수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념 SSEN

수학 I

정답 및 풀이 · 채움

채움은 옹골찬 풀이를 통하여 나의 부족한 부분을 채워 나가는 장입니다.

좋은책 신사고

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념 SSEN

수학 I

● 정답 및 풀이를 통한 채움 전략 ●

전략 1	풀이	정확하고 자세하며, 논리적인 풀이를 제시한다.
전략 2	해결 전략	문제해결의 실마리를 제공한다.
전략 3	Remark	문제해결에 도움이 되는 보충 내용을 제시한다.
전략 4	서술형 분석	모범 답안과 단계별 배점을 제시한다.

정답 및 풀이

01 다항식의 연산

유제

본책 13~32쪽

001-1 (1) $A-B+C$
$=(x^3-3x+2)-(-x^3+x^2+x+1)+(2x^3-2x-5)$
$=x^3-3x+2+x^3-x^2-x-1+2x^3-2x-5$
$=4x^3-x^2-6x-4$
(2) $2A-(B+C)$
$=2(x^3-3x+2)-(-x^3+x^2+x+1+2x^3-2x-5)$
$=2x^3-6x+4-(x^3+x^2-x-4)$
$=2x^3-6x+4-x^3-x^2+x+4$
$=x^3-x^2-5x+8$
(3) $-A+B-2(C-2A)$
$=-A+B-2C+4A$
$=3A+B-2C$
$=3(x^3-3x+2)+(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad-2(2x^3-2x-5)$
$=3x^3-9x+6-x^3+x^2+x+1-4x^3+4x+10$
$=-2x^3+x^2-4x+17$
(4) $3(2B-C)+2(A-4B)$
$=6B-3C+2A-8B=2A-2B-3C$
$=2(x^3-3x+2)-2(-x^3+x^2+x+1)$
$\quad-3(2x^3-2x-5)$
$=2x^3-6x+4+2x^3-2x^2-2x-2-6x^3+6x+15$
$=-2x^3-2x^2-2x+17$

답 풀이 참조

001-2 $2X+B=A-3B$를 X에 대하여 풀면
$2X=A-4B$
$\therefore X=\frac{1}{2}A-2B$
$=\frac{1}{2}(-2x^2+8xy+y^2)$
$\quad-2\left(\frac{1}{2}x^2-6xy-\frac{1}{4}y^2\right)$
$=-x^2+4xy+\frac{1}{2}y^2-x^2+12xy+\frac{1}{2}y^2$
$=-2x^2+16xy+y^2$

답 $-2x^2+16xy+y^2$

001-3 $A+B=4x^3-2x^2-12x+6$ …… ㉠
$A-B=-2x^3-2x^2-2x+18$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면
$2A=2x^3-4x^2-14x+24$
$\therefore A=x^3-2x^2-7x+12$
이것을 ㉠에 대입하면
$x^3-2x^2-7x+12+B=4x^3-2x^2-12x+6$
$\therefore B=4x^3-2x^2-12x+6-(x^3-2x^2-7x+12)$
$=4x^3-2x^2-12x+6-x^3+2x^2+7x-12$
$=3x^3-5x-6$

답 $A=x^3-2x^2-7x+12$, $B=3x^3-5x-6$

002-1 $A=(x^2+x)(2x^3-x^2+3)$의 전개식에서
사차항은 $x^2\cdot(-x^2)+x\cdot 2x^3=-x^4+2x^4=x^4$
$\therefore a=1$
$B=(3x^4+2x^2-6)(x^2-x+5)$의 전개식에서 사차항은 $3x^4\cdot 5+2x^2\cdot x^2=15x^4+2x^4=17x^4$
$\therefore b=17$
$\therefore a+b=1+17=18$

답 18

002-2 $(x^2+8x+a)(x^2-3x+4)$의 전개식에서
이차항은
$x^2\cdot 4+8x\cdot(-3x)+a\cdot x^2=(-20+a)x^2$
이때 x^2의 계수가 -15이므로
$-20+a=-15$
$\therefore a=5$

답 5

003-1 $\begin{cases} A+B=x^2+x & \cdots\cdots ㉠ \\ 2A-B=2x^2-x+3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠+㉡을 하면 $3A=3x^2+3$
$\therefore A=x^2+1$
이것을 ㉠에 대입하면
$x^2+1+B=x^2+x$
$\therefore B=x^2+x-(x^2+1)=x-1$
$\therefore AB=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$

답 x^3-x^2+x-1

003-2 연산 △의 식에서 우변을 정리하면
$x\triangle y=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$=x(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$\quad-y(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$
$=(x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4)$
$\quad-(x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5)$
$=x^5-y^5$

$\therefore (a\triangle b)+(b\triangle c)=(a^5-b^5)+(b^5-c^5)$
$=a^5-c^5$
$=a\triangle c$

답 풀이 참조

004-1 (1) $(x+2y)^3$
$=x^3+3\cdot x^2\cdot 2y+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3$
$=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
(2) $(3x-2y)^3$
$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
(3) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
$=(2x-y)\{(2x)^2+2x\cdot y+y^2\}$
$=(2x)^3-y^3=8x^3-y^3$
(4) $(x-1)(x-2)(x-4)$
$=x^3+\{(-1)+(-2)+(-4)\}x^2$
$+\{(-1)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-4)+(-4)\cdot(-1)\}x$
$+(-1)\cdot(-2)\cdot(-4)$
$=x^3-7x^2+14x-8$
(5) $(x-3y+2z)^2$
$=x^2+(-3y)^2+(2z)^2+2\cdot x\cdot(-3y)$
$+2\cdot(-3y)\cdot 2z+2\cdot 2z\cdot x$
$=x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx$
(6) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
$=\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}\{x^2-x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=x^4+x^2\cdot(3y)^2+(3y)^4$
$=x^4+9x^2y^2+81y^4$
(7) $(x-y+1)(x^2+y^2+xy-x+y+1)$
$=\{x+(-y)+1\}$
$\times\{x^2+(-y)^2+1^2-x\cdot(-y)-(-y)\cdot 1-1\cdot x\}$
$=x^3+(-y)^3+1^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 1$
$=x^3-y^3+3xy+1$

답 풀이 참조

005-1 (1) $(a-1)^3(a^2+a+1)^3$
$=\{(a-1)(a^2+a+1)\}^3=(a^3-1)^3$
$=(a^3)^3-3\cdot(a^3)^2\cdot 1+3\cdot a^3\cdot 1^2-1^3$
$=a^9-3a^6+3a^3-1$
(2) $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
$=\{(x-y)(x^2+xy+y^2)\}\{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
$=(x^3-y^3)(x^3+y^3)$
$=x^6-y^6$
(3) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
$=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$
$=x^8+x^4+1$
(4) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$
$=\{(x+1)(x-3)\}\{(x+2)(x-4)\}$
$=(x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$
$x^2-2x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-3)(X-8)$
$=X^2-11X+24$
$=(x^2-2x)^2-11(x^2-2x)+24$
$=x^4-4x^3+4x^2-11x^2+22x+24$
$=x^4-4x^3-7x^2+22x+24$
(5) $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}$
$\times\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$
$=-\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$
$=-a^4+\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2-\{(b+c)(b-c)\}^2$
$=-a^4+(b^2+2bc+c^2+b^2-2bc+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2$
$=-a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^4-2b^2c^2+c^4)$
$=-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

답 풀이 참조

006-1 1.002^3
$=(1+0.002)^3$
$=1^3+3\times 1^2\times 0.002+3\times 1\times 0.002^2+0.002^3$
$=1+0.006+\cdots$
$=1.006\cdots$
따라서 소수점 아래 셋째 자리의 숫자는 6이다.

답 6

006-2 $(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)$
$=(5-4)(5+4)(5^2+4^2)(5^4+4^4)$
$=(5^2-4^2)(5^2+4^2)(5^4+4^4)$
$=(5^4-4^4)(5^4+4^4)$
$=5^8-4^8$

답 ②

007-1 (1) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
$=14-2\cdot 5=4$
이므로 $x-y=2$ ($\because x>y$)
$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=2^3+3\cdot 5\cdot 2=38$

(2) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$$(-9)^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot(-33)$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=147$$

$$\therefore \frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}=\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}$$

$$=\frac{147}{-3}=-49$$

(3) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$에서

$$6^2=52+2(xy+yz+zx)$$

$$\therefore xy+yz+zx=-8$$

이때

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\&\quad+3xyz\end{aligned}$$

이므로

$$324=6\cdot(52+8)+3xyz$$

$$3xyz=-36$$

$$\therefore xyz=-12$$

답 (1) 38 (2) -49 (3) -12

007-2 $x-y=2+\sqrt{7}$ ······ ㉠

$y-z=2-\sqrt{7}$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면 $x-z=4$

$$\therefore z-x=-4$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)\\&=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{7})^2+(2-\sqrt{7})^2+(-4)^2\}\\&=\frac{1}{2}(4+4\sqrt{7}+7+4-4\sqrt{7}+7+16)\\&=\frac{1}{2}\cdot 38=19\end{aligned}$$

답 19

008-1 다항식 $2x^3-3x^2-4x-4$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -3이므로

$$2x^3-3x^2-4x-4=(2x+1)Q(x)-3$$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-5=-Q(-1)-3$$

$$\therefore Q(-1)=2$$

답 2

다른 풀이

$$\begin{array}{r}x^2-2x-1\\ 2x+1\overline{)\,2x^3-3x^2-4x-4}\\ \underline{2x^3+x^2}\\ -4x^2-4x\\ \underline{-4x^2-2x}\\ -2x-4\\ \underline{-2x-1}\\ -3\end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2-2x-1$이므로

$$Q(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)-1=2$$

008-2 다항식 x^3-4x^2+5x+1을 다항식 A로 나누었을 때의 몫이 $x+1$, 나머지가 $10x+1$이므로

$$x^3-4x^2+5x+1=A(x+1)+10x+1$$

$$\begin{aligned}A(x+1)&=x^3-4x^2+5x+1-(10x+1)\\&=x^3-4x^2-5x\end{aligned}$$

$$\therefore A=(x^3-4x^2-5x)\div(x+1)$$

다항식 x^3-4x^2-5x를 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r}x^2-5x\\ x+1\overline{)\,x^3-4x^2-5x}\\ \underline{x^3+x^2}\\ -5x^2-5x\\ \underline{-5x^2-5x}\\ 0\end{array}$$

$$\therefore A=x^2-5x$$

답 x^2-5x

008-3 다항식 A를 x^2+2로 나누었을 때의 몫이 $5x-2$, 나머지가 $-6x+5$이므로

$$\begin{aligned}A&=(x^2+2)(5x-2)-6x+5\\&=5x^3-2x^2+10x-4-6x+5\\&=5x^3-2x^2+4x+1\end{aligned}$$

다항식 A, 즉 $5x^3-2x^2+4x+1$을 x^2-2로 나누면

$$\begin{array}{r}5x-2\\ x^2-2\overline{)\,5x^3-2x^2+4x+1}\\ \underline{5x^3-10x}\\ -2x^2+14x+1\\ \underline{-2x^2+4}\\ 14x-3\end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $5x-2$, 나머지는 $14x-3$이다.

답 몫 : $5x-2$, 나머지 : $14x-3$

009-1 (1)
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline 2 & 1 & -1 & -6 & \boxed{-11} \\ & & 2 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & \boxed{-4} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{3} & & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-x-6)-11$
$=(x-2)\{(x-2)(x+1)-4\}-11$
$=(x-2)^2(x+1)-4(x-2)-11$
$=(x-2)^2\{(x-2)\cdot1+3\}$
$\quad -4(x-2)-11$
$=(x-2)^3+3(x-2)^2-4(x-2)-11$

$\therefore a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=-11$

(2) $f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2-4(x-2)-11$이므로
$f(1.9)=(-0.1)^3+3\times(-0.1)^2$
$\quad -4\times(-0.1)-11$
$=-0.001+0.03+0.4-11$
$=-10.571$

답 (1) $a=1,\ b=3,\ c=-4,\ d=-11$ (2) -10.571

중단원 연습 문제

본책 33~37쪽

01 ②	**02** 39	**03** ④	**04** ④	**05** 5
06 5	**07** $-x^2-6xy+5y^2$	**08** ④	**09** ①	
10 48	**11** -17	**12** ③	**13** 12	**14** 86
15 48	**16** 24	**17** ⑤	**18** -3	
19 400	**20** 6	**21** ⑤		

01 전략 먼저 일차항이 나오는 항만 전개하여 상수 k의 값을 구한다.

풀이 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 일차항은

$x\cdot k+(-4)\cdot 2x=(k-8)x$

x의 계수가 8이므로

$k-8=8 \qquad \therefore k=16$

따라서 다항식 $(3x^2+x-4)(x^2+2x+16)$의 전개식에서 이차항은

$3x^2\cdot16+x\cdot2x+(-4)\cdot x^2=46x^2$

이므로 x^2의 계수는 46이다. 답 ②

02 전략 곱셈 공식 $(A-B)(A+B)=A^2-B^2$을 이용한다.

풀이 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
$=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1$
$=40-1=39$

답 39

03 전략 공통부분이 생기도록 2개씩 짝지어 전개한다.

풀이 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$
$=\{(x+1)(x+8)\}\{(x+2)(x+4)\}$
$=(x^2+9x+8)(x^2+6x+8)$

$x^2+8=X$로 놓으면

(주어진 식)
$=(X+9x)(X+6x)$
$=X^2+15xX+54x^2$
$=(x^2+8)^2+15x(x^2+8)+54x^2$
$=x^4+16x^2+64+15x^3+120x+54x^2$
$=x^4+15x^3+70x^2+120x+64$

따라서 구하는 합은

$1+15+70+120+64=270$

답 ④

04 전략 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로 먼저 주어진 조건을 이용하여 xy의 값을 구한다.

풀이 $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$이므로
$(-1)^3=-7+3xy\cdot(-1)$
$3xy=-6 \qquad \therefore xy=-2$
$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(-1)^2-2\cdot(-2)$
$=5$

답 ④

05 전략 나머지의 차수가 나누는 식의 차수보다 작을 때까지 나누어 몫과 나머지를 구한다.

풀이 다항식 $3x^3+4x^2-x-2$를 x^2+x-1로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ x^2+x-1\,\overline{\big)\,3x^3+4x^2-\ x-2} \\ \underline{3x^3+3x^2-3x} \\ x^2+2x-2 \\ \underline{x^2+\ x-1} \\ x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x+1$, $R(x)=x-1$이므로

$Q(1)+R(2)=4+1=5$ 답 5

06 문제이해 • 다항식 $12x^3+47x^2+10x-60$을 A로 나누었을 때의 몫이 $4x+9$, 나머지가 $-3x+12$이므로

$$12x^3+47x^2+10x-60=A(4x+9)-3x+12$$
$$A(4x+9)=12x^3+47x^2+13x-72$$
$$\therefore A=(12x^3+47x^2+13x-72)\div(4x+9)$$

▶ 40% 배점

해결과정 • 다항식 $12x^3+47x^2+13x-72$를 $4x+9$로 나누면

$$\begin{array}{r}
3x^2+5x-8 \\
4x+9\overline{)12x^3+47x^2+13x-72} \\
\underline{12x^3+27x^2} \\
20x^2+13x \\
\underline{20x^2+45x} \\
-32x-72 \\
\underline{-32x-72} \\
0
\end{array}$$

▶ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $A=3x^2+5x-8$이므로 x의 계수는 5이다.

▶ 20% 배점

답 5

다른 풀이 조립제법을 이용하여 다항식 $12x^3+47x^2+13x-72$를 $x+\frac{9}{4}$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr}
-\frac{9}{4} & 12 & 47 & 13 & -72 \\
 & & -27 & -45 & 72 \\
\hline
 & 12 & 20 & -32 & \boxed{0}
\end{array}$$

즉 몫이 $12x^2+20x-32$이므로

$$A=\frac{1}{4}(12x^2+20x-32)=3x^2+5x-8$$

따라서 구하는 x의 계수는 5이다.

Remark

다항식 A를 B로 나누었을 때의 몫이 Q, 나머지가 R일 때, 다항식 A를 aB로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q$, 나머지는 R이다. (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

07 전략 주어진 두 식을 연립하여 A, B를 구한다.

풀이 $A+B=3x^2-2xy+y^2$ ...... ㉠

$A-B=x^2-4xy+3y^2$ ...... ㉡

㉠+㉡을 하면

$$2A=4x^2-6xy+4y^2$$
$$\therefore A=2x^2-3xy+2y^2$$

㉠−㉡을 하면

$$2B=2x^2+2xy-2y^2$$
$$\therefore B=x^2+xy-y^2$$
$$\begin{aligned}\therefore A-3B &=(2x^2-3xy+2y^2)-3(x^2+xy-y^2)\\ &=2x^2-3xy+2y^2-3x^2-3xy+3y^2\\ &=-x^2-6xy+5y^2\end{aligned}$$

답 $-x^2-6xy+5y^2$

08 전략 주어진 세 식을 변끼리 더하면 좌변은 $2(A+B+C)$가 된다.

풀이 $A+B=3a^2-ab-b^2$ ...... ㉠

$B+C=2a^2+3ab+2b^2$ ...... ㉡

$C+A=a^2-6ab+3b^2$ ...... ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$$\begin{aligned}&2(A+B+C)\\ &=(3a^2-ab-b^2)+(2a^2+3ab+2b^2)\\ &\quad+(a^2-6ab+3b^2)\\ &=6a^2-4ab+4b^2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\therefore A+B+C&=(6a^2-4ab+4b^2)\div2\\ &=3a^2-2ab+2b^2\end{aligned}$$

답 ④

09 전략 $(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)$을 분배법칙을 이용하여 전개한다.

풀이 $2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1$

$$\begin{aligned}&=(2-1)(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)\\ &=2(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)\\ &\quad-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)\\ &=(2^{10}+2^9+2^8+\cdots+2^3+2^2+2)\\ &\quad-(2^9+2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)\\ &=2^{10}-1\\ &=1023\end{aligned}$$

답 ①

Remark

2 이상의 자연수 n에 대하여

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n$$

10 (전략) A, B 사이의 관계식을 구한 후, A^3-B^3에 대입하여 전개식을 구한다.

(풀이) $A=x^3+B$이므로

$$\begin{aligned}A^3-B^3&=(x^3+B)^3-B^3\\&=\{(x^3)^3+3(x^3)^2B+3x^3B^2+B^3\}-B^3\\&=x^9+3x^6B+3x^3B^2+B^3-B^3\\&=x^9+3x^6B+3x^3B^2\\&=x^9+3x^6(x+4)+3x^3(x+4)^2\end{aligned}$$

위의 식을 전개할 때, 삼차항이 나오는 부분은 $3x^3(x+4)^2$이고

$$\begin{aligned}3x^3(x+4)^2&=3x^3(x^2+8x+16)\\&=3x^5+24x^4+48x^3\end{aligned}$$

이므로 x^3의 계수는 48이다.

답 48

11 문제이해 • 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$의 모든 항의 계수와 상수항의 합은 각각 $f(1)$, $g(1)$의 값과 같다. ➜ 20% 배점

해결과정 • 이때

$$\begin{aligned}f(1)&=a(1-2)^3+b(1-2)^2+a(1-2)+b\\&=-a+b-a+b\\&=-2(a-b)\end{aligned}$$

$$g(1)=ab(1-3)^3+1=-8ab+1$$

이므로 $-2(a-b)=6,\ -8ab+1=9$

$\therefore a-b=-3,\ ab=-1$ ➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $h(x)=a^3x-b^3+1$의 x의 계수와 상수항의 합은

$$\begin{aligned}a^3-b^3+1&=(a-b)^3+3ab(a-b)+1\\&=(-3)^3+3\cdot(-1)\cdot(-3)+1\\&=-17\end{aligned}$$ ➜ 40% 배점

답 -17

12 (전략) 곱셈 공식 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$을 이용할 수 있도록 주어진 등식의 좌변을 변형한다.

(풀이) $(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$$\begin{aligned}&=(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)\\&=(3^8-1)(3^8+1)\\&=3^{16}-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)&=\frac{3^{16}-1}{3^2-1}\\&=\frac{3^{16}-1}{8}\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{3^{16}-1}{8}=\dfrac{3^n-1}{m}$이므로

$m=8,\ n=16\ (\because 1\le m\le 9)$

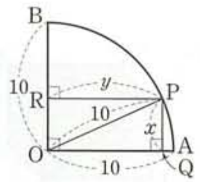
$\therefore m+n=24$

답 ③

Remark

$m=8(3^{16}+1)$, $n=32$일 때에도 $\dfrac{3^{16}-1}{8}=\dfrac{3^n-1}{m}$이 성립하지만 $1\le m\le 9$인 조건을 만족시키지 않는다.

13 문제이해 •



$\overline{PQ}=x$, $\overline{PR}=y$라 하면 $\overline{PQ}\cdot\overline{PR}=22$이므로

$xy=22$ ➜ 20% 배점

또 △OPQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=10^2$ ➜ 20% 배점

해결과정 • $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=100+2\cdot 22$
$=144$

이므로 $x+y=12\ (\because x+y>0)$ ➜ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \overline{PQ}+\overline{PR}=12$ ➜ 20% 배점

답 12

14 해결과정 • $(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

에서 $7^2=45+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=2$ ➜ 50% 배점

답구하기 • $\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$$\begin{aligned}&=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2\\&\quad-2ca+a^2\\&=2\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}\\&=2\cdot(45-2)=86\end{aligned}$$ ➜ 50% 배점

답 86

15 (전략) $x+y+z=6$에서 $x+y=6-z$, $y+z=6-x$, $z+x=6-y$임을 이용한다.

(풀이) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

에서 $6^2=12+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=12$

또 $x+y+z=6$에서

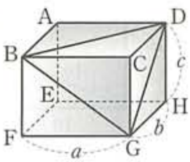
$$x+y=6-z,\ y+z=6-x,\ z+x=6-y$$

이므로

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)\\&=(6-z)(6-x)+(6-x)(6-y)\\&\quad+(6-y)(6-z)\\&=36-6x-6z+zx+36-6y-6x+xy\\&\quad+36-6z-6y+yz\\&=108-12(x+y+z)+(xy+yz+zx)\\&=108-12\cdot6+12=48\end{aligned}$$

답 48

16 문제이해 •



위의 그림과 같이 $\overline{FG}=a$, $\overline{GH}=b$, $\overline{DH}=c$라 하면 주어진 직육면체의 겉넓이가 22이므로

$$2(ab+bc+ca)=22$$

$$\therefore ab+bc+ca=11 \quad \cdots\cdots ㉠$$ ➜ 20% 배점

한편 $\triangle BFG$, $\triangle DGH$, $\triangle DBC$에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BG}^2=\overline{BF}^2+\overline{FG}^2=c^2+a^2$$
$$\overline{GD}^2=\overline{GH}^2+\overline{DH}^2=b^2+c^2$$
$$\overline{DB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2=a^2+b^2$$

$\triangle BGD$의 세 변의 길이의 제곱의 합이 28이므로

$$(c^2+a^2)+(b^2+c^2)+(a^2+b^2)=28$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=14 \quad \cdots\cdots ㉡$$ ➜ 20% 배점

해결과정 • ㉠, ㉡에 의하여

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\\&=14+2\cdot11\\&=36\end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c=6\ (\because a+b+c>0)$$ ➜ 40% 배점

답구하기 • 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$이므로

$$4(a+b+c)=4\cdot6=24$$ ➜ 20% 배점

답 24

17 전략 주어진 식을 이용하여 $x-z$의 값을 구한다.

풀이 $x+y=2+\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y+z=2-\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$$x-z=2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}&\therefore x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx\\&=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz-2zx)\\&=\frac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(x-z)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2\}\\&=\frac{1}{2}(4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3+12)\\&=\frac{1}{2}\cdot26=13\end{aligned}$$

답 ⑤

18 전략 다항식의 나눗셈을 이용한다.

풀이 다항식 $4x^4+2x^3-8x^2-8x-5$를 x^2-x-1로 나누면

$$\begin{array}{r}4x^2+6x+2\\ x^2-x-1\overline{)\,4x^4+2x^3-8x^2-8x-5}\\ \underline{4x^4-4x^3-4x^2}\\ 6x^3-4x^2-8x\\ \underline{6x^3-6x^2-6x}\\ 2x^2-2x-5\\ \underline{2x^2-2x-2}\\ -3\end{array}$$

$$\begin{aligned}&\therefore 4x^4+2x^3-8x^2-8x-5\\&=(x^2-x-1)(4x^2+6x+2)-3\\&=0\cdot(4x^2+6x+2)-3\\&=-3\end{aligned}$$

답 -3

19 전략 주어진 조건에서 $x+y$, xy의 값을 구하여 두 건물의 부피의 합 x^3+y^3의 값을 구한다.

풀이 평면도에서 건물 C의 둘레의 길이가 20이므로

$$2(x+y)=20$$
$$\therefore x+y=10$$

평면도에서 세 건물의 넓이의 합이 80이므로

$$x^2+y^2+xy=80,\quad (x+y)^2-xy=80$$
$$10^2-xy=80$$
$$\therefore xy=10^2-80=20$$

따라서 정육면체 모양의 두 건물 A, B의 부피의 합은

$$\begin{aligned}x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)\\&=10^3-3\cdot20\cdot10\\&=400\end{aligned}$$

답 400

20 해결과정 • $A=x^2-x+1=(x^2+1)-x$이므로 A를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $-x$이다.

$\therefore P(-1,\ 0)$ ➔ 20% 배점

$B=x^2+2x+1=(x^2+1)+2x$이므로 B를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $2x$이다.

$\therefore Q(2,\ 0)$ ➔ 20% 배점

$C=x^3+x+3=x(x^2+1)+3$이므로 C를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

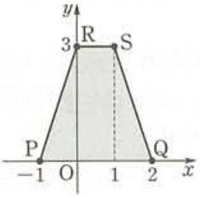
$\therefore R(0,\ 3)$ ➔ 20% 배점

$D=x^3+2x+3=x(x^2+1)+x+3$이므로 D를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $x+3$이다.

$\therefore S(1,\ 3)$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 네 점 P, Q, R, S를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 □PQSR의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 3=6$



➔ 20% 배점

답 6

21 전략 주어진 조립제법의 빈칸을 채우고 상수 a, b, c, d의 값을 구한다.

풀이 주어진 조립제법의 빈칸을 채우면 다음과 같다.

2	1	$\boxed{-3}$	2	$\boxed{5}$
		2	$\boxed{-2}$	0
2	1	$\boxed{-1}$	0	5
		2	$\boxed{2}$	
2	1	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	
		2		
	1	$\boxed{3}$		

$\therefore P=(x-2)(x^2-x)+5$

$=(x-2)\{(x-2)(x+1)+2\}+5$

$=(x-2)[(x-2)\{(x-2)+3\}+2]+5$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=2$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=5$

답 ⑤

02 항등식과 나머지정리

유제

본책 42~51쪽

010-1 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리하면

$(a+b)x-a+b=2x$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2,\ -a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1$

답 $a=1,\ b=1$

010-2 주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a-2b)x+(-2a+3b)y+a-b-c$

$=3x-5y+4$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2b=3,\ -2a+3b=-5,\ a-b-c=4$

세 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1,\ c=-2$

답 $a=1,\ b=-1,\ c=-2$

011-1 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

ax^3+bx^2-x+4

$=cx^3+(4+c)x^2+(4+c)x+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=c,\ b=4+c,\ -1=4+c$

$\therefore a=-5,\ b=-1,\ c=-5$

답 $a=-5,\ b=-1,\ c=-5$

011-2 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a-3+b$

$\therefore a+b=4$ …… ㉠

양변에 $x=3$을 대입하면

$0=27+9a+9+b$

$\therefore 9a+b=-36$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5,\ b=9$

답 $a=-5,\ b=9$

012-1 x^3+ax^2+bx+6을 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^3+ax^2+bx+6=(x+1)(x-2)Q(x)$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=2$를 대입하면

$8+4a+2b+6=0$

$\therefore 2a+b=-7$ ...... ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+a-b+6=0$

$\therefore a-b=-5$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=1$

$\therefore a+b=-3$

답 -3

012-2 x^3+ax^2-x+1을 x^2+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$이므로 나머지를 $px+q$ (p, q는 상수)라 하면

$x^3+ax^2-x+1=(x^2+1)(x-1)+px+q$

등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+ax^2-x+1=x^3-x^2+(p+1)x+q-1$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=-1,\ -1=p+1,\ 1=q-1$

$\therefore a=-1,\ p=-2,\ q=2$

따라서 $a=-1$이고 나머지는 $-2x+2$이다.

답 $a=-1$, 나머지 : $-2x+2$

Remark 다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식의 나눗셈에서 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 항상 작다. 따라서 나누는 식이 이차식이면 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓는다.

013-1 $f(x)=x^4-2ax^3+ax^2-3x-7$로 놓으면 나머지정리에 의하여 $f(2)=15$이므로

$16-16a+4a-6-7=15$

$\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-3x-7$이므로 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1+2-1-3-7=-8$

답 -8

013-2 $f(x)=x^3+ax^2+bx-5$로 놓으면 나머지정리에 의하여

$f(-1)=-1,\ f(-2)=1$

$f(-1)=-1$에서

$-1+a-b-5=-1$

$\therefore a-b=5$ ...... ㉠

$f(-2)=1$에서

$-8+4a-2b-5=1$

$\therefore 2a-b=7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-3$

$\therefore ab=-6$

답 -6

014-1 $f(x)$를 $(x+1)(x-4)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x+1)(x-4)Q(x)+ax+b$ ...... ㉠

다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 12이고, $x-4$로 나누면 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=12,\ f(4)=-3$

㉠의 양변에 $x=-1$, $x=4$를 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b,\ f(4)=4a+b$

$\therefore -a+b=12,\ 4a+b=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-3,\ b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-3x+9$이다.

답 $-3x+9$

014-2 $f(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2+x-2)(x^2+2x-5)+ax+b$$
$$=(x-1)(x+2)(x^2+2x-5)+ax+b$$ ...... ㉠

다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 -8이고, $x+2$로 나누면 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=-8,\ f(-2)=4$

㉠의 양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$f(1)=a+b,\ f(-2)=-2a+b$

$\therefore a+b=-8,\ -2a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-4$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x-5)-4x-4$이므로 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=-2\cdot1\cdot(-6)-4(-1)-4=12$

답 12

015-1 $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-3)=-3$

한편 $f(x+3)$을 $x+6$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$f(x+3)=(x+6)Q(x)+R$

양변에 $x=-6$을 대입하면

$R=f(-3)=-3$

따라서 구하는 나머지는 -3이다. 답 -3

015-2 $f(x)$, $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 -2, 3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-2)=-2$, $g(-2)=3$

한편 $3f(x)-2g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$3f(x)-2g(x)=(x+2)Q(x)+R$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$$\begin{aligned}R&=3f(-2)-2g(-2)\\&=3\cdot(-2)-2\cdot3=-12\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 -12이다.

답 -12

015-3 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -3이므로

$f(x)=(x+1)Q(x)-3$ …… ㉠

또 다항식 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여

$Q(-3)=1$

$f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-3)$과 같으므로 ㉠의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$$\begin{aligned}f(-3)&=-2Q(-3)-3\\&=-2\cdot1-3\\&=-5\end{aligned}$$

답 -5

다른 풀이 $Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$Q(x)=(x+3)Q'(x)+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)\{(x+3)Q'(x)+1\}-3\\&=(x+1)(x+3)Q'(x)+x-2\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는

$f(-3)=-3-2=-5$

016-1 $f(x)=3x^3+ax^2+bx+6$으로 놓으면 $f(x)$는 $x+2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-2)=0$, $f(3)=0$

$f(-2)=0$에서

$-24+4a-2b+6=0$

$\therefore 2a-b=9$ …… ㉠

$f(3)=0$에서

$81+9a+3b+6=0$

$\therefore 3a+b=-29$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $b=-17$

$\therefore ab=68$ 답 68

016-2 $f(x-1)$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$f(-2-1)=f(-3)=0$

$f(x)=x^3-x^2+ax+3$에서

$$\begin{aligned}f(-3)&=-27-9-3a+3\\&=-3a-33\end{aligned}$$

즉 $-3a-33=0$이므로

$a=-11$ 답 -11

중단원 연습 문제 ○ 본책 52~55쪽

01 ⑤	02 11	03 ①	04 6
05 -1	06 ③	07 $f(x)=x-1$	08 ④
09 -4	10 -6	11 16	12 ⑤
13 x^2-3x+5	14 100	15 70	16 ②
17 -10	18 ④	19 7	20 24	21 ④
22 ④	23 81		

01 전략 주어진 등식은 k에 대한 항등식이므로 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 주어진 등식의 좌변을 k에 대하여 정리하면

$(x+3)k+2x+a=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x+3=0$, $2x+a=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-3$, $a=6$ 답 ⑤

02 (전략) 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 미정계수법을 이용한다.

(풀이) 주어진 등식의 우변을 전개한 후 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3+ax^2-24=x^3+(b+c)x^2+(bc-6)x-6b$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=b+c,\ 0=bc-6,\ -24=-6b$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{11}{2},\ b=4,\ c=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b+c=11$$

답 11

03 (전략) 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세우고 이 등식이 항등식임을 이용한다.

(풀이) $x^{100}+ax^{10}+bx$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $x+2$이므로

$$x^{100}+ax^{10}+bx=(x+1)(x-1)Q(x)+x+2$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면 $1+a-b=1$

$\therefore a-b=0$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면 $1+a+b=3$

$\therefore a+b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=1$

$\therefore ab=1$

답 ①

04 (전략) 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$임을 이용한다.

(풀이) $f(x)=x^3-ax^2+3x-2$로 놓으면 나머지정리에 의하여

$$f(-1)=f(2)$$

즉 $-1-a-3-2=8-4a+6-2$이므로

$3a=18 \quad \therefore a=6$

답 6

05 문제이해 • $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2-1)Q(x)+ax+b\\&=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

…… ㉠ ➔ 30% 배점

해결과정 • 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-1$로 나누면 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여

$f(-1)=5,\ f(1)=3$ ➔ 20% 배점

㉠의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$f(-1)=-a+b,\ f(1)=a+b$

$\therefore -a+b=5,\ a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=4$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $R(x)=-x+4$이므로

$R(5)=-1$ ➔ 20% 배점

답 -1

06 (전략) 다항식 $f(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a\alpha+b)$임을 이용한다.

(풀이) $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$$

$f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\cdot1)=f(2)=4\cdot2+3=11$ 답 ③

(다른 풀이) $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$$

$$\begin{aligned}\therefore f(2x)&=(2x-1)(2x-2)Q(2x)+4\cdot2x+3\\&=2(x-1)(2x-1)Q(2x)\\&\quad+8(x-1)+11\\&=(x-1)\{2(2x-1)Q(2x)+8\}+11\end{aligned}$$

따라서 $f(2x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 11이다.

07 (전략) $f(x)=ax+b$($a\neq0$, a, b는 상수)로 놓고 주어진 등식을 만족시키는 상수 a, b의 값을 구한다.

(풀이) $f(x)$가 일차식이므로

$$f(x)=ax+b\ (a\neq0,\ a,\ b\text{는 상수})$$

로 놓으면 주어진 식은

$$(ax+b)^2=ax^2+b-2(ax+b)$$

$$a^2x^2+2abx+b^2=ax^2-2ax-b$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a^2=a,\ 2ab=-2a,\ b^2=-b$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=-1\ (\because a\neq0)$

$\therefore f(x)=x-1$

답 $f(x)=x-1$

08 (전략) x, y 사이의 관계식을 한 문자에 대하여 정리한 다음 등식에 대입한다.

(풀이) $x+y=2$에서 $y=2-x$

이것을 $axy+bx+cy+1=0$에 대입하면

$$ax(2-x)+bx+c(2-x)+1=0$$

이 등식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$ax^2+(-2a-b+c)x-2c-1=0$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a=0,\ -2a-b+c=0,\ -2c-1=0$$

$$\therefore a=0, b=-\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a-b-c=0-\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$$

답 ④

09 문제이해 • $x=1$이 이차방정식 $x^2+(k+2)x+(k-1)p+q-1=0$의 근이므로

$1+k+2+(k-1)p+q-1=0$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 이 등식을 k에 대하여 정리하면

$$(p+1)k-p+q+2=0$$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$p+1=0,\ -p+q+2=0$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 두 식을 연립하여 풀면

$$p=-1, q=-3$$

$\therefore p+q=-4$ ➔ 40% 배점

답 -4

Remark **방정식의 근과 항등식**

방정식 $f(x)=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 $x=\alpha$를 근으로 가지면 방정식에 $x=\alpha$를 대입한 등식 $f(\alpha)=0$은 k에 대한 항등식이다.

10 문제이해 • x의 값에 관계없이 $\dfrac{a+4x}{3-2x}$의 값이 항상 k(k는 상수)라 하면

$$\frac{a+4x}{3-2x}=k$$

즉 등식 $a+4x=k(3-2x)$는 x에 대한 항등식이다.

➔ 50% 배점

해결과정 • 등식의 우변을 전개하면

$$a+4x=3k-2kx$$

이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a=3k,\ 4=-2k$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $k=-2$이므로

$a=3\cdot(-2)=-6$ ➔ 20% 배점

답 -6

11 (전략) n차 다항식 $P_n(x)$에 $n=1, 2, 3$을 대입하여 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$를 직접 구한다.

(풀이) $P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)(x-2)$, $P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$2x^3-3x^2+1=a+bP_1(x)+cP_2(x)+dP_3(x)$에서

$$2x^3-3x^2+1=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=1$을 대입하면

$$2-3+1=a \quad \therefore a=0$$

양변에 $x=2$를 대입하면

$$a+b=5 \quad \therefore b=5$$

양변에 $x=3$을 대입하면

$$a+2b+2c=28 \quad \therefore c=9$$

한편 좌변과 우변의 x^3의 계수가 각각 2, d이므로

$$d=2$$

$$\therefore a+b+c+d=16$$

답 16

12 (전략) 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $f(\alpha)$임을 이용한다.

(풀이) $f(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$$f(x)=(x+3)Q(x)+3$$

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 나머지정리에 의하여

$$Q(3)=2$$

따라서 $f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=6Q(3)+3=6\cdot2+3=15$$

답 ⑤

13 (전략) $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$로 놓고 나머지정리를 이용한다.

(풀이) $f(x)$를 $(x-2)^2(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ ($R(x)$는 이차 이하의 다항식)라 하면

$$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+R(x) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $(x-2)^2(x+2)Q(x)$는 $(x-2)^2$으로 나누어떨어지므로 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.
즉 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+1$이므로

$$R(x)=a(x-2)^2+x+1 \text{ (단, } a\text{는 상수)} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-2)^2(x+2)Q(x)+a(x-2)^2+x+1$$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$$f(-2)=16a-1$$

이때 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 15이므로 나머지정리에 의하여

$$f(-2)=15$$

즉 $16a-1=15$이므로 $a=1$

$$\therefore R(x)=(x-2)^2+x+1=x^2-3x+5$$

답 x^2-3x+5

14 전략 $f(8)=2\cdot8^{33}+4\cdot8^{66}=2^{100}+2^{200}$임을 이용한다.

풀이 다항식 $f(x)=2x^{33}+4x^{66}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$R=f(1)=2+4=\boxed{6}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)Q(x)+6$$

이 식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=\boxed{8}$을 대입하면

$$f(8)=7Q(8)+6$$

그런데 $f(8)=2\cdot8^{33}+4\cdot8^{66}=2^{100}+2^{200}$이므로

$$2^{100}+2^{200}=7Q(8)+6$$

따라서 $2^{100}+2^{200}$을 7로 나누었을 때의 나머지는 6이다.
이상에서 $p=6$, $q=8$이므로

$$p^2+q^2=36+64=100$$

답 100

15 전략 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하면 $f(a)=R(a)$, $f(b)=R(b)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)$를 $x^2-8x+12$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)=(x^2-8x+12)Q(x)+2x+1$$
$$=(x-2)(x-6)Q(x)+2x+1$$

양변에 $x=2$, $x=6$을 각각 대입하면

$$f(2)=5,\ f(6)=13$$

또 $(x^2+1)f(x+3)$을 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$(x^2+1)f(x+3)$$
$$=(x^2-2x-3)Q'(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-3)Q'(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1$, $x=3$을 각각 대입하면

$$2f(2)=-a+b,\ 10f(6)=3a+b$$
$$\therefore -a+b=10,\ 3a+b=130$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=30,\ b=40$$

따라서 $R(x)=30x+40$이므로

$$R(1)=30+40$$
$$=70$$

답 70

16 전략 다항식 $f(x)+x$가 $x-a$로 나누어떨어지면 $f(a)+a=0$이다.

풀이 $f(x)+x$가 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$$f(-1)-1=0,\ f(2)+2=0$$
$$\therefore f(-1)=1,\ f(2)=-2$$

한편 $f(x)$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$$f(-1)=-a+b,\ f(2)=2a+b$$
$$\therefore a-b=-1,\ 2a+b=-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\ b=0$$

따라서 구하는 나머지는 $-x$이다.

답 ②

다른 풀이 $f(x)+x$가 $x+1$과 $x-2$로 각각 나누어떨어지므로 $f(x)+x$를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$f(x)+x=(x+1)(x-2)Q(x)$$
$$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)-x$$

따라서 구하는 나머지는 $-x$이다.

17 문제이해 • $f(a)=0$, $f(b)=0$이므로 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-a$, $x-b$를 인수로 갖는다.

▸ 30% 배점

해결과정 • 이때 $f(x)$는 x^2의 계수가 1인 이차식이므로

$$f(x)=(x-a)(x-b)$$
$$=x^2-(a+b)x+ab$$

▸ 30% 배점

이때 $f(x)=x^2-6x-10$이므로

$a+b=6$, $ab=-10$ ▸ 20% 배점

답구하기 • $\therefore f(a+b)=f(6)$

$$=36-36-10$$
$$=-10$$

▸ 20% 배점

답 -10

18 전략 $f(a)=0$이면 $f(x)$는 $x-a$를 인수로 갖는다.

풀이 $P(a)=P(b)=P(c)=0$이므로 $P(x)$는 $x-a$, $x-b$, $x-c$를 인수로 갖는다.

이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차다항식이므로

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

또 $P(0)=-6$이므로

$$-abc=-6$$
$$\therefore abc=6=1\cdot2\cdot3$$

a, b, c는 서로 다른 세 자연수이므로 각각 1, 2, 3 중 하나의 값을 갖는다.

따라서 $P(x)$를 $x-6$으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(6)=(6-a)(6-b)(6-c)$$
$$=5\cdot4\cdot3=60$$

답 ④

19 전략 다항식 $f(x)$를 n차식이라 하고 n의 값을 구한다.

풀이 다항식 $f(x)$가 n차식이면 주어진 등식의 좌변은 $2n$차식이고 우변은 $(n+2)$차식이므로

$2n=n+2$ $\quad\therefore n=2$

따라서 $f(x)$가 이차식이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, a, b, c는 상수)라 하면

$$f(x^2+x-2)$$
$$=a(x^2+x-2)^2+b(x^2+x-2)+c$$
$$=a(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)$$
$$+b(x^2+x-2)+c$$
$$=ax^4+2ax^3+(b-3a)x^2+(b-4a)x$$
$$+(4a-2b+c)$$

$$(x^2+x-4)f(x)+7$$
$$=(x^2+x-4)(ax^2+bx+c)+7$$
$$=ax^4+(a+b)x^3+(-4a+b+c)x^2$$
$$+(c-4b)x-4c+7$$

이때 등식 $f(x^2+x-2)=(x^2+x-4)f(x)+7$이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$2a=a+b$, $b-3a=-4a+b+c$,

$b-4a=c-4b$, $4a-2b+c=-4c+7$

네 식을 정리하면

$a=b=c$, $4a-2b+5c=7$

$\therefore a=b=c=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+1$이므로

$f(2)=4+2+1=7$

답 7

다른 풀이 $f(x^2+x-2)=(x^2+x-4)f(x)+7$의 양변에 각각 $x=1$, $x=-2$, $x=0$을 대입하면

$$f(0)=-2f(1)+7$$
$$f(0)=-2f(-2)+7$$
$$f(-2)=-4f(0)+7$$

세 식을 연립하여 풀면

$f(1)=f(-2)=3$, $f(0)=1$

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$a+b+c=3$, $4a-2b+c=3$, $c=1$

세 식을 연립하여 풀면 $\quad a=b=c=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+1$이므로

$f(2)=4+2+1=7$

20 전략 삼차식 $f(x)$를 이차식 $q(x)$로 나눌 때의 몫은 일차식임을 이용한다.

풀이 삼차식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나눌 때의 몫은 일차식이므로

$$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$$

($a\neq0$, a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $f(0)=4$이므로 $\quad b=4$

$\therefore f(x)=(x^2+x+1)(ax+4)$ ⋯⋯ ㉠

또 $f(x)+12$를 x^2+2로 나눌 때의 몫은 일차식이므로

$f(x)+12=(x^2+2)(ax+c)$ (c는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $f(0)=4$이므로

$4+12=2c$ $\quad\therefore c=8$

$\therefore f(x)+12=(x^2+2)(ax+8)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x^2+x+1)(ax+4)=(x^2+2)(ax+8)-12$

$\therefore ax^3+(a+4)x^2+(a+4)x+4$

$=ax^3+8x^2+2ax+4$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$a+4=8,\ a+4=2a$

$\therefore a=4$

따라서 $f(x)=(x^2+x+1)(4x+4)$이므로

$f(1)=3\cdot 8=24$ 답 24

21 전략 $x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$로 놓고 양변에 $x=1$을 대입하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $x^{10}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b=0 \quad \therefore b=-a$ …… ㉡

$x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$

$=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$

$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

$\therefore x^9+x^8+x^7+\cdots+1=(x-1)Q(x)+a$

등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=1+1+1+\cdots+1=10$

따라서 $b=-10$이므로 $R(x)=10x-10$

$\therefore R(10)=90$ 답 ④

22 전략 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어지면 $f(x)$는 $x-a$로 나누어떨어지고, $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫도 $x-a$로 나누어떨어진다.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+ax+b$로 놓고, $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하자.

조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & a & b \\ & & -1 & -2 & 2-a \\ \hline & 1 & 2 & a-2 & \boxed{-a+b+2} \end{array}$$

$\therefore Q(x)=x^2+2x+a-2$

$R=-a+b+2$

이때 $f(x)$가 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $x+1$로도 나누어떨어진다.

즉 $R=-a+b+2=0$이므로

$a-b=2$ …… ㉠

한편 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q'(x)$

$=(x+1)(x+1)Q'(x)$

즉 $Q(x)=(x+1)Q'(x)$이므로 $Q(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.

따라서 인수정리에 의하여 $Q(-1)=0$이므로

$1-2+a-2=0$

$\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=4$

답 ④

23 해결과정 • 조건 (가)에서

$f(-2)+2=f(-1)+1=f(1)-1=k$ (k는 상수)라 하면

$f(-2)+2-k=f(-1)+1-k$

$=f(1)-1-k=0$

이때 $g(x)=f(x)-x-k$라 하면

$g(-2)=g(-1)=g(1)=0$

이므로 인수정리에 의하여 $g(x)$는 $x+2$, $x+1$, $x-1$을 인수로 갖는다.

