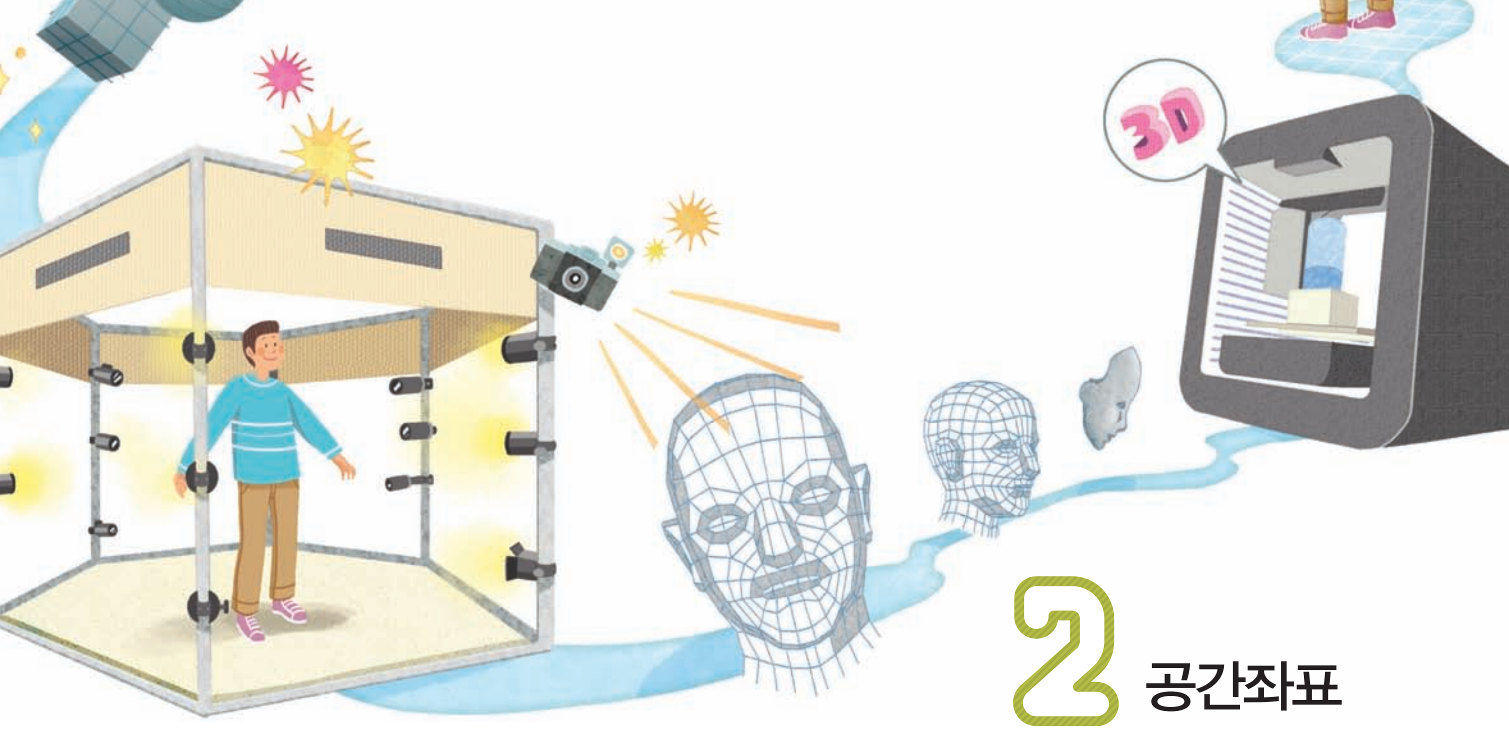
3차원 모델링은 가상의 3차원 공간 속에 재현될 수 있는 수학적 모델을 만드는 과정이다. 공간에 점을 찍고 점을 이어 선을 그리고 이 선을 연결하여 다각형의 면을 구성하는 방법으로 3차원 모델이 만들어진다. 이 과정에서 공간의 점의 위치는 공간좌표를 기초로 한다.

3차원 모델링은 영화, 애니메이션, 컴퓨터 게임 분야는 물론 물리적 실험 시뮬레이션, 의학, 디자인 설계 및 예술의 표현 수단으로 활용된다.

이 단원에서는 좌표공간에서 점의 좌표, 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점의 좌표, 구의 방정식을 알아본다.

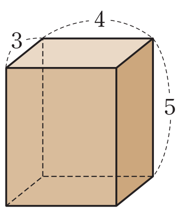


2 공간좌표

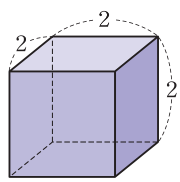
준비학습

1 다음 직육면체의 대각선의 길이를 구하시오.

(1)



(2)



2 두 점 A$(-3,\ 2)$, B$(6,\ -4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점

1 점의 좌표

- 좌표공간에서 점의 좌표를 구할 수 있다.

공간에서 점의 위치는 어떻게 나타낼까

생각 톡

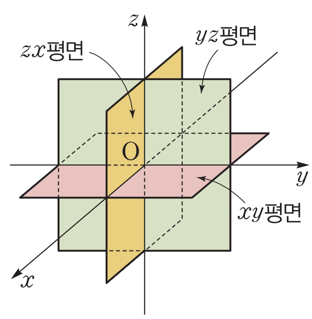
오른쪽과 같은 3층 공연장의 입장권에는 좌석의 위치가 층, 열, 번호로 표시된다.

탐구 ① 좌석의 위치를 (층, 열, 번호)의 순서쌍으로 표시하기로 할 때, (2, D, 12)로 표시된 좌석의 위치를 설명해 보자.

탐구 ② 1층 B열 9번 좌석의 위치를 **탐구 ①**에서와 같이 순서쌍으로 나타내어 보자.

