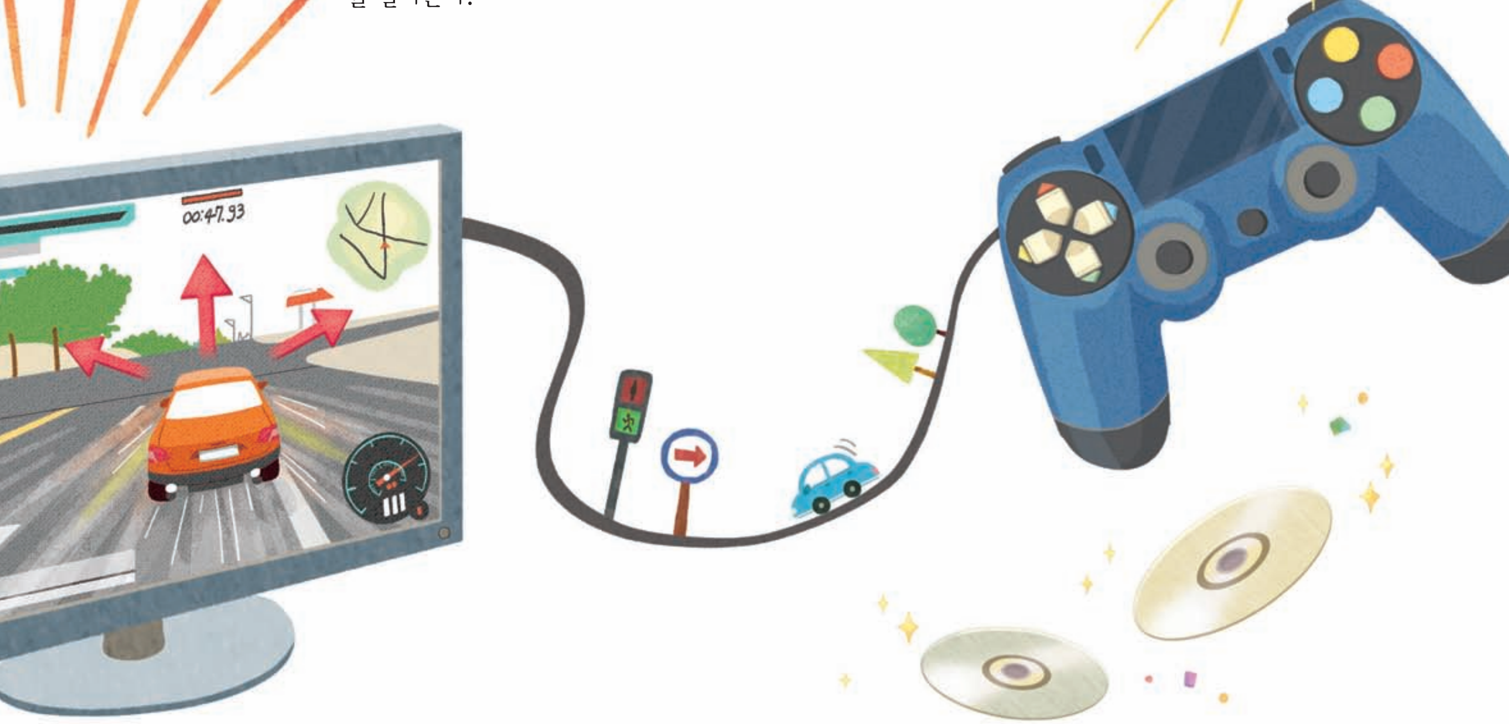
시뮬레이션 게임이나 가상 역할 게임의 프로그램을 개발할 때 벡터는 중요한 역할을 한다. 게임에서 대상의 위치와 운동, 명암, 게임 속 인물의 시선 등은 모두 벡터를 사용하여 표현한다. 또한 물체의 방향을 확인하거나 물체 사이의 거리를 계산하려면 벡터의 연산이 필요한데, 이때 좌표를 이용하여 벡터를 나타내면 벡터의 여러 가지 연산을 편리하게 할 수 있다.

이 단원에서는 위치벡터의 뜻, 평면벡터의 성분과 내적, 직선과 원의 방정식을 알아본다.



(출처: 도마에 요시키, 『게임을 움직이는 수학과 물리』)

2 평면벡터의 성분과 내적

준비학습

1 다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

(1) $A(-1,\ 5)$, $B(3,\ 2)$　　　　(2) $A(0,\ 7)$, $B(7,\ 0)$

2 다음 도형의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 2인 직선

(2) 중심의 좌표가 $(2,\ -3)$이고 원점을 지나는 원

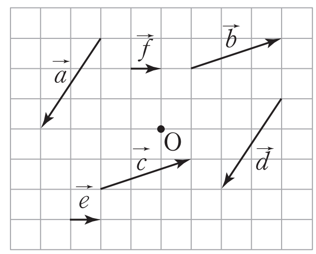
1 위치벡터

● 위치벡터의 뜻을 안다.

위치벡터란 무엇일까

생각 톡

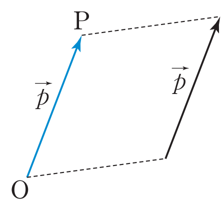
오른쪽 그림과 같이 평면 위에 여섯 개의 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$가 있다.



탐구 시점이 점 O와 일치하도록 벡터를 평행이동하였을 때, 종점이 일치하는 벡터끼리 짝 지어 보자.

평면에서의 벡터를 **평면벡터**라고 한다.

평면에서 한 점 O를 모든 벡터들의 시점으로 정하면 임의의 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$인 점 P가 유일하게 정해진다.



역으로 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$인 벡터 $\vec{p}$가 유일하게 정해진다.

따라서 시점을 한 점 O로 고정하면 점 P와 이 점의 위치를 나타내는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 일대일로 대응한다.

점 O에 대한 점 P의 위치벡터를 간단히 점 P의 위치벡터라고 한다.

점 P
위치벡터 ↓↑ 종점
벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

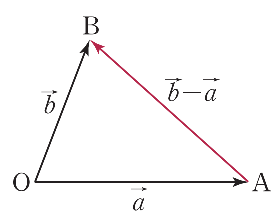
이와 같이 평면에서 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 점 O에 대한 점 P의 **위치벡터**라고 한다.

벡터를 시점과 종점의 위치벡터를 이용하여 나타내어 보자.

점 O에 대한 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로 다음이 성립한다.



