고 할 때,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+3n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오.

05 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=4$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

06 $\lim_{n\to\infty}\frac{5\times3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$의 값을 구하시오.

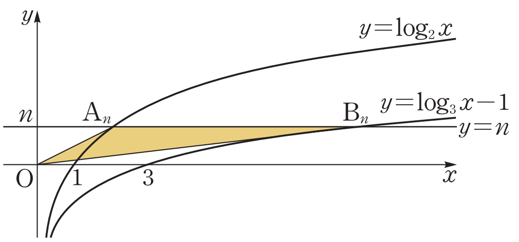
07 자연수 n에 대하여 다항식 $2x^{n+1}+x$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n-1}$의 값을 구하시오.

08 다음 수열의 극한값을 구하시오.

$\sqrt{5},\ \sqrt{5\sqrt{5}},\ \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5}}},\ \cdots$

09 다음 그림과 같이 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x-1$과 직선 $y=n$이 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라고 하자.

삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$의 넓이를 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



10 급수

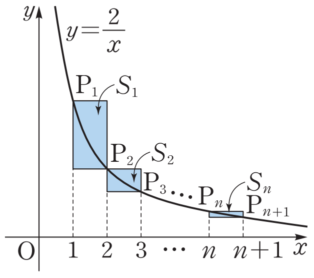
$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots$$

의 합을 구하시오.

11 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=7$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=15$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값을 구하시오.

12 다음 그림과 같이 곡선 $y=\frac{2}{x}\,(x>0)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n\left(n,\ \frac{2}{n}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}\left(n+1,\ \frac{2}{n+1}\right)$를 잇는 선분을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값을 구하시오.

(단, 직사각형의 각 변은 좌표축에 평행하다.)



13 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-6n-1}{a_n+3n+1}$의 값을 구하시오.

14 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 발산하거나 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty} a_n$이 발산하거나 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 모두 수렴한다.

15 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$의 합을 구하시오.

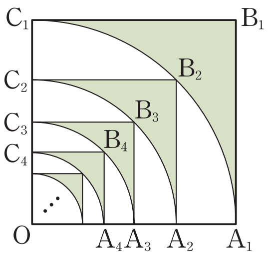
16 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴할 때, 항상 수렴하는 급수인 것만을 보기에서 있는 대로 고르시오.

보기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$

17 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $OA_1B_1C_1$의 내부에 점 O를 중심으로 하고 선분 OA_1을 반지름으로 하는 사분원을 그린 다음 그 사분원에 내접하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그린다. 이와 같은 방법으로 정사각형과 사분원을 한없이 그릴 때, 색칠한 부분의 넓이의 합을 구하시오.



18 순환소수 $0.\dot{3}4\dot{5}$의 소수점 아래 n번째 자리의 숫자를 a_n이라고 할 때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값을 구하시오.

서술형

• 정답 및 풀이 179쪽

19 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 부등식

$$2n-1<na_n<\sqrt{4n^2+5n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n)a_n}{5n^2+3}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

20 양의 실수 x에 대하여

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+1}{x^{n-1}+x}$$

일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(4)$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

21 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=\frac{|x|}{n}$와 $y=|\sin\pi x|$의 그래프의 교점의 개수를 a_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

22 수열 $\{(1-\log_2 x)^n\}$과 등비급수

$$1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\cdots$$

이 모두 수렴하도록 하는 x의 값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 수열의 수렴, 발산을 판별하고, 수열의 극한값을 구할 수 있다.			
❷ 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.			
❸ 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.			
❹ 등비급수의 합을 구하고, 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

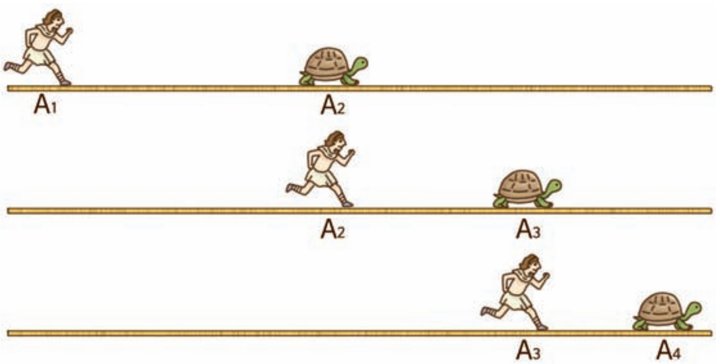
창의·융합 프로젝트

아킬레스와 거북의 경주

고대 그리스의 철학자 제논(Zenon, B.C. 490~B.C. 425?)은 여러 가지 역설을 제시하여 사람들을 당황하게 하였다. 다음은 제논의 역설 중 하나인 ‘아킬레스와 거북의 경주’이다.