즉 $g(x)=a(x+2)(x+1)(x-1)$ ($a\neq 0$, a는 상수)로 놓을 수 있으므로

$f(x)=g(x)+x+k$

$=a(x+2)(x+1)(x-1)+x+k$

▶ 50% 배점

조건 (나)에서 $f(0)=-6$, $f(2)=24$이므로

$-2a+k=-6,\ 12a+2+k=24$

$\therefore 2a-k=6,\ 12a+k=22$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2,\ k=-2$ ▶ 20% 배점

답구하기 • 따라서

$f(x)=2(x+2)(x+1)(x-1)+x-2$이므로

$f(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는

$f(3)=2\cdot 5\cdot 4\cdot 2+3-2$

$=81$ ▶ 30% 배점

답 81

I. 다항식

03 인수분해

유제 본책 61~70쪽

017-1 (1) $x^2+4y^2-z^2+4xy$
$=(x^2+4xy+4y^2)-z^2$
$=(x+2y)^2-z^2$
$=(x+2y+z)(x+2y-z)$

(2) $x^3y-xy^3+x^2y+xy^2$
$=xy(x^2-y^2+x+y)$
$=xy\{(x+y)(x-y)+(x+y)\}$
$=xy(x+y)(x-y+1)$

(3) $x^2y+x^2-xy^2-y^2=x^2y-xy^2+x^2-y^2$
$=xy(x-y)+(x+y)(x-y)$
$=(x-y)(xy+x+y)$

(4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)=x^2(x-y)-y^2(x-y)$
$=(x-y)(x^2-y^2)$
$=(x-y)(x+y)(x-y)$
$=(x-y)^2(x+y)$

(5) $x^8-y^8=(x^4)^2-(y^4)^2$
$=(x^4+y^4)(x^4-y^4)$
$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$
$=(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(6) $(x+y)^4-(x-y)^4$
$=\{(x+y)^2\}^2-\{(x-y)^2\}^2$
$=\{(x+y)^2+(x-y)^2\}\{(x+y)^2-(x-y)^2\}$
$=(2x^2+2y^2)\cdot 4xy$
$=8xy(x^2+y^2)$

답 풀이 참조

다른 풀이 (4) $x^2(x-y)+y^2(y-x)$
$=x^3-x^2y+y^3-xy^2$
$=x^3+y^3-x^2y-xy^2$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$
$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)^2$

018-1 (1) $x^2+4=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X+2x)(X-3x)+4x^2$
$=X^2-xX-2x^2$
$=(X+x)(X-2x)$
$=(x^2+x+4)(x^2-2x+4)$

(2) $(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9$
$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+9$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-4)(X+2)+9$
$=X^2-2X+1$
$=(X-1)^2$
$=(x^2+3x-1)^2$

답 풀이 참조

019-1 (1) $x^2=X$로 놓으면
$x^4-18x^2+32=X^2-18X+32$
$=(X-2)(X-16)$
$=(x^2-2)(x^2-16)$
$=(x^2-2)(x+4)(x-4)$

(2) $x^2=X$로 놓으면
$4x^4-15x^2-4=4X^2-15X-4$
$=(X-4)(4X+1)$
$=(x^2-4)(4x^2+1)$
$=(x+2)(x-2)(4x^2+1)$

(3) $x^4-6x^2+1=x^4-2x^2+1-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

(4) $x^4+64=x^4+16x^2+64-16x^2$
$=(x^2+8)^2-(4x)^2$
$=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

(5) $x^4-7x^2y^2+y^4$
$=x^4+2x^2y^2+y^4-9x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-(3xy)^2$
$=(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

답 풀이 참조

020-1 (1) 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면
$a^2b-b^2c-b^3+ca^2=(a^2-b^2)c+a^2b-b^3$
$=(a^2-b^2)c+b(a^2-b^2)$
$=(a^2-b^2)(c+b)$
$=(a+b)(a-b)(b+c)$

(2) 주어진 다항식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면
$3a^2-2b^2+5ab-2a+3b-1$
$=3a^2+(5b-2)a-(2b^2-3b+1)$

$=3a^2+(5b-2)a-(2b-1)(b-1)$
$=\{3a-(b-1)\}\{a+(2b-1)\}$
$=(3a-b+1)(a+2b-1)$

(3) 주어진 다항식을 전개한 다음 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\&=a^2b-ab^2+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2\\&=(a-b)c^2-(a^2-b^2)c+a^2b-ab^2\\&=(a-b)c^2-(a+b)(a-b)c+ab(a-b)\\&=(a-b)\{c^2-(a+b)c+ab\}\\&=(a-b)(c-a)(c-b)\\&=-(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

(4) 주어진 다항식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&a^3+a^2c+ac^2-b^3-b^2c-bc^2\\&=(a-b)c^2+(a^2-b^2)c+a^3-b^3\\&=(a-b)c^2+(a+b)(a-b)c\\&\quad+(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

021-1 (1) $f(x)=x^3-6x^2+13x-10$으로 놓으면

$f(2)=8-24+26-10=0$

이므로 $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}2 & 1 & -6 & 13 & -10\\ & & 2 & -8 & 10\\\hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-4x+5이므로

$x^3-6x^2+13x-10=(x-2)(x^2-4x+5)$

(2) $f(x)=3x^3-4x^2-17x+6$으로 놓으면

$f(-2)=-24-16+34+6=0$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}-2 & 3 & -4 & -17 & 6\\ & & -6 & 20 & -6\\\hline & 3 & -10 & 3 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $3x^2-10x+3$이므로

$$\begin{aligned}&3x^3-4x^2-17x+6\\&=(x+2)(3x^2-10x+3)\\&=(x+2)(3x-1)(x-3)\end{aligned}$$

(3) $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2+4$로 놓으면

$f(-1)=2-3-3+4=0$,
$f(-2)=32-24-12+4=0$

이므로 $x+1$, $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 2 & 3 & -3 & 0 & 4\\ & & -2 & -1 & 4 & -4\\\hline -2 & 2 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0}\\ & & -4 & 6 & -4 & \\\hline & 2 & -3 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $2x^2-3x+2$이므로

$$\begin{aligned}&2x^4+3x^3-3x^2+4\\&=(x+1)(x+2)(2x^2-3x+2)\end{aligned}$$

(4) $f(x)=6x^4-13x^3-2x^2+7x+2$로 놓으면

$f(1)=6-13-2+7+2=0$,
$f(2)=96-104-8+14+2=0$

이므로 $x-1$, $x-2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}1 & 6 & -13 & -2 & 7 & 2\\ & & 6 & -7 & -9 & -2\\\hline 2 & 6 & -7 & -9 & -2 & \boxed{0}\\ & & 12 & 10 & 2 & \\\hline & 6 & 5 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $6x^2+5x+1$이므로

$$\begin{aligned}&6x^4-13x^3-2x^2+7x+2\\&=(x-1)(x-2)(6x^2+5x+1)\\&=(x-1)(x-2)(2x+1)(3x+1)\end{aligned}$$

답 풀이 참조

021-2 $f(x)=x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3$으로 놓으면

$f(1)=1-(a-3)-(2a+1)+3a-3=0$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr}1 & 1 & -(a-3) & -(2a+1) & 3a-3\\ & & 1 & -a+4 & -3a+3\\\hline & 1 & -a+4 & -3a+3 & \boxed{0}\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x^2+(-a+4)x-3a+3$이므로

$$x^3-(a-3)x^2-(2a+1)x+3a-3$$
$$=(x-1)\{x^2+(-a+4)x-3a+3\}$$
$$=(x-1)\{x^2+(-a+4)x-3(a-1)\}$$
$$=(x-1)(x+3)\{x-(a-1)\}$$
$$=(x-1)(x+3)(x-a+1)$$

답 $(x-1)(x+3)(x-a+1)$

022-1 (1) 주어진 식을 인수분해하면

$$a^3+a^2b-ab^2-b^3=a^2(a+b)-b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-b^2)$$
$$=(a+b)(a+b)(a-b)$$
$$=(a+b)^2(a-b)$$

이때

$$a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1,$$
$$a-b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

이므로

(주어진 식) $=1^2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$

(2) $18=x$로 놓으면

$$\frac{18^4+18^2+1}{18\cdot17+1}=\frac{x^4+x^2+1}{x(x-1)+1}$$
$$=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$=x^2+x+1$$
$$=18^2+18+1=343$$

답 (1) $\sqrt{3}$ (2) 343

중단원 연습 문제

본책 72~75쪽

01 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$		**02** 1		**03** ③
04 4	**05** -3	**06** -56	**07** 869	**08** ③
09 ⑤	**10** 6	**11** ②	**12** -4	
13 -6	**14** ②	**15** ⑤	**16** ④	**17** 8
18 32	**19** ④	**20** 228	**21** 5	

01 전략 주어진 도형의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 주어진 그림에서 왼쪽에 있는 도형은 한 모서리의 길이가 a인 정육면체 위에 한 모서리의 길이가 b인 정육면체를 붙인 것이므로 부피는

$$a^3+b^3$$

주어진 그림에서 오른쪽에 있는 두 직육면체의 부피의 합은

$$a(a+b)(a-b)+b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

도형의 부피는 같으므로 구하는 인수분해 공식은

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

답 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

02 문제이해 • $a^3+b^3+c^3=3abc$, 즉

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$의 좌변을 인수분해하면

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

▶ 40% 배점

해결과정 • 이때 a, b, c가 양의 실수이므로

$$a+b+c>0$$

따라서 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$이므로

$$a=b=c$$

▶ 40% 배점

답구하기 • $\therefore \frac{b}{a}+\frac{c}{b}-\frac{a}{c}=1+1-1$

$$=1$$

▶ 20% 배점

답 1

Remark 실수의 성질

두 실수 a, b에 대하여

$a^2+b^2=0 \Longleftrightarrow a=b=0$

03 전략 공통부분인 x^2+2를 X로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $x^2+2=X$로 놓으면

(주어진 식) $=(X+x)(X+2x)-6x^2$

$$=X^2+3xX-4x^2$$
$$=(X+4x)(X-x)$$
$$=(x^2+4x+2)(x^2-x+2)$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다.

답 ③

04 (전략) $x^2=X$로 놓고 X에 대한 이차식을 인수분해한다.

(풀이) $x^2=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-6x^2+5&=X^2-6X+5=(X-1)(X-5)\\&=(x^2-1)(x^2-5)\\&=(x+1)(x-1)(x^2-5)\end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-5$이므로

$a-b=4$ 답 4

05 (전략) 주어진 다항식을 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

(풀이) 주어진 다항식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2-xy-6y^2-x+8y-2\\&=x^2-(y+1)x-2(3y^2-4y+1)\\&=x^2-(y+1)x-2(y-1)(3y-1)\\&=\{x+(2y-2)\}\{x-(3y-1)\}\\&=(x+2y-2)(x-3y+1)\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=-3$이므로

$a+b+c=-3$ 답 -3

06 문제이해 • $f(x)=x^3+6x^2+x-14$로 놓으면

$f(-2)=-8+24-2-14=0$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다. ➜ 40% 배점

해결과정 •

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 6 & 1 & -14 \\ & & -2 & -8 & 14 \\ \hline & 1 & 4 & -7 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2+4x-7이므로

$x^3+6x^2+x-14=(x+2)(x^2+4x-7)$

➜ 40% 배점

답구하기 • 즉 $a=2$, $b=4$, $c=-7$이므로

$abc=-56$ ➜ 20% 배점

답 -56

07 (전략) $30=x$로 놓고 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타낸 후, 공통부분이 생기도록 전개한다.

(풀이) $30=x$로 놓으면

$$\begin{aligned}&28\cdot29\cdot30\cdot31+1\\&=(x-2)(x-1)x(x+1)+1\\&=\{(x-1)x\}\{(x-2)(x+1)\}+1\\&=(x^2-x)(x^2-x-2)+1\end{aligned}$$

$x^2-x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}X(X-2)+1&=X^2-2X+1=(X-1)^2\\&=(x^2-x-1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{28\cdot29\cdot30\cdot31+1}&=\sqrt{(x^2-x-1)^2}\\&=\sqrt{(30^2-30-1)^2}\\&=\sqrt{869^2}=869\end{aligned}$$

답 869

08 (전략) 공통부분인 x^2-2x를 X로 치환하여 인수분해한다.

(풀이) $x^2-2x=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X(X-2)-3\\&=X^2-2X-3\\&=(X+1)(X-3)\\&=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3)\\&=(x-1)^2(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

$\therefore a+b+c=-1+1-3=-3$ 답 ③

09 (전략) 먼저 주어진 다항식을 인수분해한 후, $a+2b=1$을 이용하여 간단히 한다.

(풀이)

$$\begin{aligned}1-a^2+4ab-4b^2&=1-(a^2-4ab+4b^2)\\&=1-(a-2b)^2\\&=(1-a+2b)(1+a-2b)\end{aligned}$$

이때 $a+2b=1$이므로

$a=1-2b$, $2b=1-a$

$$\begin{aligned}\therefore (1-a+2b)(1+a-2b)&=(2b+2b)(a+a)\\&=4b\cdot2a\\&=8ab\end{aligned}$$

답 ⑤

10 해결과정 • $f(x)g(x)$

$$\begin{aligned}&=4x^4+3x^2+1\\&=4x^4+4x^2+1-x^2\\&=(2x^2+1)^2-x^2\\&=(2x^2+x+1)(2x^2-x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &f(x)+g(x)\\&=(2x^2+x+1)+(2x^2-x+1)\\&=4x^2+2\end{aligned}$$

➜ 60% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)+g(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)+g(1)=4+2=6$ ➜ 40% 배점

답 6

Remark 나머지정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면
$R=f(a)$

11 (전략) 양변에 $(a+b)(b+c)(c+a)$를 곱한 다음 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

(풀이) 주어진 등식의 양변에 $(a+b)(b+c)(c+a)$를 곱하면

$$a^2(b+c)-b^2(c+a)+c^2(a+b)=2bc^2$$

이 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(b+c)a^2+(c^2-b^2)a-bc(b+c)=0$$
$$(b+c)\{a^2+(c-b)a-bc\}=0$$
$$(b+c)(a-b)(a+c)=0$$

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $\quad a-b=0$

$\therefore a=b$

따라서 주어진 등식을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다.

답 ②

Remark 삼각형의 모양 판단하기

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때
① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
② $a=b=c$ ➡ 정삼각형
③ $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

12 (전략) 주어진 식을 인수분해한 후, $x+y$, xy의 값을 대입한다.

(풀이) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy\\&=(1+y-6y^2)x^2+(y^2+2y)x+y^2\\&=(1+3y)(1-2y)x^2+(y^2+2y)x+y^2\\&=\{(1+3y)x+y\}\{(1-2y)x+y\}\\&=(x+y+3xy)(x+y-2xy)\end{aligned}$$

이때

$$x+y=(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2,$$
$$xy=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$$

이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\{2+3\cdot(-1)\}\{2-2\cdot(-1)\}\\&=-4\end{aligned}$$

답 -4

(다른 풀이) $$\begin{aligned}&x^2+y^2-6x^2y^2+x^2y+xy^2+2xy\\&=(x^2+y^2+2xy)+xy(x+y)-6(xy)^2\\&=(x+y)^2+xy(x+y)-6(xy)^2\\&=\{(x+y)+3xy\}\{(x+y)-2xy\}\\&=(x+y+3xy)(x+y-2xy)\end{aligned}$$

13 문제이해 • $f(x)=x^3+ax^2+x+6$으로 놓으면 $x-2$가 $f(x)$의 인수이므로 인수정리에 의하여

$f(2)=0$

즉 $8+4a+2+6=0$이므로

$4a=-16 \qquad \therefore a=-4$ ➡ 40% 배점

해결과정 •

$$\begin{array}{c|cccc}2 & 1 & -4 & 1 & 6\\ & & 2 & -4 & -6\\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-2x-3이므로

$$\begin{aligned}x^3-4x^2+x+6&=(x-2)(x^2-2x-3)\\&=(x-2)(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

➡ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b+c=-4+1-3$
$=-6$ ➡ 20% 배점

답 -6

14 (전략) 부피로 주어진 다항식을 인수분해하여 원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 구한다.

(풀이) $f(x)=x^3+x^2-5x+3$으로 놓으면

$f(1)=1+1-5+3=0$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{c|cccc}1 & 1 & 1 & -5 & 3\\ & & 1 & 2 & -3\\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0\end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2+2x-3이므로

$$\begin{aligned}x^3+x^2-5x+3&=(x-1)(x^2+2x-3)\\&=(x-1)^2(x+3)\end{aligned}$$

즉 밑면의 반지름의 길이는 $x-1$, 높이는 $x+3$이므로 구하는 겉넓이는

$$\begin{aligned}&2\pi(x-1)^2+2\pi(x-1)(x+3)\\&=2(x-1)(x-1+x+3)\pi\\&=4(x-1)(x+1)\pi\\&=4(x^2-1)\pi\end{aligned}$$

답 ②

Remark 원기둥의 부피와 겉넓이

밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원기둥에 대하여
부피 : $\pi r^2 h$, 겉넓이 : $2\pi r^2 + 2\pi rh$

15 (전략) 가로, 세로의 길이를 각각 인수분해하여 가로, 세로에 필요한 타일의 개수를 구한다.

(풀이) $f(n)=n^3+7n^2+14n+8$로 놓으면

$f(-1)=-1+7-14+8=0$

이므로 $n+1$은 $f(n)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 7 & 14 & 8 \\ & & -1 & -6 & -8 \\ \hline & 1 & 6 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(n)$을 $n+1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 n^2+6n+8이므로

$$\begin{aligned} n^3+7n^2+14n+8 &= (n+1)(n^2+6n+8) \\ &= (n+1)(n+2)(n+4) \end{aligned}$$

한편 $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일이 가로 방향으로 $(n+2)(n+4)$개, 세로 방향으로 $(n+3)$개 필요하다.

따라서 필요한 타일의 개수는

$(n+2)(n+3)(n+4)$ 답 ⑤

16 (전략) 연속한 두 자연수의 곱은 2의 배수이다.

(풀이) ㄱ. n이 짝수일 때, $n^2-1=(n-1)(n+1)$에서 $n-1$, $n+1$은 모두 홀수이므로 n^2-1도 홀수이다.

ㄴ. $n^2+n=n(n+1)$에서 $n(n+1)$은 연속한 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 짝수이다.

ㄷ. n이 짝수일 때 $n+1$, $2n+1$은 모두 홀수이므로 $(n+1)(2n+1)$도 홀수이다.

ㄹ. $n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$에서 $(n+1)(n+2)$는 연속한 두 자연수의 곱이므로 2의 배수, 즉 짝수이다.

이상에서 항상 짝수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

17 (전략) 주어진 사차식을 A^2-B^2 꼴로 만들어 인수분해한다.

(풀이) x^4-nx^2+16

$$\begin{aligned} &= x^4-8x^2+16-(n-8)x^2 \\ &= (x^2-4)^2-(\sqrt{n-8}x)^2 \\ &= (x^2+\sqrt{n-8}x-4)(x^2-\sqrt{n-8}x-4) \end{aligned}$$

$\therefore m=\sqrt{n-8}$

m이 자연수가 되려면

$n-8=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots$

$\therefore n=8+1^2,\ 8+2^2,\ 8+3^2,\ \cdots$

따라서 구하는 두 자리 자연수 n은

$8+2^2,\ 8+3^2,\ \cdots,\ 8+9^2$

의 8개이다.

답 8

18 문제이해 • $xf(x)=(x-2)g(x)$이므로 $g(x)$는 x를 인수로 갖고, $f(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.

▶ 10% 배점

해결과정 • $f(x)g(x)=x^4+8x^3+5x^2-50x$
$=x(x^3+8x^2+5x-50)$

$h(x)=x^3+8x^2+5x-50$으로 놓으면

$h(2)=8+32+10-50=0$

이므로 $x-2$는 $h(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 8 & 5 & -50 \\ & & 2 & 20 & 50 \\ \hline & 1 & 10 & 25 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $h(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 $x^2+10x+25$이므로

$$\begin{aligned} x^3+8x^2+5x-50 &= (x-2)(x^2+10x+25) \\ &= (x-2)(x+5)^2 \end{aligned}$$ ▶ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $f(x)g(x)=x(x-2)(x+5)^2$이고 $xf(x)=(x-2)g(x)$가 성립하므로

$f(x)=(x-2)(x+5)$, $g(x)=x(x+5)$

▶ 30% 배점

$\therefore f(3)+g(3)=8+24=32$ ▶ 20% 배점

답 32

19 (전략) $f(x)$와 $R(x)$를 각각 인수분해하여 공통인수를 구한다.

(풀이) $f(x)=x^3-7x+6$에서

$f(1)=1-7+6=0$

이므로 $x-1$은 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

따라서 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2+x-6이므로

$x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x-2)(x+3)$

한편 x^3-7x+6을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^3-7x+6=(x^2-1)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b$ ······ ㉠

양변에 $x=-1$을 대입하면

$12=-a+b$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-6$, $b=6$

$\therefore R(x)=-6x+6=-6(x-1)$

따라서 $G(x)=x-1$이므로

$G(10)=10-1=9$ 답 ④

20 전략 $15=x$로 놓고 15^3+15^2-15+2를 인수분해한다.

풀이 $15=x$로 놓으면

$15^3+15^2-15+2=x^3+x^2-x+2$

$f(x)=x^3+x^2-x+2$로 놓으면

$f(-2)=-8+4-(-2)+2=0$

이므로 $x+2$는 $f(x)$의 인수이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

즉 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 구하면 x^2-x+1이므로

$x^3+x-x+2=(x+2)(x^2-x+1)$
$=(15+2)(15^2-15+1)$
$=17\times211$

따라서 $a=17$, $b=211$ 또는 $a=211$, $b=17$이므로

$a+b=228$ 답 228

21 전략 $99=10^2-1$이므로 10^2을 한 문자로 놓고 10^6-1을 인수분해하여 약분한다.

풀이 $99=10^2-1$이므로 $10^2=x$로 놓으면

$$\frac{10^6-1}{99}=\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$=x^2+x+1$
$=10^4+10^2+1$
$=10101$

$\therefore n=5$ 답 5

04 복소수

유제

본책 86~102쪽

023-1 ㄱ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq1$이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$는 z가 될 수 없다.

ㄴ. $\bar{z}=c+di$(c, d는 실수)이면 $z=c-di$이므로

$c^2+(-d)^2=1 \quad \therefore c^2+d^2=1$

ㄷ. $z=bi$ ($b\neq0$인 실수)라 하면

$b^2=1 \quad \therefore b=\pm1$

$\therefore z=\pm i$

따라서 순허수인 z는 i, $-i$의 2개이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

024-1 (1) $z_1=(2+3i)x^2-4x+5-i$
$=(2x^2-4x+5)+(3x^2-1)i$

$z_2=(1+2i)x^2+x+3=(x^2+x+3)+2x^2i$

$\therefore z_1-z_2=(x^2-5x+2)+(x^2-1)i$

z_1-z_2가 실수이므로 $x^2-1=0$

$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

(2) $z=(1-i)(1+i)a^2+(4-3i)a-6i$
$=(2a^2+4a)-(3a+6)i$

z가 실수이면 $3a+6=0$

$\therefore a=-2$

z가 순허수이면 $2a^2+4a=0$, $3a+6\neq0$

(i) $2a^2+4a=0$에서 $2a(a+2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$

(ii) $3a+6\neq0$에서 $a\neq-2$

(i), (ii)에서 $a=0$

따라서 $x=-2$, $y=0$이므로

$x^2+y^2=4$

답 (1) 1 (2) 4

025-1 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x(4+4i+i^2)+y(1-2i+i^2)=6+2i$

$x(3+4i)-2yi=6+2i$

$3x+(4x-2y)i=6+2i$

$3x$, $4x-2y$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3x=6$, $4x-2y=2$

$\therefore x=2$, $y=3$

(2) 주어진 등식의 좌변에서

$$\frac{x}{1-i}+\frac{y}{1+i}=\frac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{(x+y)+(x-y)i}{2}$$
$$=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i$$

이므로 주어진 등식은

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}i=2+i$$

$\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{2}=2,\ \frac{x-y}{2}=1$$
$$x+y=4,\ x-y=2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3,\ y=1$$

답 (1) $x=2$, $y=3$ (2) $x=3$, $y=1$

026-1 (1) $x=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2x-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$$4x^2-4x+1=-3$$
$$\therefore x^2-x+1=0$$
$$\therefore 2x^3-2x^2+1=2x(x^2-x+1)-2x+1$$
$$=-2x+1$$
$$=-2\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+1$$
$$=-1-\sqrt{3}i+1$$
$$=-\sqrt{3}i$$

(2) $x=\frac{10}{2+i}=\frac{10(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$$=\frac{10(2-i)}{5}=4-2i$$
$$\therefore x-4=-2i$$

양변을 제곱하면

$$x^2-8x+16=-4$$
$$\therefore x^2-8x+20=0$$
$$\therefore x^3-8x^2+19x+1$$
$$=x(x^2-8x+20)-x+1$$
$$=-x+1=-(4-2i)+1$$
$$=-3+2i$$

답 (1) $-\sqrt{3}i$ (2) $-3+2i$

027-1 (1) $i^2=i^6=-1$, $i^3=i^7=-i$, $i^4=i^8=1$, $i^5=i$이므로

$$i+2i^2+3i^3+\cdots+8i^8$$
$$=i+2\cdot(-1)+3\cdot(-i)+4\cdot1+5\cdot i$$
$$+6\cdot(-1)+7\cdot(-i)+8\cdot1$$
$$=i-2-3i+4+5i-6-7i+8$$
$$=4-4i$$

(2) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$
$$\therefore \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}$$
$$=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{25}+i^{50}$$
$$=(-i)^{25}+i^{50}$$
$$=-(i^4)^6\cdot i+(i^4)^{12}\cdot i^2$$
$$=-i-1$$
$$=-1-i$$

답 (1) $4-4i$ (2) $-1-i$

028-1 $\alpha\bar{\alpha}\beta+\alpha\beta\bar{\beta}=\alpha\beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=\alpha\beta(\overline{\alpha+\beta})$

$$=(3-i)(2+i)$$
$$=6+i+1=7+i$$

답 $7+i$

028-2 $\alpha\bar{\alpha}=1$, $\beta\bar{\beta}=1$이므로

$$\frac{1}{\alpha}=\bar{\alpha},\ \frac{1}{\beta}=\bar{\beta}$$
$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}=\overline{-i}=i$$

답 i

029-1 $\bar{z}=3-2i$이므로

$$z+\bar{z}=(3+2i)+(3-2i)=6$$
$$z\bar{z}=(3+2i)(3-2i)=9+4=13$$
$$\therefore z^3\bar{z}+z\bar{z}^3=z\bar{z}(z^2+\bar{z}^2)$$
$$=z\bar{z}\{(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}\}$$
$$=13(6^2-2\cdot13)=130$$

답 130

029-2 $\alpha+\beta=\frac{1+i}{2}+\frac{1-i}{2}=1$

$\alpha\beta=\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

① $(\alpha+\beta)^2=1$

② $\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\cdot\frac{1}{2}=0$

④ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1\div\frac{1}{2}=2$

⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

답 ④

030-1 (1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$\bar{z}=a-bi$이므로

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$$
$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

즉 $2a=6$, $a^2+b^2=13$이므로

$$a=3,\ b=\pm 2 \qquad \therefore z=3\pm 2i$$

(2) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} z^2&=(a+bi)^2\\ &=a^2+2abi+(bi)^2\\ &=a^2-b^2+2abi \end{aligned}$$

따라서 $a^2-b^2+2abi=2i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-b^2=0,\ 2ab=2$$
$$\therefore b=\pm a,\ ab=1$$

(i) $b=a$이면 $ab=1$에서

$$a^2=1$$
$$\therefore a=\pm 1,\ b=\pm 1 \text{ (복호동순)}$$

(ii) $b=-a$이면 $ab=1$에서

$$a^2=-1$$

그런데 $a^2=-1$인 실수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\pm 1$, $b=\pm 1$ (복호동순)이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z}&=(a+bi)(a-bi)\\ &=a^2+b^2=2 \end{aligned}$$

답 (1) $3\pm 2i$ (2) 2

030-2 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

(1) $$\begin{aligned} \overline{z_1+z_2}&=\overline{(a+bi)+(c+di)}\\ &=\overline{(a+c)+(b+d)i}\\ &=(a+c)-(b+d)i\\ &=(a-bi)+(c-di)\\ &=\overline{z_1}+\overline{z_2} \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \overline{z_1-z_2}&=\overline{(a+bi)-(c+di)}\\ &=\overline{(a-c)+(b-d)i}\\ &=(a-c)-(b-d)i\\ &=(a-bi)-(c-di)\\ &=\overline{z_1}-\overline{z_2} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} \overline{z_1z_2}&=\overline{(a+bi)(c+di)}\\ &=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)i}\\ &=(ac-bd)-(ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}&=(\overline{a+bi})(\overline{c+di})\\ &=(a-bi)(c-di)\\ &=(ac-bd)-(ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

(4) $$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}&=\overline{\left(\frac{c+di}{a+bi}\right)}=\overline{\left\{\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}\right\}}\\ &=\overline{\left\{\frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{a^2+b^2}\right\}}\\ &=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}&=\frac{\overline{c+di}}{\overline{a+bi}}=\frac{c-di}{a-bi}\\ &=\frac{(c-di)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}\\ &=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)i}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$$

답 풀이 참조

031-1 (1) $$\begin{aligned} \sqrt{3}\sqrt{-4}&=\sqrt{3}\sqrt{4}i=\sqrt{12}i\\ &=2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} \sqrt{-2}\sqrt{-3}\sqrt{-5}&=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i\\ &=\sqrt{30}i^3=-\sqrt{30}i \end{aligned}$$

(3) $10>0$, $-5<0$이므로

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}=-\sqrt{\frac{10}{-5}}=-\sqrt{-2}=-\sqrt{2}i$$

(4) $-4<0$, $-8<0$이므로

$$\sqrt{-4}\sqrt{-8}=-\sqrt{(-4)\cdot(-8)}=-4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{-4}\sqrt{-8}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-4}}&=-4\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{2}i}{2i}\\ &=-4\sqrt{2}+\sqrt{2}\\ &=-3\sqrt{2} \end{aligned}$$

답 (1) $2\sqrt{3}i$ (2) $-\sqrt{30}i$ (3) $-\sqrt{2}i$ (4) $-3\sqrt{2}$

032-1 $\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-6}}=-\sqrt{\dfrac{x-4}{x-6}}$이므로

$x-4>0,\ x-6<0$ 또는 $x-4=0,\ x-6\neq0$

$4<x<6$ 또는 $x=4,\ x\neq6$

$\therefore 4\le x<6$

따라서 구하는 정수 x는 4, 5의 2개이다. 답 2

032-2 $\sqrt{-x}\sqrt{x-3}=-\sqrt{-x(x-3)}$ 이므로

$-x<0, x-3<0$ 또는 $-x=0$ 또는 $x-3=0$

$0<x<3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$\therefore 0\le x\le3$

$x\ge0,\ x-4<0$이므로

$|x|+|x-4|=x-(x-4)=4$ 답 4

중단원 연습 문제 ○ 본책 103~107쪽

01 -1	02 3	03 2	04 ④	05 $-i$
06 290	07 4	08 ④	09 ④	10 ③
11 3	12 $\frac{3}{16}$	13 25	14 5	15 ③
16 ②	17 -10	18 ①	19 ③	20 ①
21 27	22 ②	23 20	24 18	

01 전략 z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한 후 $\bar{z}$를 구하여 $z=\bar{z}$에 대입한다.

풀이 $z=(3+i)x^2+(1+2i)x-4+i$

$=(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$

$z=\bar{z}$에서

$(3x^2+x-4)+(x^2+2x+1)i$

$=(3x^2+x-4)-(x^2+2x+1)i$

$2(x^2+2x+1)=0, \quad 2(x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$ 답 -1

다른 풀이 $z=\bar{z}$에서 복소수 z는 실수이므로

$x^2+2x+1=0, \quad (x+1)^2=0$

$\therefore x=-1$

02 문제이해 • 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$x^2+xyi+y^2+xyi-5-4i=0$

$(x^2+y^2-5)+(2xy-4)i=0$ ➔ 20% 배점

해결과정 • $x^2+y^2-5,\ 2xy-4$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2-5=0,\ 2xy-4=0$

$x^2+y^2=5,\ xy=2$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore (x+y)^2=x^2+y^2+2xy$

$=5+2\cdot2$

$=9$

$\therefore x+y=3\ (\because x>0,\ y>0)$ ➔ 40% 배점

답 3

03 전략 복소수 x의 분모를 실수화한 식의 우변에 순허수만 남도록 식을 변형한 후, 양변을 제곱하여 x에 대한 이차방정식을 얻는다.

풀이 $x=\dfrac{3}{1+i}=\dfrac{3(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{3-3i}{2}$이므로

$2x=3-3i, \quad 2x-3=-3i$

양변을 제곱하면

$4x^2-12x+9=-9$

$\therefore 4x^2-12x+18=0$

$\therefore 4x^2-12x+20=(4x^2-12x+18)+2$

$=2$ 답 2

04 전략 k가 자연수일 때, $i^{4k}=1,\ i^3=-i$임을 이용한다.

풀이 ① $i^7=i^4\cdot i^3=i^3=-i$

② $i^{15}=(i^4)^3\cdot i^3=i^3=-i$

③ $i^{23}=(i^4)^5\cdot i^3=i^3=-i$

④ $i^{37}=(i^4)^9\cdot i=i$

⑤ $i^{43}=(i^4)^{10}\cdot i^3=i^3=-i$

답 ④

05 전략 괄호 안의 식을 간단히 한 후 복소수의 거듭제곱을 계산한다.

풀이 $\dfrac{-1+i}{1+i}=\dfrac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}=i^{2n+1}=(i^2)^n\cdot i$

$=(-1)^n\cdot i$

그런데 n이 홀수인 자연수이므로 $(-1)^n=-1$

$\therefore \left(\dfrac{-1+i}{1+i}\right)^{2n+1}=-i$

답 $-i$

06 전략 켤레복소수의 성질을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})$

$\alpha=5+2i$에서 $\overline{\alpha}=5-2i$이므로

$\alpha+\overline{\alpha}=(5+2i)+(5-2i)=10$

$\alpha\overline{\alpha}=(5+2i)(5-2i)=29$

$\therefore \alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})=290$

답 290

07 해결과정 • $\dfrac{2-2\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$

$=\dfrac{2-2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$ ➜ 20% 배점

$=\dfrac{(2-2\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{-4-4\sqrt{3}i}{4}$

$=-1-\sqrt{3}i$ ➜ 50% 배점

답구하기 • 따라서 $a=-1$, $b=-\sqrt{3}$이므로

$a^2+b^2=1+3=4$ ➜ 30% 배점

답 4

08 전략 $a>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$임을 이용한다.

풀이 ① $\sqrt{-3}\sqrt{5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}i=\sqrt{-15}$

② $\sqrt{-3}\sqrt{-5}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{5}i=\sqrt{15}i^2=-\sqrt{15}$

③ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}i=\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}i^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$

$=-\sqrt{\dfrac{3}{5}}i=-\sqrt{-\dfrac{3}{5}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{\sqrt{3}i}{\sqrt{5}i}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

답 ④

09 전략 주어진 식의 분모를 각각 실수화한다.

풀이 $\dfrac{a+bi}{b-ai}=\dfrac{(a+bi)(b+ai)}{(b-ai)(b+ai)}=\dfrac{(a^2+b^2)i}{b^2+a^2}=i$

$\dfrac{b+ai}{a-bi}=\dfrac{(b+ai)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)}=\dfrac{(a^2+b^2)i}{a^2+b^2}=i$

$\therefore \dfrac{a+bi}{b-ai}+\dfrac{b+ai}{a-bi}=2i$

답 ④

10 전략 $\alpha=a+bi$(a, b는 실수)라 하고 보기가 옳은지 확인하거나 보기가 성립하지 않는 예를 찾는다.

풀이 ① $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\alpha}$에서

$a+bi=a-bi$, $\quad 2bi=0$

$\therefore b=0$

따라서 α는 실수이다.

② $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\beta}$에서

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=a^2+b^2$

따라서 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.

③ [반례] $\alpha=1$, $\beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=0$이지만 $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$이다.

④ $\alpha=a+bi$(a, b는 실수)라 하면 $\alpha=\overline{\beta}$에서

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha\beta=a^2+b^2$

$\alpha\beta=0$이면 $a^2+b^2=0$이므로

$a=0$, $b=0$

$\therefore \alpha=0$, $\beta=0$

⑤ $\alpha=a+bi$(a, b는 실수)라 하면

$\beta=\overline{\alpha}=a-bi$

$\therefore \alpha+\beta=2a$

$\alpha+\beta=0$이면 $2a=0$이므로 $\quad a=0$

그런데 $\alpha\neq0$이므로 $\quad b\neq0$

$\therefore \alpha=bi$, $\beta=-bi$ $(b\neq0)$

따라서 α, β는 순허수이다.

답 ③

11 해결과정 • $z=(n-1+2i)^2$

$=n^2+1-4-2n-4i+4ni$

$=(n^2-2n-3)+(4n-4)i$

➜ 30% 배점

답구하기 • z^2이 음의 실수이면 z는 순허수이므로

$n^2-2n-3=0$, $4n-4\neq0$ ➜ 30% 배점

$(n+1)(n-3)=0$, $n\neq1$

$\therefore n=3$ ($\because n>0$) ➜ 40% 배점

답 3

12 전략 $\alpha=1+2i$, $\beta=a+bi$를 대입하여 계산한다.

풀이 $(1+2i)◎(a+bi)=0$에서

$(1+2i)+(a+bi)+(1+2i)(a+bi)=0$

$(1+2a-2b)+(2+2a+2b)i=0$

$1+2a-2b$, $2+2a+2b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$1+2a-2b=0,\ 2+2a+2b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{3}{4},\ b=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore ab=\frac{3}{16}$$

답 $\frac{3}{16}$

13 전략 $n=4k-3$, $4k-2$, $4k-1$, $4k$(k는 자연수)일 때, 주어진 등식의 좌변의 값을 구한다.

풀이 $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$

$$=-i+1+i-1+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$$

$$=\begin{cases} -i & (n=4k-3) \\ 1-i & (n=4k-2) \\ 1 & (n=4k-1) \\ 0 & (n=4k) \end{cases} \ (k\text{는 자연수})$$

주어진 등식을 만족시키려면 $n=4k-2$이어야 한다.
$1\le n\le 100$이므로

$$1\le 4k-2\le 100,\qquad 3\le 4k\le 102$$

$$\therefore \frac{3}{4}\le k\le \frac{51}{2}$$

따라서 자연수 k는 1, 2, …, 25이므로 구하는 n의 개수는 25이다.

답 25

14 해결과정 • $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=2+i$이므로

$z_1-z_2=\overline{2+i}=2-i$ ➔ 30% 배점

또 $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=5-2i$이므로

$z_1z_2=\overline{5-2i}=5+2i$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore (z_1-2)(z_2+2)$

$=z_1z_2+2(z_1-z_2)-4$

$=(5+2i)+2(2-i)-4$

$=5$ ➔ 40% 배점

답 5

15 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 조건 (가)에 의하여 $(a+bi)+(1-2i)$, 즉 $(a+1)+(b-2)i$는 양의 실수이므로

$$a+1>0,\ b-2=0$$

$$\therefore a>-1,\ b=2$$

조건 (나)에 의하여

$$(a+bi)(a-bi)=7,\qquad a^2+b^2=7$$

이때 $b=2$이므로

$$a^2+4=7,\qquad a^2=3$$

$$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>-1)$$

따라서 $z=\sqrt{3}+2i$이므로

$$\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}+2i)+(\sqrt{3}-2i)\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

답 ③

16 전략 두 등식에서 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $\sqrt{a+3}\sqrt{a-2}=-\sqrt{(a+3)(a-2)}$이므로

$a+3<0$, $a-2<0$ 또는 $a+3=0$
또는 $a-2=0$

$a<-3$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=2$

$\therefore a\le -3$ 또는 $a=2$ …… ㉠

또 $\frac{\sqrt{a+5}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{a+5}{a}}$이므로

$a+5>0$, $a<0$ 또는 $a+5=0$, $a\ne 0$

$-5<a<0$ 또는 $a=-5$, $a\ne 0$

$\therefore -5\le a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -5\le a\le -3$
따라서 구하는 정수 a는 -5, -4, -3의 3개이다.

답 ②

17 전략 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$, $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$임을 이용한다.

풀이 a_1, a_2, a_3, …, a_{10}은 모두 양수이므로

$\sqrt{-a_1}\sqrt{-a_2}\sqrt{-a_3}\cdots\sqrt{-a_{10}}$

$=\sqrt{a_1}i\cdot\sqrt{a_2}i\cdot\sqrt{a_3}i\cdot\cdots\cdot\sqrt{a_{10}}i$

$=(\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}\cdots\sqrt{a_{10}})i^{10}$

$=\sqrt{a_1a_2a_3\cdots a_{10}}\ (i^4)^2\cdot i^2$

$=\sqrt{100}\cdot(-1)$

$=-10$

답 -10

18 (전략) $x\neq0,\ y\neq0$이고 $\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$이면 $x<0,\ y>0$임을 이용한다.

(풀이) 조건 (가)에 의하여

$a<0,\ b>0$

조건 (나)에 의하여

$a+b=0,\ a+c-1=0$

즉 $b=-a,\ c=1-a$이므로

$b=c-1 \quad \therefore b<c$

$\therefore a<b<c$

답 ①

Remark

실수 $x,\ y$에 대하여 $|x|+|y|=0$이면

$x=0,\ y=0$

19 (전략) 근호 안의 식의 부호를 조사하여 제곱근의 성질을 이용한다.

(풀이) ㄱ. $xy<0$이면

$x>0,\ y<0$ 또는 $x<0,\ y>0$

(i) $x>0,\ y<0$이면

$\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{x}\sqrt{-y}i=\sqrt{-xy}i=\sqrt{xy}$

(ii) $x<0,\ y>0$이면

$\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{-x}i\cdot\sqrt{y}=\sqrt{-xy}i=\sqrt{xy}$

(i), (ii)에서 $xy<0$이면 $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$이다.

ㄴ. $x<y<0$이므로

$x<0,\ -x>0,\ x-y<0,\ y-x>0$

$$\therefore \frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}+\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y-x}{x-y}}-\sqrt{\frac{-x}{x}}$$
$$=-\sqrt{-1}-\sqrt{-1}$$
$$=-i-i=-2i$$

ㄷ. $\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$이므로 $\quad x<0,\ y<0$

$\therefore \sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}=-\sqrt{x^2}+\sqrt{-y}i=x+\sqrt{-y}i$

따라서 $\sqrt{x}\sqrt{x}+\sqrt{y}$의 켤레복소수는

$x-\sqrt{-y}i=x-\sqrt{y}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

20 (전략) 보기의 식을 제곱한 식의 값을 구한 후 그 제곱근을 구한다.

(풀이) ㄱ. $(\alpha\beta)^2=\alpha^2\beta^2=2i\cdot(-2i)=4$이므로

$\alpha\beta=\pm2$

따라서 $\alpha\beta$는 실수이다.

ㄴ. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=2\alpha\beta$

ㄱ에서 $\alpha\beta=\pm2$이므로

$(\alpha+\beta)^2=\pm4$

이때 $(\alpha+\beta)^2=-4$이면 $\quad \alpha+\beta=\pm2i$

따라서 $\alpha+\beta$는 실수가 아니다.

ㄷ. $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^2=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}=\dfrac{2\alpha\beta}{-2\alpha\beta}=-1$

$\therefore \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\pm i$

따라서 $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$는 실수가 아니다.

이상에서 항상 실수인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

21 (전략) α와 β 사이의 관계식을 구하여 $\alpha^m\cdot\beta^n$을 α에 대한 거듭제곱으로 나타낸다.

(풀이) $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$에서

$\alpha^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\beta$

$\therefore \alpha^m\cdot\beta^n=\alpha^m\cdot(\alpha^2)^n=\alpha^{m+2n}$

한편 $\alpha^3=\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^3=i$이므로

$\alpha^{12}=(\alpha^3)^4=i^4=1$

$\therefore \alpha^3=\alpha^{12}\cdot\alpha^3=\alpha^{24}\cdot\alpha^3=\alpha^{36}\cdot\alpha^3=\cdots=i$

따라서 $m+2n$이 될 수 있는 값은

$3,\ 15,\ 27,\ 39,\ \cdots$

그런데 $m,\ n$은 각각 10 이하의 자연수이므로

$m+2n\leq30$

따라서 구하는 최댓값은 27이다.

답 27

22 (전략) $i^n=i^{n+4m}$ ($m,\ n$은 자연수)임을 이용한다.

(풀이) ㄱ. $f(1)f(2)=\dfrac{i}{1+i}\cdot\dfrac{i^2}{1+i}$

$=\dfrac{-i}{2i}=-\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $i^n=i^{n+4k}$이므로

$f(n)=f(n+4k)$

$\therefore f(100-2k)=f(100+2k)$

ㄷ. $f(n)f(n+1)=\dfrac{i^n}{1+i}\cdot\dfrac{i^{n+1}}{1+i}=\dfrac{i^{2n+1}}{2i}$

$=\dfrac{(i^2)^n\cdot i}{2i}=\dfrac{(-1)^n}{2}$

$\therefore f(1)f(2)+f(2)f(3)+f(3)f(4)$
$+\cdots+f(99)f(100)$
$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

23 해결과정 • $m=2^{10}$의 양의 약수는

$1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}$

이 중 $2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}$은 모두 4의 배수이므로

$x_m=i+i^2+i^{2^2}+i^{2^3}+\cdots+i^{2^{10}}$
$=i-1+1+1+\cdots+1$
$=i+8$ ➔ 40% 배점

$n=5^{10}$의 양의 약수는

$1, 5, 5^2, 5^3, \cdots, 5^{10}$

각각을 4로 나눈 나머지가 모두 1이므로

$x_n=i+i^5+i^{5^2}+i^{5^3}+\cdots+i^{5^{10}}$
$=i+i+i+i+\cdots+i$
$=11i$ ➔ 40% 배점

$\therefore x_m+x_n=(i+8)+11i=8+12i$ ➔ 10% 배점

답구하기 • 따라서 $p=8,\ q=12$이므로

$p+q=20$ ➔ 10% 배점

답 20

24 전략 주어진 수들의 곱이 -32인 경우를 나누어 n의 값을 구한다.

풀이 주사위를 던져서 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.
또 $(2i)^2=-4,\ (1+i)^2\cdot 2i=-4,\ (1+i)^4=-4$이고 $32=2^5$이므로 $n\geq 5$이어야 한다.

(i) 2가 3번, $2i$가 2번 나오는 경우
$2^3\cdot(2i)^2=8\cdot(-4)=-32$
➡ $n=5$

(ii) 2가 3번, $1+i$가 2번, $2i$가 1번 나오는 경우
$2^3\cdot(1+i)^2\cdot 2i=8\cdot(-4)=-32$
➡ $n=6$

(iii) 2가 3번, $1+i$가 4번 나오는 경우
$2^3\cdot(1+i)^4=8\cdot(-4)=-32$
➡ $n=7$

이상에서 가능한 n의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은 18이다.

답 18

05 이차방정식

유제

본책 113~140쪽

033-1 $a^2x+1=x+a$에서
$(a^2-1)x=a-1$
$(a+1)(a-1)x=a-1$
이 방정식의 해가 무수히 많으려면
$(a+1)(a-1)=0,\ a-1=0$
$\therefore a=1$

답 1

033-2 $4k(x-1)=x+2$에서
$(4k-1)x=4k+2$
이 방정식의 해가 없으려면
$4k-1=0,\ 4k+2\neq 0$
$\therefore k=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

034-1 (1) $x-1=0,\ x-5=0$에서
$x=1,\ x=5$

(i) $x<1$일 때,
$x-1<0,\ x-5<0$이므로
$-(x-1)-(x-5)=x$
$\therefore x=2$
그런데 $x<1$이므로 $x=2$는 해가 아니다.

(ii) $1\leq x<5$일 때,
$x-1\geq 0,\ x-5<0$이므로
$(x-1)-(x-5)=x$
$\therefore x=4$

(iii) $x\geq 5$일 때,
$x-1>0,\ x-5\geq 0$이므로
$(x-1)+(x-5)=x$
$\therefore x=6$

이상에서 주어진 방정식의 해는
$x=4$ 또는 $x=6$

(2) $x+3=0,\ x-3=0$에서
$x=-3,\ x=3$

(i) $x<-3$일 때,
$x+3<0,\ x-3<0$이므로
$-(x+3)+2(x-3)=-1$
$\therefore x=8$
그런데 $x<-3$이므로 $x=8$은 해가 아니다.

(ii) $-3 \le x < 3$일 때,

$x+3 \ge 0,\ x-3<0$이므로

$(x+3)+2(x-3)=-1$

$\therefore x=\frac{2}{3}$

(iii) $x \ge 3$일 때,

$x+3>0,\ x-3 \ge 0$이므로

$(x+3)-2(x-3)=-1$

$\therefore x=10$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=10$

답 풀이 참조

034-2 $\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$이므로 주어진 방정식은

$|x-2|=3-|x-3|$

$x-2=0,\ x-3=0$에서

$x=2,\ x=3$

(i) $x<2$일 때,

$x-2<0, x-3<0$이므로

$-(x-2)=3+(x-3)$

$\therefore x=1$

(ii) $2 \le x < 3$일 때,

$x-2 \ge 0, x-3<0$이므로

$x-2=3+(x-3)$

따라서 $0 \cdot x=2$이므로 해가 없다.

(iii) $x \ge 3$일 때,

$x-2>0, x-3 \ge 0$이므로

$x-2=3-(x-3)$

$\therefore x=4$

이상에서 주어진 방정식의 해는

$x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 근의 합은 5이다.

답 5

035-1 $x^2-mx-10m=2$에 $x=-3$을 대입하면

$9+3m-10m=2$

$7m=7 \quad \therefore m=1$

$x^2-mx-10m=2$에 $m=1$을 대입하면

$x^2-x-12=0, \quad (x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

따라서 다른 한 근은 4이다. 답 4

035-2 $(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$에 $x=-1$을 대입하면

$(a-3)-1-(a^2-10)=0$

$a^2-a-6=0, \quad (a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

그런데 $a-3\ne 0$, 즉 $a\ne 3$이므로

$a=-2$

$(a-3)x^2+x-(a^2-10)=0$에 $a=-2$를 대입하면

$5x^2-x-6=0, \quad (x+1)(5x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{6}{5}$

따라서 다른 한 근은 $\frac{6}{5}$이므로

$b=\frac{6}{5}$

$\therefore a+b=-\frac{4}{5}$ 답 $-\frac{4}{5}$

036-1 (1) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}$를 곱하면

$2x^2+\sqrt{2}(4-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)=0$

$2x^2+(4\sqrt{2}-2)x+4-2\sqrt{2}=0$

$\therefore x^2+(2\sqrt{2}-1)x+2-\sqrt{2}=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-(2\sqrt{2}-1)\pm\sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2-4(2-\sqrt{2})}}{2}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{2}\pm 1}{2}$$

$\therefore x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

(2) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2-\sqrt{3}(6-\sqrt{3})x+\sqrt{3}(3\sqrt{3}-3)=0$

$3x^2-(6\sqrt{3}-3)x+9-3\sqrt{3}=0$

$\therefore x^2-(2\sqrt{3}-1)x+3-\sqrt{3}=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{2\sqrt{3}-1\pm\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2-4(3-\sqrt{3})}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}-1\pm 1}{2}$$

$\therefore x=\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}-1$

(3) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2+2ix+3i^2=0, \quad -x^2+2ix-3=0$

$\therefore x^2-2ix+3=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=i\pm\sqrt{i^2-3}=i\pm 2i$

$\therefore x=3i$ 또는 $x=-i$

(4) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$$i^2x^2-i(3i-2)x-3i-i^2=0$$
$$-x^2+(3+2i)x-3i+1=0$$
$$\therefore x^2-(3+2i)x+3i-1=0$$

따라서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{3+2i\pm\sqrt{(3+2i)^2-4(3i-1)}}{2}$$
$$=\frac{3+2i\pm3}{2}$$

$\therefore x=3+i$ 또는 $x=i$ 답 풀이 참조

037-1 (1) (i) $x<0$일 때,

$x^2-3x-10=0$이므로 $(x+2)(x-5)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $x=-2$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2+3x-10=0$이므로 $(x+5)(x-2)=0$

$\therefore x=-5$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-2$ 또는 $x=2$

(2) (i) $x<1$일 때,

$x^2+(x-1)+x-3=0$이므로

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1^2-(-4)}=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x<1$이므로 $x=-1-\sqrt{5}$

(ii) $x\geq1$일 때,

$x^2-(x-1)+x-3=0$이므로

$x^2-2=0$ $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\geq1$이므로 $x=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

답 풀이 참조

038-1 (i) $3\leq x<4$일 때, $[x]=3$이므로

$x^2-15=0$ $\therefore x=\pm\sqrt{15}$

그런데 $3\leq x<4$이므로 $x=\sqrt{15}$

(ii) $4\leq x<5$일 때, $[x]=4$이므로

$x^2-16=0$ $\therefore x=\pm4$

그런데 $4\leq x<5$이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=\sqrt{15}$ 또는 $x=4$ 답 $x=\sqrt{15}$ 또는 $x=4$

038-2 $[x]=t$라 하면 주어진 방정식은

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

(i) $t=1$, 즉 $[x]=1$일 때, $1\leq x<2$

(ii) $t=5$, 즉 $[x]=5$일 때, $5\leq x<6$

(i), (ii)에서

$1\leq x<2$ 또는 $5\leq x<6$

답 $1\leq x<2$ 또는 $5\leq x<6$

039-1 수영장 바닥의 세로의 길이를 xm라 하면 가로의 길이는 $(x-10)$m이므로

$x(x-10)=264$, $x^2-10x-264=0$

$(x+12)(x-22)=0$

$\therefore x=-12$ 또는 $x=22$

그런데 $x>10$이므로 $x=22$

따라서 수영장 바닥의 세로의 길이는 22 m이고, 가로의 길이는 12 m이므로 수영장 바닥의 둘레의 길이는

$2\cdot(12+22)=68$(m)

답 68 m

039-2 현재 아들의 나이를 x살이라 하면 아버지의 나이는 $(x+30)$살이다.

5년 후 아들과 아버지의 나이는 각각 $(x+5)$살, $(x+35)$살이므로

$(x+5)^2=2(x+35)+20$

$x^2+8x-65=0$, $(x+13)(x-5)=0$

$\therefore x=-13$ 또는 $x=5$

그런데 $x>0$이므로 $x=5$

따라서 5년 후 아들의 나이는 10살이다.