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

보기 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\vec{b}-\vec{a})+2(\vec{c}-\vec{b})$$
$$=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$$

문제 1 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

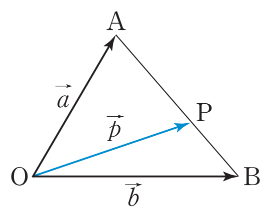
(1) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CA}$

(2) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

예제 1 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

임을 보이시오.



두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은
$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

증명 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

이때 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

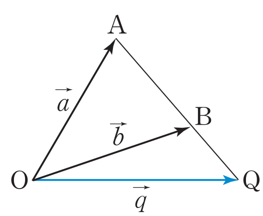
$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

문제 2 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n\ (m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

임을 보이시오.



문제 3 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 다음 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점

예제 2 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

임을 보이시오.

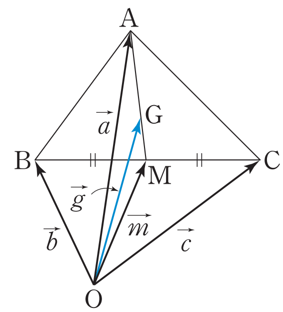
증명 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라고 하면 점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

삼각형 ABC의 무게중심 G는 중선 AM을 2 : 1로 내분하므로 $\vec{g}=\dfrac{2\vec{m}+\vec{a}}{3}$

이때 ①에서 $2\vec{m}=\vec{b}+\vec{c}$이므로

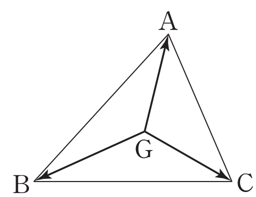
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



문제 4 삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 할 때,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

임을 보이시오.



적용하기

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$라고 할 때, 실수 t에 대하여 점 P의 위치벡터 $\overrightarrow{OP}$가

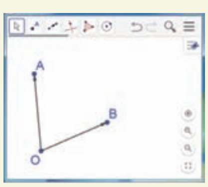
$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

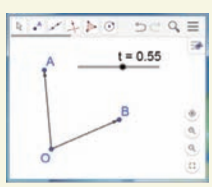
를 만족시킨다고 하자. 컴퓨터 기하 프로그램을 이용하여 $0\le t\le 1$일 때 점 P의 위치를 확인해 보자.

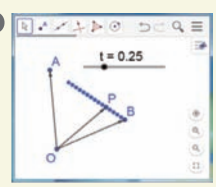
❶ 세 점 O, A, B를 그리고 **벡터**를 선택하여 두 위치벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$를 그린다.

❷ **슬라이더**를 선택하여 최솟값이 0, 최댓값이 1인 t의 슬라이더를 그린다.

❸ 입력창에 t∗벡터 (O, A)+(1−t)∗벡터 (O, B)를 입력한 후 **점으로부터의 벡터**를 선택하여 $\overrightarrow{OP}$를 그린다. 점 P의 자취가 보이도록 설정한 후 t의 슬라이더를 움직인다.

❶


❷


❸


실수 t의 값의 범위가 다음과 같을 때 점 P의 위치를 컴퓨터 기하 프로그램으로 확인해 보자.

(1) $1\le t\le 5$　　　　(2) $-5\le t\le 0$

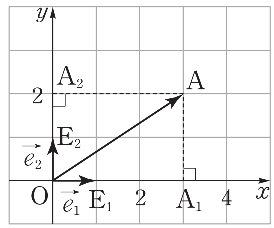
2 평면벡터의 성분

● 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

평면벡터의 성분이란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 그림에서 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$는 각각 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{E_1}(1,\ 0)$, $\mathrm{E_2}(0,\ 1)$의 위치벡터이고, 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$는 각각 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발이다.



탐구 ① 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내어 보자.

탐구 ② 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내어 보자.

일반적으로 평면에서 위치벡터의 시점은 좌표평면의 원점 O로 잡는다.

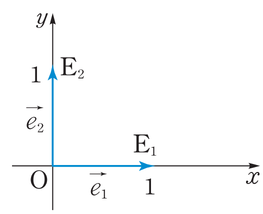
좌표평면에서 위치벡터와 좌표의 관계를 알아보자.

좌표평면에서 원점 O를 시점으로 하고 두 점 $\mathrm{E_1}(1,\ 0)$, $\mathrm{E_2}(0,\ 1)$을 각각 종점으로 하는 두 위치벡터를

$$\overrightarrow{\mathrm{OE_1}}=\vec{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OE_2}}=\vec{e_2}$$

로 나타낸다.

$|\vec{e_1}|=|\vec{e_2}|=1$



좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때, 벡터 $\vec{a}$를 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내어 보자.

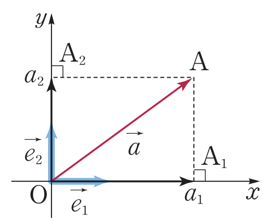
점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{A_1}(a_1,\ 0)$, $\mathrm{A_2}(0,\ a_2)$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=a_2\vec{e_2}$$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$이므로

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다.



이때 a_1, a_2를 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라 하고, a_1을 x성분, a_2를 y성분이라고 한다.

벡터 $\vec{a}$는 성분을 이용하여

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

$\vec{a}=\vec{0}$이면 $\vec{a}=(0,\ 0)$이다.

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$
$$=\underbrace{a_1}_{x\text{성분}}\vec{e_1}+\underbrace{a_2}_{y\text{성분}}\vec{e_2}$$

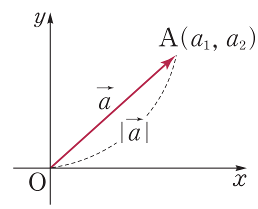
보기 점 A$(2,\ -1)$과 두 벡터 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}=(2,\ -1)$$

문제 1 **다음에서 두 벡터 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타낸 벡터는 성분으로, 성분으로 나타낸 벡터는 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$로 나타내시오.** (단, $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$)

(1) $\vec{a}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}$ (2) $\vec{b}=4\vec{e_2}-5\vec{e_1}$

(3) $\vec{c}=(4,\ -9)$ (4) $\vec{d}=(0,\ -7)$



오른쪽 그림과 같이 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$에서 원점 O와 점 A$(a_1,\ a_2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같다. 즉

$$|\vec{a}|=\overline{OA}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

이다.

