태양열을 이용한 조리 기구는 단면이 포물선 모양인 반사판을 이용하여 태양 광선을 초점에 모으고 이렇게 얻은 열로 작동하는데, 제작 방식에 따라 태양열을 일상 생활에서 사용할 수 있는 에너지로 전환할 수도 있다. 이 조리 기구는 빛의 경로가 포물선의 접선에 대하여 입사각과 반사각의 크기가 같은 직선임을 이용한 것이다. 포물선의 축에 평행하게 들어온 빛은 포물선에 반사되어 초점에 모이는 성질이 있으므로 조리 기구가 태양을 정면으로 향하도록 방향을 맞추면 높은 효율을 얻을 수 있다.

이 밖에도 타원, 쌍곡선의 접선의 성질을 이용한 다양한 기구들이 우리의 생활을 편리하게 해 준다.

이 단원에서는 이차곡선과 직선의 위치 관계, 이차곡선의 접선의 방정식을 알아본다.

(출처: 이주명 외, 『에코문화디자인을 교육하다 Ⅱ』)

2 이차곡선과 직선

준 비 학 습

1 다음 이차방정식의 근을 판별하시오.

(1) $x^2-5x+2=0$　　(2) $2x^2-3x+2=0$　　(3) $16x^2-8x+1=0$

2 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(2,\ 4)$를 지나고 기울기가 3인 직선

(2) 점 $(4,\ -2)$를 지나고 x축에 평행한 직선

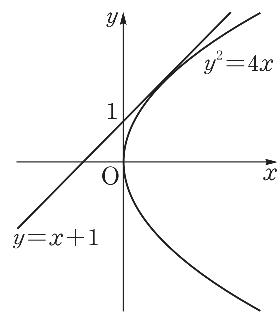
1 포물선과 직선

- 포물선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

포물선과 직선의 위치 관계는 어떻게 알 수 있을까

생각 톡

오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x+1$은 포물선 $y^2=4x$에 접한다.



탐구 ① 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=x-2$의 교점의 개수를 말해 보자.

탐구 ② 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=x+3$의 교점의 개수를 말해 보자.

포물선과 직선의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 알아보자.

포물선과 직선의 방정식을 각각

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이라고 할 때, 포물선과 직선의 교점의 개수는 방정식 ①, ②를 모두 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

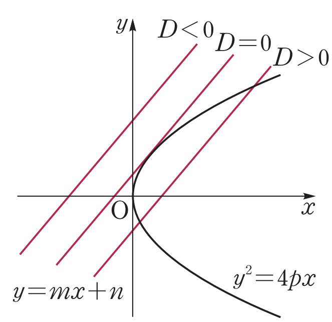
②를 ①에 대입하면

$$(mx+n)^2=4px, \text{ 즉}$$

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0 \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

이므로 포물선과 직선의 교점의 개수는 방정식 ③의 실근의 개수와 같다.

따라서 $m\neq0$일 때, 이차방정식 ③의 판별식을 D라고 하면 포물선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



❶ $D>0 \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0 \iff$ 한 점에서 만난다.(접한다.)
❸ $D<0 \iff$ 만나지 않는다.

참고 $m=0$인 직선, 즉 포물선의 축에 평행한 직선은 포물선과 항상 한 점에서 만나지만 접선은 아니다.

예제 1 **포물선 $y^2=x$와 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$의 위치 관계를 조사하시오. (단, k는 상수이다.)**

풀이 $y=\frac{1}{2}x+k$를 $y^2=x$에 대입하여 정리하면

$$x^2+4(k-1)x+4k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=\{4(k-1)\}^2-4\times4k^2$$
$$=-32k+16$$

① $D>0$, 즉 $k<\frac{1}{2}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$, 즉 $k=\frac{1}{2}$일 때, 한 점에서 만난다. (접한다.)

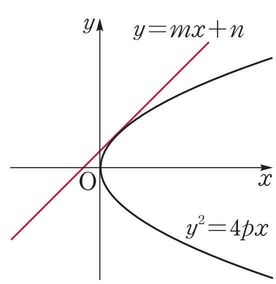
③ $D<0$, 즉 $k>\frac{1}{2}$일 때, 만나지 않는다.

답 풀이 참조

문제 1 **포물선 $y^2=-4x$와 직선 $y=x+k$가 만나지 않도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.**

포물선의 접선의 방정식은 어떻게 구할까

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선의 방정식을 구해 보자.