답 10살

040-1 $ax^2-2x-1=0$이 x에 대한 이차방정식이므로

$a\neq0$

이차방정식 $ax^2-2x-1=0$이 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a\cdot(-1)\geq0$

$\therefore a\geq-1$

그런데 $a\neq0$이므로

$-1\leq a<0$ 또는 $a>0$

답 $-1\leq a<0$ 또는 $a>0$

040-2 $x^2+2(k+a)x+k^2+a^2+b-2=0$이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+a^2+b-2)=0$$

$$\therefore 2ak-b+2=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a=0,\ -b+2=0$$

$$\therefore a=0,\ b=2$$

답 $a=0,\ b=2$

Remark 항등식의 성질

$ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면
$a=b=0$

041-1 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=6$$

(1) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$
$=4^2-3\cdot6=-2$

(3) $(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$
$=6-2\cdot4+4=2$

(4) $\frac{\alpha}{\alpha-1}+\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{\alpha(\beta-1)+\beta(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$
$=\frac{2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$
$=\frac{2\cdot6-4}{6-4+1}$
$=\frac{8}{3}$

(5) $\frac{\beta}{\alpha+1}+\frac{\alpha}{\beta+1}=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$
$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$
$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$
$=\frac{4^2-2\cdot6+4}{6+4+1}$
$=\frac{8}{11}$

(6) $\frac{\beta}{\alpha^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^2}$
$=\frac{4^3-3\cdot6\cdot4}{6^2}=-\frac{2}{9}$

답 풀이 참조

041-2 이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$$

$\therefore (\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)$
$=(\alpha\beta)^2-\alpha^2\beta+\alpha^2-\alpha\beta^2+\alpha\beta-\alpha+\beta^2-\beta+1$
$=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)+(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)$
$+1$
$=(\alpha\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta-1)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$-(\alpha+\beta)+1$
$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot1+2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2+1$
$=\frac{19}{4}$

답 $\frac{19}{4}$

042-1 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-b$ …… ㉠

또 이차방정식 $x^2-(a+2)x+10=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a+2,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$b=-2,\ ab=-10$$

이므로 $-2a=-10$ $\therefore a=5$

$\therefore a-b=7$

답 7

043-1 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+5$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+5)=m$ …… ㉠
$\alpha(\alpha+5)=m-5$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=\frac{m-5}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m+5}{2}=m-5$$

$$m^2-4m-5=0,\quad (m+1)(m-5)=0$$

$\therefore m=-1\ (\because m<0)$

답 -1

043-2 주어진 이차방정식의 두 근을 α, 3α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha=2k$ …… ㉠
$\alpha\cdot3\alpha=k^2-k$ …… ㉡

㉠에서 $a=\frac{1}{2}k$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$\frac{1}{2}k\cdot\frac{3}{2}k=k^2-k, \qquad k^2-4k=0$$

$$k(k-4)=0 \qquad \therefore k=4\ (\because k\neq0)$$

답 4

044-1 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=1$$

두 근 $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$의 합과 곱을 구하면

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)&=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\\&=\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\\&=6+6\\&=12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)&=\alpha\beta+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta}\\&=\alpha\beta+\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{\alpha\beta}\\&=\alpha\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1}{\alpha\beta}\\&=1+6^2-2\cdot1+1\\&=36\end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-12x+36=0$$

답 $x^2-12x+36=0$

045-1 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이고 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-a,$$

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=b$$

$$\therefore a=-4,\ b=1$$

답 $a=-4$, $b=1$

045-2 $\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$

즉 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-i)+(1+i)=-a,\ (1-i)(1+i)=b$$

$$\therefore a=-2,\ b=2$$

따라서 이차방정식 $x^2+bx+a=0$, 즉 $x^2+2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-2$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8$$

답 8

046-1 이차방정식 $x^2-(3m+5)x+2m-8=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta=2m-8<0 \qquad \therefore m<4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$$\alpha+\beta=3m+5>0 \qquad \therefore m>-\frac{5}{3} \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 m의 값의 범위는

$$-\frac{5}{3}<m<4$$

따라서 구하는 정수 m의 최댓값은 3이다. 답 3

046-2 이차방정식 $x^2-(a^2-a-12)x-a+1=0$의 두 근을 α, β라 하면 α, β의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta=-a+1<0 \qquad \therefore a>1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 두 근의 절댓값이 서로 같으므로

$$\alpha+\beta=a^2-a-12=0$$

$$(a+3)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=4$$

㉠에서 $a>1$이므로 $a=4$

답 4

중단원 연습 문제

본책 141~145쪽

01 $a=-3$, $b=-1$ **02** ③ **03** $2<k<4$
04 4 **05** ① **06** $\frac{1}{3}$, 3
07 $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$ **08** ③ **09** ③ **10** ①
11 ① **12** $\frac{1}{2}ab$ **13** 2 **14** 15 **15** 9
16 1 **17** $2\pm\sqrt{5}$ **18** $3+\sqrt{11}$, $3-\sqrt{11}$
19 $x^2-16x+48=0$ **20** 19 **21** 62 **22** ④
23 ② **24** ④

01 (전략) $x=1$을 주어진 방정식에 대입한다.

(풀이) $x=1$을 주어진 방정식에 각각 대입하면

$1+2+a=0,\ 2-b+a=0$

$\therefore a=-3,\ b=-1$

답 $a=-3,\ b=-1$

02 (전략) x^2의 계수를 실수화한 후 근의 공식을 이용하여 주어진 이차방정식을 푼다.

(풀이) 주어진 방정식의 양변에 i를 곱하면

$i^2x^2-4ix+4i^2=0,\qquad -x^2-4ix-4=0$

$\therefore x^2+4ix+4=0$

따라서 근의 공식에 의하여

$x=-2i\pm\sqrt{(2i)^2-4}=(-2\pm2\sqrt{2})i$

$a,\ b$가 유리수이므로 $\quad a=-2,\ b=\pm2$

$\therefore a^2+b^2=8$

답 ③

03 (전략) 계수가 실수인 이차방정식의 근의 판별은 판별식을 이용한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2+6x+2k+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$\frac{D_1}{4}=3^2-(2k+1)>0$

$\therefore k<4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $x^2+2x+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로

$\frac{D_2}{4}=1^2-(k-1)<0$

$\therefore k>2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 2<k<4$

답 $2<k<4$

04 해결과정 • 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 이 이차방정식의 두 근이 서로 같으므로

$\frac{D}{4}=(a+2i)^2+(b-4i)=0$

$a^2+4ai-4+b-4i=0$

$(a^2+b-4)+(4a-4)i=0$ ➔ 40% 배점

$a,\ b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+b-4=0,\ 4a-4=0$

$\therefore a=1,\ b=3$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=4$ ➔ 20% 배점

답 4

05 (전략) 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$의 값을 구한다.

(풀이) 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)}{-1}=-3$$

답 ①

06 (전략) 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근을 $m\alpha,\ n\alpha$로 놓고 근과 계수의 관계를 이용한다.

(풀이) 주어진 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ \alpha$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+\alpha=2(m-1) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$3\alpha\cdot\alpha=m \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\alpha=\frac{m-1}{2}$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$3\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}=m$

$3m^2-10m+3=0$

$(3m-1)(m-3)=0$

$\therefore m=\frac{1}{3}$ 또는 $m=3$

답 $\frac{1}{3},\ 3$

07 (전략) 계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 허수이므로 다른 한 근은 켤레근임을 이용한다.

(풀이) 주어진 이차방정식에서 $a,\ b$가 실수이고 한 근이 $1-i$이므로 다른 한 근은 $1+i$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)=-\frac{1}{a},\ (1+i)(1-i)=\frac{b}{a}$

$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-1$

답 $a=-\frac{1}{2},\ b=-1$

08 (전략) 각 경우에 대하여 이차방정식의 두 근의 합과 곱의 부호를 조사한다.

(풀이) $b^2-4ac>0$이므로 이차방정식

$ax^2+bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하자.

ㄱ. $a>0$, $b>0$, $c>0$이면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}<0,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}>0$$

이므로 두 근은 모두 음수이다.

ㄴ. $a>0$, $b<0$, $c<0$이면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}>0,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}<0$$

이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

ㄷ. $a<0$, $b=0$, $c>0$이면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=0,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}<0$$

이므로 두 근의 절댓값은 같고 부호는 서로 다르다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

09 전략 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 a, b의 부호를 구한다.

풀이 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$ $(a\neq0,\ b\neq0)$이므로

$a<0$, $b>0$

ㄱ. $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=b^2-4a>0$$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 이차방정식이 허근을 가지므로

$$\frac{D_2}{4}=(-a)^2-b<0$$

$x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$$D_3=a^2-4b<a^2-b<0\ (\because\ b>0)$$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 허근을 갖는다.

ㄷ. $ax^2+bx+ab^2=0$의 판별식을 D_4라 하면 이 이차방정식이 중근을 가지므로

$$D_4=b^2-4a^2b^2=0$$

$$b^2(1-4a^2)=0$$

$b\neq0$이므로

$$1-4a^2=0,\quad a^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}\ (\because\ a<0)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

10 전략 실근을 α라 하고, 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식의 실근을 α라 하면

$$\alpha^2+2(a-i)\alpha+(3+2i)=0$$

$$(\alpha^2+2a\alpha+3)+(2-2\alpha)i=0$$

a, α가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha^2+2a\alpha+3=0,\ 2-2\alpha=0$$

$$\therefore \alpha=1,\ a=-2$$

답 ①

11 전략 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 (판별식)>0임을 이용한다.

풀이 주어진 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$$D=a^2-4b>0$$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$

의 5개이다.

답 ①

12 문제이해 • $2ax-b(x^2-1)+c(x^2+1)$

$=(c-b)x^2+2ax+c+b$ ▸ 20% 배점

해결과정 • 이 식이 완전제곱식이므로 이차방정식 $(c-b)x^2+2ax+c+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(c-b)(c+b)=0$$ ▸ 30% 배점

$$a^2-c^2+b^2=0$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2$$ ▸ 20% 배점

답구하기 • 따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로 그 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다. ▸ 30% 배점

답 $\frac{1}{2}ab$

13 전략 $|k|=1$이면 $k=\pm1$임을 이용하여 주어진 방정식의 절댓값 기호를 없앤다.

풀이 $|x^2+(a-2)x-2|=1$에서

$x^2+(a-2)x-2=1$

또는 $x^2+(a-2)x-2=-1$

$\therefore x^2+(a-2)x-3=0$

또는 $x^2+(a-2)x-1=0$

이때 주어진 방정식의 네 근의 합은 두 이차방정식의 모든 근의 합과 같다.

(i) $x^2+(a-2)x-3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합})=-a+2$$

(ii) $x^2+(a-2)x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합})=-a+2$$

(i), (ii)에서 두 이차방정식의 모든 근의 합이 0이 되어야 하므로

$$(-a+2)+(-a+2)=0$$
$$-2a+4=0$$
$$\therefore a=2$$

답 2

Remark

두 이차방정식

$$x^2+(a-2)x-3=0,\ x^2+(a-2)x-1=0$$

의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$$D_1=(a-2)^2+12>0,\ D_2=(a-2)^2+4>0$$

이므로 주어진 방정식은 각각 서로 다른 2개의 실근을 갖는다.

14 전략 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하고 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 구한다.

풀이 주어진 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-\frac{k}{3}$$

또 $|\alpha|+|\beta|=6$이므로 양변을 제곱하면

$$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=36$$
$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=36$$
$$4^2-2\cdot\left(-\frac{k}{3}\right)+2\left|-\frac{k}{3}\right|=36$$
$$\frac{2}{3}k+\frac{2}{3}|k|=20$$
$$k+|k|=30 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$k\le0$이면 $k+|k|=0$이므로 ㉠이 성립하지 않는다.

따라서 $k>0$이므로 ㉠에서 $\quad 2k=30$

$$\therefore k=15$$

답 15

15 전략 각각의 방정식에서 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 이차방정식 $x^2-(2a+3)x+4b-4=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2+\beta^2=2a+3,\ \alpha^2\beta^2=4b-4$$
$$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a+3,\ (\alpha\beta)^2=4b-4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2+2b=2a+3,\ b^2=4b-4$$

$b^2=4b-4$에서

$$b^2-4b+4=0, \qquad (b-2)^2=0$$
$$\therefore b=2$$

$a^2+2b=2a+3$에서

$$a^2-2a+1=0, \qquad (a-1)^2=0$$
$$\therefore a=1$$
$$\therefore a^3+b^3=9$$

답 9

16 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 m에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식 $x^2-(m-3)x+m-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m-3,\ \alpha\beta=m-2$$

그런데 $\alpha\beta<0$이므로

$$m-2<0 \qquad \therefore m<2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$이므로

$$6=(m-3)^2-2(m-2), \qquad m^2-8m+7=0$$
$$(m-1)(m-7)=0$$
$$\therefore m=1 \text{ 또는 } m=7$$

그런데 ㉠에서 $m<2$이므로 $\quad m=1$

답 1

17 문제이해 • $x^2-px+p=0$의 두 근을 α, α^2이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\alpha^2=p \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\alpha\cdot\alpha^2=p \qquad \cdots\cdots ㉡$$

▶ 30% 배점

해결과정 • ㉠, ㉡에서

$$\alpha+\alpha^2=\alpha^3, \qquad \alpha^3-\alpha^2-\alpha=0$$
$$\alpha(\alpha^2-\alpha-1)=0$$

그런데 $p\ne0$에서 $\alpha\ne0$이므로

$$\alpha^2-\alpha-1=0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 근의 공식에 의하여

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

▶ 40% 배점

05 이차방정식

답구하기 • 이때 ㉢에서 $\alpha^2=\alpha+1$이므로

$$p=\alpha+\alpha^2=\alpha+(\alpha+1)=2\alpha+1$$
$$=2\cdot\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+1=2\pm\sqrt{5}$$ ➜ 30% 배점

답 $2\pm\sqrt{5}$

18 전략 근과 계수의 관계를 이용하여 구하는 두 수를 근으로 갖는 이차방정식을 구한다.

풀이 구하는 두 수를 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=-2$$

근과 계수의 관계에 의하여 α, β는 이차방정식 $x^2-6x-2=0$의 두 근이다.

이 이차방정식을 풀면

$$x=3\pm\sqrt{9+2}=3\pm\sqrt{11}$$

따라서 구하는 두 수는

$$3+\sqrt{11},\ 3-\sqrt{11}$$

답 $3+\sqrt{11}$, $3-\sqrt{11}$

19 전략 $\overline{AP}+\overline{BP}$와 $\overline{AP}\cdot\overline{BP}$의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$의 길이를 두 근으로 갖고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\overline{AP}+\overline{BP})x+\overline{AP}\cdot\overline{BP}=0$$

$\overline{AP}+\overline{BP}=16$이고, 원의 성질에 의하여

$$\overline{AP}\cdot\overline{BP}=\overline{CP}\cdot\overline{DP}=6\cdot8=48$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-16x+48=0$$

답 $x^2-16x+48=0$

Remark 원과 비례

오른쪽 그림에서

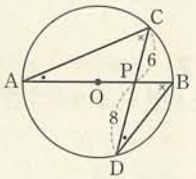
$\triangle PAC \backsim \triangle PDB$ (AA 닮음)

이므로

$\overline{AP}:\overline{DP}=\overline{CP}:\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}\cdot\overline{BP}=\overline{CP}\cdot\overline{DP}$

$=48$



20 문제이해 • 이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서 a, b가 실수이고 한 근이 $2-i$이므로 다른 한 근은 $2+i$이다. ➜ 20% 배점

해결과정 • 따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-i)+(2+i)=-a,\ (2-i)(2+i)=b$$
$$\therefore a=-4,\ b=5$$ ➜ 20% 배점

이차방정식 $x^2-bx+a=0$, 즉 $x^2-5x-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=-4$$ ➜ 20% 배점

답구하기 • $\therefore \dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}$

$$=\frac{\beta(\beta+1)+\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{5^2-2\cdot(-4)+5}{-4+5+1}$$
$$=19$$ ➜ 40% 배점

답 19

21 문제이해 • 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=4n+6,\ \alpha_n\beta_n=n^2-3$$ ➜ 20% 배점

해결과정 • $\therefore \dfrac{1}{\alpha_n+1}+\dfrac{1}{\beta_n+1}$

$$=\frac{\beta_n+1+\alpha_n+1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$$
$$=\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{\alpha_n\beta_n+(\alpha_n+\beta_n)+1}$$
$$=\frac{4n+6+2}{(n^2-3)+(4n+6)+1}$$
$$=\frac{4(n+2)}{(n+2)^2}=\frac{4}{n+2}$$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore$ (주어진 식)

$$=\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\beta_1+1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\beta_2+1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$
$$=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{5}$$
$$=\frac{47}{15}$$ ➜ 30% 배점

따라서 $p=15$, $q=47$이므로

$$p+q=62$$ ➜ 20% 배점

답 62

22 전략 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

풀이 조건 (가)에 의하여 이차방정식 $x^2+ax-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$

조건 (나)에서

$g(\alpha)=\beta=-\alpha-a, g(\beta)=\alpha=-\beta-a$

이므로

$g(\alpha)+\alpha+a=0,\ g(\beta)+\beta+a=0$

따라서 이차방정식 $g(x)+x+a=0$, 즉 $x^2-x+a+b=0$의 두 근은 α, β이다.

두 이차방정식 $x^2+ax-3=0$, $x^2-x+a+b=0$이 일치하므로

$a=-1, a+b=-3$

$\therefore a=-1, b=-2$

$\therefore ab=2$

답 ④

23 전략 조건 (가), (나)를 만족시키는 c, d의 값을 직접 구하고, 근과 계수의 관계를 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 양의 약수가 3개인 것은 소수의 제곱수이다. 이때 조건 (가)에서 $c\leq100$, $d\leq100$이므로 c, d가 될 수 있는 수는

2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 즉 4, 9, 25, 49

한편 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 c와 d이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a=c+d,\ b=cd$

조건 (가)에 의하여 a, b, c, d는 100 이하의 서로 다른 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는

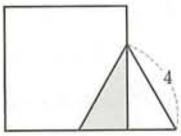
$(4+9,\ 4\cdot9)$, $(4+25,\ 4\cdot25)$

즉 (13, 36), (29, 100)의 2개이다.

답 ②

24 전략 정사각형이 이동하기 시작한 지 x초 후 겹쳐지는 부분의 넓이를 구한다.

풀이 정사각형이 이동하기 시작한 지 2초 후, 두 도형의 모양은 오른쪽 그림과 같으므로 겹치는 부분의 넓이는

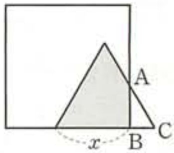


$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2=2\sqrt{3}$

$2\sqrt{3}<\frac{7\sqrt{3}}{2}$이므로

$t_1>2,\ t_2>2$

정사각형이 이동하기 시작한 지 $x(2<x<4)$초 후 두 도형의 모양은 오른쪽 그림과 같으므로



$\overline{BC}=4-x$,

$\overline{AB}=\overline{BC}\tan60°$

$=\sqrt{3}(4-x)$

따라서 겹치는 부분의 넓이가 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$이면

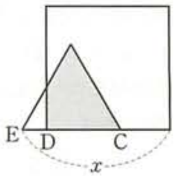
$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4^2-\frac{1}{2}\cdot(4-x)\cdot\sqrt{3}(4-x)=\frac{7\sqrt{3}}{2}$

$x^2-8x+15=0,\quad (x-3)(x-5)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=5$

그런데 $2<x<4$이므로 $\quad x=3$

또 오른쪽 그림과 같은 경우에도 겹치는 부분의 넓이가 $\frac{7\sqrt{3}}{2}$이다.



오른쪽 그림에서 $\overline{DC}=3$이므로

$\overline{ED}=1$

$\therefore x=1+5=6$

$\therefore t_1t_2=3\cdot6=18$

답 ④

Remark 정삼각형의 넓이

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.

06 이차방정식과 이차함수

유제

본책 151~176쪽

047-1 $y=x^2+2ax+a^2+b^2-4b$
$=(x+a)^2+b^2-4b$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(-a,\ b^2-4b)$
이 점이 점 $(2,\ -4)$와 일치하므로
$-a=2,\ b^2-4b=-4$
$-a=2$에서 $a=-2$
$b^2-4b=-4$에서 $b^2-4b+4=0$
$(b-2)^2=0 \quad \therefore b=2$
$\therefore a+b=0$

답 0

다른 풀이 주어진 이차함수는 x^2의 계수가 1이고, 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -4)$이므로
$y=(x-2)^2-4$, 즉 $y=x^2-4x$
따라서 $2a=-4,\ a^2+b^2-4b=0$이므로 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2,\ b=2$
$\therefore a+b=0$

047-2 $y=2x^2-4kx+k^2-5k-7$
$=2(x-k)^2-k^2-5k-7$
이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(k,\ -k^2-5k-7)$
이 점이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로
$-k^2-5k-7=k+2$
$k^2+6k+9=0, \quad (k+3)^2=0$
$\therefore k=-3$

답 -3

048-1 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
(i) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
(ii) 축이 y축의 오른쪽에 있으므로
$-\dfrac{b}{2a}>0 \quad \therefore b<0$
(iii) 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만나므로
$c<0$
ㄱ. $a>0,\ b<0$이므로 $ab<0$
ㄴ. $a>0,\ b^2>0$이므로 $a+b^2>0$
ㄷ. $a>0,\ c<0$이므로 $a-c>0$
ㄹ. $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}a-\dfrac{1}{3}b+c=\dfrac{1}{9}(a-3b+9c)$이고 그래프에서 $x=-\dfrac{1}{3}$일 때 $y<0$, 즉 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)<0$이므로
$\dfrac{1}{9}(a-3b+9c)<0$
$\therefore a-3b+9c<0$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

049-1 이차함수의 식을 $y=a(x-3)^2-2$라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로
$2=4a-2 \quad \therefore a=1$
따라서 이차함수의 식은 $y=(x-3)^2-2$
이 식에 $x=0$을 대입하면
$y=9-2=7$
이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는
$(0,\ 7)$

답 $(0,\ 7)$

049-2 $f(x)=a(x+1)(x-3)$이라 하면
$f(x)=a(x^2-2x-3)$
$=a(x-1)^2-4a$
따라서 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(1,\ -4a)$이므로
$-4a=8 \quad \therefore a=-2$
따라서 $f(x)=-2(x+1)(x-3)$이므로
$f(2)=-2\cdot 3\cdot(-1)=6$

답 6

050-1 이차방정식 $x^2+4x-4a=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot(-4a)=4a+4$
(1) $\dfrac{D}{4}=4a+4>0, \quad 4a>-4$
$\therefore a>-1$
(2) $\dfrac{D}{4}=4a+4=0, \quad 4a=-4$
$\therefore a=-1$
(3) $\dfrac{D}{4}=4a+4<0, \quad 4a<-4$
$\therefore a<-1$

답 (1) $a>-1$ (2) $a=-1$ (3) $a<-1$

050-2 이차함수 $y=x^2-2kx+k+2$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식
$x^2-2kx+k+2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k+2)=0$$
$$k^2-k-2=0, \quad (k+1)(k-2)=0$$
$$\therefore k=2\ (\because k>0)$$

답 2

051-1 이차함수 $y=-2x^2+ax+b$의 그래프와 직선 $y=2x+3$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$-2x^2+ax+b=2x+3$$
즉 $2x^2-(a-2)x-b+3=0$ ······ ㉠

의 실근과 같으므로 -1, 3은 이차방정식 ㉠의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+3=\frac{a-2}{2},\ -1\cdot 3=\frac{-b+3}{2}$$
$$\therefore a=6,\ b=9$$

답 $a=6$, $b=9$

051-2 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식

$$x^2-2x+2=mx+n$$
즉 $x^2-(m+2)x-n+2=0$ ······ ㉠

의 실근과 같다.
이때 m, n이 유리수이므로 이차방정식 ㉠의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=m+2$$
$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-n+2$$
$$\therefore m=0,\ n=3$$

답 $m=0$, $n=3$

Remark 이차방정식의 켤레근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
① a, b, c가 유리수일 때, $p+q\sqrt{m}$이 근이면 $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $\sqrt{m}$은 무리수)
② a, b, c가 실수일 때, $p+qi$가 근이면 $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

052-1 이차함수 $y=x^2+x-a$의 그래프와 직선 $y=5x-1$이 만나지 않으려면 이차방정식

$$x^2+x-a=5x-1,\ \text{즉}\ x^2-4x-a+1=0$$

의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-a+1)<0$$
$$a+3<0 \quad \therefore a<-3$$

답 $a<-3$

052-2 직선 $y=mx$가 이차함수 $y=x^2+x+1$의 그래프와 한 점에서 만나려면 이차방정식

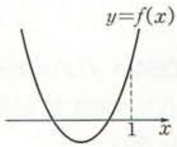
$$mx=x^2+x+1,\ \text{즉}\ x^2+(1-m)x+1=0$$

의 판별식을 D라 할 때,

$$D=(1-m)^2-4=0, \quad m^2-2m-3=0$$
$$(m+1)(m-3)=0$$
$$\therefore m=3\ (\because m>0)$$

답 3

053-1 $f(x)=x^2+x+m-2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

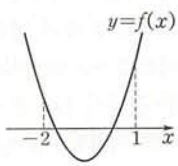


(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$$D=1^2-4(m-2)\ge 0$$
$$\therefore m\le\frac{9}{4}$$
(ii) $f(1)=1+1+m-2>0$
$$\therefore m>0$$
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은
$x=-\frac{1}{2}$이고 $-\frac{1}{2}<1$이다.

이상에서 $0<m\le\frac{9}{4}$

답 $0<m\le\frac{9}{4}$

053-2 $f(x)=2x^2+4x-m$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$$\frac{D}{4}=2^2-2\cdot(-m)\ge 0$$
$$\therefore m\ge -2$$

(ii) $f(-2)=8-8-m>0 \qquad \therefore m<0$

$f(1)=2+4-m>0 \qquad \therefore m<6$

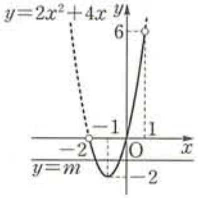
(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이고 $-2<-1<1$이다.

이상에서 $\quad -2\le m<0$

답 $-2\le m<0$

다른 풀이 $2x^2+4x-m=0$에서 $\qquad 2x^2+4x=m$

주어진 방정식의 두 근이 모두 -2와 1 사이에 있으므로 $-2<x<1$에서 두 함수 $y=2x^2+4x$, $y=m$의 그래프가 서로 접하거나 두 점에서 만나야 한다.

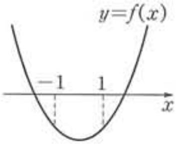


따라서 위의 그림에서

$-2\le m<0$

054-1 $f(x)=x^2+3(a+1)x-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 1보다 크고, 다른 한 근은 -1보다 작다.

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-1)=1-3(a+1)-4<0$

$\therefore a>-2$

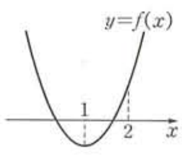
(ii) $f(1)=1+3(a+1)-4<0$

$\therefore a<0$

(i), (ii)에서 $\quad -2<a<0$

답 $-2<a<0$

054-2 $f(x)=x^2-2x+m$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=1$이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근만이 1과 2 사이에 있으려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 위의 그림과 같아야 한다.



(i) $f(1)=1-2+m<0 \qquad \therefore m<1$

(ii) $f(2)=4-4+m>0 \qquad \therefore m>0$

(i), (ii)에서 $\quad 0<m<1$

답 $0<m<1$

055-1 $f(x)=x^2-2ax+2a+4$

$=(x-a)^2-a^2+2a+4$

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $-a^2+2a+4$를 가지므로

$-a^2+2a+4=1, \qquad a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

답 -1, 3

055-2 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 최댓값 -1을 가지므로

$f(x)=a(x-3)^2-1 \ (a<0)$

이때 $f(-3)=-13$이므로

$36a-1=-13 \qquad \therefore a=-\frac{1}{3}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}(x-3)^2-1$

$=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$

따라서 $b=2$, $c=-4$이므로

$3a+b+c=-3$

답 -3

056-1 $y=x^2-5x+k=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+k$이고, 꼭짓점의 x좌표 $\frac{5}{2}$가 $-1\le x\le 3$에 속하므로 $x=\frac{5}{2}$에서 최솟값 $-\frac{25}{4}+k$를 갖는다.

그런데 주어진 함수의 최솟값이 4이므로

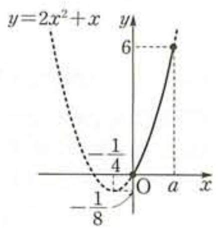
$-\frac{25}{4}+k=4 \qquad \therefore k=\frac{41}{4}$

답 $\frac{41}{4}$

056-2 $y=2x^2+x$

$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$

이므로 $0\le x\le a$에서 함수 $y=2x^2+x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=a$에서 최댓값 6을 가지므로

$2a^2+a=6, \qquad 2a^2+a-6=0$

$(a+2)(2a-3)=0$

$\therefore a=\frac{3}{2} \ (\because a>0)$

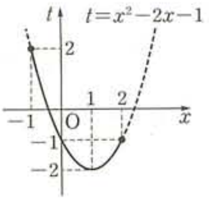
답 $\frac{3}{2}$

057-1 $x^2-2x-1=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2-2$

$-1\le x\le 2$이므로 [그림 1]에서

$-2\le t\le 2$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

$y=t^2+2t-3$

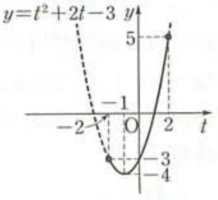
$=(t+1)^2-4\ (-2\le t\le 2)$

이므로 [그림 2]에서

$t=-2$일 때, $y=-3$

$t=-1$일 때, $y=-4$

$t=2$일 때, $y=5$



[그림 2]

따라서 최댓값은 5, 최솟값은 -4이므로

$M=5,\ m=-4$

$\therefore M+m=1$

답 1

058-1 $y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$이므로 y는 $x=3$에서 최댓값 45를 갖는다.

따라서 구하는 최고 높이는 45 m이다.

답 45 m

059-1 $x^2+5y^2-4xy-4y+5$

$=(x-2y)^2+(y-2)^2+1$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-2y)^2\ge 0,\ (y-2)^2\ge 0$

$\therefore x^2+5y^2-4xy-4y+5\ge 1$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=4,\ y=2$일 때 1이다.

답 1

059-2 $2x+6z-x^2-y^2-z^2+12$

$=-(x-1)^2-y^2-(z-3)^2+22$

이때 $x,\ y,\ z$가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0,\ y^2\ge 0,\ (z-3)^2\ge 0$

$\therefore 2x+6z-x^2-y^2-z^2+12\le 22$

따라서 주어진 식의 최댓값은 $x=1,\ y=0,\ z=3$일 때 22이다.

답 22

060-1 (1) 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$y^2+2xy+x^2-4x-8=0$

이 식을 y에 대한 이차방정식으로 보면 y가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=x^2-(x^2-4x-8)\ge 0$

$4x+8\ge 0 \qquad \therefore x\ge -2$

따라서 x의 최솟값은 -2이다.

(2) 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-2)x+y^2-8=0$

이 식을 x에 대한 이차방정식으로 보면 x가 실수이므로 이차방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(y^2-8)\ge 0$

$4y-12\le 0 \qquad \therefore y\le 3$

따라서 y의 최댓값은 3이다.

답 (1) -2 (2) 3

061-1 $2x+y^2=1$에서

$y^2=1-2x$ $\cdots\cdots$ ㉠

y가 실수이므로 $y^2=1-2x\ge 0$

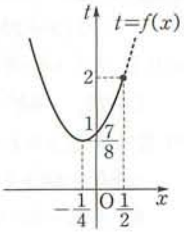
$\therefore x\le \frac{1}{2}$

㉠을 $2x^2+y^2+3x$에 대입하면

$2x^2+1-2x+3x=2x^2+x+1$

$=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\left(x\le\frac{1}{2}\right)$

$f(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$이라 하면 $x\le\frac{1}{2}$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{4}$에서 최솟값 $\frac{7}{8}$을 갖는다.



즉 $2x^2+y^2+3x$의 최솟값은 $\frac{7}{8}$이다.

답 $\frac{7}{8}$

061-2 $x+3y^2=1$에서

$3y^2=1-x$ $\cdots\cdots$ ㉠

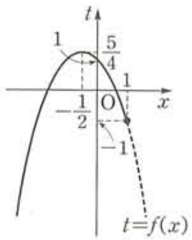
y가 실수이므로 $3y^2=1-x\ge 0$

$\therefore x\le 1$

㉠을 $-x^2+3y^2$에 대입하면

$$-x^2+1-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\ (x\le1)$$

$f(x)=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$라 하면 $x\le1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{5}{4}$를 갖는다.



즉 $-x^2+3y^2$의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다. 답 $\frac{5}{4}$

중단원 연습 문제

○ 본책 177~180쪽

01 $-\frac{1}{4}$, 1		**02** -3, 3	**03** $m\ge-\frac{3}{2}$	
04 $1<m<3$		**05** ③	**06** ①	**07** $\frac{1}{2}$
08 $\frac{15}{4}$	**09** -8	**10** ①	**11** ⑤	**12** ⑤
13 8	**14** 2	**15** 9	**16** 74	**17** ③
18 ③	**19** ⑤	**20** 3		

01 전략 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 구하여 $y=x-1$에 대입한다.

풀이 $y=2x^2+8kx+4k+1$

$=2(x+2k)^2-8k^2+4k+1$

이므로 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-2k,\ -8k^2+4k+1)$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$-8k^2+4k+1=-2k-1$

$8k^2-6k-2=0,\quad 4k^2-3k-1=0$

$(4k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{4}$ 또는 $k=1$ 답 $-\frac{1}{4}$, 1

02 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 함을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=x^2-4x+a^2-5$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2-4x+a^2-5=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(a^2-5)=0,\quad a^2=9$

$\therefore a=\pm3$

답 -3, 3

03 전략 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=-x+m$이 만나려면 이차방정식 $2x^2+x-1=-x+m$이 실근을 가져야 함을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=2x^2+x-1$의 그래프와 직선 $y=-x+m$이 만나려면 이차방정식 $2x^2+x-1=-x+m$, 즉 $2x^2+2x-1-m=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

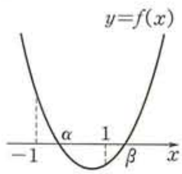
$\frac{D}{4}=1^2-2(-1-m)\ge0,\quad 2m+3\ge0$

$\therefore m\ge-\frac{3}{2}$

답 $m\ge-\frac{3}{2}$

04 전략 $f(x)=x^2-mx+2m-4$라 하고, 조건을 만족시키도록 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $f(x)=x^2-mx+2m-4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 α, β에 대하여 $-1<\alpha<1<\beta$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $f(-1)=1+m+2m-4>0$에서

$3m-3>0\quad \therefore m>1$

(ii) $f(1)=1-m+2m-4<0$에서

$m-3<0\quad \therefore m<3$

(i), (ii)에서 $1<m<3$

답 $1<m<3$

05 전략 주어진 함수를 표준형으로 변형한다.

풀이 $f(x)=x^2-ax-1=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-1$

$f(x)$는 $x=\frac{a}{2}$에서 최솟값 $-\frac{a^2}{4}-1$을 가지므로

$-\frac{a^2}{4}-1=-\frac{7}{4},\quad a^2=3$

$\therefore a=\sqrt{3}\ (\because a>0)$ 답 ③

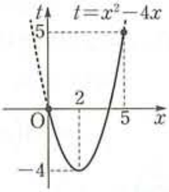
06 (전략) $x^2-4x=t$로 치환하여 t의 값의 범위를 구하고, 주어진 식을 t에 대한 식으로 정리한다.

(풀이) $x^2-4x=t$로 놓으면

$t=x^2-4x$
$=(x-2)^2-4$

$0\le x\le 5$이므로 [그림 1]에서

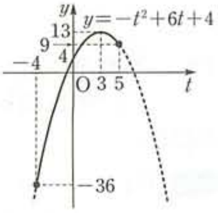
$-4\le t\le 5$



[그림 1]

이때 주어진 함수는

$y=(t+1)^2-2(t-1)^2+5$
$=-t^2+6t+4$
$=-(t-3)^2+13$
$(-4\le t\le 5)$



[그림 2]

이므로 [그림 2]에서

$t=-4$일 때, $y=-36$

$t=3$일 때, $y=13$

$t=5$일 때, $y=9$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 13이고, 최솟값은 -36이므로 구하는 합은

$13+(-36)=-23$

답 ①

07 (전략) 주어진 식을 x, y에 대한 완전제곱식을 포함한 꼴로 변형하여 $(\text{실수})^2\ge 0$임을 이용한다.

(풀이) $-4x+6y+4x^2+y^2+13$
$=(2x-1)^2+(y+3)^2+3$

이때 x, y가 실수이므로

$(2x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$

$\therefore -4x+6y+4x^2+y^2+13\ge 3$

따라서 주어진 식의 최솟값은 $x=\frac{1}{2}$, $y=-3$일 때 3이므로

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-3$, $m=3$

$\therefore \alpha+\beta+m=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

08 문제이해 • $x+3y^2-4=0$에서

$3y^2=-x+4$ …… ㉠

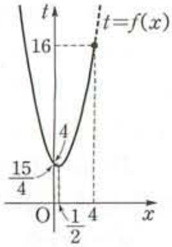
y가 실수이므로 $3y^2=-x+4\ge 0$

$\therefore x\le 4$ ➔ 20% 배점

해결과정 • ㉠을 x^2+3y^2에 대입하면

$x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\ (x\le 4)$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$라 하면 $x\le 4$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\frac{15}{4}$를 갖는다.



즉 x^2+3y^2의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다. ➔ 50% 배점

답 $\frac{15}{4}$

09 해결과정 • $y=-2x^2+4x+1=-2(x-1)^2+3$이므로 이차함수 $y=-2x^2+4x+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다. ➔ 20% 배점

또 $y=x^2+2ax+\frac{7}{4}a^2=(x+a)^2+\frac{3}{4}a^2$이므로 이차함수 $y=x^2+2ax+\frac{7}{4}a^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-a,\ \frac{3}{4}a^2\right)$이다. ➔ 20% 배점

두 꼭짓점을 지나는 직선의 기울기가 -3이므로

$\left(3-\frac{3}{4}a^2\right)\cdot\frac{1}{1+a}=-3,\quad 3-\frac{3}{4}a^2=-3-3a$

$a^2-4a-8=0$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 이 방정식의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-8)=12>0$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 -8이다. ➔ 30% 배점

답 -8

10 (전략) 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 모양, 축, y축과의 교점의 위치를 조사한다.

(풀이) (i) 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

(ii) 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$-\frac{b}{2a}>0 \quad \therefore b<0$

(iii) 그래프가 y축과 원점에서 만나므로 $c=0$

따라서 $y=cx^2-bx+a$, 즉 $y=-bx+a$의 그래프의 기울기 $-b$는 양수, y절편 a도 양수이므로 그래프의 개형은 ①과 같다.

답 ①

06 이차방정식과 이차함수

11 (전략) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $f(x)=0$은 중근을 가짐을 이용한다.

(풀이) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(-1, 1)$을 지나므로

$1=1-a+b \quad \therefore b=a \quad \cdots\cdots ㉠$

또 주어진 이차함수의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$a^2-4a=0, \quad a(a-4)=0$

$\therefore a=4 \ (\because a>0)$

㉠에 의하여 $\quad b=4$

$\therefore a+b=8$

답 ⑤

12 (전략) $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(a>0)$로 놓는다.

(풀이) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ $(a>0)$라 하면 방정식 $f(3x+4)=0$에서

$a(3x+4-\alpha)(3x+4-\beta)=0$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-4}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-4}{3}$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$$\frac{\alpha-4}{3}+\frac{\beta-4}{3}=\frac{\alpha+\beta-8}{3}=\frac{17-8}{3}=3$$

답 ⑤

13 해결과정 • 이차함수 $y=x^2-3x-m-2$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-3x-m-2=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-m-2 \quad \cdots ㉠$ ➜ 40% 배점

이때 $|\alpha-\beta|=7$이므로 양변을 제곱하면

$(\alpha-\beta)^2=49 \quad \cdots ㉡$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$49=9+4(m+2), \quad m+2=10$

$\therefore m=8$ ➜ 30% 배점

답 8

14 (전략) 주어진 함수를 표준형으로 변형한다.

(풀이) $f(x)=x^2-4ax+4a+1$

$=(x-2a)^2-4a^2+4a+1$

$f(x)$는 $x=2a$에서 최솟값 $-4a^2+4a+1$을 가지므로

$g(a)=-4a^2+4a+1$

$=-4\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+2$

따라서 $g(a)$는 $a=\dfrac{1}{2}$에서 최댓값 2를 갖는다.

답 2

15 (전략) 함수 $f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 $0\le x\le3$에 속하는 경우와 속하지 않는 경우로 나누어 최솟값을 구한다.

(풀이) $f(x)=2x^2-4ax+a+a^2$

$=2(x-a)^2+a-a^2$

(i) $a<0$일 때,

꼭짓점의 x좌표 a가 $0\le x\le3$에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x=0$에서 최솟값 $f(0)=a+a^2$을 갖는다.

$a+a^2=0$에서

$a(a+1)=0$

$\therefore a=-1 \ (\because a<0)$

(ii) $0\le a\le3$일 때,

꼭짓점의 x좌표 a가 $0\le x\le3$에 속하므로 주어진 이차함수는 $x=a$에서 최솟값 $f(a)=a-a^2$을 갖는다.

$a-a^2=0$에서

$a(1-a)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

(iii) $a>3$일 때,

꼭짓점의 x좌표 a가 $0\le x\le3$에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x=3$에서 최솟값 $f(3)=a^2-11a+18$을 갖는다.

$a^2-11a+18=0$에서

$(a-2)(a-9)=0$

$\therefore a=9 \ (\because a>3)$

이상에서 모든 실수 a의 값의 합은

$(-1)+0+1+9=9$

답 9

16 문제이해 • $B(a, 0)$ $(0<a<6)$이라 하면

$A(a,\ -a^2+12a)$, $C(12-a,\ 0)$

이므로

$\overline{AB}=-a^2+12a$

$\overline{BC}=12-2a$ ➜ 40% 배점

해결과정 • 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(\overline{AB}+\overline{BC})$

$=2(-a^2+12a+12-2a)$

$=-2a^2+20a+24$

$=-2(a-5)^2+74\ (0<a<6)$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 따라서 l은 $a=5$에서 최댓값 74를 가지므로 구하는 최댓값은 74이다. ➜ 30% 배점

답 74

17 전략 $y=3-x$를 $2x^2+y^2$에 대입한 식의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $x+y=3$에서

$y=3-x$ ...... ㉠

$y\geq 0$이므로

$y=3-x\geq 0 \quad \therefore x\leq 3$

또 $x\geq 0$이므로

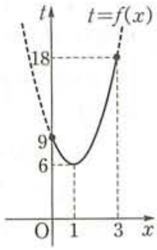
$0\leq x\leq 3$

㉠을 $2x^2+y^2$에 대입하면

$2x^2+(3-x)^2=3x^2-6x+9$

$=3(x-1)^2+6\ (0\leq x\leq 3)$

$f(x)=3(x-1)^2+6$이라 하면 $0\leq x\leq 3$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 18을, $x=1$에서 최솟값 6을 갖는다.



따라서 $M=18$, $m=6$이므로

$M-m=12$

답 ③

18 전략 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

풀이 ㄱ. 조건 (가)에 의하여 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=3$

즉 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=3$이므로

$f(x)=a(x-3)^2+b$

라 하면 조건 (나)에서 $f(-1)=2$, $f(4)=17$이므로

$16a+b=2,\ a+b=17$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=18$

$\therefore f(x)=-(x-3)^2+18$

따라서 $1\leq x\leq 8$일 때, $f(x)$는 $x=8$에서 최솟값 -7을 갖는다.

ㄷ. $g(x)=f(x+3)$

$=-(x+3-3)^2+18$

$=-x^2+18$

이므로

$g(-x)=-(-x)^2+18=-x^2+18$

$-g(x)=-(-x^2+18)=x^2-18$

$\therefore g(-x)\neq -g(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

19 전략 $f(t)$를 $g(t)$에 대한 함수로 나타낸다.

풀이 $y=x^2-2xg(t)+2g(t)+1$

$=\{x-g(t)\}^2-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$

주어진 이차함수는 $x=g(t)$에서 최솟값 $-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$을 가지므로

$f(t)=-\{g(t)\}^2+2g(t)+1$

$=-\{g(t)-1\}^2+2$

ㄱ. $g(1)=g(3)$이므로

$f(1)=f(3)$

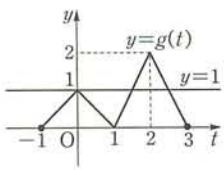
ㄴ. 주어진 그림에서 $0\leq g(t)\leq 2$이므로 $f(t)$는 $g(t)=1$에서 최댓값 2를 갖는다.

ㄷ. $f(t)=2$이면

$-\{g(t)-1\}^2+2=2$

$\{g(t)-1\}^2=0 \quad \therefore g(t)=1$

오른쪽 그림에서 함수 $y=g(t)$의 그래프와 직선 $y=1$은 세 점에서 만나므로 $g(t)=1$, 즉 $f(t)=2$를 만족시키는 t의 개수는 3이다.



이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

20 문제이해 • $2x^2-8x+6=0$에서

$2(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore A(0,\ 6),\ B(1,\ 0),\ C(3,\ 0)$ ➾ 20% 배점

해결과정 • 이때 점 $P(x,\ y)$가 점 A에서 점 C까지 주어진 그래프 위를 움직이므로

$0\le x\le 3$ ➾ 20% 배점

점 $P(x, y)$가 이차함수 $y=2x^2-8x+6$의 그래프 위의 점이므로 $y=2x^2-8x+6$을 $4x-2y+1$에 대입하면

$$\begin{aligned}&4x-2(2x^2-8x+6)+1\\&=-4x^2+20x-11\\&=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+14\ \ (0\le x\le 3)\end{aligned}$$ ➾ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $4x-2y+1$은 $x=\frac{5}{2}$에서 최댓값 14를 갖고, $x=0$에서 최솟값 -11을 가지므로 구하는 합은

$14+(-11)=3$ ➾ 30% 배점

답 3

07 고차방정식

유제

본책 186~200쪽

062-1 (1) $f(x)=x^3+x^2-3x+1$이라 하면

$f(1)=1+1-3+1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}1 & 1 & 1 & -3 & 1\\ & & 1 & 2 & -1\\ \hline & 1 & 2 & -1 & \boxed{0}\end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2+2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+2x-1)=0$

이므로

$x-1=0$ 또는 $x^2+2x-1=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$f(-1)=-1-3+4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}-1 & 1 & -3 & 0 & 4\\ & & -1 & 4 & -4\\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0}\end{array}$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x^2-4x+4)\\&=(x+1)(x-2)^2\end{aligned}$$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)^2=0$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x-2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(3) $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$라 하면

$f(-1)=1+1-1+1-2=0$

$f(2)=16-8-4-2-2=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2\\ & & -1 & 2 & -1 & 2\\ \hline 2 & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0}\\ & & 2 & 0 & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2+1)=0$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x-2=0$ 또는 $x^2+1=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\pm i$

(4) $f(x)=x^4-4x^3-4x^2+4x+3$이라 하면

$f(-1)=1+4-4-4+3=0$

$f(1)=1-4-4+4+3=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -4 & -4 & 4 & 3 \\ & & -1 & 5 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 1 & 3 & \boxed{0} \\ & & 1 & -4 & -3 & \\ \hline & 1 & -4 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)=0$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x-1=0$ 또는 $x^2-4x-3=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{7}$

답 풀이 참조

063-1 (1) $x^2-2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)(X+2)-10=0$

$X^2+X-12=0,\qquad (X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$, 즉 $x^2-2x=-4$일 때,

$x^2-2x+4=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{3}i$

(ii) $X=3$, 즉 $x^2-2x=3$일 때,

$x^2-2x-3=0,\qquad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서

$x=1\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=3$

(2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$에서

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=24$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=24$

$x^2-5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)(X+6)=24$

$X^2+10X=0,\qquad X(X+10)=0$

$\therefore X=-10$ 또는 $X=0$

(i) $X=-10$, 즉 $x^2-5x=-10$일 때,

$x^2-5x+10=0\qquad \therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$

(ii) $X=0$, 즉 $x^2-5x=0$일 때,

$x(x-5)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=5$

(i), (ii)에서

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{15}i}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=5$

답 풀이 참조

064-1 (1) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2X-3=0,\qquad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$

따라서 $x^2=-3$ 또는 $x^2=1$이므로

$x=\pm\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm1$

(2) $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$2X^2-7X-4=0,\qquad (2X+1)(X-4)=0$

$\therefore X=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ 또는 $x=\pm2$

(3) 주어진 방정식에서

$(x^4-10x^2+25)-4x^2=0$

$(x^2-5)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$

$\therefore x^2+2x-5=0$ 또는 $x^2-2x-5=0$

(i) $x^2+2x-5=0$에서 $\qquad x=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x^2-2x-5=0$에서 $\qquad x=1\pm\sqrt{6}$

(i), (ii)에서

$x=-1\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{6}$

(4) 주어진 방정식에서

$(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$

$(x^2+3)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x^2+2x+3=0$ 또는 $x^2-2x+3=0$

(i) $x^2+2x+3=0$에서 $\qquad x=-1\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-2x+3=0$에서 $\qquad x=1\pm\sqrt{2}i$

(i), (ii)에서

$x=-1\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

답 풀이 참조

065-1 (1) $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+7x-16+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-18=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+7X-18=0$

$(X+9)(X-2)=0$

$\therefore X=-9$ 또는 $X=2$

(i) $X=-9$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-9$일 때,

$x+\frac{1}{x}+9=0,\quad x^2+9x+1=0$

$\therefore x=\frac{-9\pm\sqrt{77}}{2}$

(ii) $X=2$, 즉 $x+\frac{1}{x}=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}-2=0,\quad x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0\quad \therefore x=1$

(i), (ii)에서 $x=\frac{-9\pm\sqrt{77}}{2}$ 또는 $x=1$

(2) $f(x)=x^5+2x^4-9x^3-9x^2+2x+1$이라 하면

$f(-1)=-1+2+9-9-2+1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 2 & -9 & -9 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -10 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^4+x^3-10x^2+x+1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^4+x^3-10x^2+x+1)=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$

$x\neq0$이므로 $x^4+x^3-10x^2+x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+x-10+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면 $\quad X^2+X-12=0$

$(X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=3$

(i) $X=-4$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-4$일 때,

$x+\frac{1}{x}+4=0,\quad x^2+4x+1=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$

(ii) $X=3$, 즉 $x+\frac{1}{x}=3$일 때,

$x+\frac{1}{x}-3=0,\quad x^2-3x+1=0$

$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

이상에서

$x=-1$ 또는 $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

답 풀이 참조

066-1 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x(x>2)$라 하면

$(x-1)(x-2)\cdot2x=\frac{3}{4}x^3$

$5x^3-24x^2+16x=0$

$x(x-4)(5x-4)=0$

$\therefore x=4\ (\because x>2)$

따라서 구하는 정육면체의 한 모서리의 길이는 4이다.

답 4

067-1 삼차방정식 $x^3+5x^2+4x+2=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-5,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4,\ \alpha\beta\gamma=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-5)^2-2\cdot4=17$

(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(-5)\cdot(17-4)+3\cdot(-2)$

$=-71$

(3) $\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}=-\frac{17}{2}$

(4) $\alpha+\beta+\gamma=-5$에서

$\alpha+\beta=-5-\gamma,\ \beta+\gamma=-5-\alpha,$

$\gamma+\alpha=-5-\beta$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-5-\gamma)(-5-\alpha)(-5-\beta)$

$=-(\alpha+5)(\beta+5)(\gamma+5)$

$=-\{\alpha\beta\gamma+5(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$+25(\alpha+\beta+\gamma)+125\}$

$=-\{-2+5\cdot4+25\cdot(-5)+125\}$

$=-18$

답 (1) 17 (2) -71 (3) $-\frac{17}{2}$ (4) -18

068-1 삼차방정식 $x^3-2x^2+3x+1=0$의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-1$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha\beta,\ \beta\gamma,\ \gamma\alpha$이므로

(i) 세 근의 합은

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$

(ii) 두 근끼리의 곱의 합은

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta$

$=\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma$

$=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

$=-1\cdot2=-2$

(iii) 세 근의 곱은

$\alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha=\alpha^2\beta^2\gamma^2=(\alpha\beta\gamma)^2=(-1)^2=1$

이상에서 구하는 삼차방정식은

$x^3-3x^2-2x-1=0$

답 $x^3-3x^2-2x-1=0$

069-1 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이고 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로 $2-\sqrt{3}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=0 \qquad \therefore \alpha=-4$

즉 삼차방정식의 세 근이 $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3},\ -4$이므로

$a=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot(-4)$

$+(-4)\cdot(2+\sqrt{3})$

$=-15$

$-b=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cdot(-4)=-4$

$\therefore b=4$

$\therefore a-b=-19$

답 -19

069-2 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+i$이므로 $1-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(1+i)(1-i)=-6, \qquad 2\alpha=-6$

$\therefore \alpha=-3$

즉 삼차방정식의 세 근이 $1+i,\ 1-i,\ -3$이므로

$-a=(1+i)+(1-i)+(-3)$

$\therefore a=1$

$b=(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot(-3)$

$+(-3)\cdot(1+i)$

$=-4$

답 $a=1,\ b=-4$, 나머지 두 근 : $1-i,\ -3$

070-1 방정식 $x^3=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=-1$

$x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

따라서 ω는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\omega^2-\omega+1=0$ ······ ㉠

(1) $\omega^{99}=(\omega^3)^{33}=-1$

$\omega^{100}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega=-\omega$

$\omega^{101}=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2=-\omega^2$

$\omega^{199}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega=\omega$

$\omega^{200}=(\omega^3)^{66}\cdot\omega^2=\omega^2$

$\omega^{201}=(\omega^3)^{67}=-1$

㉠에서 $-1-\omega^2=-\omega,\ \omega-1=\omega^2$이므로

$(\text{주어진 식})=\frac{-1-\omega^2}{-\omega}+\frac{\omega-1}{\omega^2}$

$=\frac{-\omega}{-\omega}+\frac{\omega^2}{\omega^2}=2$

(2) 방정식 $x^2-x+1=0$의 계수가 실수이고 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega+\frac{1}{\omega}+\overline{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}=\omega+\overline{\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\overline{\omega}}$

$=\omega+\overline{\omega}+\frac{\omega+\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}$

$=1+\frac{1}{1}$

$=2$

답 (1) 2 (2) 2

다른 풀이 (1) $\frac{\omega^{99}+\omega^{101}}{\omega^{100}}+\frac{\omega^{199}+\omega^{201}}{\omega^{200}}$

$=\frac{1+\omega^2}{\omega}+\frac{1+\omega^2}{\omega}$

$=\frac{\omega}{\omega}+\frac{\omega}{\omega}=2$

중단원 연습 문제

○ 본책 201~204쪽

01 ③	02 풀이 참조	03 -4		
04 $x=1$	05 14	06 -15	07 1	
08 $2\pm\sqrt{2}$	09 ④	10 5	11 ③	12 4
13 ①	14 8	15 ①	16 ③	17 ③
18 ④	19 14	20 42		

01 전략 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $f(x)=x^3-5x^2+x+7$이라 하면

$f(-1)=-1-5-1+7=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -5 & 1 & 7 \\ & & -1 & 6 & -7 \\ \hline & 1 & -6 & 7 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x^2-6x+7)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x^2-6x+7)=0$

이므로

$x+1=0$ 또는 $x^2-6x+7=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3\pm\sqrt{2}$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=1+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})$
$=7$

답 ③

02 전략 $x^2+2x-3=X$로 치환한 후 X에 대한 이차방정식을 푼다.