한편 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 서로 같으면 두 벡터의 대응하는 성분이 각각 같다. 즉

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

성분으로 나타낸 평면벡터의 크기와 서로 같을 조건

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

❶ $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

❷ $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

보기 ❶ $\vec{a}=(3,\ 4)$일 때,

$|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

❷ $\vec{a}=(x,\ 1)$, $\vec{b}=(-2,\ y)$일 때, $\vec{a}=\vec{b}$이면

$x=-2$, $y=1$

문제 2 다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}=(-1,\ 7)$　　　　(2) $\vec{b}=(5,\ -12)$

문제 3 두 벡터 $\vec{a}=(m+4,\ -n)$, $\vec{b}=(2n,\ 7-2m)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, m, n의 값을 구하시오.

성분으로 나타낸 평면벡터의 연산은 어떻게 할까

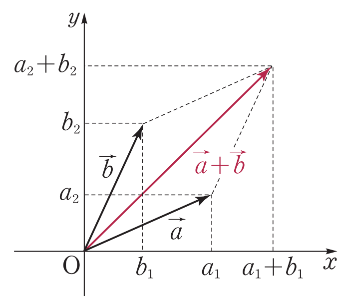
성분으로 나타낸 평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$일 때,

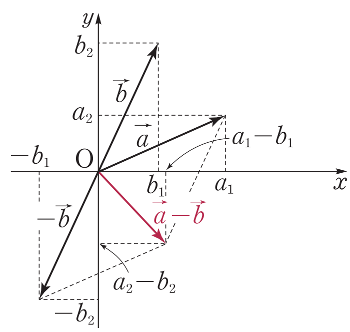
$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\ \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

이므로 다음이 성립한다.

❶
$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}\\&=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)\end{aligned}$$

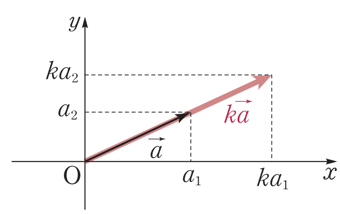


❷
$$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}\\&=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)\end{aligned}$$



❸ 실수 k에 대하여

$$\begin{aligned}k\vec{a}&=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})\\&=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}\\&=(ka_1,\ ka_2)\end{aligned}$$



이상을 정리하면 다음과 같다.

성분으로 나타낸 평면벡터의 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

❶ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

❷ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

❸ $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수이다.)

보기 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$일 때

❶ $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ -2)+(2,\ 3)=(1+2,\ -2+3)=(3,\ 1)$

❷ $\vec{a}-\vec{b}=(1,\ -2)-(2,\ 3)=(1-2,\ -2-3)=(-1,\ -5)$

❸ $3\vec{a}=3(1,\ -2)=(3,\ -6)$

문제 4 $\vec{a}=(-2,\ 5)$, $\vec{b}=(4,\ -1)$, $\vec{c}=(-9,\ 7)$**일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내시오.**

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $-\vec{c}$

(3) $\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$ (4) $11(\vec{a}+\vec{b})-5(2\vec{a}-\vec{c})$

예제 1 **세 벡터** $\vec{a}=(-1,\ 3)$, $\vec{b}=(-2,\ 5)$, $\vec{c}=(1,\ -4)$**에 대하여** $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$**를 만족시키는 두 실수** k, l**의 값을 구하시오.**

풀이 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned}(1,\ -4)&=k(-1,\ 3)+l(-2,\ 5)\\&=(-k,\ 3k)+(-2l,\ 5l)\\&=(-k-2l,\ 3k+5l)\end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-k-2l=1,\ 3k+5l=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k=-3,\ l=1$$

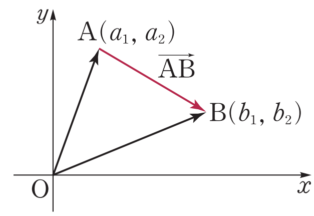
답 $k=-3$, $l=1$

문제 5 **두 벡터** $\vec{a}=(4,\ -5)$, $\vec{b}=(-5,\ 7)$**에 대하여 벡터** $\vec{c}$**가 다음과 같을 때,** $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$**를 만족시키는 두 실수** k, l**의 값을 구하시오.**

(1) $\vec{c}=(3,\ -3)$ (2) $\vec{c}=(-2,\ 7)$

원점 O와 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구해 보자.

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(b_1,\ b_2)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내면



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)\\&=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)\end{aligned}$$

이고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 크기는 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 성분과 크기

두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여

❶ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

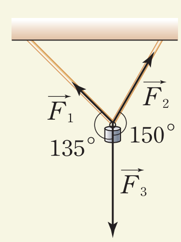
❷ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

문제 6 **다음 두 점 A, B에 대하여 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.**

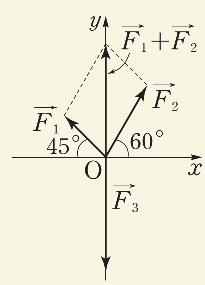
(1) $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$　　(2) $\mathrm{A}(-2,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 7)$

문제 해결하기

[그림 1]과 같이 추가 두 줄에 연결되어 천장에 매달려 있을 때, 두 줄이 추를 잡아당기는 힘을 각각 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$라 하고, 추를 아래로 잡아당기는 힘을 $\overrightarrow{F_3}$이라고 하자. 이때 세 힘 $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

1 $|\overrightarrow{F_1}|=a$, $|\overrightarrow{F_2}|=b$, $|\overrightarrow{F_3}|=c$일 때, $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$을 각각 성분으로 나타내어 보자.

2 두 줄이 추를 잡아당기는 힘의 합 $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$와 추를 아래로 잡아당기는 힘 $\overrightarrow{F_3}$이 평형을 이루는 것을 이용하여 $c=1+\sqrt{3}$일 때, a, b의 값을 구해 보자.

3 평면벡터의 내적

- 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

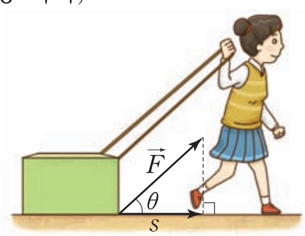
두 평면벡터의 내적이란 무엇일까

생각 톡

물리학에서 일의 정의는 다음과 같다.

$$(\text{일}) = (\text{물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기}) \times (\text{이동 거리})$$

오른쪽과 같이 바닥 위에 놓여 있는 짐에 바닥과 이루는 각의 크기가 θ인 힘 $\vec{F}$를 가하여 짐을 s만큼 이동하였다.



탐구 ① 짐의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기를 구해 보자.

탐구 ② 힘 $\vec{F}$가 한 일을 구해 보자.