그리스에서 가장 빠른 아킬레스와 거북이 경주를 한다고 하자. 만약 거북이 아킬레스보다 조금이라도 앞에서 출발한다면 아킬레스는 영원히 거북을 따라잡을 수 없다. 왜냐하면 아킬레스가 거북이 있던 곳까지 따라가는 사이에 거북은 앞으로 움직이고, 다시 아킬레스가 그 곳까지 따라가는 사이에 거북은 또 앞으로 움직여 거북은 아킬레스보다 항상 조금이라도 앞서 있기 때문이다.

제논의 주장에 의하면 아킬레스와 거북이 각각 A_1, A_2에서 동시에 출발한다고 할 때, 아킬레스가 A_2에 도착하면 거북은 A_3에 도착한다. 다시 아킬레스가 A_3에 도착하면 거북은 A_4에 도착한다. 이런 과정이 무한히 반복되므로 아킬레스는 영원히 거북을 따라잡을 수 없다는 것이다.



(출처: Friedman, M., Kandel, A., 『Calculus light』)

과제 1 아킬레스는 거북보다 10배 빠르면서 1초에 10 m를 가고, 거북이 아킬레스보다 100 m 앞에서 출발한다고 하자. 이때 제논의 주장에서 잘못된 점을 급수의 합을 이용하여 설명해 보자.

과제 2 제논의 또 다른 역설을 조사하고, 잘못된 점을 설명해 보자.

Math X Technology

물 위에 글씨를 쓸 수 있을까

물 위에 글씨를 쓰는 것이 가능할까? 영화에서나 가능할 것 같은 일이 실제로 일어났다.

일본에서 개발한 '아메바(AMOEBA)'라는 장치는 밑면의 지름의 길이가 1.5 m인 원통형 물탱크의 가장자리에 50개의 파동 생성기가 달린 장치로, 파동 생성기가 위아래로 움직이면서 발생하는 파동이 합쳐져 물 위에 일시적으로 글자의 무늬가 나타난다.

이처럼 파동을 적당히 합성하면 글자뿐만 아니라 더 복잡한 모양도 만들 수 있다. 여기에는 모든 주기함수는 삼각함수의 합으로 표현할 수 있다는 '푸리에 급수'가 이용된다.

푸리에 급수는 여러 소리의 파동이 하나로 합쳐지면서 소리를 내는 목관 악기의 파형을 표현하거나 음향 장치를 설계하는 데도 이용된다.

또 푸리에 급수와 관련된 '푸리에 변환'은 전파를 분석하는 데 사용된다. 예를 들어 음악을 주파수별로 구분하여 오디오 기계의 화면에 그 세기를 LED 막대기로 나타낼 수도 있고, 사람의 목소리를 주파수별로 나누어 비교하여 목소리를 분석하는 음성 인식에 사용할 수도 있다.

푸리에 변환을 좀 더 빠르게 수행하는 알고리즘인 '고속 푸리에 변환'은 첨단 의료 장비인 컴퓨터 단층 촬영(CT) 장치의 제작 원리이기도 하다. 컴퓨터 단층 촬영 장치는 엑스레이(X-ray)를 방출하는 스캐너가 환자 주변으로 360° 회전하면서 신체 내부의 단면 사진을 찍어 입체 영상으로 재구성하는 기계이다. 엑스레이 스캔에 의한 정보는 함수로 표현되고 고속 푸리에 변환을 이용하여 이 함수에서 영상을 조합해 낸다.

(출처: 『KISTI의 과학향기』, 2006년)

진로 탐색

기계 공학 기술자 | 다양한 산업 설비, 생산 시스템을 연구하고 개발한다. 또 제품을 위한 새로운 아이디어를 기획하고, 기계 및 시스템에 대한 세부 사항을 설계한다.

(출처: 커리어넷, 2017년)