직선에 있는 점의 위치는 수직선에서 하나의 실수로 나타낼 수 있고, 평면에 있는 점의 위치는 좌표평면에서 두 실수의 순서쌍으로 나타낼 수 있다.

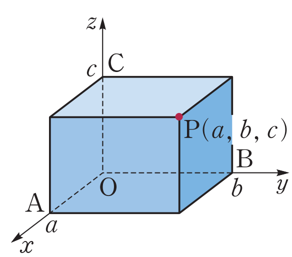
공간에 있는 점의 위치를 나타내는 방법을 알아보자.



오른쪽 그림과 같이 세 개의 수직선을 공간의 한 점 O에서 서로 직교하도록 그린다. 이때 점 O를 원점, 세 개의 수직선을 각각 x축, y축, z축이라 하고, 세 개의 축을 좌표축이라고 한다.

이와 같이 좌표축이 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

또 x축과 y축을 포함하는 평면을 xy평면, y축과 z축을 포함하는 평면을 yz평면, z축과 x축을 포함하는 평면을 zx평면이라 하고, 세 개의 평면을 좌표평면이라고 한다.



오른쪽 그림과 같이 좌표공간의 한 점 P에 대하여 점 P를 지나고 x축, y축, z축에 각각 수직인 평면이 이들 축과 만나는 점을 차례로 A, B, C라고 하자.

이때 세 점 A, B, C의 x축, y축, z축에서의 좌표를 각각 a, b, c라고 하면 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 단 하나로 정해진다.

역으로 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)가 주어지면 x축, y축, z축에 각각 a, b, c를 좌표로 하는 세 점 A, B, C가 정해지고, 세 점 A, B, C를 지나고 x축, y축, z축에 각각 수직인 평면들의 교점 P가 단 하나로 정해진다.

따라서 좌표공간의 점 P와 세 실수의 순서쌍 (a, b, c)는 일대일로 대응한다.

좌표공간에서 원점 O의 좌표는 $(0, 0, 0)$이다.

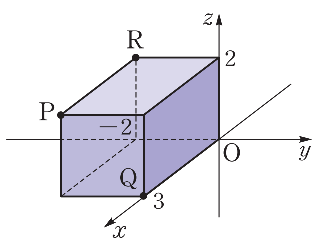
이때 순서쌍 (a, b, c)를 점 P의 **공간좌표** 또는 좌표라 하고, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(a, b, c)$$

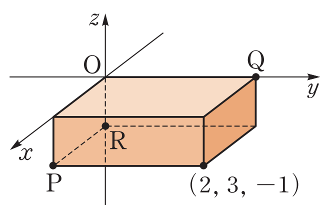
와 같이 나타낸다. 또 a, b, c를 각각 점 P의 x좌표, y좌표, z좌표라고 한다.

문제 1 다음 그림은 세 모서리가 좌표축 위에 있는 직육면체이다. 세 점 P, Q, R의 좌표를 구하시오.

(1)



(2)



문제 2 점 $\mathrm{P}(3, -1, 5)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

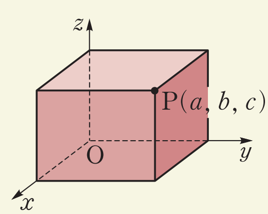
한 직선 또는 한 평면이 선분 AB를 수직이등분하면 두 점 A, B는 그 직선 또는 그 평면에 대하여 서로 대칭이다. 또 선분 AB의 중점이 원점이면 두 점 A, B는 원점에 대하여 서로 대칭이다.

(1) 점 P에서 x축에 내린 수선의 발
(2) 점 P에서 yz평면에 내린 수선의 발
(3) 점 P와 xy평면에 대하여 대칭인 점
(4) 점 P와 z축에 대하여 대칭인 점

유추하기

좌표공간에서 xy평면 위의 점의 좌표는 $(1, 2, 0)$, $(-3, 4, 0)$, …과 같이 z좌표가 모두 0이므로 xy평면의 방정식은 $z=0$으로 나타낼 수 있다.

1 점 $\mathrm{P}(a, b, c)$의 yz평면 위로의 정사영의 좌표를 구해 보자. 또 yz평면 위의 점의 좌표의 특징을 말하고, yz평면의 방정식을 구해 보자.



2 zx평면의 방정식을 구해 보자.

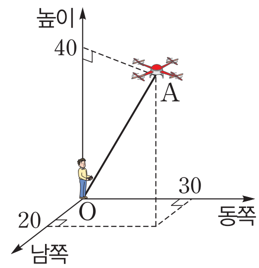
2 두 점 사이의 거리

● 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리는 어떻게 구할까

생각 톡

준하는 공원의 풍경을 찍기 위해 무인기를 조종하고 있다. 무인기는 준하가 있는 곳으로부터 남쪽으로 20 m, 동쪽으로 30 m 떨어진 지점의 지면으로부터 40 m의 상공에 떠 있다.

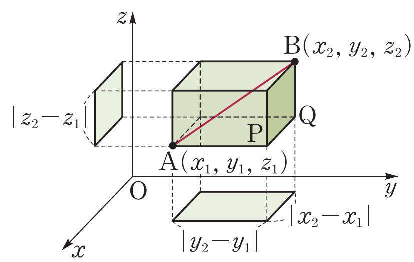


탐구 ① 준하의 위치를 O, 무인기의 위치를 A라고 할 때, 선분 OA를 대각선으로 하는 직육면체를 오른쪽 좌표공간에 그려 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 그린 직육면체의 대각선의 길이를 구해 보자.

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리를 구해 보자.