구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이것을 포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

포물선과 직선이 접하므로 $D=0$이다.

$$D=\{2(mn-2p)\}^2-4\times m^2\times n^2=0$$

이므로 $n=\frac{p}{m}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx+\frac{p}{m}\ (\text{단, } m\neq0)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선의 접선의 방정식 – 접선의 기울기가 주어질 때

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

$y^2=8x=4\times2\times x$이므로
$p=2$

보기 포물선 $y^2=8x$에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y=3x+\frac{2}{3}$$

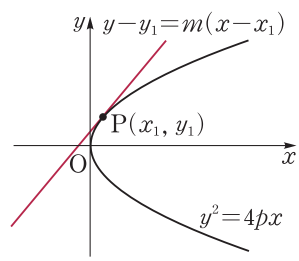
문제 2 **다음 직선의 방정식을 구하시오.**

(1) 포물선 $y^2=12x$에 접하고 기울기가 2인 직선

(2) 포물선 $y^2=-4x$에 접하고 직선 $x-2y+3=0$에 평행한 직선

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$x_1\neq0$일 때, 접선의 기울기를 $m\ (m\neq0)$이라고 하면 구하는 접선의 방정식은



$$y-y_1=m(x-x_1),\ \text{즉}$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다. 한편 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이다. 직선 ①, ②의 y절편을 비교하면

$$-mx_1+y_1=\frac{p}{m}$$

이고, 이 식의 양변에 m을 곱하여 정리하면 $x_1m^2-y_1m+p=0$이므로

점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로
$y_1{}^2=4px_1,\ x_1=\frac{y_1{}^2}{4p}$

$$m=\frac{y_1\pm\sqrt{y_1{}^2-4px_1}}{2x_1}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{2p}{y_1}$$

이다. 이것을 ①에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$y_1y=2p(x+x_1) \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

$x_1=0$일 때, $y_1=0$이고 접선의 방정식은 $x=0$이므로 이 경우에도 ③이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선의 접선의 방정식 – 접점의 좌표가 주어질 때

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

$y-y_1=m(x-x_1)$과 $x^2=4py$를 연립한 이차방정식이 중근을 가짐을 이용한다.

한편 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x=2p(y+y_1)$이다.

$y^2=-8x=4\times(-2)\times x$이므로 $p=-2$

보기 포물선 $y^2=-8x$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

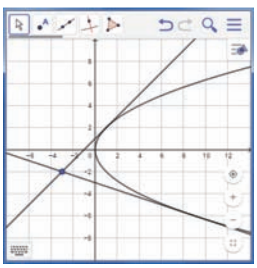
$4y=2\times(-2)\times\{x+(-2)\}$, 즉 $y=-x+2$

문제 3 **다음 접선의 방정식을 구하시오.**

(1) 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4,\ -4)$에서의 접선

(2) 포물선 $x^2=-12y$ 위의 점 $(6,\ -3)$에서의 접선

예제 2 **점 $(-3,\ -2)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**



풀이 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$

이 직선이 점 $(-3,\ -2)$를 지나므로 $-2y_1=2(-3+x_1)$ …… ①

또 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로 ${y_1}^2=4x_1$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x_1=9\\y_1=-6\end{cases}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=x+1,\ y=-\dfrac{1}{3}x-3$

답 $y=x+1,\ y=-\dfrac{1}{3}x-3$

문제 4 **점 $(4,\ 2)$에서 포물선 $y^2=-8x$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**

증명하기

포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$ 위의 한 점에서 포물선에 그은 두 접선이 서로 수직임을 증명해 보자. (단, p는 상수이다.)

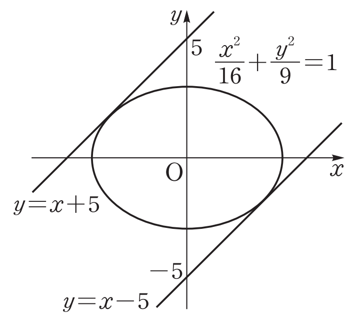
2 타원과 직선

● 타원과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

타원과 직선의 위치 관계는 어떻게 알 수 있을까

생각톡

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x+5$, $y=x-5$는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$에 각각 접한다.



탐구 ① 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$과 직선 $y=x+2$의 교점의 개수를 말해 보자.

탐구 ② 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$과 직선 $y=x-7$의 교점의 개수를 말해 보자.

타원과 직선의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 알아보자.

타원과 직선의 방정식을 각각

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ②$$

이라고 할 때, 타원과 직선의 교점의 개수는 방정식 ①, ②를 모두 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

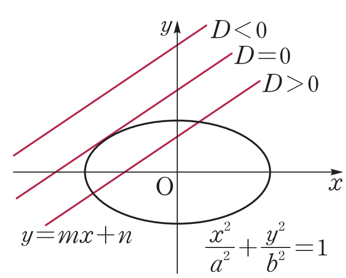
②를 ①에 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1, \text{ 즉}$$

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

이므로 타원과 직선의 교점의 개수는 방정식 ③의 실근의 개수와 같다.

따라서 이차방정식 ③의 판별식을 D라고 하면 타원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



❶ $D>0 \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

❷ $D=0 \iff$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

❸ $D<0 \iff$ 만나지 않는다.