풀이 $x^2+2x-3=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+2X-3=0,\quad (X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$

(i) $X=-3$, 즉 $x^2+2x-3=-3$일 때,

$x^2+2x=0,\quad x(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

(ii) $X=1$, 즉 $x^2+2x-3=1$일 때,

$x^2+2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

(i), (ii)에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{5}$

답 풀이 참조

03 전략 $x^2=X$로 치환한 후 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X-8=0$

$(X+2)(X-4)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$

따라서 $x^2=-2$ 또는 $x^2=4$이므로

$x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm2$

주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$2\cdot(-2)=-4$

답 -4

04 전략 양변을 x^2으로 나누고 $x+\frac{1}{x}=X$로 치환하여 주어진 방정식을 X에 대한 방정식으로 나타낸다.

풀이 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-4x+6-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-4X+4=0,\quad (X-2)^2=0$

$\therefore X=2$

따라서 $x+\frac{1}{x}=2$이므로

$x^2-2x+1=0,\quad (x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

답 $x=1$

05 해결과정 • 세 근을 α, 3α, 4α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+3\alpha+4\alpha=\frac{16}{2}$ $\quad\therefore \alpha=1$

따라서 주어진 방정식의 세 근은

1, 3, 4 ➔ 40% 배점

$1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1=\frac{a}{2}$이므로

$a=38$

$1\cdot3\cdot4=-\frac{b}{2}$이므로

$b=-24$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=14$ ➔ 20% 배점

답 14

06 (전략) 켤레근의 성질과 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 두 근을 구한다.

풀이 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이고 한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.
나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3$

$\therefore \alpha=1$

즉 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 세 근이 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$, 1이므로

$-a=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1$

$\therefore a=-3$

$b=(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\cdot1$
$\quad+1\cdot(1+\sqrt{2}i)$
$=5$

$\therefore ab=-15$

답 -15

07 해결과정 • 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근이 α이므로

$\alpha^3+1=0$ $\quad\therefore \alpha^3=-1$ ➔ 30% 배점

$x^3+1=0$에서

$(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x^2-x+1=0$

따라서 α는 $x^2-x+1=0$의 근이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore 1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4-\alpha^5+\alpha^6$
$=(1-\alpha+\alpha^2)-\alpha^3(1-\alpha+\alpha^2)+(\alpha^3)^2$
$=0+0+(-1)^2$
$=1$ ➔ 40% 배점

답 1

08 (전략) $x=2$를 주어진 방정식에 대입하여 k의 값을 구한 후, 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $x=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$8-(k-4)\cdot4+2k-4=0$

$\therefore k=10$

따라서 주어진 방정식은

$x^3-6x^2+10x-4=0$

$f(x)=x^3-6x^2+10x-4$라 하면

$f(2)=8-24+20-4=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-6	10	-4
		2	-8	4
	1	-4	2	0

$f(x)=(x-2)(x^2-4x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+2)=0$

이므로

$x-2=0$ 또는 $x^2-4x+2=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

즉 나머지 두 근은 $2\pm\sqrt{2}$이다.

답 $2\pm\sqrt{2}$

09 (전략) 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $f(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$이라 하면

$f(-2)=16-24+12+2-6=0$

$f(1)=1+3+3-1-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	3	3	-1	-6
		-2	-2	-2	6
1	1	1	1	-3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$f(x)=(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)=0$

이므로

$x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x^2+2x+3=0$

따라서 $x^2+2x+3=0$의 두 허근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=3$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=-2$

답 ④

10 해결과정 • $f(x)=x^3-6x^2+(a+8)x-2a$라 하면

$f(2)=8-24+2a+16-2a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & a+8 & -2a \\ & & 2 & -8 & 2a \\ \hline & 1 & -4 & a & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-2)(x^2-4x+a)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^2-4x+a)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x^2-4x+a=0$ ➔ 40% 배점

이때 주어진 삼차방정식이 한 실근과 두 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 허근을 갖는다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a<0 \quad \therefore a>4$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 정수 a의 최솟값은 5이다.

➔ 20% 배점

답 5

11 전략 주어진 방정식을 $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x^4+8x^2+36=0$에서

$(x^4+12x^2+36)-4x^2=0$
$(x^2+6)^2-(2x)^2=0$
$(x^2+2x+6)(x^2-2x+6)=0$
$\therefore x^2+2x+6=0$ 또는 $x^2-2x+6=0$

이때 방정식 $x^2+2x+6=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-2x+6=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=6,\ \gamma+\delta=2,\ \gamma\delta=6$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-2}{6}+\frac{2}{6}=0$$

답 ③

12 전략 정육면체 A, B, C, D의 한 모서리의 길이를 각각 x, $x+2$, $x+4$, $x+6$으로 놓고 방정식을 세운다.

풀이 정육면체 A의 한 모서리의 길이를 x라 하면 B, C, D의 한 모서리의 길이는 각각 $x+2$, $x+4$, $x+6$이므로

$(x+2)^3+(x+6)^3=3x^3+2(x+4)^3$
$3x^3-24x-96=0, \quad x^3-8x-32=0$

$f(x)=x^3-8x-32$라 하면

$f(4)=64-32-32=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & 0 & -8 & -32 \\ & & 4 & 16 & 32 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-4)(x^2+4x+8)$

따라서 방정식 $f(x)=0$은

$(x-4)(x^2+4x+8)=0$
$\therefore x=4 \ (\because x>0)$

즉 정육면체 A의 한 모서리의 길이는 4이다.

답 4

13 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $x^3+kx^2+3x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-k,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3,\ \alpha\beta\gamma=-1$

한편 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=7$에서

$8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=7$
$8-4\cdot(-k)+2\cdot3-(-1)=7$
$4k=-8$
$\therefore k=-2$

답 ①

14 문제이해 • 방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=0$ ➔ 20% 배점

또 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1,\ \alpha\beta\gamma=-2$

➔ 20% 배점

해결과정 • 이때 $g(x)=f(x)+x+2$이므로

$g(\alpha)=f(\alpha)+\alpha+2=\alpha+2$
$g(\beta)=f(\beta)+\beta+2=\beta+2$

$g(\gamma)=f(\gamma)+\gamma+2=\gamma+2$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$

$=(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)$

$=\alpha\beta\gamma+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)+8$

$=-2+2\cdot1+0+8$

$=8$ ➜ 30% 배점

답 8

15 전략 방정식 $x^3=1$의 한 허근이 ω이면 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2+x+1=0$

따라서 ω는 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore \omega^2=-\omega-1$ …… ㉠

한편 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 다른 한 근은 $\overline{\omega}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$

$\therefore \overline{\omega}=-\omega-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\omega^2=\overline{\omega}$

ㄴ. 이차방정식 $x^2+x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2=(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}$

$=1-2$

$=-1$

한편 ω, $\overline{\omega}$가 $x^3=1$의 근이므로

$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$ $\therefore \omega^3+\overline{\omega}^3=2$

$\therefore \omega^2+\overline{\omega}^2\neq\omega^3+\overline{\omega}^3$

ㄷ. $\dfrac{1}{\omega+1}+\dfrac{1}{\omega^2+1}+\dfrac{1}{\omega^3+1}$

$=\dfrac{1}{-\omega^2}+\dfrac{1}{-\omega}+\dfrac{1}{1+1}$

$=\dfrac{-1-\omega}{\omega^2}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\omega^2}{\omega^2}+\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{2}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

16 전략 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하여 음수인 한 근을 구한다.

풀이 $f(x)=2x^3+5x^2+(k+3)x+k$라 하면

$f(-1)=-2+5-k-3+k=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 5 & k+3 & k \\ & & -2 & -3 & -k \\ \hline & 2 & 3 & k & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2+3x+k)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(2x^2+3x+k)=0$

이므로

$x=-1$ 또는 $2x^2+3x+k=0$

주어진 방정식의 세 근이 음수이려면 $2x^2+3x+k=0$의 두 근이 모두 음수이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $D=3^2-4\cdot2\cdot k\geq0$

$9-8k\geq0$

$\therefore k\leq\dfrac{9}{8}$

(ii) $\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}<0$

(iii) $\alpha\beta=\dfrac{k}{2}>0$ $\therefore k>0$

이상에서 $0<k\leq\dfrac{9}{8}$

답 ③

Remark **이차방정식의 실근의 부호**

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

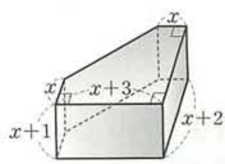
① 두 근이 모두 양 $\Longleftrightarrow$ $D\geq0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음 $\Longleftrightarrow$ $D\geq0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 $\Longleftrightarrow$ $\alpha\beta<0$

17 전략 주어진 전개도로 만든 오각기둥의 부피를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 주어진 전개도로 오각기둥을 만들면 오른쪽 그림과 같다.



이 오각기둥의 부피가 108이므로

$$\left[x(x+3)+\frac{1}{2}\{(x+3)+x\}\cdot 2\right](x+1)=108$$

$(x^2+5x+3)(x+1)=108$

$x^3+6x^2+8x-105=0$ ...... ㉠

$f(x)=x^3+6x^2+8x-105$라 하면

$f(3)=27+54+24-105=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	6	8	−105
		3	27	105
	1	9	35	0

$f(x)=(x-3)(x^2+9x+35)$

따라서 방정식 ㉠은

$(x-3)(x^2+9x+35)=0$

$\therefore x=3\ (\because x>0)$

답 ③

18 전략 $2x-1=t$로 놓고 $f(t)$를 구한 후, 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $2x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{2}$이므로

$$f(t)=8\left(\frac{t+1}{2}\right)^3-4\cdot\frac{t+1}{2}$$
$$=(t+1)^3-2(t+1)$$
$$=t^3+3t^2+t-1$$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x^3+3x^2+x-1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$,

$\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\beta\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2\beta)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\beta\gamma)^2}$$
$$=\frac{1^2-2\cdot1\cdot(-3)}{1^2}$$
$$=7$$

답 ④

19 전략 켤레근의 성질과 주어진 조건을 이용하여 $P(x)$를 구한다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 조건 (가)에 의하여 $2-i$도 $P(x)=0$의 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=(2+i)+(2-i)+\alpha$

$=\alpha+4$ ...... ㉠

$b=(2+i)(2-i)+(2+i)\alpha+(2-i)\alpha$

$=4\alpha+5$ ...... ㉡

$c=(2+i)(2-i)\alpha=5\alpha$ ...... ㉢

조건 (나)에 의하여 $P(1)=1$이므로

$1-a+b-c=1$

$\therefore a-b+c=0$

이 식에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$(\alpha+4)-(4\alpha+5)+5\alpha=0$

$2\alpha=1 \quad \therefore \alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b+c=10\alpha+9$

$=5+9=14$

답 14

Remark 나머지정리

x에 대한 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$이다.

20 해결과정 • 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$ ...... ㉠

이 식의 양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0$

$\therefore \omega^3=1$ ➔ 20% 배점

또 ㉠에서 $\omega^2+1=-\omega$, $\omega+1=-\omega^2$이므로

$$\omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}$$
$$=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$
$$\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{\omega^3\cdot\omega+1}{\omega^2}$$
$$=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}$$
$$=-1$$

$\omega^3+\dfrac{1}{\omega^3}=1+\dfrac{1}{1}=2$ ➔ 30% 배점

한편 $\omega^3=1$이므로

$$\omega^4+\frac{1}{\omega^4}=\omega^7+\frac{1}{\omega^7}=\cdots=\omega^{19}+\frac{1}{\omega^{19}}$$
$$=\omega+\frac{1}{\omega}$$
$$=-1$$
$$\omega^5+\frac{1}{\omega^5}=\omega^8+\frac{1}{\omega^8}=\cdots=\omega^{20}+\frac{1}{\omega^{20}}$$
$$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}$$
$$=-1$$
$$\omega^6+\frac{1}{\omega^6}=\omega^9+\frac{1}{\omega^9}=\cdots=\omega^{21}+\frac{1}{\omega^{21}}$$
$$=\omega^3+\frac{1}{\omega^3}$$
$$=2$$

➡ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2$
$+\cdots+\left(\omega^{21}+\frac{1}{\omega^{21}}\right)^2$
$=\{(-1)^2+(-1)^2+2^2\}$
$+\cdots+\{(-1)^2+(-1)^2+2^2\}$
$=7\cdot 6$
$=42$

➡ 20% 배점

답 42

08 연립방정식

유제

본책 210~227쪽

071-1 (1) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y-z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y+z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $3x+y=-1$ …… ㉣

㉡+㉢을 하면 $4x+3y=2$ …… ㉤

㉣×3−㉤을 하면 $5x=-5$ $\therefore x=-1$

$x=-1$을 ㉣에 대입하면

$-3+y=-1$ $\therefore y=2$

$x=-1$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$-2-2+z=-1$ $\therefore z=3$

$\therefore x=-1,\ y=2,\ z=3$

(2) $\begin{cases} x+y+3z=9 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x-y-2z=2 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$5z=15$ $\therefore z=3$

㉠+㉢을 하면 $4x+z=11$ …… ㉣

$z=3$을 ㉣에 대입하면

$4x+3=11$ $\therefore x=2$

$x=2$, $z=3$을 ㉠에 대입하면

$2+y+9=9$ $\therefore y=-2$

$\therefore x=2,\ y=-2,\ z=3$

답 풀이 참조

072-1 (1) $\begin{cases} x+y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ y+z=6 & \cdots\cdots ㉡ \\ z+x=7 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(x+y+z)=16$

$\therefore x+y+z=8$ …… ㉣

㉣−㉠을 하면 $z=5$

㉣−㉡을 하면 $x=2$

㉣−㉢을 하면 $y=1$

$\therefore x=2,\ y=1,\ z=5$

(2) 주어진 방정식에서

$\begin{cases} 3x-y=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ -y+z=6 & \cdots\cdots ㉡ \\ 6z-x=15 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $3x-z=6$ ⋯⋯ ㉣

㉢×3+㉣을 하면 $17z=51$

$\therefore z=3$

$z=3$을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$-y+3=6,\ 18-x=15$

$\therefore y=-3,\ x=3$

$\therefore x=3,\ y=-3,\ z=3$

답 풀이 참조

073-1 $\begin{cases} 4x+y-z=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y-3z=7 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-y+6z=-1 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $2x+2z=-2$

$\therefore x+z=-1$ ⋯⋯ ㉣

㉡+㉢을 하면 $3x+3z=6$

$\therefore x+z=2$ ⋯⋯ ㉤

㉣−㉤을 하면 $0\cdot x+0\cdot z=-3$

따라서 주어진 연립방정식은 해가 없다.

답 해가 없다.

073-2 $\begin{cases} (a^2-3)x+6y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+2y=-1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×3을 하면

$(a^2-9)x=a+3$, 즉 $(a+3)(a-3)x=a+3$

(i) $a\neq-3,\ a\neq3$일 때, $x=\dfrac{1}{a-3}$

(ii) $a=3$일 때, $0\cdot x=6$

따라서 해가 없다.

(iii) $a=-3$일 때, $0\cdot x=0$

따라서 해가 무수히 많다.

이상에서 $a=-3$

답 −3

074-1 전체 일의 양을 1이라 하고 A, B, C 세 사람이 1시간 동안 하는 일의 양을 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=1$ ⋯⋯ ㉠

$(x+y)\cdot\dfrac{3}{2}=1 \quad \therefore x+y=\dfrac{2}{3}$ ⋯⋯ ㉡

$(y+z)\cdot2=1 \quad \therefore y+z=\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯ ㉢

㉠−㉡을 하면 $z=\dfrac{1}{3}$

㉠−㉢을 하면 $x=\dfrac{1}{2}$

A, C 두 사람이 함께 일하여 이 일을 끝마치는 데 t시간이 걸린다고 하면

$(x+z)t=1,\quad \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)t=1$

$\dfrac{5}{6}t=1 \quad \therefore t=\dfrac{6}{5}$

따라서 A, C 두 사람이 함께 일하여 이 일을 끝마치는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{6}{5}$시간, 즉 1시간 12분이다.

답 1시간 12분

075-1 (1) $\begin{cases} x+2y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=-2y+1$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(-2y+1)^2-3y^2=-2$

$y^2-4y+3=0,\quad (y-1)(y-3)=0$

$\therefore y=1$ 또는 $y=3$

(i) $y=1$을 ㉢에 대입하면 $x=-1$

(ii) $y=3$을 ㉢에 대입하면 $x=-5$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+4xy+y^2=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(y+2)^2+4(y+2)y+y^2=-2$

$y^2+2y+1=0,\quad (y+1)^2=0$

$\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $x=1$

$\therefore x=1,\ y=-1$

답 풀이 참조

076-1 (1) $\begin{cases} x^2-5xy+4y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+2y^2=18 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x-4y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=y$를 ㉡에 대입하면

$y^2+2y^2=18$

$y^2=6 \quad \therefore y=\pm\sqrt{6}$

$x=y$이므로

$x=\pm\sqrt{6},\ y=\pm\sqrt{6}$ (복호동순)

(ii) $x=4y$를 ㉡에 대입하면

$(4y)^2+2y^2=18$

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

$x=4y$이므로

$x=\pm4,\ y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x^2+3xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad (x+y)(4x-y)=0$

$\therefore y=-x$ 또는 $y=4x$

(i) $y=-x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x\cdot(-x)+2\cdot(-x)^2=5$

$x^2=1 \quad \therefore x=\pm1$

$y=-x$이므로

$x=\pm1,\ y=\mp1$ (복호동순)

(ii) $y=4x$를 ㉠에 대입하면

$x^2-2x\cdot4x+2\cdot(4x)^2=5$

$x^2=\frac{1}{5} \quad \therefore x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

$y=4x$이므로

$x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\ y=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y=\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{5}}{5} \\ y=-\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

답 풀이 참조

077-1 (1) $\begin{cases} x^2-y^2+2x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2-2y^2+3x-y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면

$x-y=2 \quad \therefore x=y+2 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$(y+2)^2-y^2+2(y+2)-y=3$

$5y=-5 \quad \therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉢에 대입하면 $\quad x=1$

$\therefore x=1,\ y=-1$

(2) $\begin{cases} x^2+2y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2+2x=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡을 하면 $\quad x^2-y^2+2y-2x=0$

$(x+y)(x-y)-2(x-y)=0$

$(x-y)(x+y-2)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x+2$

(i) $y=x$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2x=3, \quad x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$y=x$이므로

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

(ii) $y=-x+2$를 ㉠에 대입하면

$x^2+2(-x+2)=3, \quad x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

$y=-x+2$이므로 $\quad y=1$

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=-3 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

답 풀이 참조

078-1 (1) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$ 에서

$\begin{cases} (x+y)^2-2xy+x+y=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$

$x+y=u,\ xy=v$로 놓으면

$\begin{cases} u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $\quad v=u^2-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면

$u^2-u=0, \quad u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

$u=0$을 ㉢에 대입하면 $\quad v=-1$

$u=1$을 ㉢에 대입하면 $\quad v=0$

(i) $u=0,\ v=-1$, 즉 $x+y=0,\ xy=-1$일 때,

$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-1=0$의 두 근이다.

$(t+1)(t-1)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

08 연립방정식

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,
x, y는 이차방정식 $t^2-t=0$의 두 근이다.
$t(t-1)=0$에서
$t=0$ 또는 $t=1$
$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는
$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} (x-y)^2+xy=124 \\ (x+1)^2+(y+1)^2=122 \end{cases}$에서
$\begin{cases} x^2-xy+y^2=124 \\ x^2+y^2+2(x+y)=120 \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} (x+y)^2-3xy=124 \\ (x+y)^2-2xy+2(x+y)=120 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면
$\begin{cases} u^2-3v=124 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2+2u-2v=120 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡$-$㉠을 하면
$2u+v=-4$
$\therefore v=-2u-4$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하여 정리하면
$u^2+6u-112=0$, $\quad (u+14)(u-8)=0$
$\therefore u=-14$ 또는 $u=8$
$u=-14$를 ㉢에 대입하면
$v=24$
$u=8$을 ㉢에 대입하면
$v=-20$

(i) $u=-14$, $v=24$, 즉 $x+y=-14$, $xy=24$일 때,
x, y는 이차방정식 $t^2+14t+24=0$의 두 근이다.
$(t+12)(t+2)=0$에서
$t=-12$ 또는 $t=-2$
$\therefore \begin{cases} x=-12 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-12 \end{cases}$

(ii) $u=8$, $v=-20$, 즉 $x+y=8$, $xy=-20$일 때,
x, y는 이차방정식 $t^2-8t-20=0$의 두 근이다.
$(t+2)(t-10)=0$에서
$t=-2$ 또는 $t=10$
$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=10 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=-2 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 해는
$\begin{cases} x=-12 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-12 \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=10 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=10 \\ y=-2 \end{cases}$

답 풀이 참조

079-1 두 이차방정식의 공통근을 α라 하면
$\alpha^2+a-a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2-a\alpha+1=0$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$(a+1)\alpha-a-1=0$, $\quad (a+1)(\alpha-1)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $\alpha=1$
(i) $a=-1$일 때,
두 이차방정식이 모두 $x^2+x+1=0$이 되어 일치하므로 공통근은 2개가 되어 문제의 뜻에 어긋난다.
(ii) $\alpha=1$일 때,
$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면
$1+1-a=0$
$\therefore a=2$
(i), (ii)에서 $\quad a=2$

답 2

079-2 두 이차방정식의 공통근을 $\alpha\,(\alpha\neq 0)$라 하면
$\alpha^2+(k-3)\alpha-7k=0$ $\cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2+(k-1)\alpha-9k=0$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠$-$㉡을 하면
$-2\alpha+2k=0$
$\therefore \alpha=k$
이것을 ㉠에 대입하면
$k^2+(k-3)k-7k=0$
$k^2-5k=0$, $\quad k(k-5)=0$
$\therefore k=5$ ($\because k\neq 0$)

답 5

080-1 $mn-4m+5n=27$에서
$mn-4m+5n-20=7$
$m(n-4)+5(n-4)=7$
$\therefore (m+5)(n-4)=7$
m, n이 정수이므로 $m+5$, $n-4$도 정수이고, 7의 약수이다.

따라서 $m+5$, $n-4$의 값은 다음과 같다.

$m+5$	-7	-1	1	7
$n-4$	-1	-7	7	1

(i) $m+5=-7$, $n-4=-1$일 때,

$m=-12$, $n=3$ $\quad\therefore m+n=-9$

(ii) $m+5=-1$, $n-4=-7$일 때,

$m=-6$, $n=-3$ $\quad\therefore m+n=-9$

(iii) $m+5=1$, $n-4=7$일 때,

$m=-4$, $n=11$ $\quad\therefore m+n=7$

(iv) $m+5=7$, $n-4=1$일 때,

$m=2$, $n=5$ $\quad\therefore m+n=7$

이상에서 $m+n$의 최댓값은 7이다.

답 7

080-2 $x^2-3xy+2y^2+6=0$에서

$x^2-3xy+2y^2=-6$

$\therefore (x-y)(x-2y)=-6$

x, y가 자연수이므로 $x-y$, $x-2y$는 $x-y>x-2y$인 정수이고, -6의 약수이다.

따라서 $x-y$, $x-2y$의 값은 다음과 같다.

$x-y$	1	2	3	6
$x-2y$	-6	-3	-2	-1

(i) $x-y=1$, $x-2y=-6$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=8$, $y=7$

(ii) $x-y=2$, $x-2y=-3$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=7$, $y=5$

(iii) $x-y=3$, $x-2y=-2$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=8$, $y=5$

(iv) $x-y=6$, $x-2y=-1$일 때,

두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=13$, $y=7$

이상에서 구하는 x, y의 값은

$\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=8 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=13 \\ y=7 \end{cases}$

답 풀이 참조

081-1 $17a^2-8ab+b^2-2a+1=0$에서

$(16a^2-8ab+b^2)+(a^2-2a+1)=0$

$\therefore (4a-b)^2+(a-1)^2=0$

a, b가 실수이므로 $4a-b$, $a-1$도 실수이다.

따라서 $4a-b=0$, $a-1=0$이므로

$a=1$, $b=4$

$\therefore ab=4$

답 4

081-2 $10x^2-12xy+5y^2-4x-6y+13=0$에서

$(9x^2-12xy+4y^2)+(x^2-4x+4)$

$+(y^2-6y+9)$

$=0$

$\therefore (3x-2y)^2+(x-2)^2+(y-3)^2=0$

x, y가 실수이므로 $3x-2y$, $x-2$, $y-3$도 실수이다.

따라서 $3x-2y=0$, $x-2=0$, $y-3=0$이므로

$x=2$, $y=3$

$\therefore x-y=-1$

답 -1

중단원 연습 문제

본책 229~232쪽

01 21	**02** ④	**03** 3	**04** 3	**05** ①
06 $\frac{1}{4}$	**07** ②	**08** 42	**09** ②	
10 $xyz=168$, $a=6$		**11** ③	**12** ③	
13 -2	**14** 16	**15** -4	**16** 500	**17** ①
18 4	**19** $2\sqrt{3}$	**20** 150		

01 전략 한 미지수가 소거되도록 주어진 세 개의 방정식을 적당히 연립한다.

풀이 $\begin{cases} x+y+z=-1 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x-y+2z=-8 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+2y+5z=-15 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $\quad 3x+3z=-9$

$\therefore x+z=-3 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉠×2−㉢을 하면 $\quad x-3z=13 \quad \cdots\cdots ㉤$

㉣−㉤을 하면 $\quad 4z=-16 \quad \therefore z=-4$

$z=-4$를 ㉣에 대입하면 $\quad x-4=-3 \quad \therefore x=1$

$x=1$, $z=-4$를 ㉠에 대입하면

$1+y-4=-1 \quad \therefore y=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-4$이므로

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=21$

답 21

02 (전략) 세 개의 방정식을 모두 변끼리 더하여 새로운 방정식을 만든 후, 주어진 각 방정식과 차례로 연립한다.

(풀이) 주어진 연립방정식의 좌변을 전개하면

$$\begin{cases} xy+zx=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ yz+xy=10 & \cdots\cdots ㉡ \\ zx+yz=12 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(xy+yz+zx)=28$

$\therefore xy+yz+zx=14$ ⋯⋯ ㉣

㉣−㉠을 하면 $yz=8$

㉣−㉡을 하면 $zx=4$

㉣−㉢을 하면 $xy=2$

세 식을 변끼리 모두 곱하면

$x^2y^2z^2=64$, $(xyz)^2=64$

$\therefore (\alpha\beta\gamma)^2=64$

답 ④

03 (전략) 일차방정식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차방정식에 대입한다.

(풀이) $\begin{cases} x+y=a & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서

$y=-x+a$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(-x+a)^2=6$

$3x^2-2ax+a^2-6=0$ ⋯⋯ ㉣

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉣이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉣의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-3(a^2-6)=0$

$-2a^2+18=0$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

답 3

04 해결과정 • $\begin{cases} x^2+3y^2=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$x^2-2xy-3y^2=0$

$(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$ ➔ 20% 배점

(i) $x=-y$를 ㉠에 대입하면 $(-y)^2+3y^2=12$

$y^2=3$ $\therefore y=\pm\sqrt{3}$

$x=-y$이므로

$x=\pm\sqrt{3}$, $y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore xy=-3$ ➔ 30% 배점

(ii) $x=3y$를 ㉠에 대입하면 $(3y)^2+3y^2=12$

$y^2=1$ $\therefore y=\pm1$

$x=3y$이므로

$x=\pm3$, $y=\pm1$ (복호동순)

$\therefore xy=3$ ➔ 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 xy의 최댓값은 3이다.

➔ 20% 배점

답 3

05 (전략) $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 x, y는 $k^2-uk+v=0$의 두 근이 됨을 이용한다.

(풀이) $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u+v=-1 \\ uv=-20 \end{cases}$$

u, v는 이차방정식 $t^2+t-20=0$의 두 근이므로

$(t+5)(t-4)=0$에서

$t=-5$ 또는 $t=4$

$\therefore u=-5$, $v=4$ 또는 $u=4$, $v=-5$

(i) $u=-5$, $v=4$, 즉 $x+y=-5$, $xy=4$일 때,

x, y는 이차방정식 $k^2+5k+4=0$의 두 근이다.

$(k+4)(k+1)=0$에서

$k=-4$ 또는 $k=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore x-y=-3$ 또는 $x-y=3$

(ii) $u=4$, $v=-5$, 즉 $x+y=4$, $xy=-5$일 때,

x, y는 이차방정식 $k^2-4k-5=0$의 두 근이다.

$(k+1)(k-5)=0$에서

$k=-1$ 또는 $k=5$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

$\therefore x-y=-6$ 또는 $x-y=6$

(i), (ii)에서 $x-y$의 최솟값은 -6이다.

답 ①

06 (전략) 주어진 방정식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 변형하여 $A=B=0$임을 이용한다.

풀이 $5x^2+y^2+4x-2xy+1=0$에서

$(4x^2+4x+1)+(x^2-2xy+y^2)=0$

$(2x+1)^2+(x-y)^2=0$

x, y가 실수이므로 $2x+1$, $x-y$도 실수이다.

따라서 $2x+1=0$, $x-y=0$이므로

$x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$

$\therefore xy=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

07 전략 P와 Q가 옳게 보고 푼 것을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 P는 상수 a만 잘못 보고 풀었으므로 $x=-3$, $y=-2$, $z=0$은 연립방정식 $\begin{cases} -2y+z=b \\ -2z+x=-3 \end{cases}$을 만족시킨다.

$\therefore b=4$

Q는 상수 b만 잘못 보고 풀었으므로 $x=-1$, $y=3$, $z=1$은 연립방정식 $\begin{cases} 2x+ay=1 \\ -2z+x=-3 \end{cases}$을 만족시킨다.

따라서 $-2+3a=1$이므로 $a=1$

즉 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ -2y+z=4 & \cdots\cdots ㉡ \\ -2z+x=-3 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠×2+㉡을 하면 $4x+z=6$ …… ㉣

㉣×2+㉢을 하면 $9x=9$ $\therefore x=1$

$x=1$을 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$2+y=1$, $-2z+1=-3$

$\therefore y=-1$, $z=2$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=2$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$

답 ②

08 문제이해 • 세 식을 변끼리 더하면

$(x+2y+y+2z+z+2x)(x+y+z)=432$

$3(x+y+z)^2=432$

$\therefore (x+y+z)^2=144$

$\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$이므로

$x+y+z=12$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x+2y=8 & \cdots\cdots ㉠ \\ y+2z=17 & \cdots\cdots ㉡ \\ z+2x=11 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면 $x-4z=-26$ …… ㉣

㉢×4+㉣을 하면 $9x=18$

$\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠, ㉢에 각각 대입하면

$2+2y=8$, $z+4=11$

$\therefore y=3$, $z=7$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=7$이므로

$\alpha\beta\gamma=42$ ➔ 20% 배점

답 42

09 전략 y와 z를 x에 대한 식으로 나타낸 후, $x-2y+2z=0$에 대입하여 미지수가 1개인 일차방정식을 만든다.

풀이 $3kx+y=0$에서 $y=-3kx$ …… ㉠

$ky+3z=0$에서 $z=-\frac{k}{3}y$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$z=-\frac{k}{3}\cdot(-3kx)=k^2x$ …… ㉢

㉠, ㉢을 $x-2y+2z=0$에 대입하면

$x-2\cdot(-3kx)+2k^2x=0$

$\therefore (2k^2+6k+1)x=0$ …… ㉣

연립방정식의 해가 무수히 많으려면 방정식 ㉣의 해가 무수히 많아야 하므로

$2k^2+6k+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=3^2-2\cdot1=7>0$

이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k의 값의 합은

$-\frac{6}{2}=-3$

답 ②

Remark 방정식 $ax=b$의 해

방정식 $ax=b$의 해는

① $a\neq0$일 때, $x=\frac{b}{a}$

② $a=0$, $b\neq0$일 때, 해는 없다.

③ $a=0$, $b=0$일 때, 해는 무수히 많다.

10 문제이해 • $\frac{8+x+y}{3}=6$에서

$x+y=10$ ...... ㉠

$\frac{y+z+9}{3}=8$에서

$y+z=15$ ...... ㉡

$\frac{x+10+z}{3}=7$에서

$x+z=11$ ...... ㉢ ➔ 40% 배점

해결과정 • ㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=36$

$\therefore x+y+z=18$ ...... ㉣

㉣−㉠을 하면 $z=8$

㉣−㉡을 하면 $x=3$

㉣−㉢을 하면 $y=7$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore xyz=168$,

$a=\frac{x+y+z}{3}$

$=6$ ➔ 20% 배점

답 $xyz=168$, $a=6$

11 전략 갑의 경기 결과를 x승 y무 z패라 하고, x, y, z에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 갑의 경기 결과를 x승 y무 z패라 하면

$$\begin{cases} x+y+z=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x-z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y=18 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

㉡에서 $z=x-3$ ...... ㉣

㉢에서 $y=-3x+18$ ...... ㉤

㉣, ㉤을 ㉠에 대입하면

$x+(-3x+18)+(x-3)=10$

$-x=-5$

$\therefore x=5$

$x=5$를 ㉣, ㉤에 각각 대입하면

$z=2$, $y=3$

따라서 규정 C에 의한 갑의 점수는

$2x+y-z=11$

답 ③

12 전략 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 $x$cm, 정사각형 C의 한 변의 길이를 $y$cm라 하고, 주어진 조건을 이용하여 x, y에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 정사각형 A, B의 한 변의 길이를 $x$cm, 정사각형 C의 한 변의 길이를 $y$cm$(x>y)$라 하자.

철사의 길이가 32cm이므로

$4x+4x+4y=32$

$8x+4y=32$

$\therefore 2x+y=8$ ...... ㉠

세 정사각형의 넓이의 합이 22cm²이므로

$x^2+x^2+y^2=22$

$\therefore 2x^2+y^2=22$ ...... ㉡

㉠에서 $y=-2x+8$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$2x^2+(-2x+8)^2=22$

$3x^2-16x+21=0$

$(3x-7)(x-3)=0$

$\therefore x=\frac{7}{3}$ 또는 $x=3$

(i) $x=\frac{7}{3}$을 ㉢에 대입하면

$y=\frac{10}{3}$

(ii) $x=3$을 ㉢에 대입하면

$y=2$

$x>y$이므로

$x=3$, $y=2$

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 3cm이다.

답 ③

13 문제이해 • 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+a\alpha+2b=0$ ...... ㉠

$\alpha^2+b\alpha+2a=0$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면

$(a-b)\alpha-2(a-b)=0$

$(a-b)(\alpha-2)=0$

$a\neq b$이므로

$\alpha=2$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 즉 2가 공통근이므로 $x=2$를 $x^2+ax+2b=0$에 대입하면

$4+2a+2b=0$

$\therefore a+b=-2$ ➔ 20% 배점

한편 이차방정식 ㉠, ㉡에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha+\gamma=-b$

$\therefore \beta=-a-\alpha=-a-2$

$\gamma=-b-\alpha=-b-2$ ➔ 30% 배점

답구하기 • $\therefore \beta+\gamma=-(a+b)-4$
$=-(-2)-4$
$=-2$ ➔ 10% 배점

답 -2

14 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운 후, 이 식을 이용하여 α, β에 대한 부정방정식을 만든다.

풀이 주어진 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$ …… ㉠
$\alpha\beta=8k-12$ …… ㉡

㉡−㉠×4를 하면
$\alpha\beta-4\alpha-4\beta=-12$, $\alpha\beta-4\alpha-4\beta+16=4$
$\alpha(\beta-4)-4(\beta-4)=4$
$\therefore (\alpha-4)(\beta-4)=4$

α, β가 $\alpha\geq\beta$인 정수이므로 $\alpha-4$, $\beta-4$도 $\alpha-4\geq\beta-4$인 정수이고, 4의 약수이다.
따라서 $\alpha-4$, $\beta-4$의 값은 다음과 같다.

$\alpha-4$	-2	-1	2	4
$\beta-4$	-2	-4	2	1

(i) $\alpha-4=-2$, $\beta-4=-2$일 때,
$\alpha=2$, $\beta=2$
$\alpha=2$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면
$2k=4$ $\therefore k=2$

(ii) $\alpha-4=-1$, $\beta-4=-4$일 때,
$\alpha=3$, $\beta=0$
$\alpha=3$, $\beta=0$을 ㉠에 대입하면
$2k=3$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

(iii) $\alpha-4=2$, $\beta-4=2$일 때,
$\alpha=6$, $\beta=6$
$\alpha=6$, $\beta=6$을 ㉠에 대입하면
$2k=12$ $\therefore k=6$

(iv) $\alpha-4=4$, $\beta-4=1$일 때,
$\alpha=8$, $\beta=5$
$\alpha=8$, $\beta=5$를 ㉠에 대입하면
$2k=13$ $\therefore k=\frac{13}{2}$

이상에서 모든 상수 k의 값의 합은
$2+\frac{3}{2}+6+\frac{13}{2}=16$

답 16

15 전략 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=B=0$임을 이용한다.

풀이 $(x^2-x-6)^2+(y^2+2y-8)^2=0$에서 x, y가 실수이므로 x^2-x-6, y^2+2y-8도 실수이다.
$\therefore x^2-x-6=0$, $y^2+2y-8=0$

(i) $x^2-x-6=0$에서
$(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

(ii) $y^2+2y-8=0$에서
$(y+4)(y-2)=0$
$\therefore y=-4$ 또는 $y=2$

(i), (ii)에서
$\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

이때 $(xy-z)^2=0$에서 x, y, z가 실수이므로 $xy-z$도 실수이다.
따라서 $xy-z=0$, 즉 $z=xy$이므로
$z=8, -4, -12, 6$
즉 z의 최댓값은 8, 최솟값은 -12이므로 그 합은 -4이다.

답 -4

16 전략 $x\geq y$, $x<y$인 경우로 나누어 주어진 연립방정식의 해를 구한다.

풀이 (i) $x\geq y$일 때,
$\begin{cases} 3x-8y^2=x & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2y+10=x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에서 $2y=10$
$\therefore y=5$
$y=5$를 ㉠에 대입하면
$3x-200=x$, $2x=200$
$\therefore x=100$

(ii) $x<y$일 때,
$\begin{cases} 3x-8y^2=-2y & \cdots\cdots ㉢ \\ x-2y+10=-2y & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$
㉣에서 $x=-10$
$x=-10$을 ㉢에 대입하면
$-30-8y^2=-2y$, $4y^2-y+15=0$
$\therefore y=\frac{1\pm\sqrt{1-240}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{239}i}{8}$

x, y는 실수이므로

$x=100$, $y=5$

$\therefore \alpha\beta=500$

답 500

17 전략 $\overline{AD}=x$, $\overline{CD}=y$로 놓고 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$\overline{AB}=33-x$

직각삼각형 ABC에서

$(33-x)^2=(11+y)^2+12^2$

$\therefore x^2-y^2-66x-22y=-824$ $\cdots\cdots$ ㉠

직각삼각형 ADC에서

$x^2=y^2+12^2$

$\therefore x^2-y^2=144$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$66x+22y=968$

$\therefore y=-3x+44$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2-33x+260=0$

$(x-13)(x-20)=0$

$\therefore x=13$ 또는 $x=20$

$\overline{AB}>\overline{AD}$이므로

$33-x>x$

$\therefore x<\dfrac{33}{2}$

따라서 $x=13$, 즉 $\overline{AD}=13$이다.

답 ①

18 전략 $x=2$는 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$의 공통근임을 이용한다.

풀이 두 방정식 $f(x)+g(x)=0$, $f(x)g(x)=0$이 $x=2$를 근으로 가지므로

$f(2)+g(2)=0$, $f(2)g(2)=0$

두 식을 연립하여 풀면

$f(2)=g(2)=0$

따라서 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$은 모두 $x=2$를 근으로 갖는다.

$f(x)=0$의 다른 한 근을 m, $g(x)=0$의 다른 한 근을 n이라 하면

$f(x)=(x-2)(x-m)$

$g(x)=(x-2)(x-n)$

$f(x)g(x)=0$에서

$(x-2)^2(x-m)(x-n)=0$

이므로

$x-2=0$ 또는 $x-m=0$ 또는 $x-n=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$

방정식 $f(x)g(x)=0$의 근이 2, 3, 5이므로

$m=3, n=5$ 또는 $m=5, n=3$

$f(x)+g(x)=0$에서

$(x-2)(x-m)+(x-2)(x-n)=0$

$(x-2)(2x-m-n)=0$

이므로

$x-2=0$ 또는 $2x-m-n=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{m+n}{2}$

방정식 $f(x)+g(x)=0$의 근이 2, α이므로

$\alpha=\dfrac{m+n}{2}$

$=\dfrac{8}{2}=4$

답 4

19 전략 상수항을 소거할 수 있도록 주어진 식을 변형한다.

풀이 $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$에서

$\begin{cases} (x+y+z)^2=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2+z^2=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡$\times 3-$㉠을 하면

$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=0$

$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=0$

$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)=0$

$\therefore (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

x, y, z가 실수이므로 $x-y$, $y-z$, $z-x$도 실수이다.

따라서 $x-y=y-z=z-x=0$이므로

$x=y=z$

$x+y+z=\sqrt{3}$에서 $3x=\sqrt{3}$이므로

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore x+2y+3z=6x=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$=2\sqrt{3}$

답 $2\sqrt{3}$

20 문제이해 • 하얀색, 빨간색, 파란색 플라스틱의 개수를 각각 x, y, z ($x\geq1$, $y\geq1$, $z\geq1$, $x>y$, $x>z$)라 하면

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 10x+50y+100z=1200 \end{cases}$$

즉 $\begin{cases} x+y+z=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+5y+10z=120 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

➜ 20% 배점

해결과정 • ㉠×10−㉡을 하면

$9x+5y=180$

$\therefore x=-\frac{5}{9}y+20$ ➜ 30% 배점

이때 x, z가 자연수이므로 y는 9의 배수이다.

(i) $y=9$일 때,

$x=-5+20=15$,

$z=30-(15+9)=6$

(ii) $y=18$일 때,

$x=-10+20=10$,

$z=30-(10+18)=2$

$x>y$, $x>z$이므로

$x=15$, $y=9$, $z=6$ ➜ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $a=50\cdot9=450$, $b=100\cdot6=600$이므로

$|a-b|=150$ ➜ 10% 배점

답 150

Ⅲ. 부등식

09 여러 가지 부등식 (1)

유제

본책 237~254쪽

082-1 $a^2>b^2$이면 $a^2-b^2>0$

$\therefore (a+b)(a-b)>0$

이때 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b>0$

따라서 $a-b>0$이므로 $a>b$

즉 $a^2>b^2$이면 $a>b$이다. 답 풀이 참조

083-1 (1) $ax+b>x+1$에서

$(a-1)x>-b+1$

(i) $a-1>0$, 즉 $a>1$일 때, $x>\frac{-b+1}{a-1}$

(ii) $a-1<0$, 즉 $a<1$일 때, $x<\frac{-b+1}{a-1}$

(iii) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때, $0\cdot x>-b+1$이므로

$-b+1\geq0$, 즉 $b\leq1$이면 해는 없다.

$-b+1<0$, 즉 $b>1$이면 해는 모든 실수이다.

이상에서 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>1\text{일 때,} & x>\frac{-b+1}{a-1} \\ a<1\text{일 때,} & x<\frac{-b+1}{a-1} \\ a=1\text{일 때,} & \begin{cases} b\leq1\text{이면 해가 없다.} \\ b>1\text{이면 모든 실수} \end{cases} \end{cases}$$

(2) $a(x+a)\leq b(x+b)$에서

$ax+a^2\leq bx+b^2$

$(a-b)x\leq-(a^2-b^2)$

$\therefore (a-b)x\leq-(a+b)(a-b) \cdots\cdots ㉠$

이 부등식의 해가 $x\geq2$이므로 $a-b<0$

㉠의 양변을 $a-b$로 나누면 $x\geq-(a+b)$

따라서 $-(a+b)=2$이므로

$a+b=-2$

답 풀이 참조

084-1 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-4=0$, $x-2=0$, 즉 $x=2$, $x=4$

(i) $x<2$일 때, $-2(x-4)+(x-2)<4$이므로

$-2x+8+x-2<4$, $-x<-2$

$\therefore x>2$

그런데 $x<2$이므로 해는 없다.

(ii) $2 \le x < 4$일 때, $-2(x-4)-(x-2)<4$이므로

$-2x+8-x+2<4$, $\quad -3x<-6$

$\therefore x>2$

그런데 $2 \le x < 4$이므로 $\quad 2<x<4$

(iii) $x \ge 4$일 때, $2(x-4)-(x-2)<4$이므로

$2x-8-x+2<4 \quad \therefore x<10$

그런데 $x \ge 4$이므로 $\quad 4 \le x < 10$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$2<x<10$

따라서 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

답 7

084-2 $|ax+1| \le b$에서 $\quad -b \le ax+1 \le b$

$-b-1 \le ax \le b-1$

(i) $a>0$일 때, $\quad \dfrac{-b-1}{a} \le x \le \dfrac{b-1}{a}$

부등식의 해가 $-1 \le x \le 5$이므로

$\dfrac{-b-1}{a}=-1$, $\dfrac{b-1}{a}=5$

$a-b=1$, $5a-b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{3}{2}$

그런데 $a>0$이므로 적당하지 않다.

(ii) $a<0$일 때, $\quad \dfrac{b-1}{a} \le x \le \dfrac{-b-1}{a}$

부등식의 해가 $-1 \le x \le 5$이므로

$\dfrac{b-1}{a}=-1$, $\dfrac{-b-1}{a}=5$

$a+b=1$, $5a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$이므로

$ab=-\dfrac{3}{4}$

답 $-\dfrac{3}{4}$

Remark

① $a=0$이면 $|ax+1| \le b$의 해가 $-1 \le x \le 5$일 수 없으므로 $\quad a \ne 0$

② $b<0$이면 부등식의 해는 없고, $b=0$이면 부등식의 해는 $x=-\dfrac{1}{a}$이므로 $\quad b>0$

085-1 (1) 부등식 $f(x) \le g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로 구하는 해는

$-\dfrac{1}{2} \le x \le 3$

(2) $f(x)g(x)>0$이면

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)>0$일 때,

$x<-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x>2$ ...... ㉠

$g(x)>0$일 때,

$x>-\dfrac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$x>2$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$f(x)<0$일 때, $\quad -\dfrac{1}{2}<x<2$ ...... ㉢

$g(x)<0$일 때, $\quad x<-\dfrac{1}{2}$ ...... ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분은 없다.

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$x>2$

답 (1) $-\dfrac{1}{2} \le x \le 3$ (2) $x>2$

086-1 (1) 주어진 부등식의 양변에 6을 곱하면

$2x^2-6x>x-6$, $\quad 2x^2-7x+6>0$

$(2x-3)(x-2)>0$

$\therefore x<\dfrac{3}{2}$ 또는 $x>2$

(2) $4x^2+28x+49=(2x+7)^2 \ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

(3) 부등식의 양변에 -1을 곱하여 정리하면

$x^2-3x+4 \ge 0$

$$x^2-3x+4=\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{7}{4}$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

답 (1) $x<\dfrac{3}{2}$ 또는 $x>2$ (2) 해는 없다. (3) 모든 실수

087-1 (1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은 $x=0$

(i) $x<0$일 때, $2x^2+5x-3>0$이므로

$(x+3)(2x-1)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>\frac{1}{2}$

그런데 $x<0$이므로 $x<-3$

(ii) $x\geq 0$일 때, $2x^2-5x-3>0$이므로

$(2x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $x>3$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$x<-3$ 또는 $x>3$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$-2x+3=0$, 즉 $x=\frac{3}{2}$

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때,

$3x(2x+1)-3\geq -2x+3$이므로

$6x^2+5x-6\geq 0$, $(2x+3)(3x-2)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{2}{3}$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로

$x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $\frac{2}{3}\leq x<\frac{3}{2}$

(ii) $x\geq \frac{3}{2}$일 때,

$3x(2x+1)-3\geq -(-2x+3)$이므로

$6x^2+x\geq 0$, $x(6x+1)\geq 0$

$\therefore x\leq -\frac{1}{6}$ 또는 $x\geq 0$

그런데 $x\geq \frac{3}{2}$이므로 $x\geq \frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{2}{3}$

답 (1) $x<-3$ 또는 $x>3$ (2) $x\leq -\frac{3}{2}$ 또는 $x\geq \frac{2}{3}$

088-1 (1) $-x^2+(a+b)x-ab\leq 0$, 즉

$x^2-(a+b)x+ab\geq 0$에서

$(x-a)(x-b)\geq 0$

(i) $a>b$일 때, $x\leq b$ 또는 $x\geq a$

(ii) $a=b$일 때,

$(x-a)^2\geq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<b$일 때, $x\leq a$ 또는 $x\geq b$

이상에서 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>b\text{일 때,} & x\leq b \text{ 또는 } x\geq a \\ a=b\text{일 때,} & \text{모든 실수} \\ a<b\text{일 때,} & x\leq a \text{ 또는 } x\geq b \end{cases}$$

(2) $ax^2-8ax+12a\leq 0$에서

$a(x^2-8x+12)\leq 0$

$a(x-2)(x-6)\leq 0$ …… ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x-2)(x-6)\leq 0$ $\therefore 2\leq x\leq 6$

(ii) $a=0$일 때, ㉠에 $a=0$을 대입하면

$0\cdot(x-2)(x-6)\leq 0$

이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a<0$일 때, ㉠의 양변을 a로 나누면

$(x-2)(x-6)\geq 0$

$\therefore x\leq 2$ 또는 $x\geq 6$

이상에서 부등식의 해는

$$\begin{cases} a>0\text{일 때,} & 2\leq x\leq 6 \\ a=0\text{일 때,} & \text{모든 실수} \\ a<0\text{일 때,} & x\leq 2 \text{ 또는 } x\geq 6 \end{cases}$$

답 풀이 참조

089-1 $kx^2-(k+3)x+k=0$이 이차방정식이므로

$k\neq 0$ …… ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$이므로

$(k+3)^2-4k^2\geq 0$, $-3k^2+6k+9\geq 0$

$k^2-2k-3\leq 0$, $(k+1)(k-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq k\leq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 3$

답 $-1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 3$

090-1 테니스공의 높이 h m가 0.78 m 이상이어야 하므로

$-5t^2+3t+2.13\geq 0.78$

이 부등식을 간단히 하면

$-5t^2+3t+1.35\geq 0$, $100t^2-60t-27\leq 0$

$(10t+3)(10t-9)\leq 0$

$\therefore -0.3\leq t\leq 0.9$

그런데 $t\geq 0$이므로

$0\leq t\leq 0.9$

따라서 테니스공의 높이가 0.78 m 이상인 시간은 0.9초까지이다.