직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 것과도 평행하지 않은 경우에 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 대각선으로 하고 각 면이 좌표평면과 평행한 직육면체를 생각하면



$$P(x_1, y_1, z_1),\ Q(x_2, y_2, z_1)$$

이므로 이 직육면체의 세 모서리의 길이는

$$\overline{PQ}=|x_2-x_1|,\ \overline{AP}=|y_2-y_1|,\ \overline{BQ}=|z_2-z_1|$$

수직선에서 두 점 $M(x_1)$, $N(x_2)$ 사이의 거리는 $\overline{MN}=|x_2-x_1|$

이다. 따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad \cdots\cdots ①$$

직선 AB가 세 좌표평면 중 어느 한 평면과 평행한 경우에도 ①이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **좌표공간에서 두 점 사이의 거리**
>
> 좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는
>
> $$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는 다음과 같다.

$$\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

보기 ❶ 두 점 $A(-3, 1, 2)$, $B(2, -1, 6)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB}=\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(-1-1)^2+(6-2)^2}=3\sqrt{5}$$

❷ 원점 O와 점 $A(4, 2, -1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA}=\sqrt{4^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{21}$$

문제 1 **다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.**

(1) $A(2, 7, 1)$, $B(-1, 2, -3)$　　(2) $O(0, 0, 0)$, $A(5, -3, -\sqrt{2})$

문제 2 **세 점 $A(3, 1, 2)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 정삼각형임을 설명하시오.**

예제 1 **두 점 $A(1, -2, 5)$, $B(-2, -1, 1)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점의 좌표를 구하시오.**

x축 위의 점은 y좌표와 z좌표가 모두 0이다.

풀이 구하는 점을 $P(x, 0, 0)$이라고 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{(x+2)^2+1^2+(-1)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면　$x^2-2x+30=x^2+4x+6$

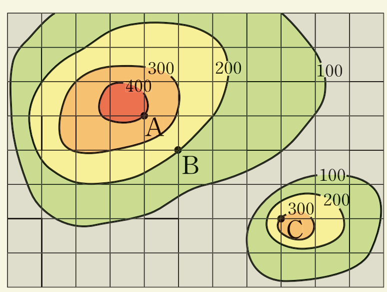
$6x=24$,　$x=4$

따라서 구하는 좌표는 $(4, 0, 0)$이다.　답 $(4, 0, 0)$

문제 3 **두 점 $A(1, 2, 2)$, $B(3, -3, 1)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표를 구하시오.**

적용하기

두 산봉우리의 A지점과 C지점 사이의 거리를 구하기 위해 두 산봉우리를 지도 위에 표시하면 오른쪽 그림과 같다. 지도에서 눈금 사이의 간격은 일정하고, 눈금 한 칸의 실제 거리는 100 m이다.



1 눈금 한 칸을 1, 등고선의 100 m를 1이라 하고, 점 A의 좌표를 $(0, 0, 0)$, 점 B의 좌표를 $(1, -1, -2)$라고 할 때, 점 C의 좌표를 구해 보자.

2 두 지점 A, C 사이의 실제 거리를 구해 보자. (단, $\sqrt{26}=5.1$로 계산한다.)

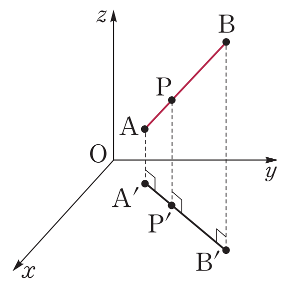
3 선분의 내분점과 외분점

- 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표는 어떻게 구할까

생각 톡

좌표공간의 두 점 A, B에 대하여 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이고, 세 점 A′, B′, P′은 각각 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영이다.



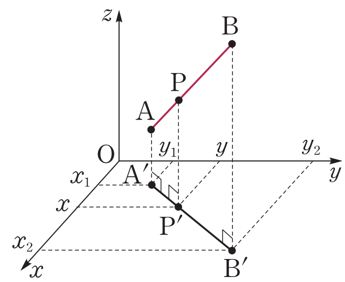
탐구 $\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}}$을 구해 보자.

선분 AB 위의 점 P에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}} = m : n$
$(m>0,\ n>0)$
일 때, 점 P는 선분 AB를 $m : n$으로 내분한다고 한다.

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$의 좌표를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A′, B′, P′이라고 하면

$$\mathrm{A}'(x_1,\ y_1,\ 0),\ \mathrm{B}'(x_2,\ y_2,\ 0),$$
$$\mathrm{P}'(x,\ y,\ 0)$$

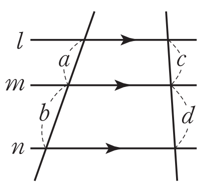


이고

$$\overline{\mathrm{A'P'}} : \overline{\mathrm{P'B'}} = \overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PB}}$$
$$= m : n$$

이므로 점 P′은 선분 A′B′을 $m : n$으로 내분하는 점이다.

세 직선 l, m, n에 대하여
$l /\!/ m /\!/ n$이면
$a : b = c : d$



이때 세 점 A′, B′, P′은 xy평면 위의 점이므로

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

이다.

같은 방법으로 세 점 A, B, P의 yz평면 또는 zx평면 위로의 정사영을 이용하여 점 P의 z좌표를 구하면

$$z = \frac{mz_2+nz_1}{m+n}$$

이다.

따라서 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 P의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

스스로 개념탐구

선분 AB의 연장선 위의 점 Q에 대하여
$\overline{AQ} : \overline{QB} = m : n$
$(m>0,\ n>0,\ m \neq n)$
일 때, 점 Q는 선분 AB를 $m : n$으로 외분한다고 한다.