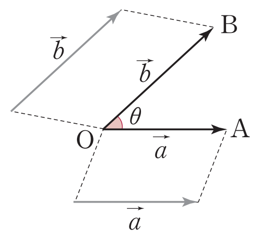
영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

가 되도록 세 점 O, A, B를 잡을 때,

$$\angle \mathrm{AOB} = \theta\ (0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$0^\circ \le \theta \le 90^\circ$일 때,

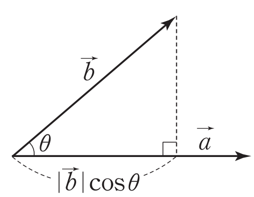
$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**이라 하고, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

와 같이 나타낸다.

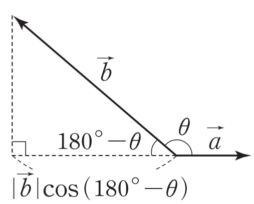
두 평면벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b}$는 실수이다.



한편 $90^\circ < \theta \le 180^\circ$일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은

$$-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ - \theta)$$

이다.



또 $\vec{a} = \vec{0}$ 또는 $\vec{b} = \vec{0}$일 때에는 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$으로 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적

두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

❶ $0° \le \theta \le 90°$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

❷ $90° < \theta \le 180°$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180° - \theta)$$

보기 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

❶ $\theta = 60°$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60° = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

❷ $\theta = 135°$일 때,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180° - 135°) = -3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

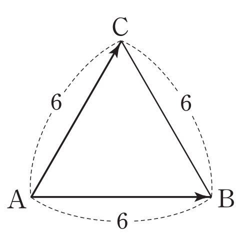
문제 1 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=\sqrt{6}$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하시오.

(1) $0°$　　(2) $45°$　　(3) $150°$

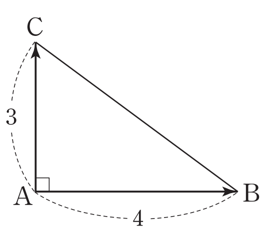
문제 2 평면벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$임을 보이시오.

문제 3 다음 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$를 구하시오.

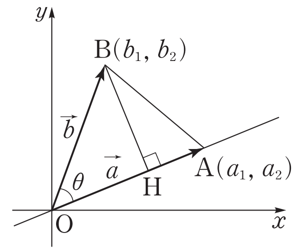
(1)



(2)



평면벡터의 내적을 성분으로 나타내어 보자.



오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1, b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

θ가 예각일 때, 삼각형 OAB의 꼭짓점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면 두 직각삼각형 HAB와 OHB에서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2\\&=(\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OH}})^2+(\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2)\\&=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OH}}\\&=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$, $\overline{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$이므로 $\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

이때 벡터의 크기를 성분으로 나타내면

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이 식은 $\theta=0°$, $90°\le\theta\le180°$일 때에도 성립하고, $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때에도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적과 성분

두 벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

보기 두 벡터 $\vec{a}=(1, 4)$, $\vec{b}=(2, -3)$에 대하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+4\times(-3)=-10$$

문제 4 **다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적을 구하시오.**

(1) $\vec{a}=(2, -7)$, $\vec{b}=(-8, -3)$

(2) $\vec{a}=(0, -10)$, $\vec{b}=(-9, 2)$

평면벡터의 내적에는 어떤 성질이 있을까

평면벡터의 내적의 성질을 알아보자.

세 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=b_1a_1+b_2a_2$

$=\vec{b}\cdot\vec{a}$

❷ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$

$=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$

$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

스스로 개념탐구

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$와 실수 k에 대하여

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

가 성립함을 설명해 보자.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적의 성질

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

❷ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

❸ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (단, k는 실수이다.)

예제 1 **두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.**

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

증명 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

문제 5 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

예제 2 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{7}$일 때, 다음을 구하시오.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$　　　　　(2) $|\vec{a}-2\vec{b}|$

풀이 (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$에서

$(2\sqrt{7})^2=3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+5^2$

이므로　$2\vec{a}\cdot\vec{b}+34=28$,　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

(2) $|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$=3^2-4\times(-3)+4\times5^2$

$=121$

이므로　$|\vec{a}-2\vec{b}|=11$

답 (1) -3　(2) 11

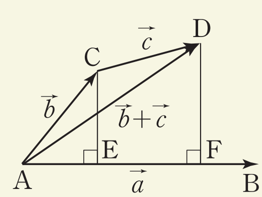
문제 6 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$이고 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$일 때, $|3\vec{a}-4\vec{b}|$를 구하시오.

문제 7 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=4$일 때, $|2\vec{a}-\vec{b}|$를 구하시오.

설명하기

세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$가 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡고, 두 점 C, D에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하자. 오른쪽 그림을 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명해 보자.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$



두 평면벡터가 이루는 각의 크기는 어떻게 구할까

두 평면벡터가 이루는 각의 크기를 내적을 이용하여 구해 보자.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라고 하자.

$\vec{a}\cdot\vec{b}\ge 0$이면 $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$이므로 내적의 정의에 의하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\\&=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\end{aligned}$$

이다.

한편 $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이면 $90^\circ<\theta\le 180^\circ$이므로 내적의 정의에 의하여

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ-\theta)&=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\\&=-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\end{aligned}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 평면벡터가 이루는 각의 크기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$라고 할 때

❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}\ge 0$이면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

❷ $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이면

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

예제 3 **두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(-3,\ 1)$이 이루는 각의 크기를 구하시오.**

풀이 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+1\times1=-5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(90°<\theta\le180°)$라고 하면

$$\cos(180°-\theta)=-\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{-5}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+1^2}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

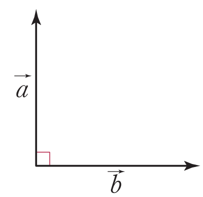
따라서 $180°-\theta=45°$이므로 구하는 각의 크기는 $135°$이다. **답** $135°$

문제 8 **다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하시오.**

(1) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$, $\vec{b}=(7,\ 0)$ (2) $\vec{a}=(-4,\ 4)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$

문제 9 **두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|3\vec{a}+2\vec{b}|=6$이다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.**

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $90°$일 때 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 수직이라 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\perp\vec{b}$와 같이 나타낸다.



두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 수직이면

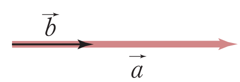
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90°=0$$

이다. 즉 $\vec{a}\perp\vec{b}$이면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이고, 그 역도 성립한다.

한편 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하면 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ는 $0°$ 또는 $180°$이다.