예제 1 **타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 조사하시오. (단, k는 상수이다.)**

풀이 $y=x+k$를 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$에 대입하여 정리하면

$$3x^2+4kx+2k^2-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=(4k)^2-4\times3(2k^2-2)=-8k^2+24$$

① $D>0$, 즉 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$, 즉 $k=\pm\sqrt{3}$일 때, 한 점에서 만난다.(접한다.)
③ $D<0$, 즉 $k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$일 때, 만나지 않는다.

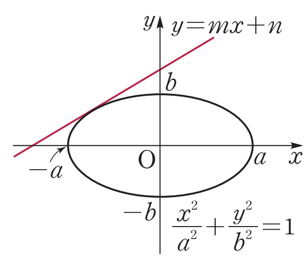
답 풀이 참조

문제 1 **타원 $4x^2+3y^2=12$와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.**

타원의 접선의 방정식은 어떻게 구할까

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.

구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이것을 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면



$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

타원과 직선이 접하므로 $D=0$이다.

$$D=(2a^2mn)^2-4(a^2m^2+b^2)\times a^2(n^2-b^2)$$
$$=4a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$$

이므로 $n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

한 타원에 대하여 기울기가 같은 접선은 2개이다.

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원의 접선의 방정식 – 접선의 기울기가 주어질 때

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

보기 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

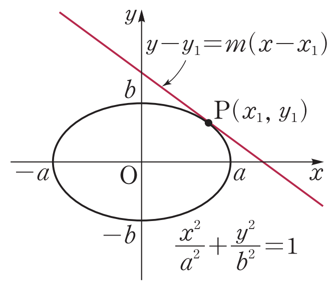
$y=x\pm\sqrt{4\times1^2+5}$, 즉 $y=x\pm3$

문제 2 **다음 직선의 방정식을 구하시오.**

(1) 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선

(2) 타원 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 직선 $x+2y=7$에 평행한 직선

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.



$y_1\neq0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1),\text{ 즉}$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 한편 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. 직선 ①, ②의 y절편을 비교하면

$$-mx_1+y_1=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

이고 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(x_1{}^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+y_1{}^2-b^2=0$$

이다. 이때 $\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$이므로

$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$에서 $x_1{}^2-a^2=-\frac{a^2y_1{}^2}{b^2}$, $y_1{}^2-b^2=-\frac{b^2x_1{}^2}{a^2}$

$$\frac{a^2y_1{}^2}{b^2}m^2+2x_1y_1m+\frac{b^2x_1{}^2}{a^2}=0$$

이고, 좌변을 인수분해하면

$$\left(\frac{ay_1}{b}m+\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$$

이다. 따라서 $m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 이것을 ①에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$에서 $b^2x_1{}^2+a^2y_1{}^2=a^2b^2$

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$y_1=0$일 때, $x_1=\pm a$이고 접선의 방정식은 $x=\pm a$이므로 이 경우에도 ③이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

타원의 접선의 방정식 – 접점의 좌표가 주어질 때

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

보기 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 방정식은

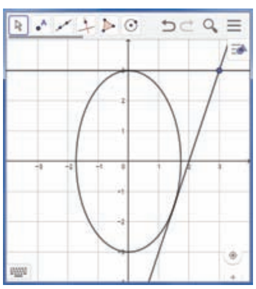
$$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1,\ 즉\ x+\sqrt{2}y=4$$

문제 3 **다음 접선의 방정식을 구하시오.**

(1) 타원 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$ 위의 점 $(1,\ \sqrt{6})$에서의 접선

(2) 타원 $2x^2+5y^2=13$ 위의 점 $(2,\ -1)$에서의 접선

예제 2 **점 $(3,\ 3)$에서 타원 $3x^2+y^2=9$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**



풀이 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 방정식은 $3x_1x+y_1y=9$

이 직선이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$9x_1+3y_1=9$, 즉 $3x_1+y_1=3$ …… ①

또 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 타원 $3x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$3{x_1}^2+{y_1}^2=9$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x_1=\frac{3}{2} \\ y_1=-\frac{3}{2} \end{cases}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3,\ 3x-y=6$

답 $y=3,\ 3x-y=6$

문제 4 **점 $(5,\ -2)$에서 타원 $4x^2+5y^2=20$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**

문제 해결하기

직각이등변삼각형 ABC의 두 변 AB, BC가 각각 좌표축에 평행하고 세 변이 타원 $4x^2+y^2=4$에 모두 접할 때, 직선 AC의 방정식을 모두 구해 보자.