좌표공간의 두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점 Q의 좌표가

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

임을 확인해 보자. (단, $m>0$, $n>0$, $m \neq n$)

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $B(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

❶ 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\ \frac{my_2+ny_1}{m+n},\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

❷ 선분 AB를 $m : n$ $(m>0,\ n>0,\ m \neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n},\ \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

특히 선분 AB의 중점의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

보기 두 점 $A(2,\ 3,\ 1)$, $B(-1,\ 0,\ 1)$에 대하여

❶ 선분 AB를 $1 : 2$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)+2\times2}{1+2},\ \frac{1\times0+2\times3}{1+2},\ \frac{1\times1+2\times1}{1+2}\right),\ 즉\ (1,\ 2,\ 1)$$

❷ 선분 AB를 $1 : 2$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)-2\times2}{1-2},\ \frac{1\times0-2\times3}{1-2},\ \frac{1\times1-2\times1}{1-2}\right),\ 즉\ (5,\ 6,\ 1)$$

문제 1 **두 점 $A(2,\ 1,\ 4)$, $B(-3,\ 6,\ -1)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.**

(1) 선분 AB를 $3 : 2$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $3 : 2$로 외분하는 점

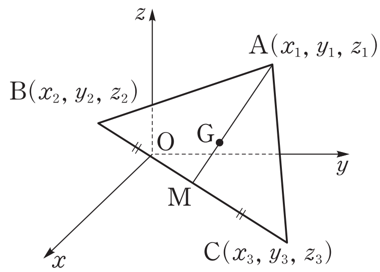
(3) 선분 AB의 중점

문제 2 **평행사변형 ABCD의 세 꼭짓점이 $A(-1,\ 2,\ 3)$, $B(2,\ 0,\ -1)$, $C(4,\ 2,\ -2)$일 때, 꼭짓점 D의 좌표를 구하시오.**

예제 1 세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

임을 증명하시오.



증명 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 $M(x_4, y_4, z_4)$라고 하면

$$x_4=\frac{x_2+x_3}{2},\ y_4=\frac{y_2+y_3}{2},$$

$$z_4=\frac{z_2+z_3}{2}$$

이때 무게중심 G의 좌표를 (x, y, z)라고 하면 점 G가 선분 AM을 $2:1$로 내분하므로

$$x=\frac{2x_4+x_1}{2+1}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{2y_4+y_1}{2+1}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},$$

$$z=\frac{2z_4+z_1}{2+1}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

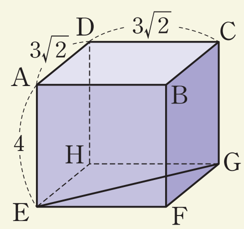
따라서 무게중심 G의 좌표는

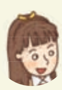
$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

문제 3 삼각형 ABC의 두 꼭짓점이 $A(3, -4, 2)$, $B(-2, 1, 1)$이고 무게중심이 $G(2, 0, -1)$일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.

문제 해결하기

오른쪽 직육면체에서 점 D와 직선 EG 사이의 거리를 구하려고 한다. 유진이와 현수가 생각한 방법으로 거리를 구해 보자.




유진: 삼수선의 정리를 이용하여 구할 수 있어.


현수: 좌표공간에서 선분의 내분점의 좌표를 이용하여 구할 수 있어.

4 구의 방정식

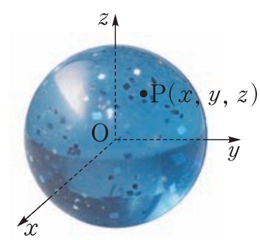
- 구의 방정식을 구할 수 있다.

구의 방정식은 어떻게 구할까

생각톡

오른쪽은 반지름의 길이가 1인 구 모양의 공을 중심을 원점 O로 하여 좌표공간에 나타낸 것이다. 이때 점 P(x, y, z)는 공 위의 점이다.

탐구 $\overline{\text{OP}}=1$임을 x, y, z를 사용한 식으로 나타내어 보자.



공간에서 한 점 C로부터 일정한 거리에 있는 점 P의 집합을 구라 하고, 점 C를 구의 중심, 선분 CP를 구의 반지름이라고 한다.

좌표공간에서 중심이 점 C(a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식을 구해 보자.

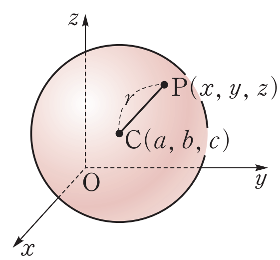
오른쪽 그림과 같이 구 위의 한 점을 P(x, y, z)라고 하면 $\overline{\text{CP}}=r$이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \cdots ①$$

이다.



역으로 방정식 ①을 만족시키는 점 P(x, y, z)는 중심이 점 C(a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 구의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 방정식

중심이 점 (a, b, c)이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은 다음과 같다.

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

보기 ❶ 중심이 점 $(1,\ -2,\ 5)$이고 반지름의 길이가 3인 구의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=9$$

❷ 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2=25$$

문제 1 **다음 구의 방정식을 구하시오.**

(1) 중심이 점 $(-3,\ 5,\ -1)$이고 반지름의 길이가 4인 구

(2) 중심이 원점이고 점 $(1,\ -2,\ 2)$를 지나는 구

예제 1 **두 점 $A(3,\ 1,\ -2)$, $B(-5,\ -7,\ 2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.**

풀이 구의 중심을 C라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{3+(-5)}{2},\ \frac{1+(-7)}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right),\ \text{즉 } C(-1,\ -3,\ 0)$$

따라서 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA}=\sqrt{(3+1)^2+(1+3)^2+(-2)^2}=6$$

이므로 구하는 구의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+3)^2+z^2=36$$

답 $(x+1)^2+(y+3)^2+z^2=36$

문제 2 **두 점 $A(2,\ 0,\ 3)$, $B(-2,\ 4,\ 1)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식을 구하시오.**

문제 해결하기

중심이 점 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구에 대하여 구의 중심과 좌표평면 사이의 거리가 r이면 구는 좌표평면에 접한다. 또 구의 중심과 좌표축 사이의 거리가 r이면 구는 좌표축에 접한다.