$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 같으면 $\theta=0°$

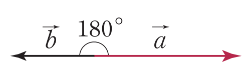
(i) $\theta=0°$일 때,



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 0°=|\vec{a}||\vec{b}|$$

$\vec{a}$와 $\vec{b}$의 방향이 반대이면 $\theta=180°$

(ii) $\theta=180°$일 때,



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-180°)$$
$$=-|\vec{a}||\vec{b}|$$

이상에서 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$이면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$$

이고, 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적과 수직, 평행

영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

❶ $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

❷ $\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$

$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$일 때,
$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

보기 두 벡터 $\vec{a}=(1, 5)$, $\vec{b}=(10, -2)$에 대하여

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1\times10+5\times(-2)=0$$

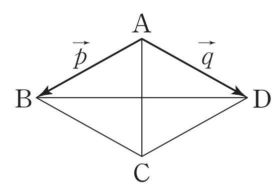
이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이다.

문제 10 **두 벡터 $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(x, -4)$가 서로 수직일 때, x의 값을 구하시오.**

예제 4 **마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD에 대하여**

$$\overline{AC} \perp \overline{BD}$$

임을 벡터의 내적을 이용하여 보이시오.



증명 $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$라고 하면

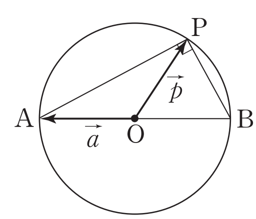
$$|\vec{p}|=|\vec{q}|$$

이때 $\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{q}-\vec{p}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} &= (\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{q}-\vec{p}) \\ &= |\vec{q}|^2-|\vec{p}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$, 즉 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$이다.

문제 11 **오른쪽 그림과 같이 원 O의 지름 AB와 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라고 할 때, 벡터의 내적을 이용하여 $\angle APB=90°$임을 보이시오.**



수학 역량 플러스

문제 해결

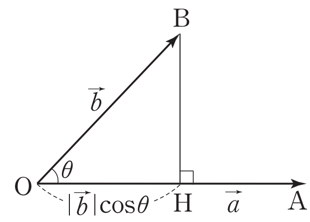
도형에서 벡터의 내적 구하기

평면 위의 세 점 O, A, B에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta\,(0^\circ<\theta<90^\circ)$라고 할 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적은

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

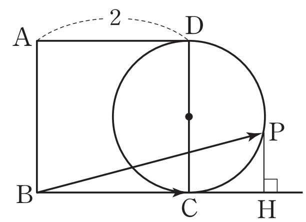
이다. 이때 점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $|\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{OB}|\cos\theta=|\overrightarrow{OH}|$이므로 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OH}|$$



이를 이용하여 도형에서 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

오른쪽 그림은 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 선분 CD를 지름으로 하는 원이다. 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.



점 P에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{BH}|=2|\overrightarrow{BH}|$$

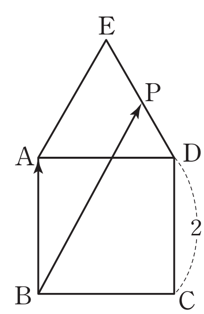
이다. 이때 원의 반지름의 길이가 1이므로 $1\le|\overrightarrow{BH}|\le3$이다.

따라서 $2\le2|\overrightarrow{BH}|\le6$이므로

$$2\le\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}\le6$$

이다. 즉 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최솟값은 2, 최댓값은 6이다.

활동 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 정삼각형 EAD 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구해 보자.



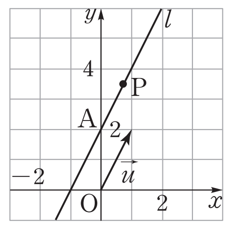
4 직선과 원의 방정식

● 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.

주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식을 어떻게 구할까

생각톡

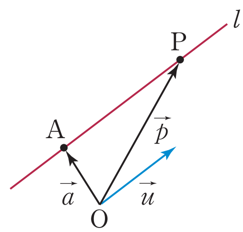
오른쪽 그림과 같이 직선 l: $y=2x+2$와 벡터 $\vec{u}=(1,\ 2)$가 있다. 이때 점 A는 직선 l과 y축의 교점이고 점 $\mathrm{P}(k,\ 2k+2)(k\neq 0)$는 직선 l 위의 점이다.



탐구 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\vec{u}$가 서로 평행한지 말해 보자.

점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 한 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \vec{u}$이므로



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$$

인 실수 t가 존재한다.

이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=t\vec{u},\ \text{즉}\ \vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \qquad \cdots\cdots \ ①$$

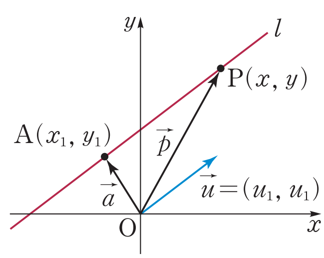
이다. 역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 벡터로 나타낸 직선 l의 방정식이다.

이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

$\vec{u}=(u_1,\ u_2)$일 때, 방정식 ①을 벡터의 성분을 이용하여 나타내어 보자.

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로 방정식 ①에 의하여



$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(x_1,\ y_1)+t(u_1,\ u_2)\\&=(x_1+u_1t,\ y_1+u_2t)\end{aligned}$$

이다.

즉 $x=x_1+u_1t$, $y=y_1+u_2t$이므로 $u_1u_2\neq0$일 때 이 식에서 t를 없애면 직선 l의 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$을 변형하면

$y-y_1=\frac{u_2}{u_1}(x-x_1)$

즉 한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 $\frac{u_2}{u_1}$인 직선임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

방향벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1, u_2)$인 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 그 직선의 방정식은

❶ 벡터를 이용하여 나타내면

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$$

(단, $\vec{a}$, $\vec{p}$는 각각 두 점 A, P의 위치벡터이고, t는 실수이다.)

❷ 성분을 이용하여 나타내면

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}\ (\text{단, } u_1u_2\neq0)$$

참고 $x=x_1+u_1t$, $y=y_1+u_2t$에서 $u_1u_2=0$일 때의 직선의 방정식은

(i) $u_1=0$, $u_2\neq0$일 때, $x=x_1$

(ii) $u_1\neq0$, $u_2=0$일 때, $y=y_1$

보기 점 $(5, 3)$을 지나고 벡터 $\vec{u}=(2, -5)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{-5},\ \text{즉 } \frac{x-5}{2}=\frac{3-y}{5}$$

문제 1 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2, 5)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(-3, 4)$에 평행한 직선

(2) 점 $(3, -2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 0)$인 직선

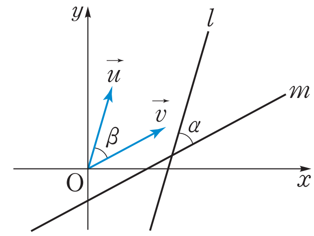
문제 2 벡터를 이용하여 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) $\mathrm{A}(1, -1)$, $\mathrm{B}(2, -5)$　　(2) $\mathrm{A}(-4, 2)$, $\mathrm{B}(3, -5)$

두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 α라고 하면
$0° \le \alpha \le 90°$

두 직선 l, m의 방향벡터가 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$일 때,
(ⅰ) $l \,/\!/\, m \iff \vec{u} \,/\!/\, \vec{v}$
$\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm|\vec{u}||\vec{v}|$
(ⅱ) $l \perp m \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
$\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라 하고, l과 m이 이루는 각의 크기를 α, $\vec{u}$와 $\vec{v}$가 이루는 각의 크기를 β라고 하면 α는 β와 $180° - \beta$ 중 크지 않은 쪽이다.