답 0.9초

090-2 휴대전화 한 대의 가격을 x만 원 인하하였을 때의 가격은 $(50-x)$만 원, 하루 판매량은 $(20+2x)$개이므로 하루 총 판매액이 1750만 원 이상 되려면

$(50-x)(20+2x) \geq 1750$

$x^2-40x+375 \leq 0$, $\quad (x-15)(x-25) \leq 0$

$\therefore 15 \leq x \leq 25$

따라서 휴대전화 가격의

최댓값은 $\quad 50-15=35$(만 원)

최솟값은 $\quad 50-25=25$(만 원)

답 최댓값 : 35만 원, 최솟값 : 25만 원

중단원 연습 문제

⊙ 본책 255~258쪽

01 $x<\frac{3}{2}$	**02** ③	**03** $-\frac{7}{5}<x<1$	
04 $-2 \leq x \leq 1$	**05** ⑤	**06** -1	
07 $5 \leq x \leq 10$	**08** ⑤	**09** -1	**10** ②
11 $-2 \leq x<2$	**12** $\frac{9}{4}$	**13** 6	**14** 10
15 ④	**16** ②	**17** ⑤	**18** $\frac{5}{2}<a \leq 3$
19 ①	**20** 8		

01 전략 부등식 $ax-(a+b)<0$의 해가 $x>3$임을 이용하여 a의 부호를 알아내고 b를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $ax-(a+b)<0$에서

$ax<a+b$ $\quad$ ······ ㉠

이 부등식의 해가 $x>3$이므로 $\quad a<0$

㉠의 양변을 a로 나누면 $\quad x>\frac{a+b}{a}$

따라서 $\frac{a+b}{a}=3$이므로 $\quad a+b=3a$

$\therefore b=2a$ $\quad$ ······ ㉡

㉡을 부등식 $bx-(a+b)>0$에 대입하면

$2ax-(a+2a)>0$, $\quad 2ax>3a$

$\therefore x<\frac{3}{2}$ $(\because a<0)$

답 $x<\frac{3}{2}$

02 전략 x에 대한 부등식 $ax>b$의 해가 존재하지 않으려면 $a=0$, $b \geq 0$이어야 한다.

풀이 $a(x-1)-b(x-2)>1$에서

$ax-a-bx+2b>1$

$\therefore (a-b)x>a-2b+1$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$a-b=0$, $a-2b+1 \geq 0$

$a-b=0$에서 $\quad b=a$

이것을 $a-2b+1 \geq 0$에 대입하면

$a-2a+1 \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

답 ③

03 문제이해 • 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x-1=0$, $x+1=0$, 즉 $x=-1$, $x=1$

➜ 20% 배점

해결과정 • (i) $x<-1$일 때,

$-2(x-1)-3(x+1)<6$이므로

$-5x<7 \quad \therefore x>-\frac{7}{5}$

그런데 $x<-1$이므로

$-\frac{7}{5}<x<-1$

➜ 20% 배점

(ii) $-1 \leq x<1$일 때,

$-2(x-1)+3(x+1)<6$이므로

$x<1$

그런데 $-1 \leq x<1$이므로

$-1 \leq x<1$

➜ 20% 배점

(iii) $x \geq 1$일 때,

$2(x-1)+3(x+1)<6$이므로

$5x<5 \quad \therefore x<1$

그런데 $x \geq 1$이므로 해는 없다.

➜ 20% 배점

답구하기 • 이상에서 부등식의 해는

$-\frac{7}{5}<x<1$

➜ 20% 배점

답 $-\frac{7}{5}<x<1$

04 전략 부등식 $f(x)-g(x) \leq 0$, 즉 부등식 $f(x) \leq g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프와 만나거나 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같다.

풀이 부등식 $ax^2+(b-m)x+c-n\leq 0$에서

$ax^2+bx+c\leq mx+n$ …… ㉠

부등식 ㉠의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$과 만나거나 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로 주어진 그림에서 $-2\leq x\leq 1$이다.

따라서 구하는 부등식의 해는

$-2\leq x\leq 1$

답 $-2\leq x\leq 1$

05 전략 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하여 이차부등식의 해를 구한다.

풀이 $(x+1)(x-3)<5$에서

$x^2-2x-3<5,\quad x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 5개이다.

답 ⑤

06 문제이해 • 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값은

$x=0$ ➔ 20% 배점

해결과정 • (i) $x<0$일 때, $(x+1)(-x-2)<0$이므로

$(x+1)(x+2)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-1$

그런데 $x<0$이므로

$x<-2$ 또는 $-1<x<0$ ➔ 30% 배점

(ii) $x\geq 0$일 때, $(x+1)(x-2)<0$이므로

$-1<x<2$

그런데 $x\geq 0$이므로 $0\leq x<2$ ➔ 30% 배점

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $-1<x<2$ ➔ 10% 배점

답구하기 • 따라서 $a=-2,\ b=-1,\ c=2$이므로

$a+b+c=-1$ ➔ 10% 배점

답 -1

07 전략 주어진 조건을 이용하여 이차부등식을 세운다.

풀이 A시계 한 개의 가격을 x만 원 인상했을 때의 가격은 $(10+x)$만 원, 한 달 판매량은 $(100-4x)$개이므로 한 달 총 판매액이 1200만 원 이상이 되려면

$(10+x)(100-4x)\geq 1200$

$1000+60x-4x^2\geq 1200$

$x^2-15x+50\leq 0,\quad (x-5)(x-10)\leq 0$

$\therefore 5\leq x\leq 10$

답 $5\leq x\leq 10$

08 전략 $A-B>0$이면 $A>B$임을 이용하여 두 수의 대소 관계를 확인한다.

풀이 ㄱ. $a>b$에서 $a+c>b+c$

이때 $a+c>0,\ b+c>0$이므로

$$\frac{1}{a+c}<\frac{1}{b+c}$$

ㄴ. $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)>0$

$(\because a>b>1)$

$\therefore ab+1>a+b$

ㄷ. $\frac{a}{b}-\frac{a-1}{b-1}=\frac{a(b-1)-b(a-1)}{b(b-1)}$

$=\frac{-(a-b)}{b(b-1)}<0\ (\because a>b>1)$

$\therefore \frac{a}{b}<\frac{a-1}{b-1}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

09 전략 부등식 $ax>b$의 해가 없거나 해가 모든 실수이려면 먼저 $a=0$이 되어야 한다. 그런 다음 상수 b의 조건을 생각하면 된다.

풀이 $a^2x+1>x+a$에서 $a^2x-x>a-1$

$(a^2-1)x>a-1$

$\therefore (a+1)(a-1)x>a-1$ …… ㉠

이 부등식이 주어진 조건을 만족시키려면

$a=\pm 1$

(i) $a=-1$일 때, ㉠은 $0\cdot x>-2$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

(ii) $a=1$일 때, ㉠은 $0\cdot x>0$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

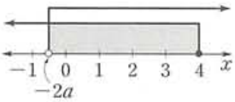
(i), (ii)에서 구하는 a의 값은

$a=-1$ 답 -1

10 전략 부등식 $2x-3\leq x+1$의 해를 수직선 위에 나타내고 조건을 만족시키도록 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 부등식 $x+2a>0$에서 $\quad x>-2a$

부등식 $2x-3\le x+1$에서 $\quad x\le 4$



정수 x의 개수가 5이려면 위의 그림과 같아야 하므로

$$-1\le -2a<0$$

$$\therefore 0<a\le \frac{1}{2}$$

답 ②

Remark

(i) $-2a=-1$이면 $\quad x>-1$
따라서 정수 x는
$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 5개

(ii) $-2a=0$이면 $\quad x>0$
따라서 정수 x는
$1,\ 2,\ 3,\ 4$의 4개

(i), (ii)에서 $\quad -1\le -2a<0$

11 **전략** $[x]$를 한 문자로 생각하여 부등식의 해를 구한 다음 정수 n에 대하여 $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $[x]^2+[x]-6<0$에서

$$([x]+3)([x]-2)<0 \qquad \therefore -3<[x]<2$$

그런데 $[x]$는 정수이므로

$$[x]=-2,\ -1,\ 0,\ 1$$

(i) $[x]=-2$일 때, $\quad -2\le x<-1$

(ii) $[x]=-1$일 때, $\quad -1\le x<0$

(iii) $[x]=0$일 때, $\quad 0\le x<1$

(iv) $[x]=1$일 때, $\quad 1\le x<2$

이상에서 구하는 해는 $\quad -2\le x<2$

답 $-2\le x<2$

12 문제이해 • $x^2+3x+a\le 0$에서

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+a\le 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\ge 0$이므로 ㉠의 해가 오직 하나 존재하려면

$$-\frac{9}{4}+a=0$$

이어야 한다. ➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore a=\frac{9}{4}$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{9}{4}$

다른 풀이 주어진 부등식이 오직 하나의 해를 갖는 것은 이차방정식 $x^2+3x+a=0$이 중근을 가질 때이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=9-4a=0 \qquad \therefore a=\frac{9}{4}$$

Remark

부등식 $x^2+3x+\frac{9}{4}\le 0$에서 $\quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2\le 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $\quad x=-\frac{3}{2}$

13 **전략** 먼저 부등식의 해를 구한 다음 주어진 x의 값을 대입한다.

풀이 $x^2-4x-12<0$에서 $\quad (x+2)(x-6)<0$

$$\therefore -2<x<6$$

위의 식에 $x=1+n\sqrt{2}$를 대입하면

$$-2<1+n\sqrt{2}<6, \qquad -3<n\sqrt{2}<5$$

$$-\frac{3\sqrt{2}}{2}<n<\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{3\times 1.4}{2}<n<\frac{5\times 1.4}{2}$$

$$\therefore -2.1<n<3.5$$

따라서 정수 n은 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 6개이다.

답 6

다른 풀이 $x=1+n\sqrt{2}$를 부등식 $x^2-4x-12<0$에 대입하면

$$(1+n\sqrt{2})^2-4(1+n\sqrt{2})-12<0$$

$$2n^2-2\sqrt{2}n-15<0$$

$$(\sqrt{2}n+3)(\sqrt{2}n-5)<0$$

$$\therefore -\frac{3\sqrt{2}}{2}<n<\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

14 문제이해 • 물체의 높이 hm가 120m 이상이어야 하므로

$$70t-5t^2\ge 120$$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 이 부등식을 간단히 하면

$$t^2-14t+24\le 0$$

$$(t-2)(t-12)\le 0$$

$$\therefore 2\le t\le 12$$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 물체의 높이가 120 m 이상인 시간은 2초부터 12초까지이므로 10초 동안이다.

$\therefore a=10$ ➜ 30% 배점

답 10

15 전략 점 A를 원점으로 하는 수직선을 생각한다.

풀이 A를 원점으로 하는 수직선 위에 세 지점 A, B, C를 놓으면

$A(0),\ B(-10),\ C(20)$

보관창고의 좌표를 t라 하면 보관창고는 A와 C 사이에 있으므로

$0<t<20$ …… ㉠

이때 하루에 드는 총 운송비는

$100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2$이므로

$100t^2+200(t+10)^2+300(20-t)^2\le155000$

$t^2+2(t+10)^2+3(t-20)^2\le1550$

$3t^2-40t-75\le0,\quad (3t+5)(t-15)\le0$

$\therefore -\frac{5}{3}\le t\le15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$0<t\le15$

따라서 보관창고는 A지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다.

답 ④

16 전략 정수 n에 대하여 $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $[x]=2$이므로 $\quad 2\le x<3$ …… ㉠

$[y]=5$이므로 $\quad 5\le y<6$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$2<y-x<4$

$(x-y)(y-x)=-(y-x)^2$이고

$4<(y-x)^2<16$

$\therefore -16<-(y-x)^2<-4$

따라서 $M=-5,\ N=-15$이므로

$MN=75$

답 ②

17 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 y좌표를 이용하여 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 본다.

풀이 $y=x+1$에서

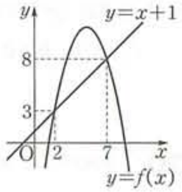
$y=3$일 때, $\quad x=2$

$y=8$일 때, $\quad x=7$

이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점의 좌표는

$(2,\ 3),\ (7,\ 8)$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 오른쪽 그림과 같다.



$f(x)-x-1>0$에서

$f(x)>x+1$

이므로 주어진 부등식의 해는

$y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x+1$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

$\therefore 2<x<7$

따라서 정수 x의 값의 합은

$3+4+5+6=18$

답 ⑤

18 전략 부등식의 좌변을 인수분해한 후, a의 값의 범위를 나누어 부등식을 푼다.

풀이 $x^2-2ax+2a-1<0$에서

$(x-1)(x-2a+1)<0$

(i) $2a-1>1$, 즉 $a>1$일 때,

$1<x<2a-1$

(ii) $2a-1=1$, 즉 $a=1$일 때,

$(x-1)^2<0$이므로 해는 없다.

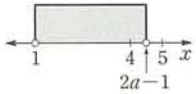
(iii) $2a-1<1$, 즉 $a<1$일 때,

$2a-1<x<1$

그런데 $x=4$가 이 부등식의 해이므로

$1<x<2a-1$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 가장 큰 정수가 4이므로



$4<2a-1\le5$

$5<2a\le6$

$\therefore \frac{5}{2}<a\le3$

답 $\frac{5}{2}<a\le3$

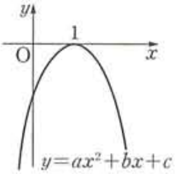
Remark

$f(x)=x^2-2ax+2a-1$이라 하면 $\quad f(1)=0$

따라서 인수정리에 의하여 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

19 전략 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그려서 a, b, c의 부호를 생각해 본다.

풀이 이차부등식 $ax^2+bx+c\ge 0$의 해가 $x=1$뿐이려면 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\therefore a<0,\ b>0,\ c<0$

답 ①

20 문제이해 • 모든 실수 x에 대하여 $|x-a|\ge 0$이다. ➡ 10% 배점

해결과정 • (i) $|x-a|=0$, 즉 $x=a$일 때,

주어진 부등식의 해는 없다.

(ii) $|x-a|>0$, 즉 $x\ne a$일 때,

$(x-8)|x-a|<0$의 양변을 $|x-a|$로 나누면

$x-8<0 \qquad \therefore x<8$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<8,\ x\ne a$ …… ㉠ ➡ 40% 배점

이때 ㉠을 만족시키는 자연수 x의 개수가 6이려면 a의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중 하나이어야 한다.

➡ 20% 배점

답구하기 • 따라서 상수 a의 최댓값은 7, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$7+1=8$ ➡ 30% 배점

답 8

10 여러 가지 부등식 (2)

유제

본책 263~273쪽

091-1 (i) $a-1=0$, 즉 $a=1$일 때,

$-5\le 0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a-1\ne 0$, 즉 $a\ne 1$일 때,

이차함수 $y=(a-1)x^2+2(a-1)x-5$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$a-1<0 \qquad \therefore a<1$ …… ㉠

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+5(a-1)\le 0$

$a^2+3a-4\le 0, \qquad (a+4)(a-1)\le 0$

$\therefore -4\le a\le 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 $\quad -4\le a<1$

(i), (ii)에서 $\quad -4\le a\le 1$

답 $-4\le a\le 1$

091-2 모든 실수 x에 대하여 부등식

$-x^2+(m+3)x-m<3$

이 성립한다. 즉 부등식 $x^2-(m+3)x+m+3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+3)x+m+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(m+3)^2-4(m+3)<0$

$m^2+2m-3<0, \qquad (m+3)(m-1)<0$

$\therefore -3<m<1$

답 $-3<m<1$

092-1 이차함수 $y=-x^2+2x$의 그래프가 직선 $y=2kx+k-1$보다 항상 아래쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식

$-x^2+2x<2kx+k-1$

이 성립한다. 즉 부등식 $x^2+2(k-1)x+k-1>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)<0$

$k^2-3k+2<0, \qquad (k-1)(k-2)<0$

$\therefore 1<k<2$

답 $1<k<2$

092-2 이차함수 $y=x^2+x-5$의 그래프가 직선 $y=ax+7$보다 위쪽에 있으면 $x^2+x-5>ax+7$에서

$x^2-(a-1)x-12>0$

이 부등식의 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이므로 이차방정식 $x^2-(a-1)x-12=0$의 두 근이 $x=b$ 또는 $x=4$이다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+4=a-1,\ 4b=-12$

$\therefore a=2,\ b=-3$

답 $a=2,\ b=-3$

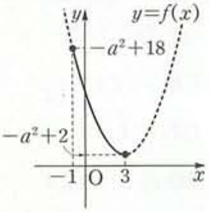
093-1 부등식 $x^2-6x>a^2-11$에서

$x^2-6x-a^2+11>0$

$f(x)=x^2-6x-a^2+11$로 놓으면

$f(x)=(x-3)^2-a^2+2$

$-1\le x\le 3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립해야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉 $f(x)$의 최솟값이 $f(3)$이므로 $f(3)>0$에서

$-a^2+2>0,\quad a^2<2$

$\therefore -\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개이다. 답 3

094-1 해가 $x\le-2$ 또는 $x\ge5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-5)\ge0$

$\therefore x^2-3x-10\ge0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\ge0$과 같으므로

$a=-3,\ b=-10$

답 $a=-3,\ b=-10$

094-2 해가 $-1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore x^2-2x-3<0$ …… ㉠

주어진 부등식 $ax^2+bx+c>0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$ax^2-2ax-3a>0$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-2a,\ c=-3a$ …… ㉡

㉡을 $bx^2+ax-c<0$에 대입하면

$-2ax^2+ax+3a<0$

양변을 $-a$로 나누면

$2x^2-x-3<0\ (\because -a>0)$

$(x+1)(2x-3)<0$

$\therefore -1<x<\frac{3}{2}$

답 $-1<x<\frac{3}{2}$

095-1 (1) $\begin{cases} x^2+4x-5\le0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+x-6\le0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

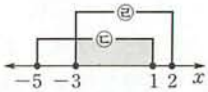
㉠에서 $(x+5)(x-1)\le0$

$\therefore -5\le x\le1$ …… ㉢

㉡에서 $(x+3)(x-2)\le0$

$\therefore -3\le x\le2$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면



$-3\le x\le1$

(2) $|x^2-5x|<6$에서 $-6<x^2-5x<6$

(i) $-6<x^2-5x$에서 $x^2-5x+6>0$

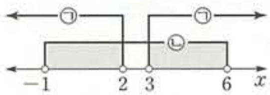
$(x-2)(x-3)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>3$ …… ㉠

(ii) $x^2-5x<6$에서 $x^2-5x-6<0$

$(x+1)(x-6)<0$

$\therefore -1<x<6$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-1<x<2$ 또는 $3<x<6$

답 (1) $-3\le x\le1$ (2) $-1<x<2$ 또는 $3<x<6$

096-1 $\begin{cases} x^2-3x+2<0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-4ax+3a^2<0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-1)(x-2)<0\quad \therefore 1<x<2$

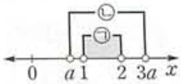
㉡에서 $(x-a)(x-3a)<0$

(i) $a<3a$, 즉 $a>0$일 때, $a<x<3a$

(ii) $a=3a$, 즉 $a=0$일 때, 해는 없다.

(iii) $a>3a$, 즉 $a<0$일 때, $3a<x<a$

㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1<x<2$가 되도록 ㉠, ㉡의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 ㉡의 해는



$a<x<3a$

따라서 $0<a\le1$, $3a\ge2$이므로

$\frac{2}{3}\le a\le1$ 　　답 $\frac{2}{3}\le a\le1$

Remark

$a=\frac{2}{3}$이면 ㉡의 해가 $\frac{2}{3}<x<2$이므로 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1<x<2$이다. 또 $a=1$이면 ㉡의 해가 $1<x<3$이므로 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 $1<x<2$이다. 즉 $a=\frac{2}{3}$, $a=1$은 모두 주어진 조건을 만족시키므로 a의 값의 범위에 포함된다.

097-1 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 방정식이 실근을 가지므로

$D_1=k^2-4\ge0,\quad (k+2)(k-2)\ge0$

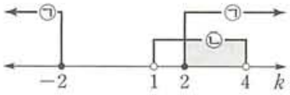
$\therefore k\le-2$ 또는 $k\ge2$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $x^2-2kx+5k-4=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 방정식이 허근을 가지므로

$\frac{D_2}{4}=k^2-(5k-4)<0$

$k^2-5k+4<0,\quad (k-1)(k-4)<0$

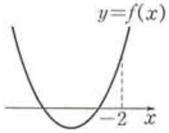
$\therefore 1<k<4$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$2\le k<4$ 　　답 $2\le k<4$

098-1 $f(x)=x^2+mx+2m-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 작으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=m^2-4(2m-3)\ge0$

$m^2-8m+12\ge0,\quad (m-2)(m-6)\ge0$

$\therefore m\le2$ 또는 $m\ge6$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $f(-2)=4-2m+2m-3=1>0$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이

$x=-\frac{m}{2}$이므로 　$-\frac{m}{2}<-2$

$\therefore m>4$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$m\ge6$ 　　답 $m\ge6$

099-1 세 수 $x-1$, x, $x+1$이 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 $x>1$이고

$(x-1)+x>x+1$

$\therefore x>2$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$(x-1)^2+x^2<(x+1)^2$

$x^2-4x<0,\quad x(x-4)<0$

$0<x<4$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$2<x<4$ 　　답 $2<x<4$

중단원 연습 문제

본책 274~277쪽

01 ③ 　**02** -12 　**03** $a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

04 $-7<x<-5$ 　**05** ① 　**06** 5

07 $1\le k<3$ 　**08** ③ 　**09** $-1<a\le2$

10 ③ 　**11** 4 　**12** 140 　**13** ⑤

14 $k\le-2$ 또는 $k\ge2$ 　**15** ① 　**16** 21

17 14 　**18** ③ 　**19** ② 　**20** 4 　**21** 18

01 전략 x^2의 계수가 a이므로 $a=0$인 경우와 $a\ne0$인 경우로 나누어 푼다.

풀이 (i) $a=0$일 때,

$-1\le0$이므로 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $a\ne0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+ax+a-1$의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$a<0$ 　　$\cdots\cdots$ ㉠

또 이차방정식 $ax^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a(a-1)\le0$

$3a^2-4a\ge0,\quad a(3a-4)\ge0$

$\therefore a\le0$ 또는 $a\ge\frac{4}{3}$ 　　$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면 　$a<0$

(i), (ii)에서 　$a\le0$

따라서 정수 a의 최댓값은 0이다.

답 ③

Remark

문제에서 이차부등식이라는 조건이 없으므로 x^2의 계수인 a를 $a=0$인 경우와 $a\neq0$인 경우로 나누어 풀어야 한다.

02

(전략) $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<g(x)$가 성립해야 한다.

풀이 이차함수 $y=-x^2-4x-7$의 그래프가 직선 $y=mx+m$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2-4x-7<mx+m$, 즉

$$x^2+(m+4)x+m+7>0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2+(m+4)x+m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(m+4)^2-4(m+7)<0$$

$$m^2+4m-12<0, \quad (m+6)(m-2)<0$$

$$\therefore -6<m<2$$

따라서 $\alpha=-6$, $\beta=2$이므로

$$\alpha\beta=-12$$

답 -12

03

문제이해 • $0\le x\le3$에서 함수 $y=x^2-x$의 그래프가 직선 $y=-3x-a^2+5$보다 항상 위쪽에 있으려면 $0\le x\le3$에서 부등식 $x^2-x>-3x-a^2+5$, 즉

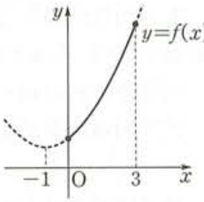
$$x^2+2x+a^2-5>0$$

이 항상 성립해야 한다. ▸ 40% 배점

해결과정 • $f(x)=x^2+2x+a^2-5$로 놓으면

$$f(x)=(x+1)^2+a^2-6$$

$0\le x\le3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립해야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



▸ 40% 배점

답구하기 • 즉 $0\le x\le3$에서 $f(x)$의 최솟값이 $f(0)$이므로 $f(0)>0$에서

$$a^2-5>0$$

$$(a+\sqrt{5})(a-\sqrt{5})>0$$

$$\therefore a<-\sqrt{5} \text{ 또는 } a>\sqrt{5}$$ ▸ 20% 배점

답 $a<-\sqrt{5}$ 또는 $a>\sqrt{5}$

Remark

$0\le x\le3$에서 이차함수 $y=f(x)$는 x의 값이 커질수록 y의 값도 커진다. 따라서 $f(0)>0$이면 $f(3)>f(0)>0$이므로 $f(0)>0$만 확인하면 된다.

04

(전략) 먼저 주어진 해를 이용하여 x^2의 계수가 1인 이차부등식을 만든다.

풀이 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x-\frac{1}{14}\right)\left(x-\frac{1}{10}\right)<0$$

$$\therefore x^2-\frac{6}{35}x+\frac{1}{140}<0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

주어진 부등식 $ax^2+bx+c>0$과 부등식 ㉠의 부등호의 방향이 다르므로 $a<0$

㉠의 양변에 a를 곱하면

$$ax^2-\frac{6}{35}ax+\frac{1}{140}a>0$$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$$b=-\frac{6}{35}a,\ c=\frac{1}{140}a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 $4cx^2-2bx+a>0$에 대입하면

$$\frac{1}{35}ax^2+\frac{12}{35}ax+a>0$$

양변에 $\frac{35}{a}$를 곱하면

$$x^2+12x+35<0\ (\because a<0)$$

$$(x+7)(x+5)<0$$

$$\therefore -7<x<-5$$

답 $-7<x<-5$

다른 풀이 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{14}<x<\frac{1}{10}$이므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{10}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{a}=\frac{1}{14}+\frac{1}{10},\ \frac{c}{a}=\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{10}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=-\frac{6}{35},\ \frac{c}{a}=\frac{1}{140} \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편 $a<0$이므로 부등식 $4cx^2-2bx+a>0$의 양변을 a로 나누면

$$4\cdot\frac{c}{a}x^2-2\cdot\frac{b}{a}x+1<0$$

㉢을 대입하면 $\frac{1}{35}x^2+\frac{12}{35}x+1<0$

$x^2+12x+35<0,\quad (x+7)(x+5)<0$

$\therefore -7<x<-5$

05 전략 $a\le f(x)<b$는 연립부등식 $\begin{cases} f(x)\ge a \\ f(x)<b \end{cases}$를 나타낸다.

풀이 (i) $2\le x^2-x$에서 $x^2-x-2\ge0$

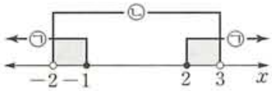
$(x+1)(x-2)\ge0$

$\therefore x\le-1$ 또는 $x\ge2$ …… ㉠

(ii) $x^2-x<6$에서 $x^2-x-6<0$

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-2<x\le-1$ 또는 $2\le x<3$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=2$이므로

$\alpha\beta=-2$

답 ①

06 해결과정 • 이차방정식 $x^2+ax-2a+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$D_1=a^2-4(-2a+5)>0$

$a^2+8a-20>0$

$(a+10)(a-2)>0$

$\therefore a<-10$ 또는 $a>2$ …… ㉠ ➜ 30% 배점

또 이차방정식 $x^2-(a-4)x-2a+8=0$의 판별식을 D_2라 하면 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로

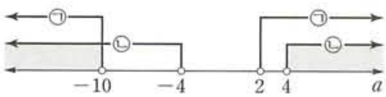
$D_2=(a-4)^2-4(-2a+8)>0$

$a^2-8a+16+8a-32>0$

$a^2-16>0$

$(a+4)(a-4)>0$

$\therefore a<-4$ 또는 $a>4$ …… ㉡ ➜ 30% 배점



답구하기 • ㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$a<-10$ 또는 $a>4$ ➜ 20% 배점

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. ➜ 20% 배점

답 5

07 전략 이차방정식의 두 근 α, β가 모두 양수이면 $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$이다.

풀이 이차방정식 $x^2-2(k+1)x-2k+6=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 하면

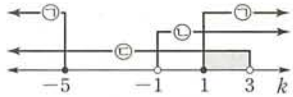
(i) $\frac{D}{4}=(k+1)^2-(-2k+6)\ge0$

$k^2+4k-5\ge0,\quad (k+5)(k-1)\ge0$

$\therefore k\le-5$ 또는 $k\ge1$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=2(k+1)>0\quad \therefore k>-1$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=-2k+6>0\quad \therefore k<3$ …… ㉢



㉠, ㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면

$1\le k<3$

답 $1\le k<3$

Remark 이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라 할 때

① 두 근이 모두 양 ➡ $D\ge0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근의 모두 음 ➡ $D\ge0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호 ➡ $\alpha\beta<0$

08 전략 모든 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립하려면 $a>0$, $b^2-4ac<0$ 또는 $a=0$, $b=0$, $c>0$이어야 한다.

풀이 주어진 부등식의 해가 없으려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(m-2)x^2-2(m-2)x+3>0$ …… ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $m-2=0$, 즉 $m=2$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $m-2\ne0$, 즉 $m\ne2$일 때,

이차함수 $y=(m-2)x^2-2(m-2)x+3$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$m-2>0\quad \therefore m>2$ …… ㉡

또 이차방정식 $(m-2)x^2-2(m-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-2)\}^2-3(m-2)<0$

$m^2-7m+10<0,\quad (m-2)(m-5)<0$

$\therefore 2<m<5$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면 $2<m<5$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m의 값의 범위는

$2\le m<5$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 m은 2, 3, 4의 3개이다. 답 ③

09 문제이해 • 함수 $y=2x^2-4x+3$의 그래프가 함수 $y=ax^2-2ax$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 부등식

$2x^2-4x+3>ax^2-2ax$, 즉

$(2-a)x^2+2(a-2)x+3>0$ …… ㉠

이 성립한다. ➜ 30% 배점

해결과정 • (i) $2-a=0$, 즉 $a=2$일 때,

$3>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $2-a\ne0$, 즉 $a\ne2$일 때,

이차함수 $y=(2-a)x^2+2(a-2)x+3$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$2-a>0\quad \therefore a<2$ …… ㉡

또 이차방정식 $(2-a)x^2+2(a-2)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-3(2-a)<0$

$(a-2)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<2$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면

$-1<a<2$ ➜ 50% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$-1<a\le2$ ➜ 20% 배점

답 $-1<a\le2$

10 전략 $f(x)>0$과 $f(x)\le g(x)$를 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선 위에 나타낸다.

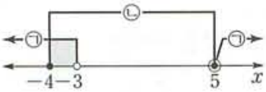
풀이 $0<f(x)\le g(x) \iff \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$

주어진 그림에서 부등식 $f(x)>0$의 해는

$x<-3$ 또는 $x>5$ …… ㉠

또 주어진 그림에서 $f(x)\le g(x)$의 해는

$-4\le x\le5$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-4\le x<-3$ 답 ③

11 전략 각 부등식을 풀어 조건을 만족시키도록 수직선 위에 나타낸다.

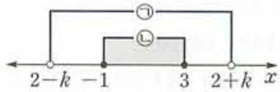
풀이 $|x-2|<k$에서 $\quad -k<x-2<k$

$\therefore 2-k<x<k+2$ …… ㉠

$x^2-2x-3\le0$에서 $\quad (x+1)(x-3)\le0$

$\therefore -1\le x\le3$ …… ㉡

㉡을 만족시키는 정수 x가 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이므로 ㉠은 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $2-k<-1$에서 $\quad k>3$

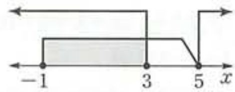
(ii) $3<2+k$에서 $\quad k>1$

(i), (ii)에서 $\quad k>3$

따라서 k의 최솟값은 4이다.

답 4

12 문제이해 • 두 부등식을 동시에 만족시키는 해가 $-1\le x\le3$ 또는 $x=5$이려면 다음 그림과 같이 부등식 $x^2+ax+b\le0$의 해가 $-1\le x\le5$, 부등식 $x^2+cx+d\ge0$의 해가 $x\le3$ 또는 $x\ge5$이어야 한다.



➜ 30% 배점

해결과정 • 해가 $-1\le x\le5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)\le0,\quad x^2-4x-5\le0$

$\therefore a=-4,\ b=-5$ ➜ 30% 배점

또 해가 $x\le3$ 또는 $x\ge5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-5)\ge0,\quad x^2-8x+15\ge0$

$\therefore c=-8,\ d=15$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore ab-cd=20-(-120)=140$

➜ 10% 배점

답 140

13 전략 연립부등식의 해를 구한 후, 이차부등식을 만들어 a, b의 값을 구한다.

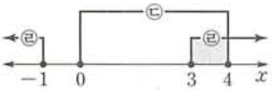
풀이 $\begin{cases} x^2\le4x & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-3\ge2x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x(x-4)\le0$

$\therefore 0\le x\le4$ …… ㉢

㉢에서 $x^2-2x-3\geq0$, $(x+1)(x-3)\geq0$

$\therefore x\leq-1$ 또는 $x\geq3$ …… ㉣



㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면 $3\leq x\leq4$

해가 $3\leq x\leq4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)(x-4)\leq0$ $\therefore x^2-7x+12\leq0$

양변에 -2를 곱하면

$-2x^2+14x-24\geq0$

이 부등식이 $ax^2+bx-24\geq0$과 같으므로

$a=-2$, $b=14$

$\therefore a+b=12$

답 ⑤

14 전략 이차방정식이 실근을 가질 조건을 생각해 본다.

풀이 이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$이 실근을 가질 조건은 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4(-k+3)\geq0$

$k^2+4k-12\geq0$, $(k+6)(k-2)\geq0$

$\therefore k\leq-6$ 또는 $k\geq2$ …… ㉠

방정식 $(k+5)x^2-2(2k+1)x+k+5=0$은

(i) $k+5=0$, 즉 $k=-5$일 때,

$18x=0$에서 $x=0$이므로 실근을 갖는다.

(ii) $k+5\neq0$ 즉 $k\neq-5$일 때,

이차방정식 $(k+5)x^2-2(2k+1)x+k+5=0$이 실근을 가질 조건은 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

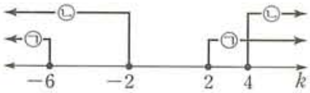
$\frac{D_2}{4}=(2k+1)^2-(k+5)^2\geq0$

$3k^2-6k-24\geq0$, $k^2-2k-8\geq0$

$(k+2)(k-4)\geq0$

$\therefore k<-5$ 또는 $-5<k\leq-2$ 또는 $k\geq4$

(i), (ii)에서 $k\leq-2$ 또는 $k\geq4$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 구하는 k의 값의 범위는

$k\leq-2$ 또는 $k\geq2$

답 $k\leq-2$ 또는 $k\geq2$

다른 풀이 이차방정식 $x^2+kx-k+3=0$이 허근을 가질 조건은

$k^2+4k-12<0$, $(k+6)(k-2)<0$

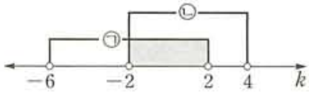
$\therefore -6<k<2$ …… ㉠

$k\neq-5$일 때, 이차방정식

$(k+5)x^2-2(2k+1)x+k+5=0$이 허근을 가질 조건은

$k^2-2k-8<0$, $(k+2)(k-4)<0$

$\therefore -2<k<4$ …… ㉡



㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-2<k<2$ …… ㉢

주어진 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 실수 전체에서 ㉢을 제외하면 된다.

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$k\leq-2$ 또는 $k\geq2$

Remark

주어진 두 방정식

$x^2+kx-k+3=0$ …… ㉠

$(k+5)x^2-2(2k+1)x+k+5=0$ …… ㉡

중 적어도 하나가 실근을 갖는 경우는 다음과 같다.

㉠	실근	실근	허근
㉡	실근	허근	실근

15 전략 이차방정식의 두 근을 α, β라 할 때, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 크면 $\alpha+\beta<0$이다.

풀이 이차방정식 $x^2+(a^2-4a+3)x-a+2=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$\alpha<0$, $\beta>0$, $|\alpha|>|\beta|$

$\therefore \alpha+\beta<0$, $\alpha\beta<0$

(i) $\alpha+\beta<0$에서

$-(a^2-4a+3)<0$, $a^2-4a+3>0$

$(a-1)(a-3)>0$

$\therefore a<1$ 또는 $a>3$ …… ㉠

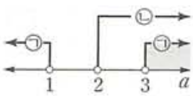
(ii) $\alpha\beta<0$에서

$-a+2<0$

$\therefore a>2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$a>3$



답 ①

16 (전략) 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{f(x)}$의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

(풀이) 모든 실수 x에 대하여

$\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x+5}$

의 값이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여

$(k+1)x^2-(k+1)x+5\geq 0$ ...... ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k+1=0$, 즉 $k=-1$일 때,

$5\geq 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k+1\neq 0$, 즉 $k\neq -1$일 때,

이차함수 $y=(k+1)x^2-(k+1)x+5$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$k+1>0$ $\quad\therefore k>-1$ ...... ㉡

또 이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-20(k+1)\leq 0$

$k^2-18k-19\leq 0,\quad (k+1)(k-19)\leq 0$

$\therefore -1\leq k\leq 19$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서 공통부분을 구하면 $\quad -1<k\leq 19$

(i), (ii)에서 $-1\leq k\leq 19$이므로 정수 k의 개수는 21이다.

답 21

17 문제이해 • $|[x]^2-6[x]-8|<8$에서

$-8<[x]^2-6[x]-8<8$ ➜ 10% 배점

해결과정 • (i) $-8<[x]^2-6[x]-8$에서

$[x]^2-6[x]>0,\quad [x]([x]-6)>0$

$\therefore [x]<0$ 또는 $[x]>6$ ... ㉠ ➜ 30% 배점

(ii) $[x]^2-6[x]-8<8$에서

$[x]^2-6[x]-16<0,\quad ([x]+2)([x]-8)<0$

$\therefore -2<[x]<8$ ... ㉡ ➜ 30% 배점

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-2<[x]<0$ 또는 $6<[x]<8$ ➜ 10% 배점

답구하기 • $[x]$는 정수이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=7$

$\therefore -1\leq x<0$ 또는 $7\leq x<8$

$\therefore a+b+c+d=-1+0+7+8$

$=14$ ➜ 20% 배점

답 14

18 (전략) 먼저 주어진 연립부등식의 해를 구한다.

(풀이) $x^2+ax-2a^2\leq 0$에서 $\quad (x+2a)(x-a)\leq 0$

$\therefore -2a\leq x\leq a$ ($\because a>0$)

또 $x^2-ax-2a^2<0$에서 $\quad (x+a)(x-2a)<0$

$\therefore -a<x<2a$ ($\because a>0$)

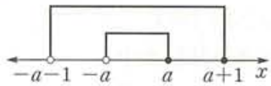
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $\quad -a<x\leq a$

ㄱ. 연립부등식의 해가 $-a<x\leq a$이므로 정수 0은 항상 연립부등식을 만족시킨다.

$\therefore f(a)\geq 1$

ㄴ. $f(a)=4$이려면 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이어야 하므로 4개의 정수의 합은 $\quad -1+0+1+2=2$

ㄷ. $f(a+1)$의 값은 $-a-1<x\leq a+1$을 만족시키는 정수 x의 개수이고, $f(a)$의 값은 $-a<x\leq a$를 만족시키는 정수 x의 개수이다.



위의 그림에서 $-a-1<x\leq -a$인 정수 1개와 $a<x\leq a+1$인 정수 1개가 $f(a+1)$에 포함되므로 $\quad f(a+1)=f(a)+2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

19 (전략) 부등식 $x^2+2x\geq 0$과 주어진 해를 이용하여 부등식 $x^2+px+q<0$의 해를 유추한다.

(풀이) $x^2+2x\geq 0$에서 $\quad x(x+2)\geq 0$

$\therefore x\leq -2$ 또는 $x\geq 0$

주어진 연립부등식의 해가 $0\leq x<2$이기 위해서는 $x^2+px+q<0$의 해가 $k<x<2$이어야 한다.

(단, $-2\leq k<0$)

즉 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이 $k,\ 2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\quad k+2=-p,\ 2k=q$

$\therefore p=-k-2,\ q=2k$

이를 $|p|+|q|=3$에 대입하면

$|-k-2|+|2k|=3,\quad |k+2|+|2k|=3$

$-2\leq k<0$이므로 $\quad k+2-2k=3\quad \therefore k=-1$

따라서 $p=-1,\ q=-2$이므로

$pq=2$

답 ②

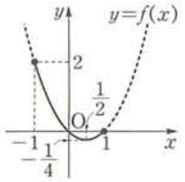
20 (전략) 부등식 $A\leq B\leq C$는 $\begin{cases}A\leq B\\B\leq C\end{cases}$로 변형하여 푼다.

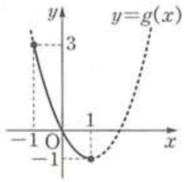
(풀이) 부등식 $x+a\leq x^2\leq 2x+b$의 해는 연립부등식

$\begin{cases}x+a\leq x^2\\x^2\leq 2x+b\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}x^2-x\geq a & \cdots\cdots ㉠\\x^2-2x\leq b & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

의 해와 같다.

$f(x)=x^2-x$, $g(x)=x^2-2x$로 놓으면 $-1\le x\le 1$에서 두 함수의 그래프는 다음과 같다.





이때 $-\frac{1}{4}\le f(x)\le 2$, $-1\le g(x)\le 3$이므로

$-1\le x\le 1$에서 ㉠, ㉡이 항상 성립하려면

$a\le -\frac{1}{4}$, $b\ge 3$

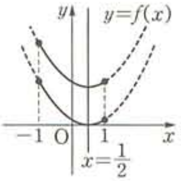
$\therefore b-4a\ge 3+1=4$

따라서 구하는 최솟값은 4이다. 답 4

다른 풀이 1 (i) $-1\le x\le 1$에서 $x+a\le x^2$이 항상 성립하므로 $f(x)=x^2-x-a$로 놓으면 주어진 범위에서 $f(x)\ge 0$을 만족시키면 된다.

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-a-\frac{1}{4}$

이므로 오른쪽 그림에서



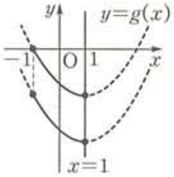
$f\left(\frac{1}{2}\right)=-a-\frac{1}{4}\ge 0$

$\therefore a\le -\frac{1}{4}$

(ii) $-1\le x\le 1$에서 $x^2\le 2x+b$가 항상 성립하므로 $g(x)=x^2-2x-b$로 놓으면 주어진 범위에서 $g(x)\le 0$을 만족시키면 된다.

$g(x)=(x-1)^2-b-1$

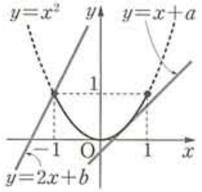
이므로 오른쪽 그림에서



$g(-1)=1+2-b\le 0$

$\therefore b\ge 3$

다른 풀이 2



(i) $-1\le x\le 1$에서 $x+a\le x^2$이려면 직선 $y=x+a$가 곡선 $y=x^2$에 접하거나 곡선보다 아래쪽에 있으면 된다. 직선 $y=x+a$가 곡선 $y=x^2$에 접할 때에는 이차방정식 $x+a=x^2$, 즉 $x^2-x-a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1+4a=0 \qquad \therefore a=-\frac{1}{4}$

따라서 a의 값의 범위는 $\quad a\le -\frac{1}{4}$

(ii) $-1\le x\le 1$에서 $x^2\le 2x+b$이려면 직선 $y=2x+b$가 곡선 $y=x^2$과 점 $(-1,\ 1)$에서 만나거나 곡선보다 위쪽에 있으면 된다.

직선 $y=2x+b$가 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때에는

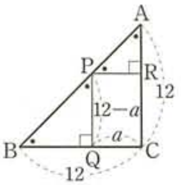
$1=2\cdot(-1)+b \qquad \therefore b=3$

따라서 b의 값의 범위는 $\quad b\ge 3$

21

전략 □PQCR, △APR, △PBQ의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 직각이등변삼각형 ABC와 직사각형 PQCR에 대하여



$\angle PBQ=\angle BPQ=45°$,

$\angle APR=\angle PAR=45°$

이므로 △ABC, △APR, △PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.

$\overline{QC}=a$이므로 $\quad 0<a<12$

$\overline{BQ}=12-a$이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\therefore$ □PQCR$=a(12-a)$, △PBQ$=\frac{1}{2}(12-a)^2$,

△APR$=\frac{1}{2}a^2$

주어진 조건에 의하여

□PQCR > △PBQ, □PQCR > △APR

이므로

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad 12a-a^2>\frac{1}{2}(144-24a+a^2)$

$24a-2a^2>144-24a+a^2$

$3a^2-48a+144<0$, $\quad a^2-16a+48<0$

$(a-12)(a-4)<0$

$\therefore 4<a<12 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $\quad 12a-a^2>\frac{1}{2}a^2$, $\quad \frac{3}{2}a^2-12a<0$

$\frac{3}{2}a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서 공통부분을 구하면 $\quad 4<a<8$

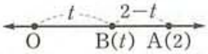
따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$ 답 18

11 평면좌표

유제 본책 285~304쪽

100-1 점 B의 좌표를 $t\ (0<t<2)$라 하면



$\overline{OB}:\overline{BA}=\overline{OA}:\overline{OB}$에서

$t:(2-t)=2:t$

$t^2=2(2-t),\qquad t^2+2t-4=0$

$\therefore t=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $0<t<2$이므로 $\quad t=-1+\sqrt{5}$

따라서 점 B의 좌표는 $-1+\sqrt{5}$이다.

답 $-1+\sqrt{5}$

100-2 $\overline{AC}=2\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AC}^2=4\overline{BC}^2$

즉 $(1+7)^2+(7-a)^2=4\{(1+1)^2+(7-3)^2\}$이므로

$a^2-14a+113=80,\qquad a^2-14a+33=0$

$(a-3)(a-11)=0\qquad \therefore a=3$ 또는 $a=11$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

14

답 14

100-3 두 점 A, B 사이의 거리 $\overline{AB}$는

$\overline{AB}=\sqrt{\{0-(t-2)\}^2+(2t-1-0)^2}$

$=\sqrt{t^2-4t+4+4t^2-4t+1}$

$=\sqrt{5t^2-8t+5}$

이때 $\overline{AB}\le3$이므로

$\sqrt{5t^2-8t+5}\le3$

양변을 제곱하면

$5t^2-8t+5\le9,\qquad 5t^2-8t-4\le0$

$(5t+2)(t-2)\le0\qquad \therefore -\dfrac{2}{5}\le t\le2$

따라서 $M=2,\ m=-\dfrac{2}{5}$이므로

$M+m=\dfrac{8}{5}$

답 $\dfrac{8}{5}$

101-1 점 P의 좌표를 $(a,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+(a+5)^2=(a-4)^2+(a+1)^2$

$2a^2+6a+29=2a^2-6a+17$

$12a=-12\qquad \therefore a=-1$

$\therefore P(-1,\ -1)$

답 $(-1,\ -1)$

101-2 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-2)^2+4^2=(a-6)^2+(-8)^2$

$a^2-4a+20=a^2-12a+100$

$8a=80\qquad \therefore a=10\qquad \therefore P(10,\ 0)$

또 점 Q의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$이므로

$(-2)^2+(b+4)^2=(-6)^2+(b-8)^2$

$b^2+8b+20=b^2-16b+100$

$24b=80\qquad \therefore b=\dfrac{10}{3}\qquad \therefore Q\left(0,\ \dfrac{10}{3}\right)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-10)^2+\left(\dfrac{10}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$

답 $\dfrac{10\sqrt{10}}{3}$

102-1 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AB}^2=(5+1)^2+2^2=40$

$\overline{BC}^2=(a-5)^2+(-2-2)^2=a^2-10a+41$

$\overline{CA}^2=(-1-a)^2+2^2=a^2+2a+5$

삼각형 ABC가 $\angle C=90°$인 직각삼각형이려면 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$이어야 하므로

$a^2-10a+41+a^2+2a+5=40$

$a^2-4a+3=0,\qquad (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

답 1, 3

103-1 점 P가 y축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(0,\ a)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{2^2+(a-3)^2\}+\{(-1)^2+(a+7)^2\}$

$=2a^2+8a+63$

$=2(a+2)^2+55$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-2$일 때 최솟값 55를 갖고, 이때의 점 P의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

답 최솟값 : 55, 점 P의 좌표 : $(0,\ -2)$

103-2 점 P가 직선 $y=x+3$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ a+3)$이라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=\{(a-4)^2+(a+5)^2\}+\{(a-1)^2+(a+8)^2\}$

$=4a^2+16a+106$

$=4(a+2)^2+90$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=-2$일 때 최솟값 90을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-2,\ 1)$이다.

답 $(-2,\ 1)$

104-1 삼각형 ABC의 외심을 P라 하면 점 P에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$3^2+1^2=(3-a)^2+1^2$

$10=9-6a+a^2+1,\qquad a^2-6a=0$

$a(a-6)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=6$

그런데 $a=0$이면 점 B가 점 A와 일치하므로

$a\neq 0$

$\therefore a=6$

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$3^2+1^2=3^2+(1-b)^2$

$10=9+1-2b+b^2,\qquad b^2-2b=0$

$b(b-2)=0$

$\therefore b=0$ 또는 $b=2$

그런데 $b=0$이면 점 C가 점 A와 일치하므로

$b\neq 0$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=8$

답 8

104-2 삼각형 ABC의 외심을 $P(a,\ b)$라 하면 점 P에서 세 점 A, B, C에 이르는 거리가 모두 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$

$\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+(b-6)^2=(a+3)^2+(b-5)^2$

$a^2+b^2-12b+36=a^2+6a+9+b^2-10b+25$

$-6a-2b=-2$

$\therefore 3a+b=1$ …… ㉠

$\overline{AP}=\overline{CP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$이므로

$a^2+(b-6)^2=(a-4)^2+(b-4)^2$

$a^2+b^2-12b+36=a^2-8a+16+b^2-8b+16$

$8a-4b=-4$

$\therefore 2a-b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

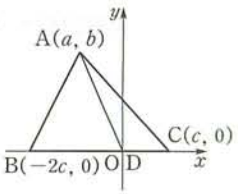
$a=0,\ b=1$

따라서 $P(0,\ 1)$이므로 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{AP}=5$

답 5

105-1 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 D는 원점이 된다.