수학 역량 플러스

이차곡선의 반사 성질을 이용한 장치

추론 창의·융합

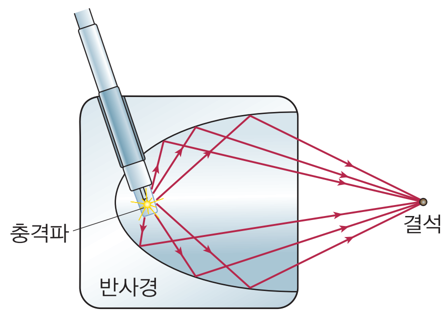
포물선의 축과 평행하게 들어온 빛은 포물선에 반사되어 초점에 모이고, 타원의 한 초점에서 나온 빛은 타원에 반사되어 다른 초점을 지난다. 우리 주변에는 포물선과 타원의 이와 같은 성질을 이용한 유용한 장치들이 많이 있다.

❶ 파라볼라 안테나

파라볼라 안테나의 단면의 모양은 포물선으로 포물선의 축과 평행하게 들어온 전파는 안테나의 반사기에 반사되어 초점의 위치에 설치된 수신기에 모인다. 파라볼라 안테나는 멀리에서 오는 전파를 수신할 때 적합하여 주로 위성 방송 수신이나 마이크로파 중계에 사용된다.

❷ 체외 충격파 쇄석기

체외 충격파 쇄석기는 몸속에 생긴 결석을 수술하지 않고 제거할 수 있는 장치로 이 장치에서 반사경의 단면의 모양은 타원의 일부분이다. 결석이 타원의 한 초점에 오도록 맞추고 다른 초점에서 충격파를 발생시키면 반사경에 반사된 충격파가 결석에 모여 신체의 조직에 손상을 주지 않으면서 결석을 분쇄한다.

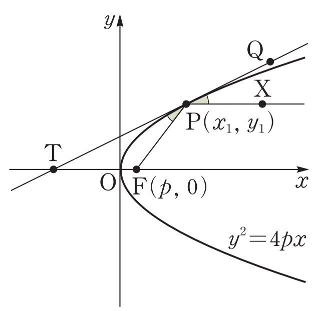


(출처: 『과학동아』, 2002년 3월 호)

활동 1 오른쪽 그림과 같이 초점이 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)$인 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 T라고 할 때, 접선 위의 점 Q와 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선 위의 점 X에 대하여

$$\angle \mathrm{TPF}=\angle \mathrm{QPX}$$

임을 증명해 보자.



활동 2 포물선과 타원의 반사 성질을 이용한 장치를 조사하고 그 원리를 설명해 보자.

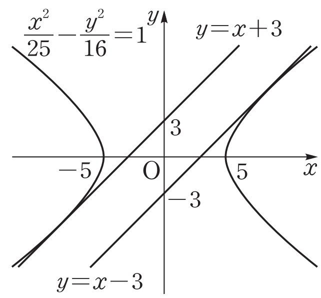
3 쌍곡선과 직선

- 쌍곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

쌍곡선과 직선의 위치 관계는 어떻게 알 수 있을까

생각톡

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x+3$, $y=x-3$은 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$에 각각 접한다.



탐구 ① 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$과 직선 $y=x-5$의 교점의 개수를 말해 보자.

탐구 ② 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$과 직선 $y=x+2$의 교점의 개수를 말해 보자.

쌍곡선과 직선의 위치 관계를 이차방정식의 판별식을 이용하여 알아보자.

쌍곡선과 직선의 방정식을 각각

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$$y=mx+n \quad \cdots\cdots \text{②}$$

이라고 할 때, 쌍곡선과 직선의 교점의 개수는 방정식 ①, ②를 모두 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

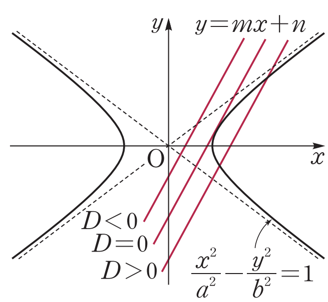
②를 ①에 대입하면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+n)^2}{b^2}=1, \text{ 즉}$$

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0 \quad \cdots\cdots \text{③}$$

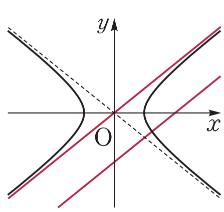
이므로 쌍곡선과 직선의 교점의 개수는 방정식 ③의 실근의 개수와 같다.

따라서 $a^2m^2-b^2\neq0$일 때, 이차방정식 ③의 판별식을 D라고 하면 쌍곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.



❶ $D>0 \iff$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0 \iff$ 한 점에서 만난다.(접한다.)
❸ $D<0 \iff$ 만나지 않는다.

$a^2m^2-b^2=0$, 즉 $m=\pm\frac{b}{a}$이면 직선은 쌍곡선의 점근선과 일치하거나 평행하므로 쌍곡선과 만나지 않거나 한 점에서 만난다.



예제 1 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계를 조사하시오. (단, k는 상수이다.)

풀이 $y=x+k$를 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$에 대입하여 정리하면

$$x^2+6kx+3k^2+6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$D=(6k)^2-4(3k^2+6)$$
$$=24k^2-24$$

① $D>0$, 즉 $k<-1$ 또는 $k>1$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$, 즉 $k=\pm1$일 때, 한 점에서 만난다.(접한다.)