(ⅰ) $0° \le \beta \le 90°$일 때,

$$\cos\alpha = \cos\beta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

(ⅱ) $90° < \beta \le 180°$일 때,

$$\cos\alpha = \cos(180° - \beta) = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

이상에서 다음이 성립한다.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

직선의 방향벡터를 이용하여 좌표평면에서 두 직선이 이루는 각의 크기를 구해 보자.

예제 1 **두 직선 $x = \frac{y-1}{2}$, $\frac{x+6}{3} = y-2$가 이루는 예각의 크기를 구하시오.**

풀이 주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라고 하면

$$\vec{u} = (1,\ 2),\ \vec{v} = (3,\ 1)$$

이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ $(0° < \theta < 90°)$라고 하면

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|1\times3+2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 두 직선이 이루는 각의 크기는 $45°$이다.

답 $45°$

문제 3 **두 직선 $\frac{x}{2} = y-1$, $\frac{x+1}{3} = \frac{7-y}{11}$가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.**

문제 4 **다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.**

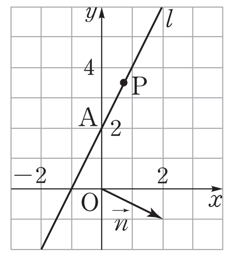
(1) $-\frac{x}{5} = \frac{y+3}{4}$, $\frac{x-1}{5} = \frac{2-y}{4}$

(2) $\frac{x-1}{2} = \frac{4-y}{3}$, $\frac{x+6}{3} = \frac{y-2}{2}$

주어진 벡터에 수직인 직선의 방정식을 어떻게 구할까

생각 톡

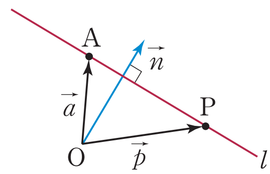
오른쪽 그림과 같이 직선 l: $y=2x+2$와 벡터 $\vec{n}=(2,\ -1)$이 있다. 이때 점 A는 직선 l과 y축의 교점이고 점 $\mathrm{P}(k,\ 2k+2)(k\neq0)$는 직선 l 위의 점이다.



탐구 ✱ 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\vec{n}$이 서로 수직인지 말해 보자.

점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l의 방정식을 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 한 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$이므로



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$$

이다.

이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$$

이므로

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

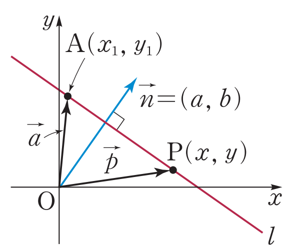
이다. 역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 벡터로 나타낸 직선 l의 방정식이다.

이때 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 **법선벡터**라고 한다.

$\vec{n}=(a,\ b)$일 때, 방정식 ①을 벡터의 성분을 이용하여 나타내어 보자.

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로



$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$$

이다. 따라서 방정식 ①에 의하여

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(a,\ b)=0$$

이므로 직선 l의 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

법선벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b)$인 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 그 직선의 방정식은

❶ 벡터를 이용하여 나타내면

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ (단, $\vec{a}$, $\vec{p}$는 각각 두 점 A, P의 위치벡터이다.)

❷ 성분을 이용하여 나타내면

$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

보기 점 $(1,\ -2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1,\ 3)$인 직선의 방정식은

$1\times(x-1)+3\times(y+2)=0$, 즉 $x+3y+5=0$

문제 5 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2,\ -7)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,\ -4)$에 수직인 직선

(2) 점 $(0,\ -10)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(-3,\ 5)$인 직선

문제 6 벡터를 이용하여 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 다음을 만족시키는 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 직선 $2x-3y+2=0$에 평행한 직선

(2) 직선 $\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{y-1}{2}$에 수직인 직선

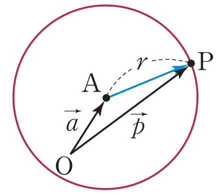
적용하기 두 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$이고, 법선벡터는 각각 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$이다.

1 두 방향벡터 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, 두 법선벡터 $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$가 이루는 각의 크기를 θ에 대한 식으로 나타내어 보자.

2 두 직선 $x-3y+1=0$과 $\dfrac{x-1}{2}=1-y$가 이루는 예각의 크기를 구해 보자.

좌표평면에서 벡터를 이용하여 원의 방정식을 어떻게 구할까

벡터를 이용하여 원의 방정식을 나타내어 보자.



오른쪽 그림과 같이 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 P라고 하면

$$|\overrightarrow{AP}|=r$$

이다. 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r \quad \cdots\cdots \text{①}$$

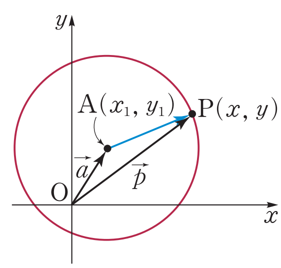
이다. 역으로 방정식 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 $|\overrightarrow{AP}|=r$를 만족시킨다.

따라서 방정식 ①은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식이다.

또 방정식 ①의 양변을 제곱하면 $|\vec{p}-\vec{a}|^2=r^2$이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

방정식 ②를 벡터의 성분을 이용하여 나타내어 보자.



좌표평면에서 A(x_1, y_1), P(x, y)라고 하면 $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{p}=(x, y)$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1, y-y_1)$$

이다. 따라서 방정식 ②에 의하여

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$$

이므로 원의 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

문제 7 **좌표평면 위의 점 A의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 하자. 임의의 점 P의 위치벡터를 $\vec{x}$라고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 점 P가 그리는 도형을 설명하시오.**

(1) $|\vec{x}-\vec{a}|=5$　　(2) $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{a})=16$

문제 8 **좌표평면 위의 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하자. 임의의 점 P의 위치벡터를 $\vec{x}$라고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 점 P가 그리는 도형을 설명하시오.**

(1) $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$　　(2) $\vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{x}$

중단원 마무리

❶ 위치벡터

평면에서 한 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 점 O에 대한 점 P의 $\boxed{\qquad}$라고 한다.