1 구가 xy평면에 접할 때, r를 $a,\ b,\ c$에 대한 식으로 나타내어 보자.

2 구가 z축에 접할 때, r를 $a,\ b,\ c$에 대한 식으로 나타내어 보자.

이차방정식 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$이 나타내는 도형은 무엇일까

구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$의 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-r^2=0$$

이다. 여기서 $-2a=A$, $-2b=B$, $-2c=C$, $a^2+b^2+c^2-r^2=D$로 놓으면

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

역으로 방정식 ①은

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}$$

로 변형된다. 이때 $A^2+B^2+C^2-4D>0$이면 방정식 ①은 중심이 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$인 구를 나타낸다.

$A^2+B^2+C^2-4D=0$이면 방정식 ①은 점 $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$를 나타내고, $A^2+B^2+C^2-4D<0$이면 방정식 ①을 만족시키는 세 실수 x, y, z는 존재하지 않는다.

보기 방정식 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+10z+3=0$을 변형하면

$$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=27$$

따라서 주어진 방정식은 중심이 점 $(-1,\ 2,\ -5)$이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{3}$인 구를 나타낸다.

문제 3 **방정식 $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$이 나타내는 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.**

문제 4 **방정식 $x^2+y^2+z^2+2x+6y-4z-k=0$이 구를 나타내도록 실수 k의 값의 범위를 정하시오.**

이야기 수학

구 모양의 타이어

구 모양의 타이어는 미국의 한 시사 주간지가 선정한 2016년 올해의 발명품 25가지 중 하나이다. 기존의 타이어와 비교하여 구 모양의 타이어는 자동차를 어느 방향으로든 움직일 수 있다는 장점이 있다. 예를 들어 자동차를 제자리에서 돌릴 수도 있고, 직각으로 차선을 변경할 수도 있으며 평행 주차를 쉽게 할 수도 있다.

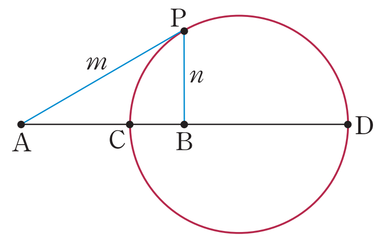
반면 구 모양의 타이어는 도로와 접하는 면적이 좁기 때문에 안정성에 문제가 생길 수 있다. 현재 전문가들은 이 문제를 해결하여 구 모양의 타이어를 상용화하기 위해 연구 중이다.

(출처: 『KISTI의 과학향기』, 2700호)

공학 도구 활용

정보 처리

두 점으로부터 거리의 비가 일정한 점



좌표평면 위의 두 점 A, B에 대하여

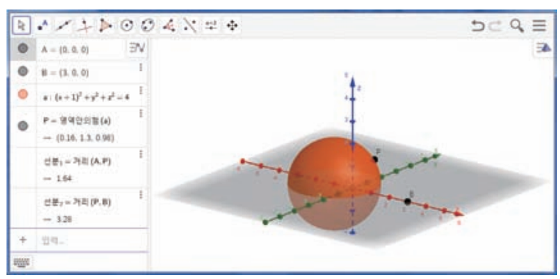
$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \ (m>0,\ n>0,\ m \neq n)$$

을 만족시키는 점 P가 그리는 도형은 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점 C와 $m : n$으로 외분하는 점 D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다. 이 원은 고대 그리스 수학자 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)의 이름을 따서 아폴로니오스의 원이라고 한다.

아폴로니오스의 원을 좌표공간으로 확장하면 다음과 같다.

> 좌표공간에서 두 점 A, B에 대하여
>
> $$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \ (m>0,\ n>0,\ m \neq n)$$
>
> 을 만족시키는 점 P가 그리는 도형은 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점과 $m : n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구이다.

예를 들어 두 점 A(0, 0, 0), B(3, 0, 0)에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는 (1, 0, 0), 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는 (−3, 0, 0)이므로 이 두 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 구의 방정식은 $(x+1)^2+y^2+z^2=4$이다. 이 구 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$임을 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 확인해 보자.



❶ 두 점 A, B와 구 $(x+1)^2+y^2+z^2=4$를 그리고 **대상 위의 점**을 선택하여 구 위의 점 P를 그린다.

❷ **거리 또는 길이**를 선택하여 $\overline{AP}$, $\overline{PB}$의 길이를 구한다.

❸ 점 P의 위치를 움직여 보면서 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$임을 확인한다.

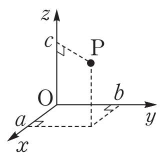
활동 두 점 A(−3, 4, 2), B(3, 1, −1)에 대하여 $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구해 보고, $\overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 1$임을 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 확인해 보자.

중단원 마무리

❶ 점의 좌표

(1) 좌표축이 정해진 공간을 $\boxed{\quad\quad}$이라고 한다.

(2) 좌표공간의 점 P에 대응하는 세 실수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 점 P의 $\boxed{\quad\quad}$ 또는 좌표라 하고, 이것을 기호로 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$와 같이 나타낸다.



❷ 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

❸ 선분의 내분점과 외분점

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$에 대하여

(1) 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점의 좌표는

$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

(2) 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는

$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

❹ 구의 방정식

중심이 점 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은

$\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

기본 문제

1 점 $\mathrm{P}(3,\ 2,\ -4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 점 P에서 y축에 내린 수선의 발
(2) 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발
(3) 점 P와 yz평면에 대하여 대칭인 점
(4) 점 P와 x축에 대하여 대칭인 점

2 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(3,\ 2,\ -1)$, $\mathrm{B}(5,\ 3,\ -2)$
(2) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(-4,\ 0,\ 12)$

3 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -3,\ -1)$, $\mathrm{B}(6,\ 2,\ 4)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점
(2) 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점

4 다음 구의 방정식을 구하시오.