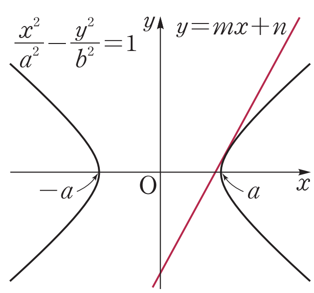
③ $D<0$, 즉 $-1<k<1$일 때, 만나지 않는다.

답 풀이 참조

문제 1 쌍곡선 $5x^2-4y^2=20$과 직선 $y=-2x+k$가 접하도록 하는 상수 k의 값을 모두 구하시오.

쌍곡선의 접선의 방정식은 어떻게 구할까

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식을 구해 보자.



구하는 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 이것을 쌍곡선의 방정식 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2-b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2+b^2)=0$$

이다. $a^2m^2-b^2>0$일 때, 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$a^2m^2-b^2<0$이면 항상 $D>0$이므로 접선이 아니다.

$$D=(2a^2mn)^2-4(a^2m^2-b^2)\times a^2(n^2+b^2)$$
$$=-4a^2b^2(a^2m^2-n^2-b^2)=0$$

쌍곡선과 직선이 접하므로 $D=0$이다.

이므로 $n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 접선의 방정식 – 접선의 기울기가 주어질 때

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\ (\text{단, } a^2m^2-b^2>0)$$

보기 쌍곡선 $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

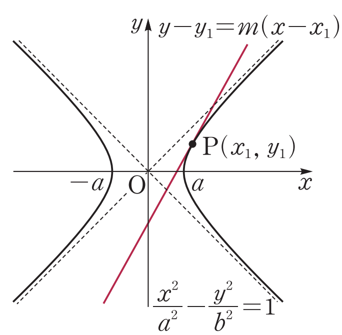
$y=2x\pm\sqrt{6\times2^2-3}$, 즉 $y=2x\pm\sqrt{21}$

문제 2 **다음 직선의 방정식을 구하시오.**

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에 접하고 기울기가 1인 직선

(2) 쌍곡선 $x^2-y^2=8$에 접하고 직선 $2x-y=2$에 평행한 직선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.



$y_1\neq0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1),\ \text{즉}$$

$$y=mx-mx_1+y_1 \quad \cdots\cdots ①$$

이다.

한편 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2} \quad \cdots\cdots ②$$

이다. 직선 ①, ②의 y절편을 비교하면

$$-mx_1+y_1=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

이고 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(x_1{}^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+y_1{}^2+b^2=0$$

이다.

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서

$x_1^2-a^2=\frac{a^2y_1^2}{b^2}$,

$y_1^2+b^2=\frac{b^2x_1^2}{a^2}$

이때 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$이므로

$$\frac{a^2y_1^2}{b^2}m^2-2x_1y_1m+\frac{b^2x_1^2}{a^2}=0$$

이고, 좌변을 인수분해하면

$$\left(\frac{ay_1}{b}m-\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$$

이다.

$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$에서

$b^2x_1^2-a^2y_1^2=a^2b^2$

따라서 $m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$이므로 이것을 ①에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots ③$$

$y_1=0$일 때, $x_1=\pm a$이고 접선의 방정식은 $x=\pm a$이므로 이 경우에도 ③이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 접선의 방정식 – 접점의 좌표가 주어질 때

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

같은 방법으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식을 구하면 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$이다.

보기 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $(3\sqrt{2}, 5)$에서의 접선의 방정식은

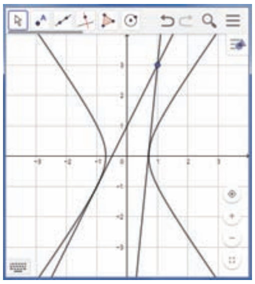
$$\frac{3\sqrt{2}x}{3}-\frac{5y}{5}=1, \text{ 즉 } \sqrt{2}x-y=1$$

문제 3 다음 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점 $(2, \sqrt{7})$에서의 접선

(2) 쌍곡선 $x^2-3y^2=-3$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선

예제 2 **점 $(1,\ 3)$에서 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**



풀이 접점을 $P(x_1,\ y_1)$이라고 하면 점 P에서의 접선의 방정식은

$$2x_1x-y_1y=1$$

이 직선이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$$2x_1-3y_1=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

또 점 $P(x_1,\ y_1)$은 쌍곡선 $2x^2-y^2=1$ 위의 점이므로

$$2x_1^2-y_1^2=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x_1=\dfrac{5}{7} \\ y_1=\dfrac{1}{7} \end{cases}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$2x-y=-1,\ 10x-y=7$$