❷ 성분으로 나타낸 평면벡터의 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

① $\vec{a}+\vec{b}=(\boxed{\quad},\ \boxed{\quad})$

② $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

③ $k\vec{a}=(\boxed{\quad},\ \boxed{\quad})$ (단, k는 실수이다.)

❸ 평면벡터의 내적

(1) 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

① $0°\le\theta\le90°$일 때,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\qquad}$

② $90°<\theta\le180°$일 때,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\boxed{\quad})$

(2) 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\qquad}$

(3) 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\quad}$

② $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$

❹ 직선의 방정식

(1) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{\boxed{\quad}}\ (\text{단, } u_1u_2\ne0)$$

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b)$인 직선의 방정식은

$$a(x-x_1)+\boxed{\quad}(y-y_1)=0$$

기본 문제

1 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}-\vec{a}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

2 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-3,\ 2)$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|$　　(2) $|3\vec{a}-(\vec{a}+2\vec{b})|$

3 $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=5$인 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구하시오.

(1) $60°$　　(2) $135°$

4 두 벡터 $\vec{a}=(6,\ x)$, $\vec{b}=(5,\ -2)$가 다음을 만족시키도록 하는 x의 값을 구하시오.

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}$　　(2) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

5 다음 직선의 방정식을 구하시오.

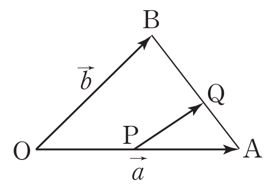
(1) 점 $(1,\ -4)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(-3,\ 5)$인 직선

(2) 점 $(2,\ 1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(4,\ 7)$인 직선

표준 문제

문제 해결

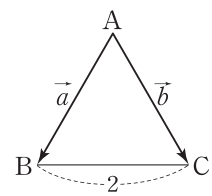
6 오른쪽 그림과 같이 삼각형 OAB에서 선분 OA의 중점을 P, 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 Q라고 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



7 두 벡터 $\vec{a}=(4-k,\ k-l)$, $\vec{b}=(2l,\ 6)$이 서로 같을 때, $\frac{k}{l}$의 값을 구하시오.

8 세 벡터 $\vec{a}=(-1,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -5)$, $\vec{c}=(2,\ -3)$에 대하여 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$일 때, $k+l$의 값을 구하시오. (단, k, l은 실수이다.)

9 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라고 할 때, $|\vec{a}-2\vec{b}|$를 구하시오.



서술형

10 벡터 $\vec{a}=(4,\ -2)$일 때, 다음 조건을 모두 만족시키는 벡터 $\vec{b}$를 모두 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

(가) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ (나) $|\vec{b}|=5$

11 다음 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, 양수 k의 값을 모두 구하시오.

$$l:\ x-1=\frac{y+7}{k},\ m:\ \frac{x-3}{k}=y+10$$

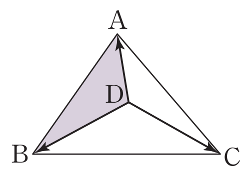
12 두 점 $A(3,\ 1)$, $B(-1,\ 1)$에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$을 만족시키는 점 P가 그리는 도형의 둘레의 길이를 구하시오.

발전 문제

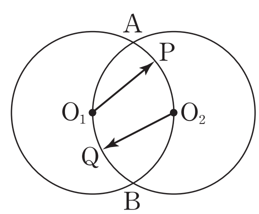
추론 **13** 오른쪽 삼각형 ABC의 내부의 한 점 D에 대하여

$$4\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

이다. 삼각형 ABC의 넓이가 10일 때, 삼각형 ABD의 넓이를 구하시오.



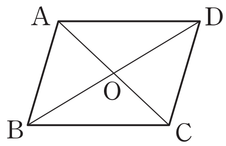
14 오른쪽 그림과 같이 거리가 2인 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 두 원의 교점을 A, B라고 하자. 호 AO_2B 위의 점 P와 호 AO_1B 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.



서술형 **15** 벡터를 이용하여 직선 $l:\ x=1-\frac{y}{2}$와 점 $P(3,\ -1)$ 사이의 거리를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

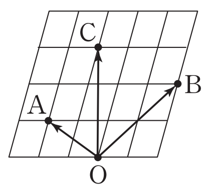
대단원 마무리

01 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?



① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$
② $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AO}$
③ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$
④ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$
⑤ $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BO}$

02 오른쪽 그림과 같이 같은 간격의 평행선으로 이루어진 도형 위의 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$일 때, $k+l$의 값을 구하시오.



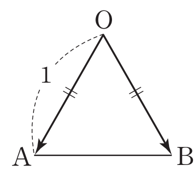
(단, k, l은 실수이다.)

03 평면 위의 세 점 O, A, B에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

04 좌표평면 위의 세 점 A$(0, 1)$, B$(7, -4)$, C$(4, -1)$에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$를 성분으로 나타내시오.

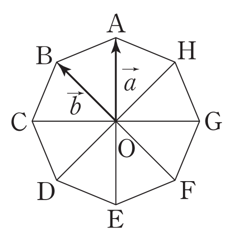
05 두 벡터 $\vec{a}=(3, 7)$, $\vec{b}=(-2, 5)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$의 크기가 최소가 되도록 하는 실수 t의 값을 구하시오.

06 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 OAB가 있다. $\vec{x}\cdot\overrightarrow{OA}=2$, $\vec{x}\cdot\overrightarrow{OB}=4$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$에 대하여 $\vec{x}=k\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}$일 때, $k+l$의 값을 구하시오.

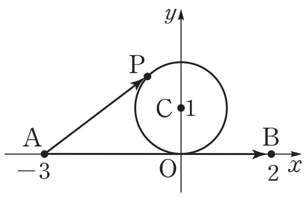


(단, k, l은 실수이다.)

07 오른쪽 그림과 같이 정팔각형의 네 대각선의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$일 때, $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})$를 구하시오.



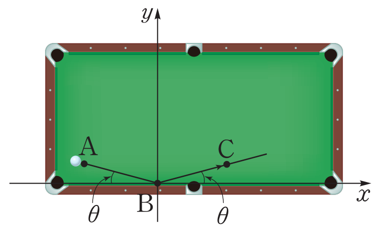
08 다음 그림과 같이 중심이 점 C(0, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 두 점 A(−3, 0), B(2, 0)과 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.