(1) 중심이 점 $(2,\ -4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 구
(2) 두 점 $(-2,\ 1,\ -1)$, $(4,\ -3,\ 3)$을 지름의 양 끝 점으로 하는 구

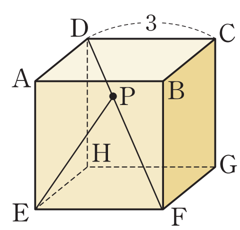
표준 문제

5 두 점 $A(3, 2, 1)$, $B(1, 6, 5)$와 yz평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하시오.

6 두 점 $A(2, 3, 7)$, $B(5, -1, 2)$에 대하여 직선 AB와 xy평면이 이루는 각의 크기를 구하시오.

7 평행사변형 ABCD의 세 꼭짓점이 $A(5, -3, 2)$, $B(1, 4, 6)$, $C(-1, 6, 8)$일 때, 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표를 구하시오.

서술형 **8** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체에서 선분 DF를 $1:2$로 내분하는 점을 P라고 할 때, 선분 EP의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



9 구 $x^2+y^2+z^2+2x-2y+6z-k=0$이 xy평면에 접하도록 하는 실수 k의 값을 구하시오.

서술형 **10** 구 $x^2+y^2+z^2-4x+4y-2z+5=0$ 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

11 두 점 $(3,\ 2,\ 4)$, $(5,\ 4,\ -2)$를 지름의 양 끝 점으로 하는 구가 xy평면과 만나서 생기는 도형의 넓이를 구하시오.

발전 문제

문제 해결 **12** 좌표공간의 xy평면 위에 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$이 있다. 이 원 위의 점 P와 점 $\mathrm{A}(-2,\ 0,\ 4)$에 대하여 선분 PA의 길이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

문제 해결 **13** 정사면체의 무게중심은 한 꼭짓점과 그 점에서 밑면에 내린 수선의 발을 연결한 선분을 꼭짓점으로부터 $3:1$로 내분하는 점이다. 좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A}(a,\ 2,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ b,\ 10)$, $\mathrm{C}(7,\ 11,\ 2)$, $\mathrm{D}(12,\ 3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 도형이 정사면체일 때, 정사면체 ABCD의 무게중심의 좌표를 구하시오.

14 점 $(1,\ 1,\ -2)$를 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 두 구가 있다. 이 두 구의 중심 사이의 거리를 구하시오.

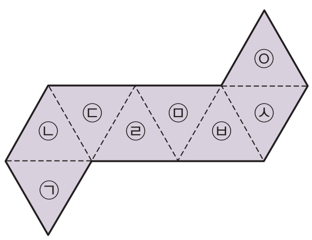
대단원 마무리

• 정답 및 풀이 169쪽

01 다음 중 평면이 하나로 결정되는 경우가 아닌 것은?

① 한 직선 위에 있지 않은 세 점
② 평행한 두 직선
③ 한 점에서 만나는 두 직선
④ 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점
⑤ 꼬인 위치에 있는 두 직선

02 다음 전개도로 만든 정팔면체에서 서로 평행한 면끼리 짝 지은 것은?

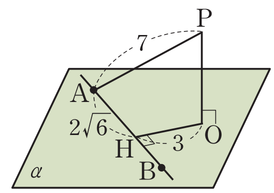


① ㉠, ㉧　② ㉡, ㉣　③ ㉢, ㉦
④ ㉣, ㉤　⑤ ㉥, ㉧

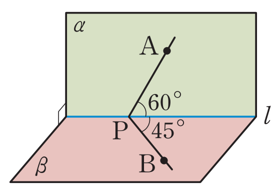
03 서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?

① $l \perp m$, $m \perp n$이면 $l /\!/ n$이다.
② $l /\!/ \alpha$, $m /\!/ \alpha$이면 $l /\!/ m$이다.
③ $l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$이면 $l /\!/ m$이다.
④ $l /\!/ \alpha$, $l /\!/ \beta$이면 $\alpha /\!/ \beta$이다.
⑤ $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$이면 $\alpha /\!/ \gamma$이다.

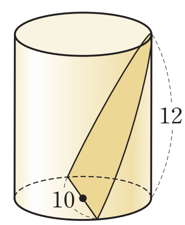
04 다음 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하고, 점 O에서 평면 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overline{AP}=7$, $\overline{AH}=2\sqrt{6}$, $\overline{OH}=3$일 때, 선분 PO의 길이를 구하시오.



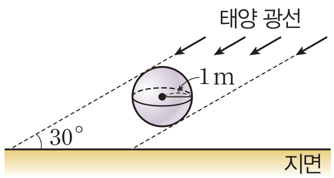
05 다음 그림과 같이 두 점 A, B는 각각 서로 수직인 두 평면 α, β 위에 있고, 점 P는 두 평면 α, β의 교선 l 위에 있다. 직선 l과 두 직선 PA, PB가 이루는 각의 크기가 각각 $60°$, $45°$일 때, 두 직선 PA, PB가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때 $\cos\theta$의 값을 구하시오.



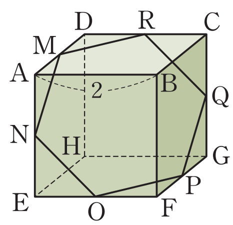
06 밑면인 원의 지름의 길이가 10이고 높이가 12인 원기둥을 오른쪽 그림과 같이 밑면의 지름을 지나고 다른 밑면의 둘레의 한 점을 지나는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 넓이를 구하시오.



07 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $1\,\text{m}$인 구 모양의 풍선이 지면 위에 떠 있다. 태양 광선이 지면과 이루는 각의 크기가 30°일 때, 이 풍선의 그림자의 넓이를 구하시오.