답 $2x-y=-1,\ 10x-y=7$

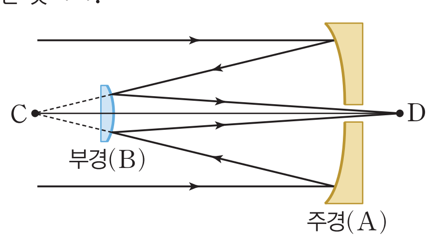
문제 4 **점 $(-1,\ 0)$에서 쌍곡선 $4x^2-3y^2=6$에 그은 접선의 방정식을 모두 구하시오.**

이야기 수학

● 카세그레인식 망원경

포물선의 축과 평행하게 들어온 빛은 포물선에 반사되어 초점에 모이고, 쌍곡선의 한 초점을 향한 빛은 초점에 가까운 곡선에 반사되어 다른 초점에 모인다. 천문 관측용으로 사용하는 카세그레인식 망원경은 포물선과 쌍곡선의 이러한 성질을 이용하여 만든 것이다.

오른쪽 그림과 같이 카세그레인식 망원경의 주경(A)의 단면은 포물선 모양이고, 부경(B)의 단면은 쌍곡선 모양이다. 이때 포물선의 초점은 점 C이고, 쌍곡선의 초점은 점 C와 점 D이다. 주경에 반사된 빛이 포물선의 초점 C로 향하다가 초점 C 앞에 위치한 부경에 반사되어 쌍곡선의 다른 초점 D로 모이고, 이 빛으로 물체를 볼 수 있다.



(출처: Hannu Karttunen 외, 『Fundamental Astronomy』)

중단원 마무리

1 포물선과 직선

(1) 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=mx+n$에서 y를 소거하여 만든 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

① $D>0$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{}$에서 만난다.

② $\boxed{}$ $\Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0$ $\Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

(2) 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m $(m\neq0)$인 직선의 방정식은 $\boxed{}$

(3) 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\boxed{}$

2 타원과 직선

(1) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$에서 y를 소거하여 만든 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

① $\boxed{}$ $\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ $\Longleftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $\boxed{}$ $\Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $\boxed{}$

(3) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\boxed{}$

3 쌍곡선과 직선

(1) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 직선 $y=mx+n$에서 y를 소거하여 만든 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

① $\boxed{}$ $\Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{}$에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0$ $\Longleftrightarrow$ 만나지 않는다.

(2) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $\boxed{}$ (단, $a^2m^2-b^2>0$)

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $\boxed{}$

기본 문제

1 다음 조건을 만족시키도록 상수 k의 값 또는 범위를 정하시오.

(1) 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$과 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+k$가 접한다.

(3) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$과 직선 $y=\sqrt{3}x+k$가 만나지 않는다.

2 포물선 $y^2=16x$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 기울기가 -2인 접선의 방정식

(2) 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 방정식

3 타원 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 접선의 방정식

(2) 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식

4 쌍곡선 $3x^2-y^2=12$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 기울기가 3인 접선의 방정식

(2) 점 $(-4,\ 6)$에서의 접선의 방정식

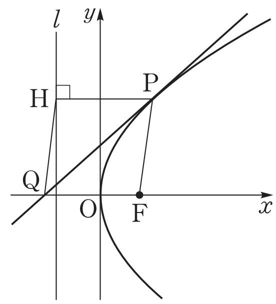
표준 문제

5 포물선 $y^2=2x$ 위의 점과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

추론

6 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점이 원점 O이고 x축을 축으로 하는 포물선의 초점을 F, 준선을 l이라고 하자. 포물선 위의 점 중에서 원점이 아닌 점 P$(a,\ b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 다음에 답하시오.

(1) 점 Q의 좌표를 a, b에 대한 식으로 나타내시오.
(2) 사각형 HQFP가 마름모임을 보이시오.

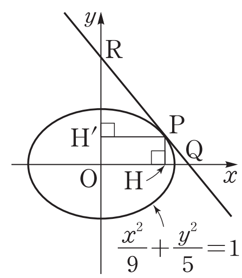


7 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 하자. 또 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R 라고 할 때,

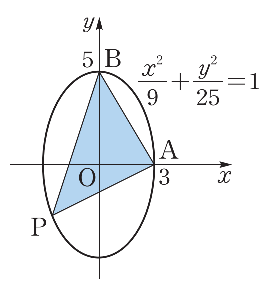
$$\overline{\text{OH}}\times\overline{\text{OQ}}+\overline{\text{OH}'}\times\overline{\text{OR}}$$

의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, 점 P는 타원의 꼭짓점이 아니다.)



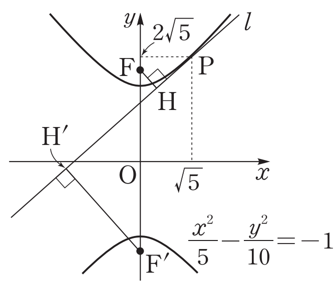
8 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$의 꼭짓점 A$(3,\ 0)$, B$(0,\ 5)$와 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때, 점 P에서의 접선의 방정식을 구하시오.