$A(a,\ b)$, $C(c,\ 0)$이라 하면 $B(-2c,\ 0)$이므로

$\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=\{(a+2c)^2+b^2\}+2\{(a-c)^2+b^2\}$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2=3(a^2+b^2)+6c^2$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$

$\therefore \overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=3\overline{AD}^2+6\overline{CD}^2$

답 풀이 참조

106-1 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{1\cdot 1+2\cdot(-2)}{1+2},\ \dfrac{1\cdot(-3)+2\cdot 6}{1+2}\right)$

$\therefore P(-1,\ 3)$

점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{4\cdot 1-3\cdot(-2)}{4-3},\ \dfrac{4\cdot(-3)-3\cdot 6}{4-3}\right)$

$\therefore Q(10,\ -30)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(10+1)^2+(-30-3)^2}$

$=\sqrt{11^2+9\cdot 11^2}$

$=11\sqrt{10}$

답 $11\sqrt{10}$

106-2 점 P의 y좌표가 -3이므로

$\dfrac{b\cdot(-5)+1\cdot 3}{b+1}=-3$

$-5b+3=-3b-3,\qquad 2b=6$

$\therefore b=3$

즉 점 P는 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점이고 점 P의 x좌표가 5이므로

$\dfrac{3\cdot a+1\cdot 8}{3+1}=5,\qquad 3a+8=20$

$\therefore a=4$

따라서 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\cdot 4-1\cdot 8}{3-1},\ \dfrac{3\cdot(-5)-1\cdot 3}{3-1}\right)$

$\therefore Q(2,\ -9)$

답 $(2,\ -9)$

107-1 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서

$\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

즉 점 C는 $\overline{AB}$를 4 : 1로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{4\cdot1-1\cdot4}{4-1}=0$$

$$b=\frac{4\cdot5-1\cdot2}{4-1}=6$$

$\therefore a+b=6$ 답 6

다른 풀이 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$에서 점 B는 $\overline{AC}$를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{3\cdot a+1\cdot4}{3+1}=1,\ \frac{3\cdot b+1\cdot2}{3+1}=5$$

$3a+4=4,\ 3b+2=20$

$\therefore a=0,\ b=6$

$\therefore a+b=6$

107-2 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$이고, 점 C의 x좌표가 음수이므로 점 C는 $\overline{AB}$를 5 : 3으로 외분하는 점이다.

점 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

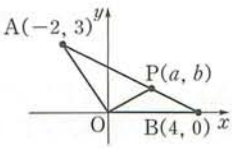
$$a=\frac{5\cdot(-6)-3\cdot2}{5-3}=-18$$

$$b=\frac{5\cdot7-3\cdot5}{5-3}=10$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-18,\ 10)$이다.

답 $(-18,\ 10)$

108-1 오른쪽 그림에서 $\triangle OAP=2\triangle OBP$이므로



$\overline{AP}=2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}:\overline{BP}=2:1$

즉 점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$a=\frac{2\cdot4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$$

$$b=\frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1}=1$$

$\therefore a-b=1$ 답 1

109-1 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{3+4}{2}\right)$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-4+3}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$

이므로

$$\frac{a+1}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}=\frac{b+3}{2}$$

$\therefore a=-2,\ b=4$ 답 $a=-2,\ b=4$

109-2 마름모의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{AC}$의 중점과 $\overline{BD}$의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5-3}{2},\ \frac{4+b}{2}\right)$$

$\overline{BD}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2},\ \frac{a+7}{2}\right)$$

이므로

$$\frac{4+b}{2}=\frac{a+7}{2}$$

$\therefore b=a+3$ …… ㉠

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2$

$(1-5)^2+(a-4)^2=(1-5)^2+(7-4)^2$

$a^2-8a+32=25,\quad a^2-8a+7=0$

$(a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=7$

그런데 $a=7$이면 두 점 B, D가 일치하므로 $a\neq7$

$\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$b=4$ 답 $a=1,\ b=4$

Remark 마름모의 성질

① 네 변의 길이가 모두 같다.
② 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

110-1 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+b+6}{3},\ \frac{2b-2a+a}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+b+6}{3},\ \frac{2b-a}{3}\right)$$

그런데 무게중심의 좌표가 $(0,\ 0)$이므로

$\frac{a+b+6}{3}=0 \quad \therefore a+b=-6$ …… ㉠

$\frac{2b-a}{3}=0 \quad \therefore 2b-a=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4,\ b=-2$

$\therefore ab=8$ 답 8

110-2 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(3, -1)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3,\ \frac{y_1+y_2}{2}=-1$$

$$\therefore x_1+x_2=6,\ y_1+y_2=-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(4, 6)$이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=4,\ \frac{y_2+y_3}{2}=6$$

$$\therefore x_2+x_3=8,\ y_2+y_3=12 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{CA}$의 중점의 좌표가 $(8, 7)$이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=8,\ \frac{y_3+y_1}{2}=7$$

$$\therefore x_3+x_1=16,\ y_3+y_1=14 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠+㉡+㉢을 하면

$$2(x_1+x_2+x_3)=30,\ 2(y_1+y_2+y_3)=24$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=15,\ y_1+y_2+y_3=12$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right),\ 즉\ (5, 4)$$

답 $(5, 4)$

다른 풀이 $D(3, -1)$, $E(4, 6)$, $F(8, 7)$이라 하면 $\triangle ABC$의 무게중심은 $\triangle DEF$의 무게중심과 일치하므로 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+4+8}{3},\ \frac{-1+6+7}{3}\right),\ 즉\ (5, 4)$$

111-1 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=1$에서

$$\{(x-2)^2+(y-1)^2\}-\{(x-3)^2+(y+2)^2\}=1$$

$$2x-6y-9=0$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$$2x-6y-9=0$$

답 $2x-6y-9=0$

중단원 연습 문제

○ 본책 305~309쪽

01 ③	02 풀이 참조	03 3		
04 풀이 참조		05 -3	06 30	
07 $(1, 14)$		08 ④	09 $4\sqrt{5}$	10 30
11 ④	12 ②	13 $\frac{4}{9}<t<\frac{3}{5}$		
14 200	15 ③	16 ③	17 $(9, 12)$	
18 ⑤	19 $\left(1, \frac{2}{3}\right)$	20 6	21 ⑤	22 ②

01 **전략** 점 P가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, a+1)$로 놓고 $\overline{AP}=\overline{BP}$임을 이용한다.

풀이 점 $P(a, b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$$b=a+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

즉 점 P의 좌표가 $(a, a+1)$이고, $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$$a^2+(a+1-5)^2=(a-2)^2+(a+1-1)^2$$

$$2a^2-8a+16=2a^2-4a+4$$

$$-4a=-12 \quad \therefore a=3$$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=4$

$$\therefore a^2+b^2=3^2+4^2=25$$

답 ③

02 **해결과정** 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$$\overline{AB}^2=a^2+(-b)^2=a^2+b^2$$

$$\overline{BC}^2=b^2+(a-b+b)^2=a^2+b^2$$

$$\overline{CA}^2=(-a-b)^2+(-a+b)^2$$

$$=2a^2+2b^2$$

이므로 $\quad \overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ ➜ 40% 배점

또 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$\overline{AB}=\overline{BC}$ ($\because \overline{AB}>0,\ \overline{BC}>0$) ➜ 30% 배점

답구하기 따라서 삼각형 ABC는 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형이다. ➜ 30% 배점

답 $\angle B=90°$인 직각이등변삼각형

03 **전략** 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0)$으로 놓고 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 구한다.

풀이 점 P가 x축 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면

$$\overline{AP}^2=a^2+(-1)^2=a^2+1$$

$$\overline{BP}^2=(a-2)^2+(-k)^2=a^2-4a+4+k^2$$

$$\therefore \overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2a^2-4a+5+k^2$$

$$=2(a-1)^2+3+k^2$$

즉 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$은 $a=1$일 때 최솟값 $3+k^2$을 갖는다.

따라서 $3+k^2=12$이므로

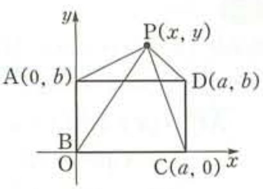
$$k^2=9$$

$$\therefore k=3\ (\because k>0)$$

답 3

04 **전략** 도형을 좌표평면 위에 나타낸 후, 좌표를 이용하여 각 선분의 길이의 제곱을 구해 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 점 B가 원점이다. 이때 직사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(0,\ b)$, $(a,\ 0)$이라 하면 꼭짓점 D의 좌표는 $(a,\ b)$이다.



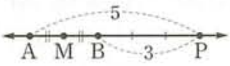
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2$$
$$\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$$
$$\therefore \overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$$

답 풀이 참조

05 전략 주어진 조건을 만족시키도록 수직선 위에 네 점 A, B, M, P를 나타내어 본다.

풀이 $\overline{AB}$의 중점 M과 $\overline{AB}$를 5 : 3으로 외분하는 점 P를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



즉 점 M은 $\overline{PB}$를 4 : 1로 외분하는 점이므로

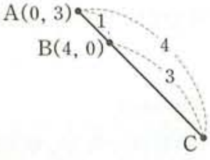
$a=4,\ b=1 \qquad \therefore b-a=-3$

답 -3

06 전략 $3\overline{AB}=\overline{BC}$를 만족시키도록 그림을 그려 점 C의 좌표를 구한다.

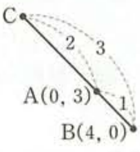
풀이 $3\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB} : \overline{BC}=1 : 3$

(i) 점 C가 점 B의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,
오른쪽 그림에서 점 C는 $\overline{AB}$를 4 : 3으로 외분하는 점이므로 점 C의 좌표는



$$\left(\frac{4\cdot 4-3\cdot 0}{4-3},\ \frac{4\cdot 0-3\cdot 3}{4-3}\right)$$
$\therefore C(16,\ -9)$

(ii) 점 C가 점 A의 방향으로 그은 선분 AB의 연장선 위에 있을 때,
오른쪽 그림에서 점 C는 $\overline{AB}$를 2 : 3으로 외분하는 점이므로 점 C의 좌표는



$$\left(\frac{2\cdot 4-3\cdot 0}{2-3},\ \frac{2\cdot 0-3\cdot 3}{2-3}\right)$$
$\therefore C(-8,\ 9)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(16,\ -9)$ 또는 $(-8,\ 9)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-8-16)^2+(9+9)^2}=\sqrt{900}=30$$

답 30

07 해결과정 • 점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$이므로

$$\frac{1+a}{2}=5,\ \frac{2+b}{2}=3$$
$1+a=10,\ 2+b=6$

$\therefore a=9,\ b=4 \qquad \therefore B(9,\ 4)$ ▶ 30% 배점

또 점 C의 좌표를 $(c,\ d)$라 하면 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{9+c}{2},\ \frac{4+d}{2}\right)$이므로

$$\frac{9+c}{2}=9,\ \frac{4+d}{2}=10$$
$9+c=18,\ 4+d=20$

$\therefore c=9,\ d=16 \qquad \therefore C(9,\ 16)$ ▶ 30% 배점

답구하기 • 평행사변형 ABCD에서 대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치하므로 점 D의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\frac{1+9}{2}=\frac{9+x}{2},\ \frac{2+16}{2}=\frac{4+y}{2}$$
$10=9+x,\ 18=4+y$

$\therefore x=1,\ y=14$

따라서 점 D의 좌표는 $(1,\ 14)$이다. ▶ 40% 배점

답 $(1,\ 14)$

08 전략 구하는 점의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 x와 y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P는 직선 $x+2y-7=0$ 위의 점이므로

$a+2b-7=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

선분 AP를 1 : 3으로 외분하는 점을 $Q(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{1\cdot a-3\cdot 5}{1-3}=-\frac{1}{2}a+\frac{15}{2}$$
$$y=\frac{1\cdot b-3\cdot 3}{1-3}=-\frac{1}{2}b+\frac{9}{2}$$

$\therefore a=-2x+15,\ b=-2y+9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-2x+15+2(-2y+9)-7=0$

$\therefore x+2y-13=0$

따라서 구하는 자취의 방정식은 $x+2y-13=0$이다.

답 ④

09 문제이해 • $x^2-xy-2y^2=0$에서

$(x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$ ➜ 20% 배점

해결과정 • (i) $x=-y$를 $x^2+2xy-3y^2=20$에 대입하면

$y^2-2y^2-3y^2=20$

$\therefore y^2=-5$

이를 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

(ii) $x=2y$를 $x^2+2xy-3y^2=20$에 대입하면

$4y^2+4y^2-3y^2=20, \quad y^2=4$

$\therefore y=\pm2$

$y=\pm2$를 $x=2y$에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ ➜ 50% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 두 점 (a, b), (c, d)의 좌표는 $(4, 2)$, $(-4, -2)$이므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(4+4)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$ ➜ 30% 배점

답 $4\sqrt{5}$

10 전략 $\overline{AP}=\overline{BP}$와 점 P가 직선 l 위에 있음을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2$

$-8a+16=-4b+4$

$\therefore 2a-b=3$ …… ㉠

점 P가 직선 l 위에 있으므로

$2a+3b=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{21}{8}, b=\frac{9}{4}$

$\therefore 8a+4b=30$

답 30

11 전략 삼각형 PAB가 이등변삼각형이 되기 위해서는 $\overline{AP}=\overline{BP}$, $\overline{AP}=\overline{AB}$, $\overline{BP}=\overline{AB}$ 중 적어도 하나를 만족시켜야 한다.

풀이 점 P가 직선 $y=-x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, -a)$라 하고 삼각형 PAB의 세 변의 길이의 제곱을 각각 구하면

$\overline{AP}^2=(a+2)^2+(-a-6)^2$
$=a^2+4a+4+a^2+12a+36$
$=2a^2+16a+40$

$\overline{BP}^2=(a-4)^2+(-a-4)^2$
$=a^2-8a+16+a^2+8a+16$
$=2a^2+32$

$\overline{AB}^2=(4+2)^2+(4-6)^2=40$

(i) $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$2a^2+16a+40=2a^2+32$

$16a=-8$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(ii) $\overline{AP}=\overline{AB}$일 때, $\overline{AP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$2a^2+16a+40=40, \quad 2a^2+16a=0$

$a(a+8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-8$

$\therefore P(-8, 8)$ 또는 $P(0, 0)$

그런데 $P(-8, 8)$이면 세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있으므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

$\therefore P(0, 0)$

(iii) $\overline{BP}=\overline{AB}$일 때, $\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$2a^2+32=40, \quad 2a^2=8$

$a^2=4 \quad \therefore a=\pm2$

$\therefore P(-2, 2)$ 또는 $P(2, -2)$

이상에서 점 P의 좌표가 될 수 없는 것은 ④이다.

답 ④

Remark

두 점 $A(-2, 6)$, $B(4, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=\frac{4-6}{4-(-2)}(x-4)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+\frac{16}{3}$

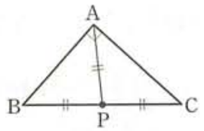
점 $P(-8, 8)$의 좌표를 대입하면

$8=-\frac{1}{3}\cdot(-8)+\frac{16}{3}$

따라서 점 $P(-8, 8)$은 직선 AB 위의 점이다.

12 전략 외심이 변 위에 있는 삼각형은 직각삼각형임을 이용한다.

풀이 $\triangle ABC$의 외심이 변 BC 위에 있으므로 $\triangle ABC$는 $\angle A=90°$인 직각삼각형이다.
$\triangle ABC$의 외심을 P라 하면



$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$$
$$=(2\overline{AP})^2$$
$$=4\{(-1-2)^2+(-1-1)^2\}$$
$$=52$$

답 ②

13 전략 점 P의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낸 후 x좌표와 y좌표가 양수임을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{t\cdot 5+(1-t)\cdot(-4)}{t+(1-t)}=9t-4$$

$$b=\frac{t\cdot(-2)+(1-t)\cdot 3}{t+(1-t)}=-5t+3$$

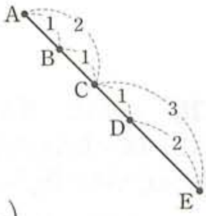
이때 점 P가 제1사분면 위의 점이므로

$9t-4>0,\ -5t+3>0$

$\therefore \frac{4}{9}<t<\frac{3}{5}$ 답 $\frac{4}{9}<t<\frac{3}{5}$

14 전략 주어진 조건을 이용하여 점 A, B, C, D, E를 한 직선 위에 나타낸 후, 점 A, C, E의 좌표를 각각 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서 점 B는 $\overline{AC}$의 중점이고 점 C는 $\overline{AD}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 C는 $\overline{BD}$의 중점이다.



$\therefore C\left(\frac{-1+3}{2},\ \frac{3+(-1)}{2}\right)$,

즉 $C(1,\ 1)$

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 B는 $\overline{AC}$의 중점이므로

$\frac{a+1}{2}=-1,\ \frac{b+1}{2}=3$

$\therefore a=-3,\ b=5$

$\therefore A(-3,\ 5)$

점 E는 $\overline{CD}$를 $3:2$로 외분하는 점이므로 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{3\cdot 3-2\cdot 1}{3-2},\ \frac{3\cdot(-1)-2\cdot 1}{3-2}\right)$$

$\therefore E(7,\ -5)$

$\therefore \overline{AE}^2=(7+3)^2+(-5-5)^2$

$=200$ 답 200

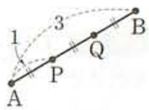
15 전략 두 점 P, Q가 $\overline{AB}$를 내분하는 점임을 이용한다.

풀이 ㄱ. 점 Q는 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot 1+1\cdot(-5)}{2+1},\ \frac{2\cdot 1+1\cdot 4}{2+1}\right),\ 즉\ (-1,\ 2)$$

따라서 점 Q는 제2사분면 위의 점이다.

ㄴ. 두 점 A, B에 대하여 점 P와 Q를 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 A는 선분 PB를 $1:3$으로 외분하는 점이다.



ㄷ. $d(A,\ Q)=d(P,\ B)$이므로

$$d(A,\ B)=d(A,\ P)+d(P,\ B)$$
$$=d(A,\ P)+d(A,\ Q)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

16 전략 점 C가 x축 위의 점이므로 점 C의 y좌표가 0임을 이용한다.

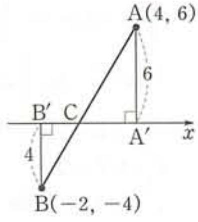
풀이 점 C가 x축 위에 있으므로 점 C의 y좌표는 0이고, $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하므로

$$\frac{-4m+6n}{m+n}=0$$

따라서 $4m-6n=0$이므로 $2m=3n$

$\therefore \frac{m}{n}=\frac{3}{2}$ 답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면



$\triangle ACA' \backsim \triangle BCB'$

이므로

$\overline{AC}:\overline{CB}=\overline{AA'}:\overline{BB'}$

$=6:4=3:2$

$\therefore \frac{m}{n}=\frac{3}{2}$

17 전략 원점을 출발한 지 5초, 15초 후의 점 P의 위치를 각각 P_1, P_2로 놓은 후 $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$의 길이를 비교한다.

풀이 점 P가 원점을 출발한 지 5초 후의 위치를 P_1이라 하면

$P_1(3,\ 4)$

$\therefore \overline{OP_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

출발한 지 15초 후의 위치를 P_2라 하면

$\overline{OP_1}:\overline{OP_2}=5:15=1:3$

따라서 점 P_2는 $\overline{OP_1}$을 $3:2$로 외분하는 점이므로 점 P_2의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot3-2\cdot0}{3-2},\ \frac{3\cdot4-2\cdot0}{3-2}\right)$, 즉 $(9,\ 12)$

따라서 15초 후의 점 P의 좌표는 $(9,\ 12)$이다.

답 $(9,\ 12)$

다른 풀이 $\overline{OP_1}=5$에서 점 P는 초속 1의 속력으로 움직이므로

$\overline{OP_2}=15$

점 P_2는 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 위의 점이므로 점 P_2의 좌표를 $(3a,\ 4a)(a>0)$라 하면

$\sqrt{(3a)^2+(4a)^2}=15,\quad 5|a|=15$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

따라서 점 P_2의 좌표는 $(9,\ 12)$이다.

18 전략 원점 O와 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 꼭짓점으로 하는 △OAB의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{3},\ \frac{y_1+y_2}{3}\right)$임을 이용한다.

풀이 두 점 A, B의 좌표를 각각 $\left(a,\ \frac{1}{2}a\right)$, $(b,\ 3b)$라 하면 △OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$이므로

$\frac{1}{3}(a+b)=2,\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a+3b\right)=\frac{8}{3}$

$\therefore a+b=6,\ \frac{1}{2}a+3b=8$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=4,\ b=2$

$\therefore A(4,\ 2),\ B(2,\ 6)$

이때 점 A는 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로

$2=-2\cdot4+k \qquad \therefore k=10$

답 ⑤

다른 풀이 직선 $y=-2x+k$와 두 직선 $y=\frac{1}{2}x$, $y=3x$의 교점 A, B의 좌표를 구하면 각각

$\left(\frac{2}{5}k,\ \frac{1}{5}k\right)$, $\left(\frac{1}{5}k,\ \frac{3}{5}k\right)$

△OAB의 무게중심의 좌표가 $\left(2,\ \frac{8}{3}\right)$이므로

$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}k+\frac{1}{5}k\right)=2,\ \ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}k+\frac{3}{5}k\right)=\frac{8}{3}$

$\therefore k=10$

19 문제이해 • 직사각형 $S(a,\ b,\ c,\ d)$의 대각선의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2}\right)$ ➔ 20% 배점

해결과정 • 직사각형 $S(1,\ 2,\ 3,\ 4)$의 대각선의 중점 M_1의 좌표는

$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 3)$ ➔ 20% 배점

직사각형 $S(-3,\ -4,\ -1,\ -2)$의 대각선의 중점 M_2의 좌표는

$\left(\frac{-3-1}{2},\ \frac{-4-2}{2}\right)$, 즉 $(-2,\ -3)$

➔ 20% 배점

직사각형 $S(2,\ 1,\ 4,\ 3)$의 대각선의 중점 M_3의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 2)$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $\triangle M_1M_2M_3$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2-2+3}{3},\ \frac{3-3+2}{3}\right)$, 즉 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$

➔ 20% 배점

답 $\left(1,\ \frac{2}{3}\right)$

20 해결과정 • 삼각형 ABC가 정삼각형이 되려면 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$이어야 한다.

$\overline{BC}=\overline{CA}$에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(a-1)^2+b^2=a^2+(1-b)^2$

$a^2-2a+1+b^2=a^2+b^2-2b+1$

$\therefore b=a$ …… ㉠

➔ 20% 배점

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$1^2+(-1)^2=(a-1)^2+b^2$

$a^2-2a+1+b^2=2$

$\therefore a^2-2a+b^2-1=0$ …… ㉡

➔ 20% 배점

㉠을 ㉡에 대입하면 $\quad 2a^2-2a-1=0$

$\therefore a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\ (\because a>0)$

$$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$ ➡ 20% 배점

정삼각형의 외접원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 일치하므로 외접원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1}{3}\left(0+1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\ \frac{1}{3}\left(1+0+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right),$$

즉 $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\ \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ ➡ 20% 배점

답구하기 • 따라서 외접원의 넓이는

$$\pi\left\{\left(0-\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(1-\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)^2\right\}=\frac{2}{3}\pi$$

이므로 $p=3,\ q=2$

$\therefore pq=6$ ➡ 20% 배점

답 6

Remark 삼각형의 무게중심, 외심, 내심의 위치

- 정삼각형 ➡ 무게중심, 외심, 내심이 모두 일치한다.
- 이등변삼각형 ➡ 무게중심, 외심, 내심은 모두 꼭지각의 이등분선 위에 있다.
- 직각삼각형 ➡ 외심은 빗변의 중점이다.

21 (전략) 복소수 $z=a+bi$의 실수부분 a가 x좌표, 허수부분 b가 y좌표임을 이용한다.

(풀이) ㄱ. 두 복소수 $1+3i$, $-1-i$에 대응하는 점의 좌표는 각각 $(1,\ 3)$, $(-1,\ -1)$이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-1)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$$

ㄴ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)$$
$$=a^2+b^2$$

따라서 복소수 $z\bar{z}$에 대응하는 점의 좌표는 $(a^2+b^2,\ 0)$이므로 복소수 $z\bar{z}$에 대응하는 점은 x축 위에 있다.

ㄷ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$$-\bar{z}=-(a-bi)=-a+bi$$

이므로 두 복소수 z, $-\bar{z}$에 대응하는 점의 좌표는 각각 $(a,\ b)$, $(-a,\ b)$이다.

따라서 두 점을 잇는 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-a}{2},\ \frac{b+b}{2}\right),\ \text{즉 } (0,\ b)$$

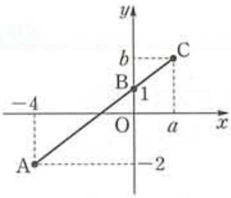
따라서 두 복소수 z, $-\bar{z}$에 대응하는 두 점을 잇는 선분의 중점은 y축 위에 있다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

22 (전략) 좌표평면을 정하여 혜미네 집, 시청, 학교, 도서관의 좌표를 구한다.

(풀이)



위의 그림과 같이 시청의 위치를 원점으로 하는 좌표평면을 정하고, 혜미네 집, 학교, 도서관을 나타내는 점을 각각 A, B, C라 하면

$$\mathrm{A}(-4,\ -2),\ \mathrm{B}(0,\ 1),\ \mathrm{C}(a,\ b)$$

로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{\mathrm{AC}}=3.5\overline{\mathrm{BC}}=\frac{7}{2}\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=7:2$$

따라서 점 C는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $7:2$로 외분하는 점이므로

$$a=\frac{7\cdot 0-2\cdot(-4)}{7-2}=\frac{8}{5}$$

$$b=\frac{7\cdot 1-2\cdot(-2)}{7-2}=\frac{11}{5}$$

$$\therefore a+b=\frac{19}{5}$$

답 ②

12 직선의 방정식

유제

본책 314~342쪽

112-1 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+(-1)}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right),\ 즉\ (2,\ 1)$$

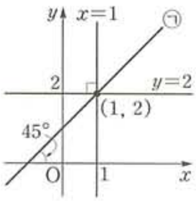
따라서 구하는 직선은 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이므로

$$y-1=-1\cdot(x-2)$$

$$\therefore y=-x+3$$

답 $y=-x+3$

112-2 두 직선 $x=1$, $y=2$는 서로 수직이고 점 $(1,\ 2)$에서 만난다. 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $x=1$, $y=2$가 이루는 각을 이등분하고 기울기가 양수인 직선을 ㉠이라 하면 직선 ㉠이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $45°$이므로 구하는 직선의 기울기는



$$\tan 45°=1$$

따라서 기울기가 1이고 점 $(1,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=1\cdot(x-1)$$

$$\therefore y=x+1$$

답 $y=x+1$

113-1 두 점 $(2,\ -1)$, $(-4,\ 7)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{7-(-1)}{-4-2}(x-2)$$

$$\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

두 점 $(a,\ 3)$, $(5,\ b)$가 직선 l 위의 점이므로

$$3=-\frac{4}{3}a+\frac{5}{3},\ b=-\frac{4}{3}\cdot5+\frac{5}{3}$$

$$\therefore a=-1,\ b=-5$$

$$\therefore a+b=-6$$

답 -6

113-2 x절편이 -3, y절편이 1인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{1}=1$$

$$\therefore y=\frac{x}{3}+1$$

점 $(12,\ a)$가 이 직선 위의 점이므로

$$a=\frac{12}{3}+1=5$$

답 5

114-1 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-8-(-4)}{k-4}=\frac{(2k-2)-(-4)}{1-4}$$

$$\frac{2}{k-4}=\frac{k+1}{3},\qquad (k-4)(k+1)=6$$

$$k^2-3k-10=0$$

$$(k+2)(k-5)=0$$

$$\therefore k=-2\ 또는\ k=5$$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$$-2+5=3$$

답 3

Remark

k에 대한 이차방정식 $k^2-3k-10=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계를 이용하면 k의 값을 직접 구하지 않고 k의 값의 합이 3임을 알 수 있다.

114-2 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있어야 하므로 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 한다. 즉

$$\frac{-2-(1-3a)}{2-(-4)}=\frac{1-(-2)}{a-2}$$

$$\frac{a-1}{2}=\frac{3}{a-2}$$

$$(a-1)(a-2)=6,\qquad a^2-3a-4=0$$

$$(a+1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4\ (\because a>0)$$

따라서 두 점 $B(2,\ -2)$, $C(4,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{1-(-2)}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore y=\frac{3}{2}x-5$$

답 $y=\frac{3}{2}x-5$

115-1 $ab=0$에서

$$a=0\ 또는\ b=0$$

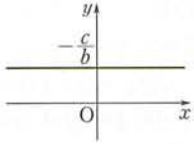
그런데 $bc<0$이므로 $b\neq0$이다.

$$\therefore a=0$$

따라서 주어진 직선의 방정식은 $by+c=0$이므로

$$y=-\frac{c}{b}$$

이때 $bc<0$에서 $-\frac{c}{b}>0$이므로 직선 $ax+by+c=0$은 오른쪽 그림과 같이 제 1 사분면과 제 2 사분면을 지난다.



답 제 1 사분면, 제 2 사분면

115-2 주어진 직선 $ax+by+c=0$의 개형에서

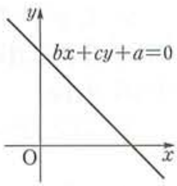
$(x\text{절편})=-\frac{c}{a}>0$ …… ㉠

$(y\text{절편})=-\frac{c}{b}<0$ …… ㉡

$c\neq0$이므로 $bx+cy+a=0$에서

$y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$

㉡에서 $-\frac{b}{c}<0$이고, ㉠에서 $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 $bx+cy+a=0$의 기울기는 음수, y절편은 양수이다. 따라서 직선의 개형이 오른쪽 그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



답 제3사분면

다른 풀이 직선 $ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 직선의 개형에서 $-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$이므로

$a>0,\ b<0,\ c<0$ 또는 $a<0,\ b>0,\ c>0$

직선 $bx+cy+a=0$에서

$y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$ …… ㉢

$-\frac{b}{c}<0$, $-\frac{a}{c}>0$이므로 직선 ㉢의 기울기는 음수이고, y절편은 양수이다.

따라서 이 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.

116-1 두 직선 $y=mx+1$, $y=(2m-3)x+2$가 서로 수직이려면

$m(2m-3)=-1,\quad 2m^2-3m+1=0$

$(2m-1)(m-1)=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=1$

답 $\frac{1}{2}$, 1

117-1 (1) y절편이 1인 직선의 방정식을 $y=mx+1$이라 하면 이 직선이 점 (3, 4)를 지나므로

$4=3m+1\quad \therefore m=1$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1이고 원점을 지나므로 직선의 방정식은

$y=x$

(2) $x-3y+6=0$에서 $\quad y=\frac{1}{3}x+2$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -3이고 점 (2, -1)을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-1)=-3(x-2)$

$\therefore y=-3x+5$

답 (1) $y=x$ (2) $y=-3x+5$

118-1 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax+2y-5=0$이 두 직선 $2x-y-2=0$, $3x-2y+a=0$의 교점을 지나야 한다.

$2x-y-2=0$, $3x-2y+a=0$을 연립하여 풀면

$x=a+4,\ y=2a+6$

따라서 직선 $ax+2y-5=0$이 점 $(a+4,\ 2a+6)$을 지나야 하므로

$a(a+4)+2(2a+6)-5=0$

$a^2+8a+7=0,\quad (a+7)(a+1)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=-1$

답 -7, -1

118-2 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 하므로

$\frac{3}{a-1}=\frac{-1}{2}\neq\frac{2}{1},\ \frac{3}{1}=\frac{-1}{b}\neq\frac{2}{-3}$

$\frac{3}{a-1}=\frac{-1}{2}$에서

$a-1=-6\quad \therefore a=-5$

$\frac{3}{1}=\frac{-1}{b}$에서

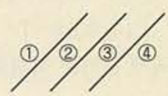
$3b=-1\quad \therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=\frac{5}{3}$

답 $\frac{5}{3}$

Remark

서로 평행한 n개의 직선은 평면을 $(n+1)$개의 부분으로 나눈다. 예를 들어 오른쪽 그림과 같이 서로 평행한 세 직선은 평면을 ①, ②, ③, ④의 네 부분으로 나눈다.



119-1 구하는 수선의 발을 H라 하면 직선 AH는 직선 $3x+y-2=0$, 즉 $y=-3x+2$에 수직이므로 직선 AH의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.
또 이 직선이 점 $A(-2,\ 0)$을 지나므로 직선 AH의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}(x+2) \qquad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

따라서 점 H는 두 직선 $y=-3x+2$와 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$의 교점이므로 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=\frac{2}{5},\ y=\frac{4}{5}$$

즉 구하는 수선의 발의 좌표는 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$이다.

답 $\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5}\right)$

120-1 직선 AB의 기울기가

$$\frac{2-1}{1-(-3)}=\frac{1}{4}$$

이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 -4이고, 이 직선은 선분 AB의 중점 $\left(\frac{-3+1}{2},\ \frac{1+2}{2}\right)$, 즉 $\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 그 직선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=-4(x+1) \qquad \therefore y=-4x-\frac{5}{2}$$

따라서 점 $(1,\ a)$가 직선 $y=-4x-\frac{5}{2}$ 위에 있으므로

$$a=-4\cdot1-\frac{5}{2}=-\frac{13}{2}$$

답 $-\frac{13}{2}$

120-2 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\cdot6+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot0+1\cdot3}{2+1}\right),\ 즉\ (4,\ 1)$$

이고, 직선 AB의 기울기는

$$\frac{0-3}{6-0}=-\frac{1}{2}$$

따라서 점 $(4,\ 1)$을 지나고 직선 AB에 수직인 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-4)$$
$$\therefore y=2x-7$$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -7이다.

답 -7

121-1 $(3k+1)x-(2k+4)y-4k+2=0$을 k에 대하여 정리하면

$$(3x-2y-4)k+(x-4y+2)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$3x-2y-4=0,\ x-4y+2=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=2,\ y=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.

답 $(2,\ 1)$

121-2 $2(m-1)x+(3m+1)y+m+3=0$을 m에 대하여 정리하면

$$(2x+3y+1)m+(-2x+y+3)=0$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2x+3y+1=0,\ -2x+y+3=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=-1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

122-1 $y=mx+2m$을 m에 대하여 정리하면

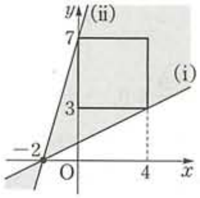
$$m(x+2)-y=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0,\ y=0$$
$$\therefore x=-2,\ y=0$$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 0)$을 지난다.

m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 주어진 정사각형과 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(4,\ 3)$을 지날 때,

$$6m-3=0$$
$$\therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 7)$을 지날 때,

$$2m-7=0 \qquad \therefore m=\frac{7}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$\frac{1}{2}\le m\le\frac{7}{2}$$

답 $\frac{1}{2}\le m\le\frac{7}{2}$

122-2 $y=mx+m-2$를 m에 대하여 정리하면

$(x+1)m+(-y-2)=0$ ······ ㉠

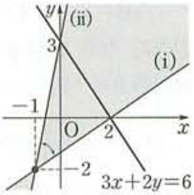
이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0,\ y+2=0$

$\therefore x=-1,\ y=-2$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -2)$를 지난다.

m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직선 $3x+2y=6$과 제1사분면에서 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$3m-2=0$

$\therefore m=\frac{2}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 3)$을 지날 때,

$m-5=0 \quad \therefore m=5$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 $\frac{2}{3}<m<5$

이므로 구하는 정수 m의 값의 합은

$1+2+3+4=10$ 답 10

123-1 직선 $2x+y+3=0$은 점 $(-2,\ 3)$을 지나지 않으므로 두 직선 $x+4y-2=0$, $2x+y+3=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x+4y-2+k(2x+y+3)=0$ (k는 실수) ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 점 $(-2,\ 3)$을 지나므로

$-2+12-2+k(-4+3+3)=0$

$2k+8=0 \quad \therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$x=-2$ 답 $x=-2$

123-2 직선 $3x+2y-5=0$은 직선 $x-2y-6=0$과 평행하지 않으므로 두 직선 $2x-3y+1=0$, $3x+2y-5=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-3y+1+k(3x+2y-5)=0$, 즉

$(2+3k)x+(-3+2k)y+1-5k=0$ (k는 실수) ······ ㉠

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 직선 $x-2y-6=0$과 평행하므로

$$\frac{2+3k}{1}=\frac{-3+2k}{-2}\neq\frac{1-5k}{-6}$$

$\frac{2+3k}{1}=\frac{-3+2k}{-2}$에서

$-2(2+3k)=-3+2k$

$\therefore k=-\frac{1}{8}$

$k=-\frac{1}{8}$을 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 직선의 방정식은

$x-2y+1=0$ 답 $x-2y+1=0$

124-1 직선 $x-2y+5=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 기울기는 -2이다.

구하는 직선의 방정식을 $y=-2x+n$이라 하면 원점과 직선 $y=-2x+n$, 즉 $2x+y-n=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}, \quad |n|=5$

$\therefore n=-5$ 또는 $n=5$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x-5$ 또는 $y=-2x+5$

답 $y=-2x-5,\ y=-2x+5$

124-2 $x+(k+1)y+k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(y+1)k+x+y=0$ ······ ㉠

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$y+1=0,\ x+y=0$

$\therefore x=1,\ y=-1$

즉 점 P의 좌표는 $(1,\ -1)$이므로 점 $\mathrm{P}(1,\ -1)$과 직선 $3x+y-4=0$ 사이의 거리는

$\frac{|3-1-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

125-1 두 직선 $x-2y+1=0$, $x-2y+6=0$은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y+1=0$ 위의 한 점 $(-1,\ 0)$과 직선 $x-2y+6=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|-1+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

125-2 두 직선 $2x+ay-5=0$, $x-3y+2=0$이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{1}=\frac{a}{-3}\neq\frac{-5}{2}$$

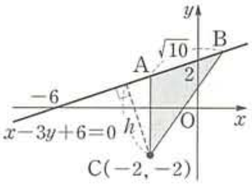
$\therefore a=-6$

따라서 구하는 거리는 직선 $x-3y+2=0$ 위의 한 점 $(-2,\ 0)$과 직선 $2x-6y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2\cdot(-2)-5|}{\sqrt{2^2+(-6)^2}}=\frac{9}{\sqrt{40}}=\frac{9\sqrt{10}}{20}$$

답 $a=-6$, 거리 : $\frac{9\sqrt{10}}{20}$

126-1



점 $C(-2,\ -2)$와 직선 $x-3y+6=0$ 사이의 거리를 h라 하면

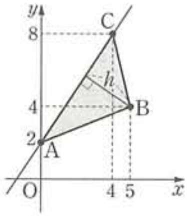
$$h=\frac{|-2-3\cdot(-2)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=5$$

답 5

126-2 선분 AC의 길이는



$$\overline{AC}=\sqrt{(4-0)^2+(8-2)^2}=2\sqrt{13}$$

직선 AC의 방정식은

$$y-2=\frac{8-2}{4-0}x$$

$$y=\frac{3}{2}x+2$$

$\therefore 3x-2y+4=0$

점 $B(5,\ 4)$와 직선 $3x-2y+4=0$ 사이의 거리를 h라 하면

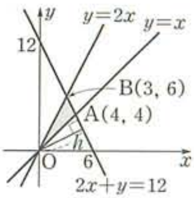
$$h=\frac{|3\cdot5-2\cdot4+4|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{11}{\sqrt{13}}$$

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{13}\cdot\frac{11}{\sqrt{13}}=11$$

답 11

126-3 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=x$, $2x+y=12$의 교점을 A라 하면 $\quad A(4,\ 4)$



두 직선 $y=2x$, $2x+y=12$의 교점을 B라 하면

$B(3,\ 6)$

선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-4)^2+(6-4)^2}=\sqrt{5}$$

원점과 직선 $2x+y=12$, 즉 $2x+y-12=0$ 사이의 거리를 h라 하면

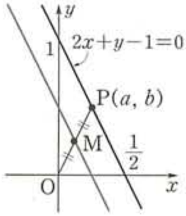
$$h=\frac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{12\sqrt{5}}{5}=6$$

답 6

127-1 오른쪽 그림에서 직선 $2x+y-1=0$ 위의 임의의 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면



$2a+b-1=0\ \cdots$ ㉠

선분 OP의 중점 M의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$$

이므로 $\quad a=2x,\ b=2y \quad \cdots\cdots$ ㉡

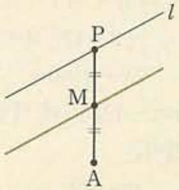
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 점 M의 자취의 방정식은

$4x+2y-1=0$

답 $4x+2y-1=0$

Remark

위에서 구한 자취의 방정식 $4x+2y-1=0$은 주어진 직선 $2x+y-1=0$과 평행하면서 y절편만 $\frac{1}{2}$배로 변한 것임을 알 수 있다.



일반적으로 정점 A와 정직선 l이 주어질 때, l 위의 임의의 점 P에 대하여 선분 AP의 중점 M이 나타내는 자취는 직선 l에 평행하고 선분 AP의 중점을 지나는 직선이다.

127-2 구하는 예각의 이등분선 위의 한 점을 $P(x,\ y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

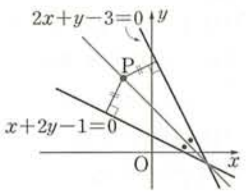
$$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|x+2y-1|=|2x+y-3|$

$x+2y-1=\pm(2x+y-3)$

$\therefore x-y-2=0$ 또는 $3x+3y-4=0$

그런데 오른쪽 그림에서 주어진 두 직선이 만나서 생기는 예각의 이등분선의 기울기는 음수이므로 구하는 직선의 방정식은



$3x+3y-4=0$

답 $3x+3y-4=0$

중단원 연습 문제

본책 343~347쪽

01 ④	**02** ②	**03** 풀이 참조		**04** 1
05 $y=-2x+12$		**06** $\frac{1}{4}\le m\le\frac{4}{3}$		**07** ②
08 ③	**09** $y=1$, $y=\frac{8}{15}x-\frac{17}{15}$			
10 $\frac{31}{2}$	**11** $x+2y-1=0$		**12** $y=-x+2$	
13 ④	**14** 28	**15** 17	**16** ⑤	**17** $\frac{6}{5}$
18 4	**19** $-6<a<-\frac{1}{2}$		**20** ②	
21 (1, 1)	**22** $\frac{2}{3}$배	**23** ⑤	**24** 6	**25** 15

01 (전략) 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 직선의 기울기는 $\tan\theta$임을 이용한다.

(풀이) 직선 $(a-2)x-y+b+1=0$에서

$y=(a-2)x+b+1$

이 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$a-2=\tan 45°=1 \qquad \therefore a=3$

따라서 직선 $x-y+b+1=0$이 점 $(-2,\ 2)$를 지나므로

$-2-2+b+1=0 \qquad \therefore b=3$

$\therefore a+b=6$

답 ④

02 (전략) 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$를 잇는 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\ \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$임을 이용한다.

(풀이) 선분 AB를 $5:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{5\cdot3-3\cdot1}{5-3},\ \frac{5\cdot5-3\cdot(-1)}{5-3}\right)$, 즉 $(6,\ 14)$

두 점 $(6,\ 14)$, $(5,\ 9)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-9=\frac{14-9}{6-5}(x-5) \qquad \therefore y=5x-16$

$y=0$을 $y=5x-16$에 대입하면

$0=5x-16 \qquad \therefore x=\frac{16}{5}$

따라서 구하는 직선의 x절편은 $\frac{16}{5}$이다.

답 ②

03 (전략) 직선 $bx+(a+2)y-1=0$의 기울기와 y절편의 부호를 조사한다.

(풀이) y축에 평행하고 제 1 사분면과 제 4 사분면을 지나는 직선의 방정식은

$x=k\ (k>0)$

꼴이므로 $x+ay+b=0$에서

$a=0,\ b<0$

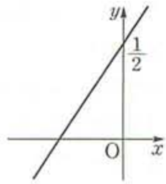
따라서 직선 $bx+(a+2)y-1=0$에서

$bx+2y-1=0$

$\therefore y=-\frac{b}{2}x+\frac{1}{2}$

$b<0$에서 $-\frac{b}{2}>0$이므로 직선 $bx+2y-1=0$의 기울기도 양수, y절편도 양수이다.

따라서 직선 $bx+(a+2)y-1=0$의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 3 사분면을 지난다.



답 제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 3 사분면

04 문제이해 • 두 직선이 두 개 이상의 교점을 가지려면 두 직선이 일치해야 하므로

$$\frac{1}{a}=\frac{-(a+1)}{-2a}=\frac{a}{1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

➜ 20% 배점

해결과정 • (i) $\frac{1}{a}=\frac{-(a+1)}{-2a}$에서 $a^2+a=2a$

$a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

➜ 30% 배점

(ii) $\frac{1}{a}=\frac{a}{1}$에서 $a^2=1$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

➜ 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서

$a=1$ ➜ 20% 배점

답 1

05 전략 주어진 직선의 방정식을 k에 대하여 정리한 후, 이 등식이 k에 대한 항등식임을 이용한다.

풀이 $3(k+1)x-(k+4)y-3k+15=0$을 k에 대하여 정리하면

$(3x-y-3)k+(3x-4y+15)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$3x-y-3=0,\ 3x-4y+15=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=6$

$\therefore P(3,\ 6)$

따라서 기울기가 -2이고 점 $P(3,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-6=-2(x-3)$

$\therefore y=-2x+12$ 답 $y=-2x+12$

06 문제이해 • $y=mx+2m+1$을 m에 대하여 정리하면

$(x+2)m+(1-y)=0$ ...... ㉠

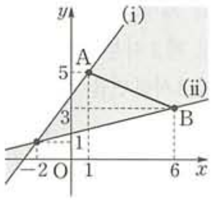
이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 1)$을 지난다. ➜ 40% 배점

해결과정 • m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 선분 AB와 만나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $A(1,\ 5)$를 지날 때,

$3m-4=0$

$\therefore m=\frac{4}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(6,\ 3)$을 지날 때,

$8m-2=0 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$ ➜ 40% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$\frac{1}{4}\le m\le\frac{4}{3}$ ➜ 20% 배점

답 $\frac{1}{4}\le m\le\frac{4}{3}$

07 전략 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을 구하여 조건을 만족시키는 a의 값을 구한다.

풀이 직선 $x+y-2=0$은 점 $(3,\ 5)$를 지나지 않으므로 두 직선 $2x-y+5=0,\ x+y-2=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x-y+5+k(x+y-2)=0$ (k는 실수)

으로 놓을 수 있다.

이 직선이 점 $(3,\ 5)$를 지나므로

$2\cdot3-5+5+k(3+5-2)=0, \quad 6+6k=0$

$\therefore k=-1$

따라서 직선의 방정식은

$2x-y+5-(x+y-2)=0$

$\therefore x-2y+7=0$

이 직선이 점 $(a,\ -1)$을 지나므로

$a-2\cdot(-1)+7=0 \quad \therefore a=-9$ 답 ②

08 전략 두 직선의 교점을 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 연립방정식 $\begin{cases}x-y+1=0\\x-2y+3=0\end{cases}$을 풀면

$x=1,\ y=2$

따라서 두 직선 $x-y+1=0,\ x-2y+3=0$의 교점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로 이 점과 직선 $4x-2y=1$, 즉 $4x-2y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|4\cdot1-2\cdot2-1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$ 답 ③

09 전략 구하는 직선의 기울기를 m이라 하고 직선의 방정식을 구한 후, 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

풀이 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y-1=m(x-4)$

$\therefore y=mx-4m+1$ ...... ㉠

원점과 직선 $mx-y-4m+1=0$ 사이의 거리가 1이므로

$\frac{|-4m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \quad |-4m+1|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

$16m^2-8m+1=m^2+1$

$15m^2-8m=0, \quad m(15m-8)=0$

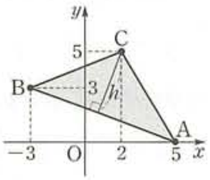
$\therefore m=0$ 또는 $m=\frac{8}{15}$

따라서 ㉠에서 구하는 직선의 방정식은

$y=1$ 또는 $y=\frac{8}{15}x-\frac{17}{15}$

답 $y=1$, $y=\frac{8}{15}x-\frac{17}{15}$

10 해결과정 • 선분 AB의 길이는



$\overline{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+3^2}$

$=\sqrt{73}$ ➜ 20% 배점

직선 AB의 방정식은

$y=\frac{3-0}{-3-5}(x-5)$

$\therefore 3x+8y-15=0$ ➜ 30% 배점

점 C(2, 5)와 직선 $3x+8y-15=0$ 사이의 거리를 h라 하면

$h=\frac{|3\cdot2+8\cdot5-15|}{\sqrt{3^2+8^2}}=\frac{31}{\sqrt{73}}$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{73}\cdot\frac{31}{\sqrt{73}}=\frac{31}{2}$ ➜ 20% 배점

답 $\frac{31}{2}$

11 전략 $\overline{AP}$를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)로 놓고, x와 y 사이의 관계식을 구한다.

풀이 직선 $2x+4y-3=0$ 위의 임의의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$2a+4b-3=0$ …… ㉠

선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x=\frac{2\cdot a+1\cdot2}{2+1}=\frac{2a+2}{3}$

$y=\frac{2\cdot b+1\cdot(-1)}{2+1}=\frac{2b-1}{3}$

$\therefore a=\frac{3x-2}{2}$, $b=\frac{3y+1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 자취의 방정식은

$2\cdot\frac{3x-2}{2}+4\cdot\frac{3y+1}{2}-3=0$

$3x+6y-3=0$

$\therefore x+2y-1=0$

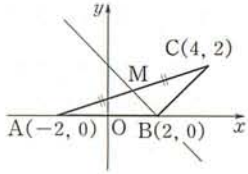
답 $x+2y-1=0$

Remark

주어진 직선과 구하는 직선의 기울기가 서로 같음을 이해하면 점 A(2, −1)과 주어진 직선 위의 한 점, 예를 들어 점 $P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$에 대하여 선분 AP를 2 : 1로 내분하는 점만 구해도 직선의 방정식을 구할 수 있다.

12 전략 점 B를 지나고 △ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{AC}$의 중점을 지남을 이용한다.

풀이 점 B를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 중점을 지나야 한다.



선분 AC의 중점을 M이라 하면

$M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ $\therefore M(1, 1)$

따라서 구하는 직선은 두 점 B(2, 0), M(1, 1)을 지나므로 직선의 방정식은

$y=\frac{1-0}{1-2}(x-2)$

$\therefore y=-x+2$

답 $y=-x+2$

13 전략 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 직사각형의 대각선은 서로를 이등분하므로 작은 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{0+2}{2}, \frac{2+4}{2}\right)$ $\therefore (1, 3)$

큰 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{-6-2}{2}, \frac{-5-3}{2}\right)$ $\therefore (-4, -4)$

따라서 두 점 (1, 3), (−4, −4)를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{-4-3}{-4-1}(x-1)$

$\therefore 7x-5y+8=0$ …… ㉠

㉠이 직선 $ax+by+8=0$과 같아야 하므로

$a=7$, $b=-5$

$\therefore a+b=2$

답 ④

14 전략 x절편과 y절편을 이용하여 직선의 방정식을 구한 다음 주어진 등식에 대입한다.

풀이 직선 l의 x절편이 4, y절편이 2이므로 직선 l의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1 \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+2 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠을 등식 $x^2+ay^2+bx+c=0$에 대입하면

$$x^2+a\left(-\frac{1}{2}x+2\right)^2+bx+c=0$$

$$\left(1+\frac{a}{4}\right)x^2-(2a-b)x+4a+c=0$$

이 식이 임의의 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$$1+\frac{a}{4}=0,\ 2a-b=0,\ 4a+c=0$$

$$\therefore a=-4,\ b=-8,\ c=16$$

$$\therefore |a|+|b|+|c|=4+8+16=28$$

답 28

15

전략 두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 수직, 평행 조건을 이용한다.

풀이 직선 l과 m이 서로 수직이므로

$$1\cdot 4+(-a)\cdot b=0$$

$$\therefore ab=4$$

직선 l과 n이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{-a}{-(b-3)}\neq\frac{2}{-2}$$

$\dfrac{1}{1}=\dfrac{-a}{-(b-3)}$에서 $\quad a=b-3$

$$\therefore a-b=-3$$

$$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-3)^2+2\cdot 4=17$$

답 17

16

전략 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 세 직선이 모두 평행하거나 어느 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나는 경우이다.