08 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 6개의 모서리 AD, AE, EF, FG, GC, CD의 중점을 각각 M, N, O, P, Q, R라고 하자. 평면 MNOPQR와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



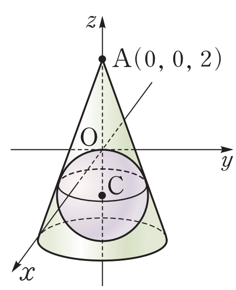
09 점 A$(4,\ 6,\ -5)$의 xy평면, yz평면, zx평면 위로의 정사영을 각각 B, C, D라고 하면 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$이다. 이때 $a+b+c$의 값을 구하시오.

10 세 점 A$(4,\ 7,\ 3)$, B$(2,\ -1,\ 5)$, C에 대하여 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 C가 그리는 도형은 원이다. 이 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하시오.

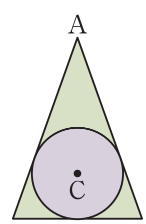
11 두 점 A$(1,\ -3,\ 2)$, B$(-3,\ 4,\ -5)$에 대하여 선분 AB가 yz평면에 의하여 $1 : m$으로 내분될 때, 양수 m의 값을 구하시오.

12 구 $x^2+y^2+z^2+2x-2ky+6z+2k=0$의 부피가 최소가 되도록 하는 실수 k의 값과 그때의 부피를 구하시오.

13 [그림 1]과 같이 꼭짓점이 A$(0,\ 0,\ 2)$인 원뿔과 구 C: $x^2+y^2+z^2+2z=0$이 있다. 점 A와 구의 중심 C를 지나는 평면으로 원뿔을 자른 단면이 항상 [그림 2]와 같이 원이 삼각형에 내접할 때, 원뿔과 구의 교선의 길이를 구하시오.

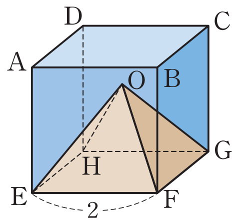


[그림 1]



[그림 2]

14 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체의 내부에 밑면이 정육면체의 한 면과 합동이고 옆면의 모양이 정삼각형인 사각뿔이 들어 있다. 평면 OEH와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

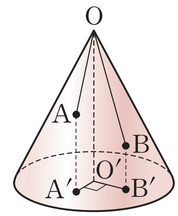


풀이

15 두 점 $A(3,\ 0,\ 0)$, $B(-2,\ 0,\ 0)$에 대하여 $\overline{PA}:\overline{PB}=3:2$를 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 겉넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 오른쪽 원뿔은 밑면인 원의 반지름의 길이가 5이고 높이가 10이다. 이 원뿔의 꼭짓점 O와 옆면 위의 두 점 A, B에 대하여 두 선분 OA, OB의 원뿔의 밑면 위로의 정사영을 각각 선분 $O'A'$, 선분 $O'B'$이라고 하자. $\overline{O'A'}=2$, $\overline{O'B'}=3$, $\angle A'O'B'=90°$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

17 구 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$이 직선 l과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 구의 중심을 점 C라고 하자. $\overline{AB}=6$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 직선, 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.			
❷ 삼수선의 정리를 이해하고, 정사영을 구할 수 있다.			
❸ 좌표공간에서 점의 좌표, 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.			
❹ 구의 방정식을 구할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

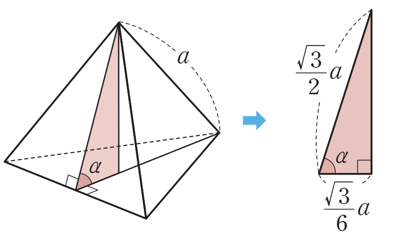
정다면체로 공간 채우기

다면체를 이용하여 3차원 공간을 가득 채우는 것을 공간 테셀레이션이라고 한다. 다면체로 포개짐 없이 공간을 채우려면 다면체가 만나는 꼭짓점 또는 모서리에서 이면각의 크기의 합이 360°이어야 한다.

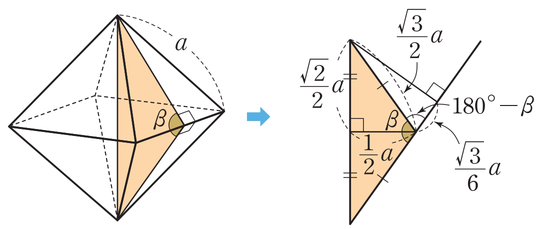
정육면체의 경우 모든 모서리에서 이면각의 크기가 90°이므로 정육면체로 공간을 채울 수 있다는 것은 쉽게 알 수 있다.

두 정다면체인 정사면체, 정팔면체로 공간을 채울 수 있음을 확인해 보자.

정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기를 각각 α, β라고 하면 다음을 알 수 있다.



➡ $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

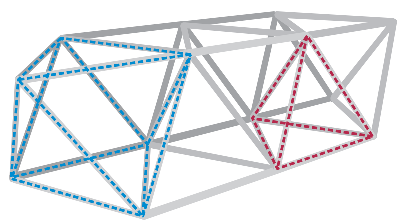


➡ $\cos(180^\circ-\beta)=\frac{1}{3}$

따라서 $\alpha=180^\circ-\beta$이므로 $\alpha+\beta=180^\circ$이다.

즉 정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합은 180°이므로 한 모서리에서 만나는 정사면체와 정팔면체의 이면각의 크기의 합이 360°가 되도록 만들 수 있다. 따라서 이 두 정다면체로 포개짐 없이 공간을 채울 수 있다.

건축에서 사용되는 옥텟 트러스라는 골조 구조는 정사면체와 정팔면체를 교대로 배치하여 만든 것으로 가볍고 튼튼하다는 장점이 있다.