9 타원 $3x^2+4y^2=16$과 쌍곡선 $x^2-2y^2=2$의 교점 중에서 제1사분면 위의 점을 P라고 하자. 점 P에서 타원에 그은 접선의 기울기를 a, 쌍곡선에 그은 접선의 기울기를 b라고 할 때, ab의 값을 구하시오.

10 쌍곡선 $x^2-y^2=5$ 위의 점 $(3,\ 2)$에서의 접선과 두 점근선으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 구하시오.

서술형 **11** 오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{10}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$에서의 접선을 l이라 하고, 쌍곡선의 두 초점 F, F′에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라고 할 때, $\overline{\mathrm{FH}}\times\overline{\mathrm{F'H'}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



발전 문제

서술형 **12** 점 $(-1,\ p)$에서 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 p의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

문제 해결 **13** 쌍곡선 $2x^2-y^2=3$과 직선 $y=x+a$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나도록 하는 실수 a에 대하여 선분 AB의 중점이 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

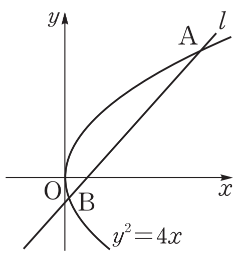
대단원 마무리

• 정답 및 풀이 154쪽

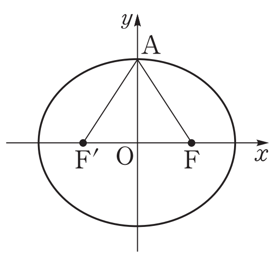
01 두 포물선 $(x+2)^2=4y$, $(y-4)^2=8x$의 초점 사이의 거리를 구하시오.

02 좌표평면에서 포물선 $y^2=8x$의 초점 F와 포물선 위의 점 A에 대하여 $\overline{\mathrm{AF}}=10$이다. 준선과 x축의 교점을 B라고 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

03 포물선 $y^2=4x$의 초점을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=8$일 때, 직선 l의 방정식을 구하시오.

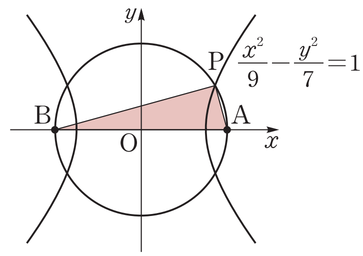


04 오른쪽 그림과 같이 중심이 원점 O이고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원과 y축의 한 교점을 A라고 하자. 삼각형 AF′F가 한 변의 길이가 2인 정삼각형일 때, 이 타원의 방정식을 구하시오.



05 점 P와 직선 $x=-2$ 사이의 거리를 a, 점 P와 점 A(4, 0) 사이의 거리를 b라고 할 때, $a:b=2:1$이다. 이때 점 P가 그리는 도형의 방정식을 구하시오.

06 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원과 쌍곡선이 만나는 한 점을 P라고 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.



07 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$과 두 초점을 공유하는 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오.

08 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 P가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 모두 구하시오.

> (가) 점 P는 제1사분면 위의 점이다.
> (나) 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이다.

09 직선 $y=3x+5$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 포물선 $y^2=4x$에 접한다. 이때 k의 값을 구하시오.

10 포물선 $y^2=8x$ 위의 서로 다른 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)에서의 접선이 서로 수직일 때, y_1y_2의 값을 구하시오.

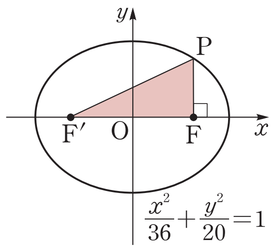
11 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$가 포물선 $y^2=4x$와 서로 다른 두 점에서 만나고, 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$과 만나지 않도록 하는 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

12 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)

13 직선 $y=\sqrt{3}x-3$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{3}=1$에 접할 때, 이 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리를 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

14 점 P에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 점 P가 그리는 도형의 넓이를 구하시오.

15 오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점 F, F'과 타원 위의 점 P에 대하여 선분 PF가 x축과 수직일 때, 삼각형 PFF'의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.



풀이

16 다음 조건을 모두 만족시키는 쌍곡선의 주축의 길이를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

> (가) 두 초점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$이다.
> (나) 두 점근선은 서로 수직이다.

풀이

17 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ 2p)$에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라고 할 때, $\frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{RQ}}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

18 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{k}=1$에 접하는 기울기가 2인 두 직선 사이의 거리가 2일 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, $0<k<16$)

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.			
❷ 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.			
❸ 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.			
❹ 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.			