09 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{7}$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 구하시오.

10 두 벡터 $\vec{a}=(x-1,\ -4)$, $\vec{b}=(2x+3,\ 1)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-\vec{b}$가 서로 수직일 때, x의 값을 구하시오.

11 다음 그림과 같이 당구대의 틀이 좌표축과 평행하고 B지점을 원점으로 하는 좌표평면에서 A지점에 있던 당구공을 쳤더니 B지점을 지나 C지점을 향하여 굴러갔다. 두 점 A, C의 좌표가 각각
$\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$일 때, 당구공의 경로와 x축이 이루는 각의 크기 θ를 구하시오.

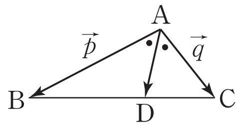


12 다음 두 직선 l, m의 교점과 점 A(2, −3)을 지나는 직선의 방향벡터 중에서 단위벡터를 모두 구하시오.

$$l:\ \frac{x-1}{4}=y,\quad m:\ 4-x=\frac{y-3}{2}$$

13 좌표평면 위의 세 점 A(4, 0), B(1, 4), C(2, 9)에 대하여 점 P가 $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}|=5$를 만족시킨다. 이때 점 P와 원점 사이의 거리의 최댓값을 구하시오.

14 오른쪽 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$이고, 점 D는 각 BAC의 이등분선과 선분 BC의 교점이다. $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{q}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AD}$를 $\vec{p}$, $\vec{q}$로 나타내는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

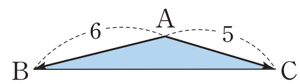
15 좌표평면 위의 두 점 A(4, 1), B(0, −2)와 직선 $x=\frac{y-1}{2}$ 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최솟값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$이면 $\vec{a}\perp\vec{b}$임을 증명하시오.

증명

17 다음 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=5$이고 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-15\sqrt{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 벡터의 뜻을 알고, 그 연산을 할 수 있다.			
❷ 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해하고 있다.			
❸ 두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.			
❹ 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.			

보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

움직이는 물체의 속도

차를 타고 고속도로를 달릴 때 같은 방향으로 달리는 자동차는 정지한 것처럼 보이거나 느리게 움직이는 것처럼 보이는 반면에 반대 방향으로 달리는 자동차는 빠르게 움직이는 것처럼 보인다. 이와 같이 운동하는 관찰자가 운동하는 대상을 보았을 때의 속도를 상대속도라고 한다.

상대속도는 다음과 같이 벡터를 이용하여 구할 수 있다.

> 관찰자 A의 속도를 $\overrightarrow{v_a}$, 운동하는 대상 B의 속도를 $\overrightarrow{v_b}$라고 하면 A가 바라보는 B의 상대속도 $\overrightarrow{v_{ab}}$는
> $\overrightarrow{v_{ab}}=\overrightarrow{v_b}-\overrightarrow{v_a}$

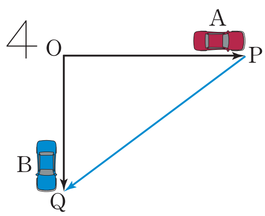
예를 들어 오른쪽 그림과 같이 A자동차는 서쪽에서 동쪽으로 시속 80 km로 달리고, B자동차는 북쪽에서 남쪽으로 시속 60 km로 달린다고 하자. 이때 A자동차에 타고 있는 사람이 바라본 B자동차의 속도는

$$\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{PQ}$$

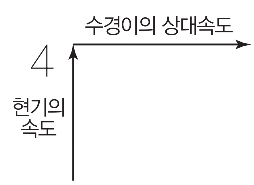
이고, 그 속력은

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{80^2+60^2}=100\,(\mathrm{km/h})$$

이다.



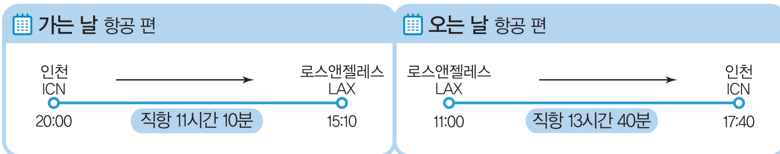
과제 1 현기가 남쪽에서 북쪽으로 시속 3 km의 속력으로 걸어가면서 수경이를 바라볼 때 수경이는 서쪽에서 동쪽으로 시속 4 km의 속력으로 걸어가는 것처럼 보였다고 한다. 수경이의 실제 속도를 오른쪽 그림에 나타내고, 수경이의 실제 속력을 구해 보자.



과제 2 우리 생활 주변에서 벡터의 연산으로 설명할 수 있는 상황을 찾아보자.

비행기를 밀어 주는 바람

어느 항공사의 인천과 로스앤젤레스의 직항 항공 편의 비행시간은 다음과 같다.



두 지역을 왕복할 때, 비행시간이 차이가 나는 이유는 무엇일까?

비행기의 비행시간은 바람의 영향을 크게 받는데, 비행기가 역풍을 받으면서 비행하면 비행기의 속도와 바람의 속도의 방향이 반대이므로 비행기의 속력이 줄어들어 비행시간이 길어진다. 반대로 순풍을 받으면서 비행하면 비행기의 속도와 바람의 속도의 방향이 같으므로 비행기의 속력이 빨라져 비행시간이 짧아진다.

지구 북반구에서는 여름에 북위 $50°$ 근처의 상공에서 시속 $60 \sim 100$ km의 기류가 서쪽에서 동쪽을 향하여 흐르는데, 이 기류를 제트 기류라고 한다. 제트 기류는 겨울철이 되면 북위 $35°$까지 내려오면서 속력이 시속 $200 \sim 300$ km 정도로 빨라진다.

비행기가 인천에서 로스앤젤레스(동쪽)로 갈 때는 이 제트 기류가 뒤쪽에서 비행기를 밀어 주어 비행시간을 단축할 수 있다. 반면에 비행기가 로스앤젤레스에서 인천(서쪽)으로 올 때는 제트 기류가 비행기의 속력에 방해가 된다. 따라서 비행기가 제트 기류를 피해 북극 항로를 이용하기 때문에 비행시간이 늘어난다.

(출처: 『주간동아』, 2015. 8. 17.)

진로 탐색

비행기 조종사 | 여객기나 화물 수송기 등을 조종하고 비행과 항공기에 관련된 모든 사항을 관리·감독한다. 비행 중 생기는 모든 상황을 판단하고 관제탑과 주요 정보를 주고받아 승객의 생명과 안전을 책임진다.

(출처: 커리어넷, 2017)