풀이 세 직선

$x-y=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x+2y-4=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$2x-ky-10=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

에서 두 직선 ㉠, ㉡은 한 점에서 만나므로 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{2}=\frac{-1}{-k}\neq\frac{0}{-10} \quad \therefore k=2$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{-k}\neq\frac{-4}{-10} \quad \therefore k=-4$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때,

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=\frac{4}{3},\ y=\frac{4}{3}$$

즉 두 직선 ㉠, ㉡의 교점이 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$이므로 직선 ㉢이 점 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$를 지나야 한다.

$2\cdot\dfrac{4}{3}-k\cdot\dfrac{4}{3}-10=0$에서 $\quad k=-\dfrac{11}{2}$

이상에서 모든 실수 k의 값의 합은

$$2+(-4)+\left(-\frac{11}{2}\right)=-\frac{15}{2}$$

답 ⑤

Remark 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우

세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

① 세 직선이 모두 평행할 때
➡ 세 직선의 기울기가 모두 같다.
➡ 세 직선이 좌표평면을 네 부분으로 나눈다.

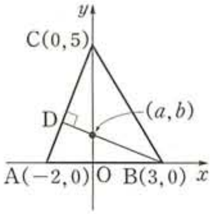
② 세 직선 중 두 직선이 서로 평행할 때
➡ 두 직선의 기울기는 같고, 다른 한 직선의 기울기는 이들과 다르다.

③ 세 직선이 한 점에서 만날 때
➡ 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지난다.

17

전략 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축임을 이용한다.

풀이 세 점 A, B, C를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 점 C에서 변 AB에 그은 수선은 y축이다. 따라서 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면 선분 BD와 y축이 만나는 점이 △ABC의 수심이다.



직선 AC의 기울기가 $\frac{5}{2}$이므로 직선 BD는 기울기가 $-\frac{2}{5}$이고 점 B(3, 0)을 지나는 직선이다.

따라서 직선 BD의 방정식은

$$y=-\frac{2}{5}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$$

선분 BD와 y축의 교점의 좌표는 $\left(0, \frac{6}{5}\right)$이므로

$$a=0,\ b=\frac{6}{5} \quad \therefore a+b=\frac{6}{5}$$

답 $\frac{6}{5}$

18 (전략) 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분함을 이용한다.

(풀이) 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 직선 l은 선분 AC의 수직이등분선이다.
직선 AC의 기울기가

$$\frac{1-3}{5-1}=-\frac{1}{2}$$

이므로 직선 l의 기울기는 2이고, 선분 AC의 중점의 좌표가

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{3+1}{2}\right),\ \text{즉 } (3,\ 2)$$

이므로 직선 l은 점 $(3,\ 2)$를 지난다.
따라서 직선 l의 방정식은

$$y-2=2(x-3)$$
$$\therefore 2x-y-4=0$$

따라서 $a=-1,\ b=-4$이므로

$$ab=4$$

답 4

19 문제이해 • $ax+y+2a+2=0$을 a에 대하여 정리하면

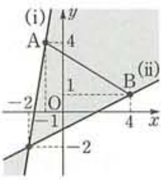
$$(x+2)a+(y+2)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$x+2=0,\ y+2=0$$
$$\therefore x=-2,\ y=-2$$

즉 직선 ㉠은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -2)$를 지난다. ➧ 40% 배점

해결과정 • $-a$는 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나도록 움직여 보면



(i) 직선 ㉠이 점 $A(-1,\ 4)$를 지날 때,

$$a+6=0$$
$$\therefore a=-6$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $B(4,\ 1)$을 지날 때,

$$6a+3=0$$
$$\therefore a=-\frac{1}{2} \qquad ➧ 40\%\ 배점$$

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$$-6<a<-\frac{1}{2} \qquad ➧ 20\%\ 배점$$

답 $-6<a<-\frac{1}{2}$

20 (전략) 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 $f(k)$를 k에 대한 식으로 나타낸다.

(풀이) 원점과 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$, 즉 $(k+1)x+(k-1)y-2=0$ 사이의 거리 $f(k)$는

$$f(k)=\frac{|-2|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2(k^2+1)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}$$

그런데 k는 실수이므로

$$k^2\geq 0$$

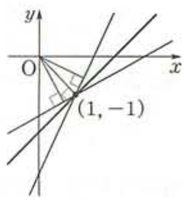
즉 $\sqrt{1+k^2}\geq 1$이므로 $\quad \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\leq 1$

$$\therefore f(k)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}\leq\sqrt{2}$$

따라서 $f(k)$는 $k=0$일 때 최댓값 $\sqrt{2}$를 갖는다.

답 ②

(다른 풀이) 직선 $x-y-2+k(x+y)=0$은 k의 값에 관계없이 두 직선 $x-y-2=0,\ x+y=0$의 교점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선이다.
따라서 $f(k)$는 원점과 점 $(1,\ -1)$을 지나는 직선 사이의 거리이므로 오른쪽 그림에서 구하는 최댓값은 원점과 점 $(1,\ -1)$ 사이의 거리와 같다.



즉 구하는 최댓값은

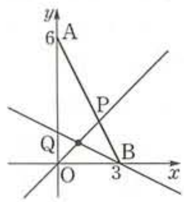
$$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

21 (전략) 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용하여 두 점 P, Q가 $\overline{AB}$와 $\overline{OA}$를 어떻게 내분하는 점인지 파악한다.

(풀이) 조건 (가)에 의하여

$$\overline{BP}:\overline{BA}=1:3$$

즉 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로
점 P는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다.



따라서 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{2\cdot3+1\cdot0}{2+1},\ \frac{2\cdot0+1\cdot6}{2+1}\right),\ \text{즉 } P(2,\ 2)$$

이므로 직선 OP의 방정식은

$$y=x \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 조건 (나)에 의하여

$\overline{OQ}:\overline{OA}=1:4$

즉 $\overline{AQ}:\overline{QO}=3:1$이므로 점 Q는 선분 AO를 3 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 점 Q의 좌표는

$Q\left(0, \frac{1}{4}\cdot 6\right)$, 즉 $Q\left(0, \frac{3}{2}\right)$

이므로 직선 BQ의 방정식은

$\frac{x}{3}+y\div\frac{3}{2}=1$, 즉 $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y=1$

$\therefore x+2y=3$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=1$

따라서 두 직선 OP, BQ의 교점의 좌표는 (1, 1)이다.

답 (1, 1)

22 해결과정 • $\overline{AC}$를 3 : 1로 내분하는 점 D의 좌표는

$D\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot 0}{3+1}, \frac{3\cdot 0+1\cdot 9}{3+1}\right)$, 즉 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

따라서 직선 BD의 기울기는

$\left(\frac{9}{4}-0\right)\div\left(\frac{3}{2}+3\right)=\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{2}$

이므로 직선 BD의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x+3)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

따라서 $E\left(0, \frac{3}{2}\right)$이므로 직선 CE의 방정식은

$\frac{x}{2}+y\div\frac{3}{2}=1$, 즉 $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}y=1$

$\therefore 3x+4y=6$ ...... ㉠ ➜ 40% 배점

직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{9}=1$ $\therefore 3x-y=-9$ ... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-2, y=3$

이므로 $F(-2, 3)$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 따라서

$\overline{AF}=\sqrt{(-2)^2+(3-9)^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{AB}=\sqrt{3^2+9^2}=3\sqrt{10}$

이므로

$\triangle AFC:\triangle ABC=\overline{AF}:\overline{AB}$

$=2\sqrt{10}:3\sqrt{10}$

$=2:3$

즉 $\triangle AFC=\frac{2}{3}\triangle ABC$이므로 $\triangle AFC$의 넓이는 $\triangle ABC$의 넓이의 $\frac{2}{3}$배이다. ➜ 30% 배점

답 $\frac{2}{3}$배

23 전략 k의 값에 관계없이 직선 l이 항상 지나는 점을 구한다.

풀이 ㄱ. $k(x+y+1)+(x-y-3)=0$이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y+1=0$, $x-y-3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1, y=-2$

이므로 직선 l은 항상 점 $(1, -2)$를 지난다.

ㄴ. $k(x+y+1)+(x-y-3)=0$에서

$(k+1)x+(k-1)y+k-3=0$ ... ㉠

직선 ㉠이 직선 $x+y+1=0$과 평행하려면

$k+1=k-1\neq k-3$ ...... ㉡

그런데 ㉡을 만족시키는 실수 k는 존재하지 않으므로 직선 $x+y+1=0$과 평행한 직선 l은 존재하지 않는다.

ㄷ. 두 점 (1, 2), (2, −1)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{-1-2}{2-1}=-3$

$k\neq 1$일 때, 직선 ㉠의 기울기는 $-\frac{k+1}{k-1}$이므로 두 직선이 수직이려면

$-\frac{k+1}{k-1}=\frac{1}{3}$, $3k+3=-k+1$

$\therefore k=-\frac{1}{2}$

따라서 $k=-\frac{1}{2}$일 때 직선 l은 두 점 (1, 2), (2, −1)을 지나는 직선과 수직이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

24 전략 두 직선이 각각 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점을 구하고, 두 직선의 위치 관계를 살펴본다.

풀이 $x+ky-3=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x-3)+ky=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-3=0, y=0$

$\therefore x=3, y=0$

따라서 직선 $x+ky-3=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(3,\ 0)$을 지난다.

또 $kx-y+3k=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x+3)k-y=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3=0,\ y=0$

$\therefore x=-3,\ y=0$

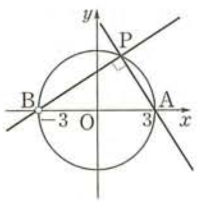
따라서 직선 $kx-y+3k=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 0)$을 지난다.

한편

$1\cdot k+k\cdot(-1)=0$

이므로 두 직선 $x+ky-3=0$, $kx-y+3k=0$은 서로 수직이다.

오른쪽 그림과 같이 $A(3,\ 0)$, $B(-3,\ 0)$이라 하면 두 직선이 서로 수직이므로 두 직선의 교점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.



따라서 점 P의 자취의 길이는 반지름의 길이가 3인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$2\pi\cdot 3=6\pi$

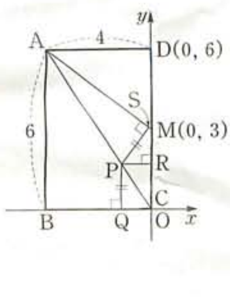
$\therefore p=6$ 답 6

Remark

직선 $x+ky-3=0$은 점 $A(3,\ 0)$을 지나는 직선 중에서 직선 $y=0$을 포함하지 않고, 직선 $kx-y+3k=0$은 점 $B(-3,\ 0)$을 지나는 직선 중에서 직선 $x=-3$을 포함하지 않는다.
따라서 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 중 점 $B(-3,\ 0)$에서는 두 직선의 교점이 생기지 않으므로 점 P의 자취는 이 점을 제외한 원이다.

25 (전략) 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓고 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 점 C를 원점으로 하고, 변 BC, DC를 각각 x축, y축으로 하는 좌표평면을 정하면



$A(-4,\ 6)$

이므로 직선 AC의 방정식은 $y=-\dfrac{3}{2}x$

점 P는 직선 $y=-\dfrac{3}{2}x$ 위의 점이므로 $\overline{PR}=a$라 하면

$P\left(-a,\ \dfrac{3}{2}a\right)$, $Q(-a,\ 0)$

$\therefore \overline{PQ}=\dfrac{3}{2}a$

한편 $M(0,\ 3)$이므로 직선 AM의 방정식은

$y-3=\dfrac{3-6}{0-(-4)}x$

$\therefore 3x+4y-12=0$

$\overline{PS}$의 길이는 점 $P\left(-a,\ \dfrac{3}{2}a\right)$와 직선 $3x+4y-12=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\left|3\cdot(-a)+4\cdot\dfrac{3}{2}a-12\right|$

$=\dfrac{|3a-12|}{5}$

$\overline{PQ}=\overline{PS}$에서

$\dfrac{3}{2}a=\dfrac{|3a-12|}{5}$, $\quad 5a=2|a-4|$

그런데 $0<a<4$이므로

$5a=-2a+8$, $\quad 7a=8$

$\therefore a=\dfrac{8}{7}$

따라서 $p=7$, $q=8$이므로

$p+q=15$ 답 15

12 직선의 방정식

13 원의 방정식

유제

본책 351~383쪽

128-1 원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(0,\ b)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-b)^2=r^2$$

이 원이 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나므로

$$(-2)^2+(-b)^2=r^2$$

$$\therefore 4+b^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$2^2+(2-b)^2=r^2$$

$$\therefore 8-4b+b^2=r^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad b=1,\ r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2=5$$

답 $x^2+(y-1)^2=5$

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 $(0,\ b)$라 하면 점 $(0,\ b)$에서 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 2)$에 이르는 거리가 같으므로

$$\sqrt{(-2)^2+(-b)^2}=\sqrt{2^2+(2-b)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2+4=b^2-4b+8, \qquad 4b=4$$

$$\therefore b=1$$

즉 원의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 $(0,\ 1)$, $(-2,\ 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2=5$$

128-2 원 $(x+4)^2+(y-2)^2=1$과 중심이 같으므로 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-4,\ 2)$이다.

구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로

$$(-2+4)^2+(1-2)^2=r^2$$

$$\therefore r^2=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-2)^2=5$$

답 $(x+4)^2+(y-2)^2=5$

다른 풀이 원의 중심의 좌표가 $(-4,\ 2)$이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 $(-4,\ 2)$, $(-2,\ 1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{\{-2-(-4)\}^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-2)^2=5$$

129-1 방정식 $x^2+y^2+4x-8y+a=0$을 변형하면

$$(x+2)^2+(y-4)^2=20-a$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-2,\ 4)$이므로

$$b=-2,\ c=4$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{20-a}$이므로

$$\sqrt{20-a}=5$$

양변을 제곱하면

$$20-a=25 \qquad \therefore a=-5$$

$$\therefore a+b+c=-5-2+4=-3$$

답 -3

129-2 방정식 $x^2+y^2+8x+2ky+10k=0$을 변형하면

$$(x+4)^2+(y+k)^2=k^2-10k+16$$

이 방정식이 나타내는 도형이 넓이가 9π인 원이므로

$$k^2-10k+16=9 \qquad \therefore k^2-10k+7=0$$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-5)^2-7=18>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은 7이다. 답 7

130-1 세 점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$-A-B+C+2=0$$

$$2B+C+4=0$$

$$A+B+C+2=0$$

세 식을 연립하여 풀면

$$A=1,\ B=-1,\ C=-2$$

따라서 원의 방정식은

$$x^2+y^2+x-y-2=0, \text{ 즉}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

이므로 구하는 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

130-2 네 점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

으로 놓고 세 점 $(7,\ 4)$, $(-5,\ 10)$, $(-1,\ -2)$의 좌표를 각각 대입하면

$7A+4B+C+65=0$

$-5A+10B+C+125=0$

$-A-2B+C+5=0$

세 식을 연립하여 풀면

$A=0,\ B=-10,\ C=-25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-10y-25=0$

이때 점 $(1,\ a)$가 이 원 위의 점이므로

$1+a^2-10a-25=0, \quad a^2-10a-24=0$

$(a+2)(a-12)=0$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=12$ 답 $-2,\ 12$

131-1 구하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2},\ \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 2)$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(3-1)^2}$

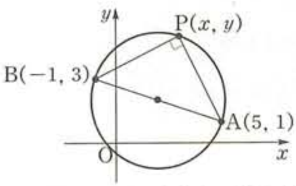
$=\sqrt{10}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=10$

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=10$

다른 풀이



위의 그림과 같이 원 위의 임의의 점을 $P(x,\ y)$라 하면

$\angle APB=90°$

따라서 $\triangle APB$에서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$이므로

$(x-5)^2+(y-1)^2+(x+1)^2+(y-3)^2=40$

$2x^2+2y^2-8x-8y+36=40$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=10$

131-2 두 점 P, Q를 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 PQ의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{10+8}{2},\ \frac{1+5}{2}\right)$, 즉 $(9,\ 3)$

또 선분 PQ가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(8-10)^2+(5-1)^2}=\sqrt{5}$

따라서 두 점 P, Q를 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은

$(x-9)^2+(y-3)^2=5$

즉 $x^2+y^2-18x-6y+85=0$이므로

$A=-18,\ B=-6,\ C=85$

$\therefore A+B+C=61$ 답 61

132-1 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$

으로 놓으면 이 원이 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$(3-a)^2+(-b)^2=a^2$

$\therefore b^2-6a+9=0$ ...... ㉠

또 이 원이 점 $(9,\ 0)$을 지나므로

$(9-a)^2+(-b)^2=a^2$

$\therefore b^2-18a+81=0$ ...... ㉡

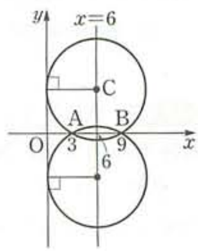
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=\pm3\sqrt{3}$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 6으로 같으므로 두 원의 반지름의 길이의 합은

$6+6=12$ 답 12

다른 풀이 $A(3,\ 0)$, $B(9,\ 0)$이라 하면 원의 중심 C는 선분 AB의 수직이등분선인 직선 $x=6$ 위에 있다.

이때 원이 y축에 접하므로 중심 C의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이이다.



따라서 반지름의 길이가 6인 원이 2개이므로 구하는 반지름의 길이의 합은 12이다.

132-2 점 $(2,\ 4)$를 지나고 x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제 1 사분면 위에 있다.

따라서 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

으로 놓으면 이 원이 점 $(2,\ 4)$를 지나므로

$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2$

$a^2-12a+20=0, \quad (a-2)(a-10)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=10$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 10이므로 두 원의 넓이의 합은

$\pi \cdot 2^2+\pi \cdot 10^2=104\pi$ 답 104π

132-3 원의 중심이 직선 $y=-x+1$ 위에 있고, 이 원이 y축에 접하므로 중심의 좌표를 $(a,\ -a+1)$이라 하면 원의 반지름의 길이는 $|a|$이다.
따라서 구하는 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y+a-1)^2=a^2$

으로 놓으면 이 원이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$(2-a)^2+(1+a-1)^2=a^2$

$a^2-4a+4=0 \qquad \therefore a=2$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

답 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$

133-1 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$이므로

$2\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}} \qquad \therefore 4\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-1)^2+y^2,\ \overline{\mathrm{BP}}^2=(x-4)^2+(y-3)^2$

이므로

$4\{(x-1)^2+y^2\}=(x-4)^2+(y-3)^2$

$x^2+y^2+2y-7=0 \qquad \therefore x^2+(y+1)^2=8$

따라서 점 P의 자취는 중심의 좌표가 $(0,\ -1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi \cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

답 $4\sqrt{2}\pi$

다른 풀이 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점과 $1:2$로 외분하는 점을 각각 M, N이라 하면

$\mathrm{M}(2,\ 1),\ \mathrm{N}(-2,\ -3)$

이때 두 점 M, N을 지름의 양 끝 점으로 하는 원은 중심의 좌표가 $(0,\ -1)$, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 점 P의 자취의 길이는

$2\pi \cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$

133-2 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$에서

$(x^2+y^2)+\{(x-4)^2+(y+2)^2\}=20$

$2x^2+2y^2-8x+4y+20=20$

$\therefore x^2+y^2-4x+2y=0$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$x^2+y^2-4x+2y=0$ 답 $x^2+y^2-4x+2y=0$

Remark

세 점 A, B, P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2$이 성립하므로 $\triangle\mathrm{PAB}$는 $\angle\mathrm{P}=90°$인 직각삼각형이다. 즉 점 P의 자취는 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

134-1 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(-2,\ a)$이므로 중심거리는

$\sqrt{(-2)^2+a^2}=\sqrt{a^2+4}$

두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 1이므로 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는

$3-1<\sqrt{a^2+4}<3+1$

$\therefore 2<\sqrt{a^2+4}<4$

각 변을 제곱하면

$4<a^2+4<16, \qquad 0<a^2<12$

$a^2-12<0,\ a\neq 0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0,\ a\neq 0$

$\therefore -2\sqrt{3}<a<0$ 또는 $0<a<2\sqrt{3}$

답 $-2\sqrt{3}<a<0$ 또는 $0<a<2\sqrt{3}$

135-1 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-2x+ay-4-(x^2+y^2-4x-2y+4)=0$

$\therefore 2x+(a+2)y-8=0$

이 직선이 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$과 수직이므로

$2\cdot 1+(a+2)\cdot(-1)=0$

$2-a-2=0 \qquad \therefore a=0$ 답 0

Remark 일반형으로 표현된 두 직선의 평행 · 수직

두 직선 $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0\,(abc\neq 0,\ a'b'c'\neq 0)$이

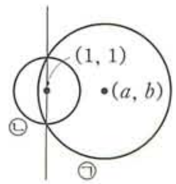
① 서로 평행하다. ➡ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

② 서로 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

135-2 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+6$ $\cdots$ ㉠

$(x-1)^2+(y-1)^2=4$ $\cdots\cdots$ ㉡

원 ㉠이 원 ㉡의 둘레를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 ㉡의 중심 $(1,\ 1)$을 지나야 한다.



㉠에서

$$x^2+y^2-2ax-2by-6=0$$

㉡에서

$$x^2+y^2-2x-2y-2=0$$

이므로 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2ax-2by-6-(x^2+y^2-2x-2y-2)=0$$

$$\therefore (a-1)x+(b-1)y+2=0$$

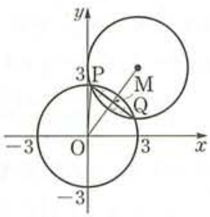
이 직선이 점 $(1, 1)$을 지나므로

$$(a-1)+(b-1)+2=0$$

$$\therefore a+b=0$$

답 0

136-1 오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 각각 P, Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하면 두 원의 중심선은 공통현을 수직이등분하므로 직각삼각형 POM에서



$$\overline{PM}^2=\overline{OP}^2-\overline{OM}^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{OP}$는 원 $x^2+y^2=9$의 반지름이므로

$$\overline{OP}=3$$

$(x-3)^2+(y-4)^2=9$에서

$$x^2+y^2-6x-8y+16=0$$

이므로 두 원의 공통현의 방정식은

$$x^2+y^2-9-(x^2+y^2-6x-8y+16)=0$$

$$\therefore 6x+8y-25=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{OM}$의 길이는 원점과 직선 ㉡ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$

㉠에서

$$\overline{PM}^2=\overline{OP}^2-\overline{OM}^2=3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{11}{4}$$

$$\therefore \overline{PM}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

따라서 구하는 공통현의 길이는

$$\overline{PQ}=2\overline{PM}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

답 $\sqrt{11}$

137-1 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+12x+k(x^2+y^2-4x+4y-2)=0$$

$$(k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 중심의 x좌표는 0이어야 한다.

이때 원의 중심의 x좌표가 0이려면 x의 계수가 0이어야 하므로

$$12-4k=0 \qquad \therefore k=3$$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+12x+3x^2+3y^2-12x+12y-6=0$$

$$4x^2+4y^2+12y-6=0$$

$$\therefore x^2+y^2+3y-\frac{3}{2}=0$$

답 $x^2+y^2+3y-\frac{3}{2}=0$

Remark

원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$이므로 이 원의 중심이 y축 위에 있으려면

$$-\frac{A}{2}=0 \qquad \therefore A=0$$

즉 x의 계수가 0이어야 한다.

또 이 원의 중심이 x축 위에 있으려면

$$-\frac{B}{2}=0 \qquad \therefore B=0$$

즉 y의 계수가 0이어야 한다.

137-2 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+4x-4+k(x^2+y^2+ax-6y+2)=0$$

$$(k\neq-1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

으로 놓으면 이 원이 원점을 지나므로

$$-4+2k=0$$

$$\therefore k=2$$

$k=2$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$3x^2+3y^2+(2a+4)x-12y=0$$

$$x^2+y^2+\frac{2a+4}{3}x-4y=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{a+2}{3}\right)^2+(y-2)^2=\frac{a^2+4a+40}{9}$$

이 원의 넓이가 5π이므로

$$\frac{a^2+4a+40}{9}=5, \qquad a^2+4a-5=0$$

$$(a+5)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 \ (\because a>0)$$

답 1

138-1 $y=x+k$를 $x^2+y^2=3$에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=3$$

$$\therefore 2x^2+2kx+k^2-3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $D>0$이다. 즉

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-3)>0, \qquad k^2<6$$

$$\therefore -\sqrt{6}<k<\sqrt{6}$$

따라서 구하는 정수 k는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

답 5

138-2 $y=2x+k$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$$x^2+(2x+k)^2=4$$

$$\therefore 5x^2+4kx+k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로 $D=0$이다. 즉

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-4)=0, \qquad k^2=20$$

$$\therefore k=\pm2\sqrt{5}$$

답 $-2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$

139-1 원의 중심 $(-4,\ 3)$과 직선 $ax-y-a=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-4a-3-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{|5a+3|}{\sqrt{a^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 직선과 원이 접하려면 $d=4$이어야 한다. 즉

$$\frac{|5a+3|}{\sqrt{a^2+1}}=4, \qquad |5a+3|=4\sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 9a^2+30a-7=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{7}{9}$이다.

답 $-\frac{7}{9}$

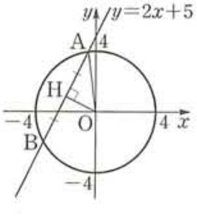
Remark

이차방정식 $9a^2+30a-7=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=15^2-9\cdot(-7)=288>0$$

이므로 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

140-1 오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B라 하고, 원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선 $y=2x+5$, 즉 $2x-y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 OAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}$$

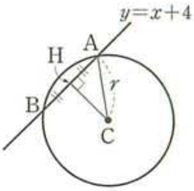
$$=\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{11}$$

이므로 구하는 선분의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{11}$$

답 $2\sqrt{11}$

140-2 오른쪽 그림과 같이 원과 직선이 만나는 두 점을 A, B, 원의 중심을 C라 하고, 원의 중심 C에서 직선 $y=x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot6=3$$

또 $\overline{CH}$의 길이는 원의 중심 $C(1,\ -1)$과 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH}=\frac{|1-(-1)+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$$r=\overline{CA}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{CH}^2}$$

$$=\sqrt{3^2+(3\sqrt{2})^2}$$

$$=3\sqrt{3}$$

답 $3\sqrt{3}$

141-1 $x^2+y^2-2x-4y-1=0$에서

$$(x-1)^2+(y-2)^2=6$$

원의 중심 $(1,\ 2)$와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+2+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x+y+k=0$ 사이의 거리의

최댓값은 $\quad \frac{|k+4|}{\sqrt{5}}+\sqrt{6}$

최솟값은 $\quad \frac{|k+4|}{\sqrt{5}}-\sqrt{6}$

최댓값과 최솟값의 합이 8이므로

$$\left(\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}+\sqrt{6}\right)+\left(\frac{|k+4|}{\sqrt{5}}-\sqrt{6}\right)=8$$

$$\frac{2|k+4|}{\sqrt{5}}=8, \qquad |k+4|=4\sqrt{5}$$

$$\therefore k=-4-4\sqrt{5} \text{ 또는 } k=-4+4\sqrt{5}$$

답 $-4-4\sqrt{5}$, $-4+4\sqrt{5}$

141-2 삼각형 PAB에서 $\overline{AB}$의 길이는

$$\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

로 일정하므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 △PAB의 넓이가 최대이다.

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-6}=1$$

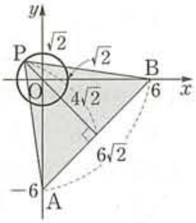
$$\therefore x-y-6=0$$

원의 중심 (0, 0)과 직선 AB 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값은

$$3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$



따라서 △PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=24$$

답 24

142-1 구하는 직선의 기울기는

$$\tan 45°=1$$

원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{10}\sqrt{1+1^2}$$

$$\therefore y=x\pm 2\sqrt{5}$$

답 $y=x-2\sqrt{5}$, $y=x+2\sqrt{5}$

142-2 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

구하는 직선은 $x+3y-4=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$에 수직이므로 기울기는 3이다.

즉 구하는 직선의 방정식을 $y=3x+n$으로 놓으면 원의 중심 (3, −2)와 직선 $y=3x+n$, 즉 $3x-y+n=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 5와 같아야 하므로

$$\frac{|3\cdot 3-(-2)+n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=5$$

$$|n+11|=5\sqrt{10}$$

$$\therefore n=-11\pm 5\sqrt{10}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=3x-11\pm 5\sqrt{10}$$

답 $y=3x-11-5\sqrt{10}$, $y=3x-11+5\sqrt{10}$

Remark

중심이 원점이 아닌 원의 접선의 방정식을 구할 때에는 공식을 이용하기보다

(원의 중심과 접선 사이의 거리)=(반지름의 길이)

임을 이용하는 것이 편리하다.

143-1 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 (2, −1)에서의 접선의 방정식은

$$2\cdot x+(-1)\cdot y=5$$

$$\therefore 2x-y=5$$

이 직선의 x절편은 $\frac{5}{2}$이고 y절편은 −5이므로

$$P\left(\frac{5}{2},\ 0\right),\ Q(0,\ -5)$$

따라서 △POQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 5=\frac{25}{4}$$

답 $\frac{25}{4}$

143-2 원의 중심 (3, −2)와 접점 (6, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-(-2)}{6-3}=\frac{4}{3}$$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

따라서 구하는 접선은 기울기가 $-\frac{3}{4}$이고 점 (6, 2)를 지나므로 접선의 방정식은

$$y-2=-\frac{3}{4}(x-6)$$

$$\therefore y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{2}$$

따라서 접선의 y절편은 $\frac{13}{2}$이다.

답 $\frac{13}{2}$

다른 풀이 원 $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ 위의 점 (6, 2)에서의 접선의 방정식은

$$(6-3)(x-3)+(2+2)(y+2)=25$$

$$3(x-3)+4(y+2)=25$$

$$\therefore 3x+4y=26$$

$x=0$을 대입하면

$$4y=26 \qquad \therefore y=\frac{13}{2}$$

따라서 접선의 y절편은 $\frac{13}{2}$이다.

144-1 $x^2+y^2+4x-2y+4=0$에서

$$(x+2)^2+(y-1)^2=1$$

접선의 기울기를 m이라 하면 접선이 원점을 지나므로

$$y=mx \qquad \therefore mx-y=0$$

원의 중심 $(-2,\ 1)$과 직선 $mx-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-2m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3m^2+4m=0, \qquad m(3m+4)=0$$

$$\therefore m=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } m=0$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은 $-\frac{4}{3}$이다.

답 $-\frac{4}{3}$

다른 풀이 접선의 방정식을 $y=mx$로 놓고 $(x+2)^2+(y-1)^2=1$에 대입하여 정리하면

$$(1+m^2)x^2-2(m-2)x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

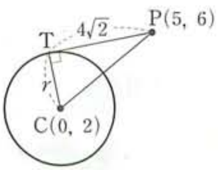
$$\frac{D}{4}=(m-2)^2-4(1+m^2)=0$$

$$-3m^2-4m=0, \qquad m(3m+4)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=-\frac{4}{3}$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은 $-\frac{4}{3}$이다.

145-1 점 P에서 원에 그은 접선의 한 접점을 T라 하면



$$\overline{PT}=4\sqrt{2}$$

오른쪽 그림에서

$$\overline{CT}\perp\overline{PT}$$

이므로 △CPT는 ∠CTP=90°인 직각삼각형이다.

이때 구하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\overline{CT}=r,$$

$$\overline{PC}=\sqrt{(5-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{41}$$

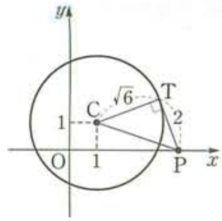
이므로 △CPT에서 피타고라스 정리에 의하여

$$r=\sqrt{(\sqrt{41})^2-(4\sqrt{2})^2}=3$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 3이다.

답 3

145-2 점 P가 x축 위에 있으므로 P$(a,\ 0)$이라 하고, 원의 중심을 C, 접점을 T라 하면



$$\overline{PT}=2$$

오른쪽 그림에서

$$\overline{CT}\perp\overline{PT}$$

이므로 △CPT는 ∠CTP=90°인 직각삼각형이다.

C$(1,\ 1)$이므로

$$\overline{CP}=\sqrt{(a-1)^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{a^2-2a+2}$$

$\overline{CT}$는 원의 반지름이므로

$$\overline{CT}=\sqrt{6}$$

△CPT에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{CP}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2^2}=\sqrt{10}$$

따라서 $\sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{10}$이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a-8=0, \qquad (a+2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는

$$(-2,\ 0) \text{ 또는 } (4,\ 0)$$

답 $(-2,\ 0)$ 또는 $(4,\ 0)$

146-1 $x^2+y^2+6x-4y+a=0$에서

$$(x+3)^2+(y-2)^2=13-a$$

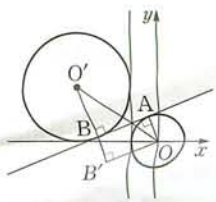
주어진 두 원의 반지름의 길이는 각각 $1,\ \sqrt{13-a}$이고, 중심을 각각 O, O′이라 하면

$$O(0,\ 0),\ O'(-3,\ 2)$$

이므로 두 원의 중심거리는

$$\overline{OO'}=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 공통내접선의 접점을 각각 A, B라 하고 점 O에서 $\overline{O'B}$의 연장선에 내린 수선의 발을 B′이라 하면



$$\overline{AB}=\overline{OB'}$$

$$=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{B'O'}^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{13})^2-(1+\sqrt{13-a})^2}$$

공통내접선의 길이가 2이므로

$$\sqrt{13-(1+\sqrt{13-a})^2}=2$$

양변을 제곱하면

$$13-(1+\sqrt{13-a})^2=4$$

$(1+\sqrt{13-a})^2=9, \quad 1+\sqrt{13-a}=\pm3$

$\therefore \sqrt{13-a}=-4$ 또는 $\sqrt{13-a}=2$

이때 $\sqrt{13-a}\ge0$이므로

$\sqrt{13-a}=2, \quad 13-a=4$

$\therefore a=9$ 답 9

중단원 연습 문제

본책 384~389쪽

01 5 **02** ① **03** 2 **04** $\frac{5}{2}$
05 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ **06** ④ **07** $\frac{1}{2}$
08 ⑤ **09** $4\sqrt{10}$ **10** -2 **11** ②
12 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$ **13** 5 **14** 27
15 ① **16** ② **17** $\frac{5\sqrt{71}}{4}$ **18** $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
19 6 **20** $2\sqrt{2}$ **21** $y=-2x+5$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$
22 ⑤ **23** $2\sqrt{6}$ **24** ④ **25** 10 **26** ②
27 ① **28** ②

01 전략 원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 2a+1)$로 놓고 원의 방정식의 표준형을 이용한다.

풀이 원의 중심이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a+1)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-2a-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(3, 2)$를 지나므로

$(3-a)^2+(2-2a-1)^2=r^2$

$\therefore 5a^2-10a+10=r^2$ ······ ㉠

또 점 $(-4, 3)$을 지나므로

$(-4-a)^2+(3-2a-1)^2=r^2$

$\therefore 5a^2+20=r^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, r=5$ ($\because r>0$)

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다. 답 5

다른 풀이 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a+1)$이라 하면 점 $(a, 2a+1)$에서 두 점 $(3, 2)$, $(-4, 3)$에 이르는 거리가 같으므로

$\sqrt{(a-3)^2+(2a+1-2)^2}$
$=\sqrt{(a+4)^2+(2a+1-3)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$-10a=10 \quad \therefore a=-1$

즉 원의 중심의 좌표는 $(-1, -1)$이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 $(-1, -1)$, $(3, 2)$ 사이의 거리와 같으므로 $\sqrt{(3+1)^2+(2+1)^2}=5$

02 전략 원의 방정식은 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같고, xy항이 없는 x, y에 대한 이차방정식이다.

풀이 주어진 방정식이 원의 방정식이 되려면 x^2의 계수와 y^2의 계수가 서로 같아야 하므로

$a=1$

또 xy항이 없어야 하므로 $b=0$

$a=1$, $b=0$을 주어진 방정식에 대입하면

$x^2+y^2-2y+c=0$

$\therefore x^2+(y-1)^2=1-c$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$1-c=4 \quad \therefore c=-3$

$\therefore a+b+c=1+0-3=-2$ 답 ①

03 전략 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$으로 놓고 주어진 세 점의 좌표를 대입하여 A, B, C의 값을 구한다.

풀이 구하는 원의 방정식을

$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

으로 놓고 세 점 $(4, 0)$, $(-4, 6)$, $(3, -1)$의 좌표를 각각 대입하면

$16+4A+C=0$

$52-4A+6B+C=0$

$10+3A-B+C=0$

세 식을 연립하여 풀면

$A=0, B=-6, C=-16$

이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-6y-16=0$, 즉 $x^2+(y-3)^2=25$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(0, 3)$이고, 반지름의 길이는 5이므로

$a=0, b=3, r=5$

$\therefore a-b+r=2$ 답 2

04 전략 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심은 선분 AB의 중점이고, 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$이다.

풀이 A(4, 4), B(12, -2)라 하면 원의 중심은 선분 AB의 중점이므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+12}{2}, \frac{4-2}{2}\right), \text{ 즉 } (8, 1)$$

또 선분 AB가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(12-4)^2+(-2-4)^2}=5$$

$$\therefore r=5$$

이때 직선 $y=mx-3$이 원의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 원의 중심 (8, 1)을 지난다.

즉 $1=8m-3$에서

$$8m=4 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$$

$$\therefore mr=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

05 **전략** 원의 중심의 좌표를 (a, a) $(a>0)$라 하면 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$이다.

풀이 구하는 원은 x축과 y축에 동시에 접하고, 중심이 제1사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, a)(a>0)$라 하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

이때 중심 (a, a)가 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$$a=2a-3 \qquad \therefore a=3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

06 **전략** 두 원이 접하는 경우는 외접할 때 또는 내접할 때이다.

풀이 $x^2+y^2+2x-6y+1=0$에서

$$(x+1)^2+(y-3)^2=9$$

$x^2+y^2-6x=k$에서

$$(x-3)^2+y^2=9+k$$

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 3)$, $(3, 0)$이므로 중심거리는

$$\sqrt{(3+1)^2+(-3)^2}=5$$

이고, 두 원의 반지름의 길이는 각각 3, $\sqrt{9+k}$이다.

(i) 두 원이 외접할 때,

$$3+\sqrt{9+k}=5, \qquad \sqrt{9+k}=2$$

양변을 제곱하면

$$9+k=4$$

$$\therefore k=-5$$

(ii) 두 원이 내접할 때,

$$|\sqrt{9+k}-3|=5, \qquad \sqrt{9+k}-3=\pm 5$$

$$\therefore \sqrt{9+k}=-2 \text{ 또는 } \sqrt{9+k}=8$$

이때 $\sqrt{9+k}\geq 0$이므로 $\quad \sqrt{9+k}=8$

양변을 제곱하면

$$9+k=64 \qquad \therefore k=55$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 k의 값은 55이다.

답 ④

07 문제이해 • $(x-1)^2+(y-3)^2=4$에서

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0$$

$(x-a)^2+(y-2)^2=1$에서

$$x^2+y^2-2ax-4y+a^2+3=0$$ ▸ 20% 배점

해결과정 • 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-6y+6$$
$$-(x^2+y^2-2ax-4y+a^2+3)=0$$

$$\therefore (2a-2)x-2y-a^2+3=0$$ ▸ 40% 배점

이 직선이 직선 $x+2y+5=0$에 평행하므로

$$\frac{2a-2}{1}=\frac{-2}{2}\neq\frac{-a^2+3}{5}$$ ▸ 20% 배점

답구하기 • $2a-2=-1$에서 $\quad a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 $\frac{-a^2+3}{5}$에 대입하면 $\frac{11}{20}\neq -1$이므로 구하는 a의 값은 $\frac{1}{2}$이다. ▸ 20% 배점

답 $\frac{1}{2}$

08 **전략** 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식을 이용한다.

풀이 $y=-x+k$를 $x^2+y^2=25$에 대입하면

$$x^2+(-x+k)^2=25$$

$$\therefore 2x^2-2kx+k^2-25=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로 $D>0$이다. 즉

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-2(k^2-25)>0$$

$$k^2<50$$

$$\therefore -5\sqrt{2}<k<5\sqrt{2}$$

따라서 자연수 k의 최댓값은 7이다. 답 ⑤

다른 풀이 원 $x^2+y^2=25$의 중심 (0, 0)과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d<5$이어야 한다. 즉

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<5$, $|k|<5\sqrt{2}$

$\therefore -5\sqrt{2}<k<5\sqrt{2}$

따라서 자연수 k의 최댓값은 7이다.

09 전략 원 $x^2+y^2=r^2\,(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$이다.

풀이 직선 $2x+y+3=0$, 즉 $y=-2x-3$에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

또 원 $x^2+y^2=8$의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$이므로 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x\pm2\sqrt{2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\therefore y=\frac{1}{2}x\pm\sqrt{10}$

따라서 두 직선이 x축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(-2\sqrt{10},\ 0)$, $(2\sqrt{10},\ 0)$이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{10}-(-2\sqrt{10})=4\sqrt{10}$ 답 $4\sqrt{10}$

10 전략 원의 중심과 접점을 지나는 직선이 접선과 수직임을 이용하여 먼저 접선의 기울기를 구한다.

풀이 $x^2+y^2+6x-2y+2=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=8$

원의 중심 $(-3,\ 1)$과 접점 $(-1,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-1}{-1-(-3)}=1$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선과 수직이므로 접선의 기울기는 -1이다.

즉 접선은 기울기가 -1이고 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-3=-(x+1)$ $\therefore y=-x+2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$ab=-2$ 답 -2

다른 풀이 원 $x^2+y^2+6x-2y+2=0$, 즉 $(x+3)^2+(y-1)^2=8$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$(-1+3)(x+3)+(3-1)(y-1)=8$

$2(x+3)+2(y-1)=8$

$\therefore y=-x+2$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로 $ab=-2$

11 전략 원과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 원의 중심과 직사각형의 두 대각선의 교점을 지남을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-2x-4y-7=0$에서

$(x-1)^2+(y-2)^2=12$

이때 원의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심 $(1,\ 2)$를 지난다.

또 네 직선 $x=-6$, $x=0$, $y=-4$, $y=-2$로 둘러싸인 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점

$\left(\frac{-6+0}{2},\ \frac{-4-2}{2}\right)$, 즉 $(-3,\ -3)$

을 지난다.

따라서 구하는 직선은 두 점 $(1,\ 2)$, $(-3,\ -3)$을 지나므로

$y-2=\frac{-3-2}{-3-1}(x-1)$

$\therefore y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ 답 ②

12 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 원 위의 두 점을 각각 $A(1,\ 2)$, $B(3,\ 4)$라 하면 원의 중심에서 현 AB에 그은 수선은 현 AB를 이등분한다.

이때 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기를 m이라 하면

$m\cdot\frac{4-2}{3-1}=-1$ $\therefore m=-1$

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{2+4}{2}\right)$, 즉 $(2,\ 3)$이므로 기울기가 -1이고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-(x-2)$ $\therefore y=-x+5$

즉 원의 중심을 C라 하면 점 C는 직선 $y=-x+5$ 위의 점이므로 $C(a,\ -a+5)$로 놓을 수 있다.

원의 넓이가 10π이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이고, $\overline{AC}$가 원의 반지름이므로

$\overline{AC}=\sqrt{10}$ $\therefore \overline{AC}^2=10$

$\overline{AC}^2=(a-1)^2+(-a+5-2)^2=10$에서

$a^2-4a=0$, $a(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

그런데 $a=0$이면 원의 중심은 $(0,\ 5)$가 되어 주어진 그래프의 모양을 만족시키지 않으므로

$a=4$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(4,\ 1)$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=10$

답 $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

다른 풀이 구하는 원의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=10$

이 원이 두 점 $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$를 지나므로

$(1-a)^2+(2-b)^2=10$ …… ㉠

$(3-a)^2+(4-b)^2=10$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$4a+4b-20=0$

$\therefore b=-a+5$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$(1-a)^2+(-3+a)^2=10$

$2a^2-8a=0,\quad a(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

그런데 $a=0$이면 원의 중심은 $(0,\ 5)$가 되어 주어진 그래프의 모양을 만족시키지 않으므로 $a=4$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(4,\ 1)$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=10$

13

해결과정 • $x^2+y^2=2|x|$에서

(i) $x\ge0$일 때,

$x^2+y^2=2x$

$\therefore (x-1)^2+y^2=1$

(ii) $x<0$일 때,

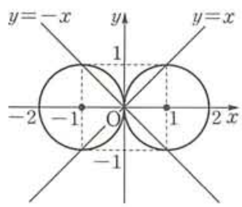
$x^2+y^2=-2x$

$\therefore (x+1)^2+y^2=1$

또 $|x|=|y|$에서 $x=\pm y$이므로

$y=-x$ 또는 $y=x$ ➔ 50% 배점

두 도형을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 교점은

$(-1,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 1)$

의 5개이다. ➔ 30% 배점

답 5

14

문제이해 • $x^2+y^2-4x-6y=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=13$ …… ㉠ ➔ 20% 배점

해결과정 • 정사각형의 두 대각선은 서로 수직이므로 직선 BD의 기울기는 -2이고, 직선 BD는 원의 중심 $(2,\ 3)$을 지나므로 직선 BD의 방정식은

$y-3=-2(x-2)$

$\therefore y=-2x+7$ …… ㉡ ➔ 30% 배점

㉡을 ㉠에 대입하면

$(x-2)^2+(-2x+7-3)^2=13$

$5x^2-20x+7=0$

$\therefore x=\dfrac{10\pm\sqrt{65}}{5}$

이때 점 D의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 작으므로

점 D의 x좌표는 $x=\dfrac{10-\sqrt{65}}{5}$

$x=\dfrac{10-\sqrt{65}}{5}$를 ㉡에 대입하여 계산하면

$y=\dfrac{15+2\sqrt{65}}{5}$

즉 $D\left(\dfrac{10-\sqrt{65}}{5},\ \dfrac{15+2\sqrt{65}}{5}\right)$이다. ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $a=10$, $b=15$, $c=2$이므로

$a+b+c=27$ ➔ 10% 배점

답 27

15

전략 원 위의 점을 $P(a,\ b)$라 하고 점 M의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓은 후 a, b를 x, y로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=9$

원 위의 점을 $P(a,\ b)$라 하면

$(a-2)^2+(b+1)^2=9$ …… ㉠

점 M의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{-2+a}{2},\ y=\dfrac{4+b}{2}$

$\therefore a=2x+2,\ b=2y-4$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2x+2-2)^2+(2y-4+1)^2=9$

$\therefore x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$

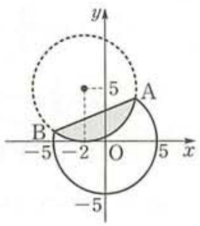
즉 점 M의 자취는 중심의 좌표가 $\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi\cdot\frac{3}{2}=3\pi$$ 답 ①

16 (전략) 접은 부분을 포함하는 새로운 원의 방정식을 구한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 접은 부분을 포함하는 새로운 원은 반지름의 길이가 5이고 점 $(-2,\ 0)$에서 x축에 접하므로 원의 중심의 좌표는

$(-2,\ 5)$



따라서 접은 부분을 포함하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-5)^2=25$, 즉

$x^2+y^2+4x-10y+4=0$

현 AB는 두 원 $x^2+y^2-25=0$, $x^2+y^2+4x-10y+4=0$의 공통현이므로 직선 AB의 방정식은

$x^2+y^2-25-(x^2+y^2+4x-10y+4)=0$

$\therefore\ 4x-10y+29=0$

따라서 이 직선의 y절편은 $\frac{29}{10}$이다. 답 ②

17 (전략) 두 원의 중심선은 공통현을 수직이등분함을 이용한다.

(풀이) $(x-3)^2+y^2=24$에서

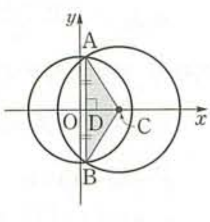
$x^2+y^2-6x-15=0$

이므로 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2-18-(x^2+y^2-6x-15)=0$

$6x-3=0 \quad \therefore\ x=\frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 원 $x^2+y^2=18$의 중심은 원점이고, C$(3,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{OC}}$의 교점을 D라 하면



$\overline{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CD}}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

직각삼각형 CAD에서 $\overline{\mathrm{CA}}=2\sqrt{6}$이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{71}}{2}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{71}$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{71}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{71}}{4}$$

답 $\frac{5\sqrt{71}}{4}$

18 문제이해 • 두 원의 교점을 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 원은 두 원의 공통현을 지름으로 하는 원이다. 따라서 구하는 원의 중심은 두 원의 공통현과 두 원의 중심선의 교점이다. ➜ 20% 배점

해결과정 • $(x+1)^2+y^2=16$에서

$x^2+y^2+2x-15=0$

$x^2+(y-2)^2=16$에서

$x^2+y^2-4y-12=0$

이므로 두 원의 공통현의 방정식은

$x^2+y^2+2x-15-(x^2+y^2-4y-12)=0$

$\therefore\ 2x+4y-3=0$ …… ㉠ ➜ 30% 배점

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 2)$이므로 두 원의 중심선의 방정식은

$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1$

$\therefore\ 2x-y=-2$ …… ㉡ ➜ 30% 배점

답구하기 • ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{2},\ y=1$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는

$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$ ➜ 20% 배점

답 $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$

Remark

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0,\ b\neq0$)

19 (전략) 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

(풀이) $x^2+y^2-6y-7=0$에서 $x^2+(y-3)^2=16$

원의 중심 $(0,\ 3)$과 직선 $y=\sqrt{3}x+k$, 즉 $\sqrt{3}x-y+k=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|-3+k|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|k-3|}{2}$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 원과 직선이 접하려면 $d=4$이어야 한다. 즉

$$\frac{|k-3|}{2}=4, \quad |k-3|=8$$

$k-3=\pm 8$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=11$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 6이다. 답 6

20 (전략) 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때에는 원의 중심과 직선 사이의 거리와 원의 반지름의 길이를 이용한다.

(풀이) △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0-3+3}{3}, \frac{3+0+0}{3}\right), \text{ 즉 } (0,\ 1)$$

직선 AC의 기울기는 $\frac{0-3}{3-0}=-1$이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=-x \quad \therefore x+y-1=0$

또 $x^2+y^2-8x-6y+23=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=2$

이므로 원의 중심 $(4,\ 3)$과 직선 $x+y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 구하는 거리의 최솟값은

$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

21 문제이해 • 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심 $(3,\ -1)$을 지나므로 구하는 직선의 기울기를 m이라 하면 직선의 방정식은

$y+1=m(x-3)$

$\therefore mx-y-3m-1=0$ ...... ㉠ ➔ 30% 배점

해결과정 • 직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=5$에 접하므로 원 $x^2+y^2=5$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$와 같다. 즉

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$|3m+1|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2m^2+3m-2=0, \quad (m+2)(2m-1)=0$

$\therefore m=-2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$ ➔ 40% 배점

(i) $m=-2$를 ㉠에 대입하면

$-2x-y+6-1=0$

$\therefore y=-2x+5$

(ii) $m=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}x-y-\frac{3}{2}-1=0$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ➔ 20% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x+5,\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ ➔ 10% 배점

답 $y=-2x+5,\ y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

22 (전략) 접선의 기울기를 m이라 하고 접선의 방정식을 구하여 서로 수직인 두 직선 사이의 관계를 이용한다.

(풀이) 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-a=mx$

$\therefore mx-y+a=0$ ...... ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$와 접하므로 원의 중심 $(2,\ 2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 3과 같다. 즉

$$\frac{|m\cdot 2-2+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$

$|2m-2+a|=3\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$5m^2-4(a-2)m-a^2+4a+5=0$

이 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1m_2=\frac{-a^2+4a+5}{5}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

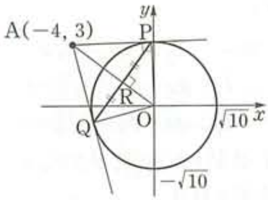
$$\frac{-a^2+4a+5}{5}=-1$$

$a^2-4a-10=0$

$\therefore a=2+\sqrt{14}\ (\because a>0)$

답 ⑤

23 문제이해 •



원 $x^2+y^2=10$의 중심이 O(0, 0)이고

$\overline{OP}\perp\overline{AP}$

이므로 △OPA는 ∠OPA=90°인 직각삼각형이다.