과제 ✻ 다면체로 공간을 채울 수 있는 경우를 조사해 보자.

Math Technology

모션 캡처와 컴퓨터 그래픽

세상 속 수학

모션 캡처란 신체나 물체에 감지기를 부착하거나 적외선 카메라로 찍어 그 움직임을 디지털 형태로 기록하는 작업을 말한다. 신체의 여러 부분에 감지기를 부착한 후 각 점의 위치를 높이, 폭, 깊이를 세 개의 축으로 하는 공간좌표를 이용하여 수치 데이터로 저장한 다음, 컴퓨터로 만든 가상의 물체를 통해 똑같은 움직임을 재연한다.

영화에서 가상의 캐릭터가 살아 있는 것처럼 자연스럽게 움직이는 것은 실제 배우의 연기를 여러 대의 적외선 카메라로 찍어 컴퓨터로 기록한 다음 그 움직임을 가상의 캐릭터가 표현하도록 합성한 결과이다.

최근에는 기술의 발달로 인물의 동작뿐만 아니라 표정까지 수치 데이터로 추출하여 캐릭터를 제작할 수 있다.

모션 캡처 기술은 병원의 재활 의학과에서 환자의 보행을 교정하거나 운동선수들의 자세 교정에도 이용되는 등 활용 범위가 점점 넓어지고 있다.

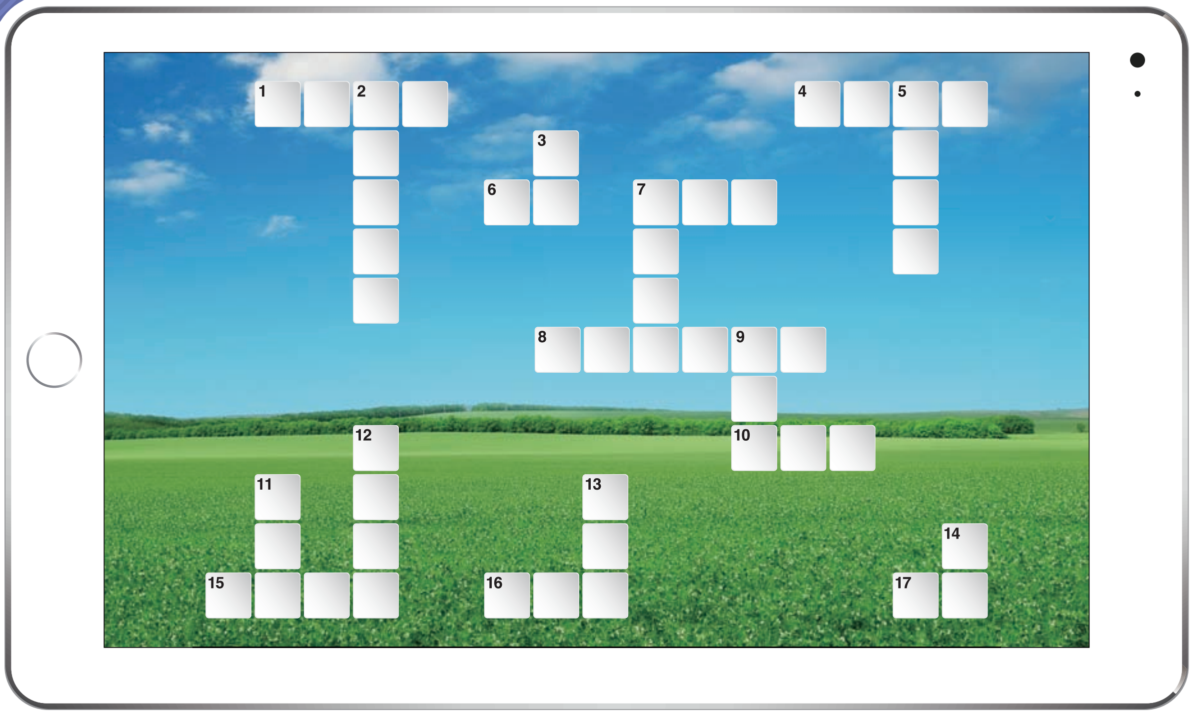
(출처: 류재형, 『명화를 만든 10가지 시각효과』)

진로 탐색

가상 현실 전문가 | 3차원 모델링 및 가상 현실 모델링 언어 등을 이용하여 가상의 시·공간에서 가상 시스템을 개발한다. 사용자가 원하는 가상 세계를 파악하여 개발 방향을 설정하고 개발된 시스템의 오류를 테스트한다.

(출처: 커리어넷, 2017)

수학 용어 맞히기



가로 열쇠

1 점 O를 시점으로 하는 벡터

4 공간 위의 점의 좌표 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$

6 타원의 두 초점을 지나는 직선이 타원과 만나는 두 점을 잇는 선분

7 한 직선을 공유하는 두 반평면으로 이루어진 도형

8 평면 위의 직선과 평면 밖의 한 점의 수선의 수직 관계에 대한 정리

10 시점과 종점이 일치하는 벡터

15 직선에 수직인 벡터

16 곡선 위의 점이 한없이 가까워지는 직선

17 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에서 점 A

세로 열쇠

2 벡터 $\vec{a}$를 $\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$로 나타낼 때, 두 실수 a_1, a_2

3 쌍곡선의 두 꼭짓점을 잇는 선분

5 한 점에서 서로 수직으로 만나는 세 좌표축이 정해진 공간

7 인수분해되지 않는 이차방정식이 나타내는 곡선

9 평면 위에 있지 않은 한 점에서 평면에 내린 수선의 발

11 평면 위의 두 점에서의 거리의 차가 일정한 점들의 집합

12 크기가 1인 벡터

13 한 점과, 이 점을 지나지 않는 직선에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합

14 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$에서 점 B