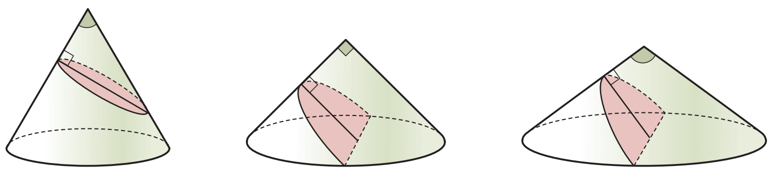
보충 계획

부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

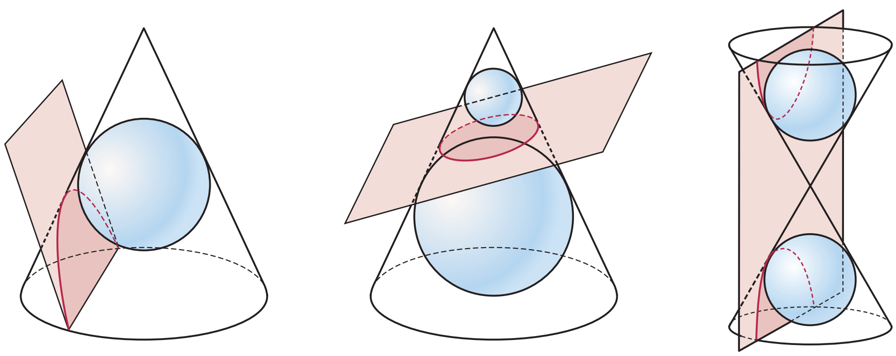
창의·융합 프로젝트

원뿔과 이차곡선

원뿔곡선에 대한 연구로 가장 유명한 사람은 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)이지만, 아폴로니오스 이전에도 원뿔곡선에 대한 연구는 있었다. 대표적으로 고대 그리스 수학자 메나이크모스(Menaechmos, B.C. 375?~B.C. 320?)는 원뿔을 회전축을 포함하는 평면으로 자른 단면에서 꼭지각의 크기가 예각, 직각, 둔각일 때, 원뿔을 모선에 수직인 평면으로 자른 단면의 모양이 각각 타원, 포물선, 쌍곡선임을 알았다.



한편 벨기에 수학자 단델린(Dandelin, G. P., 1794~1847)은 다음과 같이 원뿔과 평면에 접하는 구를 이용하여 원뿔곡선이 포물선, 타원, 쌍곡선의 정의를 만족시킴을 증명하였다.



(출처: 두산백과사전, 2017,
C. Stanley Ogilvy, 『Excursions in Mathematics』)

과제 * 원뿔을 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양이 포물선, 타원, 쌍곡선임을 증명하는 방법을 조사하여 발표해 보자.

Math ✕ Architecture

이차곡선과 건축

세상 속 수학

아레나 극장

예로부터 건축가들은 포물선, 타원, 쌍곡선을 이용하여 건축물을 기하학적으로 아름답게 표현하거나 건축물의 실용성을 높여 왔다.

현수교는 주로 높은 절벽이나 바다와 같이 교각을 세우기 어려운 장소에 건설하는 다리로 현수교의 주탑 사이의 케이블을 상판과 연결하면 케이블의 모양은 포물선이 된다. 현수교는 대부분 규모가 크고 시각적으로 아름다워 부산의 광안 대교나 인천의 영종 대교와 같이 도시의 상징적인 건축물로 여겨진다.

한편 원형 경기장이나 원형 극장으로 알려진 고대 로마의 콜로세움이나 이탈리아의 아레나 극장의 실제 모양은 타원이다. 또 바티칸시티의 성 베드로 광장이나 중세 성당 등에서도 타원을 쉽게 찾아볼 수 있다. 특히 천장을 타원 모양으로 만들면 한 초점의 위치에서 낸 소리가 다른 초점의 위치에서 잘 들리는 현상이 생긴다.

쌍곡선을 이용한 구조물은 적은 재료로 보다 튼튼하게 설계할 수 있을 뿐만 아니라 일반적인 수직 구조물보다 외부의 힘에 안정적으로 버틸 수 있다. 이러한 이유로 안정성을 요하는 원자력 발전소의 냉각탑이나 지반이 불안정한 곳에 세우는 고층 건물의 설계에 쌍곡선을 이용한다. 대표적으로 일본의 고베 포트 타워와 중국의 광저우 타워의 단면의 모양이 쌍곡선이다.

(출처: 『수학동아』, 2010년 11월 호,
『수학동아』, 2014년 9월 호)

광저우 타워

진로 탐색

도시 계획 기술자 | 기존 도시의 재개발 또는 신도시 건설을 위해 도시 및 단지를 계획하고 설계한다. 해당 지역의 인문 환경과 자연환경을 조사, 분석하고 향후 그 지역의 발전 및 확장 정도를 추정하며, 시공에 따라 발생하는 제반 사항에 대한 문제점 해결을 위해 현장 점검, 안전 진단 등의 업무를 한다.

(출처: 커리어넷, 2017)