➔ 20% 배점

해결과정 • $\overline{OP}$는 원의 반지름이므로

$\overline{OP}=\sqrt{10}$

$\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$이므로 △OPA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{5^2-(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$ ➔ 30% 배점

$\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면 $\overline{OA}$는 $\overline{PQ}$를 수직이등분하므로 직각삼각형 OPA에서

$\frac{1}{2}\overline{AP}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{PR}$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\overline{PR}$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 $\overline{PR}=\sqrt{6}$이므로

$\overline{PQ}=2\overline{PR}=2\sqrt{6}$ ➔ 20% 배점

답 $2\sqrt{6}$

24 전략 두 원의 공통접선의 개수가 3인 경우, 두 원은 서로 외접함을 이용한다.

풀이 두 원의 공통접선의 개수가 3이면 두 원이 외접하므로 두 원의 반지름의 길이의 합은 두 원의 중심 거리와 같다.

$x^2+y^2+2x+2y-2=0$에서

$(x+1)^2+(y+1)^2=4$

$x^2+y^2-4x-6y+a=0$에서

$(x-2)^2+(y-3)^2=13-a$

두 원의 중심을 각각 C, C′이라 하면

C(−1, −1), C′(2, 3)

이므로 두 원의 중심거리는

$\overline{CC'}=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$

두 원의 반지름의 길이가 각각 2, $\sqrt{13-a}$이므로

$5=2+\sqrt{13-a}$, $\sqrt{13-a}=3$

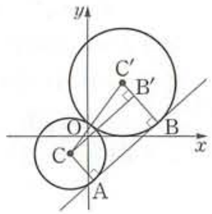
양변을 제곱하면 $13-a=9$ $\therefore a=4$

즉 두 원

$x^2+y^2+2x+2y-2=0$,

$x^2+y^2-4x-6y+4=0$

은 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 원의 공통외접선의 접점을 각각 A, B라 하고, 점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 B′이라 하면

$\overline{AB}=\overline{CB'}=\sqrt{\overline{CC'}^2-\overline{C'B'}^2}$

$=\sqrt{5^2-(3-2)^2}=2\sqrt{6}$

따라서 구하는 공통외접선의 길이는 $2\sqrt{6}$이다.

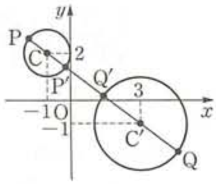
답 ④

25 문제이해 • 두 원의 중심이 각각 C(−1, 2), C′(3, −1)이므로 두 원의 중심거리는

$\overline{CC'}=\sqrt{(3+1)^2+(-1-2)^2}$

$=5$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 두 원 C, C′의 반지름의 길이는 각각 1, 2이므로 오른쪽 그림에서 선분 PQ의 길이의 최댓값은



$\overline{PC}+\overline{CC'}+\overline{C'Q}=1+5+2=8$

최솟값은

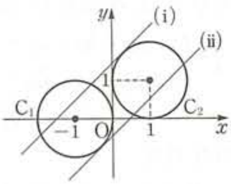
$\overline{CC'}-\overline{CP'}-\overline{C'Q'}=5-1-2=2$ ➔ 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 10이다. ➔ 20% 배점

답 10

26 전략 원과 직선이 접하면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 두 원 C_1, C_2의 교점의 개수의 합이 3인 경우는 오른쪽 그림과 같다.



(i) $a=2$, $b=1$인 경우

원 C_2의 중심 (1, 1)과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$\frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$, $|k|=\sqrt{2}$

$\therefore k=\pm\sqrt{2}$

이때 $k=-\sqrt{2}$이면 직선 $x-y-\sqrt{2}=0$과 원 C_1의 중심 $(-1,\ 0)$ 사이의 거리가

$$\frac{|-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}>1$$

이므로 $a=0$

$\therefore k=\sqrt{2}$

(ii) $a=1,\ b=2$인 경우

원 C_1의 중심 $(-1,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1, \quad |-1+k|=\sqrt{2}$$
$$-1+k=\pm\sqrt{2}$$

$\therefore k=1-\sqrt{2}$ 또는 $k=1+\sqrt{2}$

이때 $k=1+\sqrt{2}$이면 직선 $x-y+1+\sqrt{2}=0$과 원 C_2의 중심 $(1,\ 1)$ 사이의 거리가

$$\frac{|1-1+1+\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}>1$$

이므로 $b=0$

$\therefore k=1-\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $k=\sqrt{2}$ 또는 $k=1-\sqrt{2}$이므로 구하는 합은 1이다.

답 ②

27 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 직선 l이 원 C_1에 접하고 원 C_1의 반지름의 길이는 1이므로

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \quad \therefore a^2+b^2=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $l_1,\ l_2$가 직선 $l : ax+by+1=0$에 평행하므로

$l_1 : ax+by+m_1=0,$

$l_2 : ax+by+m_2=0$

(단, $m_1\neq1,\ m_2\neq1,\ m_2>m_1$)

이라 하자.

두 직선 $l_1,\ l_2$가 원 C_2에 접하므로 원 C_2의 중심 $(0,\ 0)$과 두 직선 $l_1,\ l_2$ 사이의 거리는 원 C_2의 반지름의 길이 $2\sqrt{2}$와 같다. 즉

$$\frac{|m_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|m_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$

㉠에서

$m_1=-2\sqrt{2},\ m_2=2\sqrt{2}\ (\because m_2>m_1)$

$\therefore l_1 : ax+by-2\sqrt{2}=0,$

$l_2 : ax+by+2\sqrt{2}=0$

이때 점 $P_1(x_1,\ y_1),\ P_2(x_2,\ y_2)$는 각각 직선 $l_1,\ l_2$ 위에 있으므로

$ax_1+by_1-2\sqrt{2}=0,\ ax_2+by_2+2\sqrt{2}=0$

$\therefore ax_1+by_1=2\sqrt{2},\ ax_2+by_2=-2\sqrt{2}$

$\therefore (ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)$

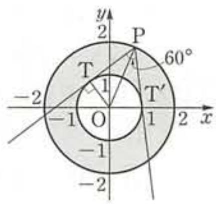
$=(2\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2}+1)$

$=-7$

답 ①

28 전략 두 접선이 이루는 각의 크기가 60°일 때의 점 P를 찾아 그 점을 움직여 본다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 60°일 때의 두 접점을 각각 T, T'이라 하자.



$\triangle PTO$는 $\angle PTO=90°$, $\angle OPT=30°$인 직각삼각형이므로

$$\overline{OP}=\frac{\overline{OT}}{\sin 30°}=1\cdot2=2$$

즉 점 P에서 원에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 60°일 때, 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 있다.

따라서 점 P에서 원에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 60° 이상이 되는 점 P의 자취는 위의 그림의 색칠한 부분(원 $x^2+y^2=1$ 제외)과 같으므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot2^2-\pi\cdot1^2=3\pi$

답 ②

Remark

점 P와 원의 중심 O 사이의 거리가 가까울수록 점 P에서 원에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 커진다.

Ⅳ. 도형의 방정식

14 도형의 이동

유제

본책 393~410쪽

147-1 평행이동 $(x, y) \longrightarrow (x+7, y-2)$는 x축의 방향으로 7만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(a, -1)$이 옮겨지는 점의 좌표는

$(a+7, -1-2)$, 즉 $(a+7, -3)$

이 점이 직선 $y=2x-1$ 위에 있으므로

$-3=2(a+7)-1, \quad a+7=-1$

$\therefore a=-8$

답 -8

147-2 점 $(1, -2)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(9, 1)$이라 하면

$1+a=9, \ -2+b=1$

$\therefore a=8, \ b=3$

즉 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 8만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 이 평행이동에 의하여 점 $(3, -3)$으로 옮겨지는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$x+8=3, \ y+3=-3$

$\therefore x=-5, \ y=-6$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-5, -6)$이다.

답 $(-5, -6)$

148-1 $4x+y-5=0$에 x 대신 $x-a$를, y 대신 $y-3$을 대입하면

$4(x-a)+(y-3)-5=0$

$\therefore 4x+y-4a-8=0$

이 직선이 원점을 지나므로

$-4a-8=0 \quad \therefore a=-2$

답 -2

148-2 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로

$2x-3y-1=0$에 x 대신 $x-1$을, y 대신 $y+5$를 대입하면

$2(x-1)-3(y+5)-1=0$

$\therefore 2x-3y-18=0$

이 직선이 $2x+ay+b=0$과 일치하므로

$a=-3, \ b=-18$

$\therefore a-b=15$

답 15

149-1 점 $(2, 1)$을 점 $(-1, 0)$으로 옮기는 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

$x^2+y^2-8x+2y+1=0$에서

$(x-4)^2+(y+1)^2=16$

이므로 이 원이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$\{(x+3)-4\}^2+\{(y+1)+1\}^2=16$

$\therefore (x-1)^2+(y+2)^2=16$

따라서 구하는 중심의 좌표는

$(1, -2)$

답 $(1, -2)$

다른 풀이 구하는 원의 중심은 주어진 평행이동에 의하여 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$의 중심 $(4, -1)$이 옮겨지는 점이므로

$(4-3, -1-1)$, 즉 $(1, -2)$

149-2 $x^2+y^2-2x-8=0$에서

$(x-1)^2+y^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=9 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠에 x 대신 $x-a$를, y 대신 $y-b$를 대입하면

$(x-a-1)^2+(y-b)^2=9$

이 식이 ㉡과 같아야 하므로

$-a-1=1, \ -b=-1$

$\therefore a=-2, \ b=1$

$\therefore ab=-2$

답 -2

다른 풀이 $x^2+y^2-2x-8=0$에서

$(x-1)^2+y^2=9$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(1, 0)$

$x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=9$

이므로 이 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$

즉 점 $(1, 0)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-1, 1)$이므로

$1+a=-1, \ 0+b=1$

$\therefore a=-2, \ b=1$

$\therefore ab=-2$

150-1 점 $(5,\ -2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P는 $\quad P(-5,\ 2)$

점 $(5,\ -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q는 $\quad Q(-2,\ 5)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=\frac{5-2}{-2-(-5)}(x+2)$$

$$\therefore y=x+7$$

답 $y=x+7$

Remark 두 점을 지나는 직선의 방정식

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\ (\text{단, } x_1\neq x_2)$$

150-2 점 $(3,\ -4)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점은 $(-3,\ 4)$

이 점이 직선 $ax+5y-2a^2=0$ 위의 점이므로

$$a\cdot(-3)+5\cdot4-2a^2=0, \qquad 2a^2+3a-20=0$$

$$(a+4)(2a-5)=0$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=\frac{5}{2}$$

답 $-4,\ \frac{5}{2}$

151-1 직선 $y=kx+1$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=kx+1$$

$$\therefore y=-kx-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2+4x-6y+9=0$, 즉 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$의 넓이를 이등분하므로 직선 ㉠은 원의 중심 $(-2,\ 3)$을 지난다. 즉

$$3=-k\cdot(-2)-1, \qquad 2k=4$$

$$\therefore k=2$$

답 2

Remark 원의 넓이를 이등분하는 직선

직선이 원의 중심을 지나면 직선은 원의 넓이를 이등분한다. 또 원의 넓이를 이등분하는 직선은 반드시 원의 중심을 지난다.

151-2 $y=x^2-2mx+m^2-1$에서

$$y=(x-m)^2-1$$

포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(m,\ -1)$이므로 이 포물선을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $\quad (-m,\ 1)$

즉 $-m=-2$, $1=k$이므로

$$m=2,\ k=1$$

$$\therefore mk=2$$

답 2

152-1 직선 $y=3x-4$를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=3\cdot(-x)-4$$

$$\therefore y=3x+4$$

이 직선을 다시 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+1=3(x-2)+4$$

$$\therefore y=3x-3$$

답 $y=3x-3$

152-2 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-4)^2=r^2$$

이 원을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $\quad (x-4)^2+(y+1)^2=r^2$

이 원이 y축에 접하므로 원의 중심의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같다.

$$\therefore r=4$$

답 4

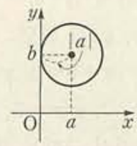
Remark y축에 접하는 원의 방정식

y축에 접하는 원은

$$|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=(\text{반지름의 길이})$$

이므로 중심의 좌표가 $(a,\ b)$이고 y축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$



153-1 점 $(-3,\ a)$를 점 $(9,\ 5)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(b,\ 2)$이므로 점 $(9,\ 5)$는 두 점 $(-3,\ a)$, $(b,\ 2)$를 잇는 선분의 중점이다. 즉

$$\frac{-3+b}{2}=9,\ \frac{a+2}{2}=5$$

이므로

$$-3+b=18,\ a+2=10$$

$$\therefore a=8,\ b=21$$

$$\therefore 2a-b=2\cdot8-21=-5$$

답 -5

153-2 $y=x^2-8x+19$에서

$$y=(x-4)^2+3$$

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(4,\ 3)$이므로 점 $(4,\ 3)$을 점 $(a,\ b)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(0,\ -3)$이어야 한다.

즉 점 (a, b)가 두 점 $(4, 3)$, $(0, -3)$을 잇는 선분의 중점이므로

$$a=\frac{4+0}{2}=2,\ b=\frac{3-3}{2}=0$$

$$\therefore a+b=2$$

답 2

153-3 주어진 원을 점 $(2, -3)$에 대하여 대칭이동한 원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 점 $(2, -3)$은 주어진 원의 중심 $(-1, 1)$과 점 (a, b)를 잇는 선분의 중점이다.

즉 $\frac{-1+a}{2}=2,\ \frac{1+b}{2}=-3$이므로

$$a=5,\ b=-7$$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(5, -7)$이고 반지름의 길이가 2이다.

이 원이 직선 $y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$과 접하므로 원의 중심 $(5, -7)$과 직선 $mx-y-3=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같다. 즉

$$\frac{|5m-(-7)-3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|5m+4|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$21m^2+40m+12=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 m의 값의 합은 $-\frac{40}{21}$이다.

답 $-\frac{40}{21}$

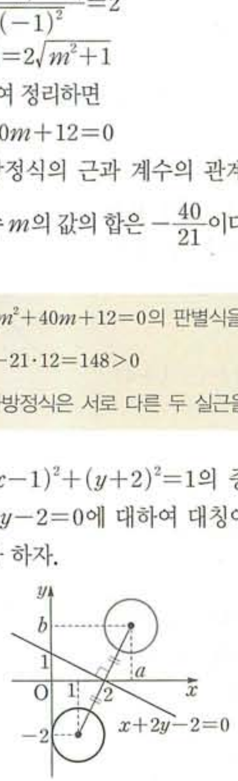
Remark

이차방정식 $21m^2+40m+12=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=20^2-21\cdot 12=148>0$$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

154-1 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=1$의 중심 $(1, -2)$를 직선 $x+2y-2=0$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b)라 하자.



(i) 두 점 $(1, -2)$, (a, b)를 잇는 선분의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점이므로

$$\frac{1+a}{2}+2\cdot\frac{-2+b}{2}-2=0$$

$$\therefore a+2b-7=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 두 점 $(1, -2)$, (a, b)를 지나는 직선이 직선 $x+2y-2=0$과 수직이므로

$$\frac{b+2}{a-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$b+2=2(a-1)$$

$$\therefore 2a-b-4=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

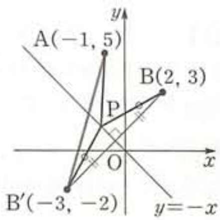
$$a=3,\ b=2$$

따라서 대칭이동한 도형은 점 $(3, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2=1$$

답 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

155-1 오른쪽 그림과 같이 점 $B(2, 3)$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



$$B'(-3, -2)$$

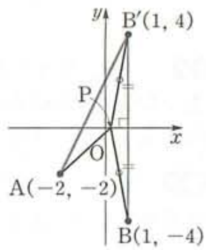
$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$
$$\geq\overline{AB'}$$
$$=\sqrt{\{-3-(-1)\}^2+(-2-5)^2}$$
$$=\sqrt{53}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{53}$이다.

답 $\sqrt{53}$

155-2 오른쪽 그림과 같이 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면



$$B'(1, 4)$$

$\overline{BP}=\overline{B'P}$이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$
$$\geq\overline{AB'}$$

즉 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소일 때의 점 P는 직선 AB'이 x축과 만나는 점이다.

이때 직선 AB'의 방정식은

$$y+2=\frac{4-(-2)}{1-(-2)}(x+2)$$

$$\therefore y=2x+2$$

따라서 직선 AB′의 x절편이 -1이므로 구하는 점 P의 좌표는

$(-1,\ 0)$ 답 $(-1,\ 0)$

중단원 연습 문제

○ 본책 411~415쪽

01 -2	**02** ⑤	**03** -1	**04** 3	**05** 10
06 ③	**07** $y=-x+3$		**08** $5\sqrt{2}$	**09** 23
10 $y=x+\sqrt{3}$		**11** 45	**12** ⑤	**13** ①
14 풀이 참조		**15** ③	**16** 3	**17** ②
18 20 m	**19** ②	**20** 1	**21** ④	**22** ③
23 7				

01 (전략) 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+a,\ y+b)$는 점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

(풀이) 점 $(1,\ -3)$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(5,\ -7)$이므로

$1+a=5,\ -3+b=-7$

$\therefore a=4,\ b=-4$

따라서 평행이동 $(x,\ y) \longrightarrow (x+4,\ y-4)$에 의하여 점 $(c,\ d)$가 옮겨지는 점의 좌표가 $(1,\ -3)$이므로

$c+4=1,\ d-4=-3$

$\therefore c=-3,\ d=1$

$\therefore a+b+c+d=-2$ 답 -2

02 (전략) 도형 $f(x,\ y)=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a,\ y-b)=0$이다.

(풀이) 직선 $y=4x-3$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=4(x-a)-3$

$\therefore y=4x-4a-4$

이 직선이 직선 $y=mx+4$와 일치하므로

$4=m,\ -4a-4=4$

$\therefore a=-2,\ m=4$

$\therefore a+m=2$ 답 ⑤

03 (전략) 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동을 이용한다.

(풀이) 원 $x^2+(y-1)^2=4$의 중심의 좌표는 $(0,\ 1)$이고, 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심의 좌표는 $(1,\ 0)$이므로 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-3x+1$로 옮겨진다고 하면

$y+1=a(x-1)+b$

$\therefore y=ax-a+b-1$

이 직선이 직선 $y=-3x+1$과 일치하므로

$a=-3,\ -a+b-1=1$

$\therefore a=-3,\ b=-1$

$\therefore y=-3x-1$

따라서 구하는 직선의 y절편은 -1이다.

답 -1

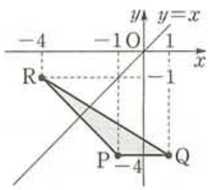
04 해결과정 • 점 $P(-1,\ -4)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점 Q는

$Q(1,\ -4)$ ➜ 30% 배점

점 $P(-1,\ -4)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 R는

$R(-4,\ -1)$ ➜ 30% 배점

답구하기 • 세 점 P, Q, R를 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$\triangle PQR$

$=\frac{1}{2}\cdot(1+1)\cdot(-1+4)$

$=3$ ➜ 40% 배점

답 3

05 (전략) 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동을 이용한다.

(풀이) $x^2+y^2+6x-4y-12=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=25$

이 원의 중심 $(-3,\ 2)$를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(3,\ 2)$이므로

$a=3,\ b=2$

또 원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 $c=5$

$\therefore a+b+c=10$ 답 10

다른풀이 원 $(x+3)^2+(y-2)^2=25$를 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+3)^2+(y-2)^2=25$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2=25$

이 원의 중심은 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이는 5이므로

$a=3,\ b=2,\ c=5$

$\therefore a+b+c=10$

06 전략 처음 직선의 기울기를 m이라 하고, 이 직선을 문제에서 주어진 순서대로 이동해 본다.

풀이 처음 직선의 기울기를 m이라 하면 이 직선이 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=m(x+2)$

$\therefore y=mx+2m+1$

이 직선을 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-2=mx+2m+1$

$\therefore y=mx+2m+3$

이 직선을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=mx+2m+3$

이 직선이 점 $(1,\ -2)$를 지나므로

$-(-2)=m+2m+3, \qquad 3m=-1$

$\therefore m=-\dfrac{1}{3}$

따라서 처음 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이다.

답 ③

07 문제이해 • $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(0,\ 1)$이라 하면 직선 l은 두 점 A, B를 잇는 선분의 수직이등분선이다.

▸ 20% 배점

해결과정 • 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+0}{2},\ \dfrac{3+1}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 2)$ ▸ 20% 배점

또 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{1-3}{0-2}=1$

이므로 직선 l의 기울기는 -1이다. ▸ 30% 배점

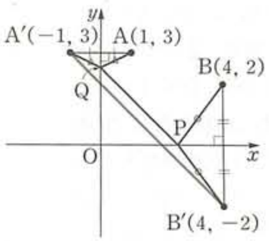
답구하기 • 따라서 직선 l의 방정식은

$y-2=-(x-1)$

$\therefore y=-x+3$ ▸ 30% 배점

답 $y=-x+3$

08 문제이해 •



위의 그림과 같이 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면

$\mathrm{A}'(-1,\ 3)$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\mathrm{B}'(4,\ -2)$ ▸ 40% 배점

해결과정 • $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{A'Q}}$, $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PB'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{QP}}+\overline{\mathrm{PB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{\{4-(-1)\}^2+(-2-3)^2}$

$=5\sqrt{2}$ ▸ 50% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$이다.

▸ 10% 배점

답 $5\sqrt{2}$

09 문제이해 • 직선 $y=ax+b$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$y+1=a(x-2)+b$, 즉 $y=ax-2a+b-1$

$\cdots\cdots$ ㉠ ▸ 30% 배점

해결과정 • 직선 ㉠이 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-4$에 수직이므로

$a\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1 \qquad \therefore a=2$ ▸ 30% 배점

또 $y=0$을 $y=-\dfrac{1}{2}x-4$에 대입하면

$0=-\dfrac{1}{2}x-4 \qquad \therefore x=-8$

따라서 직선 ㉠과 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x-4$는 점 $(-8,\ 0)$에서 만난다.

즉 직선 $y=2x+b-5$가 점 $(-8,\ 0)$을 지나므로

$0=-16+b-5$

$\therefore b=21$ ▸ 30% 배점

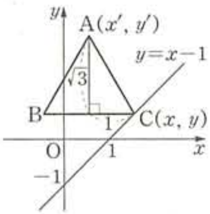
답구하기 • $\therefore a+b=23$ ▸ 10% 배점

답 23

10 전략 점 C를 점 A로 옮기는 평행이동을 생각한다.

14 도형의 이동

풀이 $C(x, y)$, $A(x', y')$ 이라 하면 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 2이므로 오른쪽 그림과 같이 점 A는 점 C를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 점이다.



즉 $x'=x-1$, $y'=y+\sqrt{3}$이므로

$x=x'+1$, $y=y'-\sqrt{3}$ ...... ㉠

점 $C(x, y)$가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$y'-\sqrt{3}=(x'+1)-1$ $\quad\therefore y'=x'+\sqrt{3}$

따라서 점 A의 자취의 방정식은

$y=x+\sqrt{3}$

답 $y=x+\sqrt{3}$

다른 풀이 점 A는 점 C를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 점이므로 점 A의 자취는 점 C의 자취인 직선 $y=x-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것이다.

즉 점 A의 자취의 방정식은

$y-\sqrt{3}=(x+1)-1$ $\quad\therefore y=x+\sqrt{3}$

11 전략 포물선의 꼭짓점의 좌표를 이용하여 포물선 $y=x^2-2x$를 포물선 $y=x^2-12x+30$으로 옮기는 평행이동을 구한다.

풀이 포물선 $y=x^2-2x=(x-1)^2-1$의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -1)$

포물선 $y=x^2-12x+30=(x-6)^2-6$의 꼭짓점의 좌표는 $(6, -6)$

이므로 주어진 평행이동은 점 $(1, -1)$을 점 $(6, -6)$으로 옮기는 것이다.

즉 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 직선 l'의 방정식은 $(x-5)-2(y+5)=0$

$\therefore x-2y-15=0$

두 직선 l, l'은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리 d는 직선 $x-2y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$과 직선 $x-2y-15=0$ 사이의 거리와 같다.

즉 $d=\dfrac{|-15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$이므로

$d^2=45$

답 45

Remark 평행한 두 직선 사이의 거리

평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 다음과 같이 구한다.
(i) 직선 l_1 위의 한 점의 좌표 (x_1, y_1)을 구한다.
(ii) 점 (x_1, y_1)과 직선 l_2 사이의 거리를 구한다.

12 전략 세 점 B, C, E의 좌표를 각각 구하여 세 점이 한 직선 위에 있도록 하는 조건을 이용한다.

풀이 점 $A(1, 3)$을 x축, y축에 대하여 각각 대칭이동한 점 B, C는 $B(1, -3)$, $C(-1, 3)$

점 $D(a, b)$를 x축에 대하여 대칭이동한 점 E는

$E(a, -b)$

세 점 B, C, E가 한 직선 위에 있으므로 직선 BC의 기울기와 직선 CE의 기울기는 같다.

$(\text{직선 BC의 기울기})=\dfrac{3-(-3)}{-1-1}=-3$,

$(\text{직선 CE의 기울기})=\dfrac{-b-3}{a-(-1)}=\dfrac{-b-3}{a+1}$

이므로 $\dfrac{-b-3}{a+1}=-3$

$\therefore b=3a$ ...... ㉠

직선 AD의 기울기는 $\dfrac{b-3}{a-1}$이므로 ㉠을 대입하면

$\dfrac{b-3}{a-1}=\dfrac{3a-3}{a-1}=\dfrac{3(a-1)}{a-1}=3$ $(\because a\neq 1)$

답 ⑤

Remark 세 점이 한 직선 위에 있을 조건

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있다.
➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)
=(직선 AC의 기울기)
➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

13 전략 원의 대칭이동은 원의 중심의 대칭이동을 이용한다.

풀이 주어진 원의 중심의 좌표가 $(-1, -3)$이므로 원 $(x+1)^2+(y+3)^2=4$를 원점에 대하여 대칭이동한 원 C의 중심은 점 $(-1, -3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점인 $(1, 3)$이다.

한편 직선 $mx-y+6=0$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선 l은

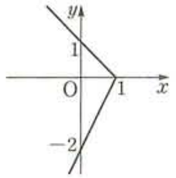
$m\cdot(-x)-y+6=0$, 즉 $mx+y-6=0$

이 직선이 원 C의 중심 $(1, 3)$을 지나므로

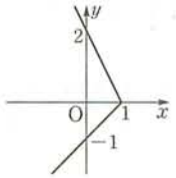
$m+3-6=0$

$\therefore m=3$ 답 ①

14 해결과정 • 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(y)$이고, $x=f(y)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(-y)$이다.
즉 $x=f(-y)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후, x축에 대하여 대칭이동한 것이다. ▶ 50% 배점
답구하기 • 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 1]과 같고, 이 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 그래프는 [그림 2]와 같으므로 구하는 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2] ▶ 50% 배점

답 풀이 참조

다른 풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $y=f(-x)$이고, 함수 $y=f(-x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $x=f(-y)$이다.
따라서 $x=f(-y)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

15 전략 대칭이동과 평행이동을 이어서 할 때, 반드시 문제에서 주어진 순서대로 이동한다.

풀이 직선 $4x-3y-7=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$4y-3x-7=0 \quad \therefore 3x-4y+7=0$

이 직선을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-2)-4(y-1)+7=0$

$\therefore 3x-4y+5=0$ …… ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r와 같다.

$\therefore r=\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$ 답 ③

16 전략 점 P를 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A는 선분 PP′의 중점임을 이용한다.

풀이 직선 $2x-y-1=0$ 위의 임의의 점 (x, y)를 점 $(0, 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y')이라 하면 점 $(0, 2)$는 두 점 (x, y), (x', y')을 잇는 선분의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=0, \ \frac{y+y'}{2}=2$

$\therefore x=-x', \ y=4-y'$

점 (x, y)는 직선 $2x-y-1=0$ 위의 점이므로

$2(-x')-(4-y')-1=0$

$\therefore 2x'-y'+5=0$

즉 점 (x', y')은 직선 $2x-y+5=0$ 위의 점이다.
따라서 주어진 직선을 점 $(0, 2)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식이 $2x-y+5=0$이므로

$a=2, b=5$

$\therefore b-a=3$ 답 3

다른 풀이 직선 $2x-y-1=0$, 즉 $y=2x-1$을 점에 대하여 대칭이동해도 직선의 기울기는 변하지 않으므로 대칭이동한 직선의 기울기는 2이다.
또 직선 $y=2x-1$ 위의 점 $(0, -1)$을 점 $(0, 2)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (m, n)이라 하면 점 $(0, 2)$는 두 점 $(0, -1)$, (m, n)을 잇는 선분의 중점이므로

$\frac{0+m}{2}=0, \ \frac{-1+n}{2}=2$

$\therefore m=0, n=5$

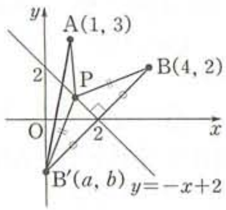
따라서 구하는 직선은 기울기가 2이고 점 $(0, 5)$를 지나므로 직선의 방정식은

$y=2x+5 \quad \therefore 2x-y+5=0$

즉 $a=2, b=5$이므로 $b-a=3$

17 전략 점 B를 주어진 직선에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(a, b)$라 하고 점 B′의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 B를 직선 $y=-x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(a, b)$라 하면 $\overline{BB'}$의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$는



직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로

$$\frac{b+2}{2}=-\frac{a+4}{2}+2$$

$$\therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직선 BB′이 직선 $y=-x+2$와 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-4}\cdot(-1)=-1$$

$$\therefore a-b=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=-2$

$\therefore$ B′$(0,\ -2)$

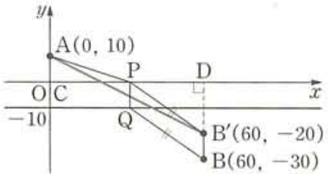
$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}\\&\geq\overline{\mathrm{AB'}}\\&=\sqrt{(0-1)^2+(-2-3)^2}\\&=\sqrt{26}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{26}$이다. 답 ②

18 (전략) A마을 쪽의 강변을 x축으로 하는 좌표평면을 정하여 A마을, B마을의 좌표를 구한다. 이때 강의 폭이 일정하므로 B마을을 강쪽으로 강의 폭만큼 평행이동하여 생각한다.

(풀이) 다음 그림과 같이 A마을 쪽의 강변을 x축, $\overline{\mathrm{AC}}$를 y축으로 하는 좌표평면을 정하면 A마을의 위치는 점 $(0,\ 10)$이고, B마을의 위치는 점 $(60,\ -30)$이다.



이때 건설되는 다리의 A마을 쪽의 지점을 P, B마을 쪽의 지점을 Q라 하면 두 마을 사이를 오가는 거리는

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$$

그런데 $\overline{\mathrm{PQ}}=10$으로 일정하므로 두 마을 사이를 오가는 거리가 최소이려면 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 값이 최소이어야 한다.

점 B를 y축의 방향으로 10만큼 평행이동한 점을 B′이라 하면 B′$(60,\ -20)$이고

$$\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{PB'}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB'}}\geq\overline{\mathrm{AB'}}$$

따라서 점 P가 선분 AB′ 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 값이 최소가 된다.

이때 직선 AB′의 방정식은

$$y=\frac{-20-10}{60-0}x+10$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x+10$$

점 P는 x축 위의 점이므로 위의 식에 $y=0$을 대입하면

$$0=-\frac{1}{2}x+10 \qquad \therefore x=20$$

따라서 P$(20,\ 0)$이므로 C지점에서 D지점 쪽으로 20 m 떨어진 곳에 다리를 건설해야 한다.

답 20 m

19 (전략) 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형과 직선 $kx-y+k-1=0$이 만나도록 하는 k의 값의 범위를 구한다.

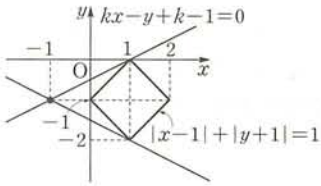
(풀이) 도형 $|x|+|y|=1$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $|x-1|+|y+1|=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

직선 $kx-y+k-1=0$에서

$$k(x+1)-(y+1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이므로 직선 ㉡은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ -1)$을 지난다.

두 방정식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 실수 x, y가 존재하므로 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형과 직선 $kx-y+k-1=0$의 교점이 존재한다.



k는 직선 ㉡의 기울기이므로 위의 그림에서 직선 ㉡이 점 $(1,\ 0)$을 지날 때 k의 값이 최대이고, 점 $(1,\ -2)$를 지날 때 k의 값이 최소이다.

$x=1,\ y=0$을 ㉡에 대입하면

$$2k-1=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{2}$$

$x=1,\ y=-2$를 ㉡에 대입하면

$$2k+1=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

따라서 $M=\frac{1}{2},\ m=-\frac{1}{2}$이므로

$$16M^2m^2=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

답 ②

20 문제이해 • P$(-2,\ 1)$을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_1은

$P_1(2,\ 1)$

점 P_1을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2는

$P_2(-2,\ -1)$

점 P_2를 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_3은

$P_3(2,\ -1)$

점 P_3을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4는

$P_4(-2,\ 1)$

점 P_4를 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_5는

$P_5(2,\ 1)$

⋮

즉 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$의 좌표는 $(2,\ 1)$, $(-2,\ -1)$, $(2,\ -1)$, $(-2,\ 1)$이 순서대로 반복된다.

▸ 50% 배점

해결과정 • 이때 $2014=4\cdot503+2$에서 점 P_{2014}의 좌표는 점 P_2의 좌표와 같으므로

$P_{2014}(-2,\ -1)$ ▸ 20% 배점

답구하기 • 따라서 점 $P_{2014}(-2,\ -1)$과 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3\cdot(-2)+4\cdot(-1)+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$ ▸ 30% 배점

답 1

21 전략 도형 $f(x,\ y)=0$을 주어진 순서에 따라 대칭이동시켜 도형 $g(x,\ y)=0$을 찾는다.

풀이 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이고, 도형 $f(y,\ x)=0$을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이므로 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 $f(-x,\ -y)=0$이 나타내는 도형과 같다.

ㄱ. [반례] $f(x,\ y)=x^2-y+1$이면 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 포물선 $y=x^2+1$이고, $f(-x,\ -y)=x^2+y+1$이므로 방정식 $g(x,\ y)=0$이 나타내는 도형은 포물선 $y=-x^2-1$이다.
포물선 $y=x^2+1$은 평행이동하여 포물선 $y=-x^2-1$과 겹칠 수 없다.

ㄴ. 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(-x,\ -y)=0$이므로 방정식 $g(x,\ y)=0$과 같다.
따라서 도형 $f(x,\ y)=0$을 원점에 대하여 대칭이동하면 도형 $g(x,\ y)=0$이 된다.

ㄷ. 도형 $f(x,\ y)=0$을 중심이 $(a,\ b)$, 반지름의 길이가 r인 원이라 하면 그 도형의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ …… ㉠

도형 $g(x,\ y)=0$, 즉 도형 $f(-x,\ -y)=0$의 방정식은

$(-x-a)^2+(-y-b)^2=r^2$

$\therefore (x+a)^2+(y+b)^2=r^2$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡이 일치하려면 $-a=a$, $-b=b$에서 $a=b=0$이므로 원 ㉠의 중심은 원점이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

22 전략 원의 중심의 평행이동과 대칭이동을 이용하여 좌표평면 위에 두 원 O_2, O_3을 그려 본다.

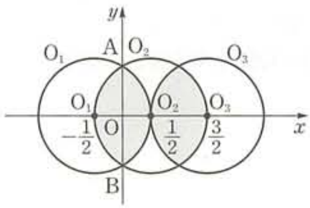
풀이 원 O_1의 중심이 점 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이므로 원 O_1을 y축에 대하여 대칭이동한 원 O_2의 중심의 좌표는

$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

원 O_1을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원 O_3의 중심의 좌표는

$\left(-\frac{1}{2}+2,\ 0\right)$, 즉 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$

따라서 원 O_2, O_3은 중심이 각각 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이고, 반지름의 길이가 1이므로 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



구하는 넓이는 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

두 원 O_1, O_2의 교점을 각각 A, B라 하면 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 O_1AB의 넓이에서 삼각형 O_1AB의 넓이를 뺀 값의 4배와 같다.

이때 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 모두 1이므로 삼각형 AO_1O_2는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

즉 $\angle AO_1O_2=60^\circ$이므로

$\angle AO_1B=120^\circ$

따라서 구하는 넓이는

$$4\left(\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120°}{360°} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2\right) = 4\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

답 ③

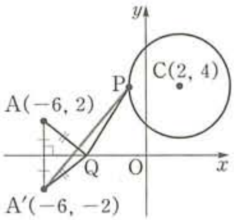
Remark

$\triangle AO_1O \equiv \triangle BO_1O$이므로 $\triangle AO_1O = \triangle BO_1O$
$\triangle AO_1O = \frac{1}{2}\triangle AO_1O_2$이므로

$$\triangle O_1AB = \triangle AO_1O_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

23 (전략) 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 이용한다.

(풀이) 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$C(2, 4)$,
$A'(-6, -2)$
$\overline{AQ} = \overline{A'Q}$이므로

$$\overline{AQ} + \overline{QP} = \overline{A'Q} + \overline{QP}$$
$$\geq \overline{A'P}$$

따라서 $\overline{A'P}$의 길이는 원 위의 점 P와 점 $A'(-6, -2)$ 사이의 거리이므로

$$\overline{A'P} \geq \overline{CA'} - \overline{CP}$$
$$= \sqrt{(2+6)^2 + (4+2)^2} - 3$$
$$= 10 - 3 = 7$$

따라서 $\overline{AQ} + \overline{QP}$의 최솟값은 7이다.

답 7

15 부등식의 영역

유제

본책 422~437쪽

156-1 직선 $x+y-1=0$, 즉 $y=-x+1$의 아랫부분을 나타내는 부등식은

$y < -x+1$

점 $(1, a)$가 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$a < -1+1$

$\therefore a < 0$ 답 $a<0$

156-2 $y=mx-m+1$에서

$f(x, y) = mx - y - m + 1$

이라 하면 두 점 $(2, 0)$, $(4, 3)$이 직선 $f(x, y)=0$을 경계로 서로 반대쪽에 있으므로

$f(2, 0)f(4, 3) < 0$

$(2m-m+1)(4m-3-m+1) < 0$

$(m+1)(3m-2) < 0$

$\therefore -1 < m < \frac{2}{3}$ 답 $-1<m<\frac{2}{3}$

157-1 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=k$의 외부를 나타내는 부등식은

$(x-1)^2+(y-2)^2 > k$

점 $(-1, 6)$이 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$(-1-1)^2+(6-2)^2 > k$

$\therefore k < 20$

따라서 구하는 자연수 k는 1, 2, 3, ⋯ , 19의 19개이다. 답 19

157-2 $y=0$을 $3x-y=6$에 대입하면

$3x=6 \quad \therefore x=2$

즉 직선 $3x-y=6$이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(2, 0)$이다.

이때 $x^2+y^2+2x-4y=a$에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=a+5$

이므로 주어진 원의 내부를 나타내는 부등식은

$(x+1)^2+(y-2)^2 < a+5$

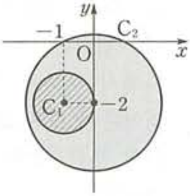
따라서 점 $(2, 0)$이 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$(2+1)^2+(0-2)^2 < a+5$

$9+4 < a+5$

$\therefore a > 8$ 답 $a>8$

158-1 부등식 $(x+1)^2+(y+2)^2\le 1$의 영역은 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=1$의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 $x^2+(y+2)^2\le a$의 영역은 원 $x^2+(y+2)^2=a$의 내부(경계선 포함)이다.



따라서
C_1 : $(x+1)^2+(y+2)^2=1$,
C_2 : $x^2+(y+2)^2=a$라 할 때,
부등식 $(x+1)^2+(y+2)^2\le 1$의 영역이 부등식 $x^2+(y+2)^2\le a$의 영역에 포함되려면 원 C_1이 원 C_2에 내접하거나 원 C_2의 내부에 있어야 한다.
이때 두 원이 내접하려면 두 원의 중심 $(-1,\ -2)$, $(0,\ -2)$ 사이의 거리가 두 원의 반지름의 길이의 차와 같아야 하므로 $\quad 1=\sqrt{a}-1$

$\sqrt{a}=2 \qquad \therefore a=4$

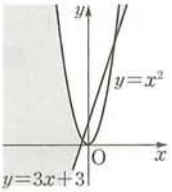
따라서 구하는 a의 값의 범위는

$a\ge 4$

답 $a\ge 4$

159-1 (1) 부등식 $3x+3\le y\le x^2$의 영역은 연립부등식 $\begin{cases} y\ge 3x+3 \\ y\le x^2 \end{cases}$ 의 영역이다.

부등식 $y\ge 3x+3$의 영역은 직선 $y=3x+3$의 윗부분(경계선 포함)이고, 부등식 $y\le x^2$의 영역은 포물선 $y=x^2$의 아랫부분(경계선 포함)이다.



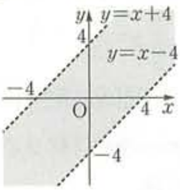
따라서 주어진 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.

(2) $|x-y|<4$에서 $\qquad -4<x-y<4$

즉 부등식 $|x-y|<4$의 영역은 연립부등식

$\begin{cases} y>x-4 \\ y<x+4 \end{cases}$ 의 영역이다.

부등식 $y>x-4$의 영역은 직선 $y=x-4$의 윗부분(경계선 제외)이고, 부등식 $y<x+4$의 영역은 직선 $y=x+4$의 아랫부분(경계선 제외)이다.



따라서 주어진 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 제외)과 같다.

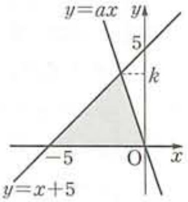
답 풀이 참조

159-2 주어진 그림의 색칠한 부분이 나타내는 영역은 점 $(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하고 점 $(2,\ 2)$를 지나는 포물선 $y=\frac{1}{2}x^2$의 윗부분(경계선 제외)과 점 $(2,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $(x-2)^2+y^2=4$의 내부(경계선 포함)의 공통부분이다.
따라서 구하는 연립부등식은

$\begin{cases} y>\frac{1}{2}x^2 \\ (x-2)^2+y^2\le 4 \end{cases}$

답 $\begin{cases} y>\frac{1}{2}x^2 \\ (x-2)^2+y^2\le 4 \end{cases}$

160-1 부등식 $y\ge 0$의 영역은 직선 $y=0$ (x축)의 윗부분(경계선 포함)이고, 부등식 $y-x\le 5$, 즉 $y\le x+5$의 영역은 직선 $y=x+5$의 아랫부분(경계선 포함)이다. 또 부등식 $y\le ax$의 영역은 직선 $y=ax(a<0)$의 아랫부분(경계선 포함)이므로 세 부등식을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



이때 두 직선 $y=x+5$와 $y=ax$가 만나는 점의 y좌표를 k라 하면 이 영역의 넓이가 10이므로

$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot k=10 \qquad \therefore k=4$

$y=4$를 $y=x+5$에 대입하면

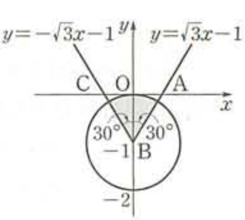
$4=x+5 \qquad \therefore x=-1$

따라서 점 $(-1,\ 4)$가 직선 $y=ax$ 위에 있으므로

$4=a\cdot(-1) \qquad \therefore a=-4$

답 -4

160-2 부등식 $y-\sqrt{3}|x|+1\ge 0$의 영역은



$x\ge 0$일 때, $y\ge \sqrt{3}x-1$,
$x<0$일 때, $y\ge -\sqrt{3}x-1$
이므로 오른쪽 그림에서 꺾어진 직선의 윗부분(경계선 포함)이다.
또 부등식 $x^2+y^2+2y\le 0$, 즉 $x^2+(y+1)^2\le 1$의 영역은 원 $x^2+(y+1)^2=1$의 내부(경계선 포함)이므로 주어진 연립부등식의 영역은 위의 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.

15 부등식의 영역

이때 직선 $y=\sqrt{3}x-1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\sqrt{3}\quad \therefore \theta=60°$

따라서 $\angle OBA=\angle OBC=90°-60°=30°$이므로 색칠한 부채꼴의 중심각의 크기는

$\angle ABC=\angle OBA+\angle OBC=60°$

따라서 구하는 영역의 넓이는

$\pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{60°}{360°}=\dfrac{\pi}{6}$ 답 $\dfrac{\pi}{6}$

161-1 (1) 주어진 그림에서 경계선의 방정식을 구하면

$y=-x+2$ …… ㉠

$y=2x-2$ …… ㉡

이때 색칠한 부분은 두 직선 ㉠, ㉡의 윗부분(모두 경계선 제외) 또는 두 직선 ㉠, ㉡의 아랫부분(모두 경계선 제외)이므로

$\begin{cases} y>-x+2 \\ y>2x-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} y<-x+2 \\ y<2x-2 \end{cases}$, 즉

$\begin{cases} x+y-2>0 \\ 2x-y-2<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x+y-2<0 \\ 2x-y-2>0 \end{cases}$

따라서 구하는 부등식은

$(x+y-2)(2x-y-2)<0$

(2) 주어진 그림에서 경계선의 방정식을 구하면

$x^2+y^2=1$ …… ㉠

$(x-1)^2+y^2=1$ …… ㉡

이때 색칠한 부분은 두 원 ㉠, ㉡의 내부(모두 경계선 포함) 또는 두 원 ㉠, ㉡의 외부(모두 경계선 포함)이므로

$\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ (x-1)^2+y^2\le 1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ (x-1)^2+y^2\ge 1 \end{cases}$, 즉

$\begin{cases} x^2+y^2-1\le 0 \\ x^2+y^2-2x\le 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x^2+y^2-1\ge 0 \\ x^2+y^2-2x\ge 0 \end{cases}$

따라서 구하는 부등식은

$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2x)\ge 0$

답 (1) $(x+y-2)(2x-y-2)<0$
(2) $(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2x)\ge 0$

162-1 (1) $y(x^2-y)(x^2+y^2-4)\ge 0$에서 경계선의 방정식은

$y=0,\ x^2-y=0,\ x^2+y^2-4=0$

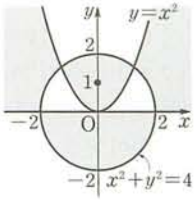
$\therefore y=0,\ y=x^2,\ x^2+y^2=4$

이때 경계선 위에 있지 않은 점 (0, 1)의 좌표를 주어진 부등식의 좌변에 대입하면

$1\cdot(0-1)(0+1-4)=3\ge 0$

즉 부등식이 성립하므로 점 (0, 1)이 속하는 영역은 구하는 부등식의 영역에 적합하다.

따라서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



(2) $xy(x^2+y^2-4y)(x^2+y^2-4x)\le 0$에서 경계선의 방정식은

$xy=0,\ x^2+y^2-4y=0,\ x^2+y^2-4x=0$

$\therefore x=0,\ y=0,\ x^2+(y-2)^2=4,$
$(x-2)^2+y^2=4$

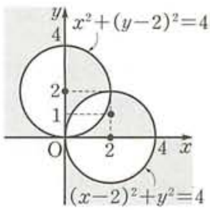
이때 경계선 위에 있지 않은 점 (2, 1)의 좌표를 주어진 부등식의 좌변에 대입하면

$2\cdot1\cdot(4+1-4)(4+1-8)=-6\le 0$

즉 부등식이 성립하므로 점 (2, 1)이 속하는 영역은 구하는 부등식의 영역에 적합하다.

따라서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.

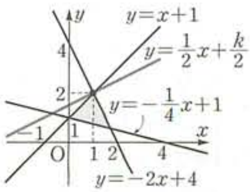
답 풀이 참조



163-1 $x+4y\ge 4$에서 $\quad y\ge -\dfrac{1}{4}x+1$

$2x+y\le 4$에서 $\quad y\le -2x+4$

이므로 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



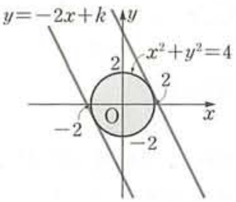
$2y-x=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$

이 직선의 y절편이 $\dfrac{k}{2}$이므로 직선이 두 직선 $y=x+1$, $y=-2x+4$의 교점 (1, 2)를 지날 때 k의 값이 최대이다.

따라서 $2y-x$의 최댓값은 $\quad 2\cdot2-1=3$ 답 3

163-2 부등식 $x^2+y^2\le 4$의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$2x+y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=-2x+k$

이 직선의 y절편이 k이므로 직선이 원 $x^2+y^2=4$와 접할 때 k의 값이 최대 또는 최소이다.
따라서 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 2와 같아야 하므로

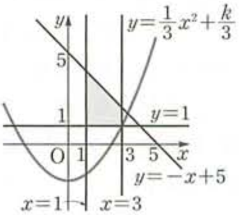
$\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2,\qquad |k|=2\sqrt{5}$

$\therefore k=\pm 2\sqrt{5}$

따라서 $2x+y$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$, 최솟값은 $-2\sqrt{5}$이므로 $\quad M=2\sqrt{5},\ m=-2\sqrt{5}$

$\therefore Mm=-20$ 답 -20

164-1 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



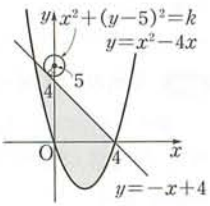
$3y-x^2=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{k}{3}$

이 포물선의 꼭짓점의 y좌표가 $\dfrac{k}{3}$이므로 포물선이 두 직선 $y=1$, $x=3$의 교점 $(3,\ 1)$을 지날 때 k의 값이 최소이다.
따라서 $3y-x^2$의 최솟값은

$3\cdot 1-3^2=-6$ 답 -6

164-2 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$x^2+(y-5)^2=k\ (k\ge 0)$ ...... ㉠

로 놓으면 $\sqrt{k}$는 중심이 $(0,\ 5)$인 이 원의 반지름의 길이이다.
원 ㉠이 직선 $y=-x+4$에 접할 때 k의 값이 최소이고, 이때 원의 중심 $(0,\ 5)$와 직선 $y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{k}$와 같으므로

$\dfrac{|5-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{k},\qquad \sqrt{k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

따라서 $x^2+(y-5)^2$의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다. 답 $\dfrac{1}{2}$

Remark

① 원 $x^2+(y-5)^2=\frac{1}{2}$과 직선 $y=-x+4$의 접점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$이고, 이 점은 주어진 연립부등식의 영역에 포함된다.
② 원 $x^2+(y-5)^2=k$가 $y=x^2-4x$, $y=-x+4$의 그래프의 교점 $(-1,\ 5)$를 지날 때, k의 값은 $(-1)^2+(5-5)^2=1$이므로 최소가 아님에 주의한다.

165-1 하루에 사료 A, B를 각각 $100x$ g, $100y$ g 제공한다고 하면 이 동물에게 하루 동안 제공되는 사료의 비용은 $110x+120y$(원)이다.
이때 x, y는 각각 사료의 양이므로

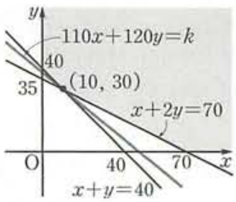
$x\ge 0,\ y\ge 0$ ...... ㉠

이 동물이 단백질을 700 g 이상, 탄수화물을 400 g 이상 섭취해야 하므로

$10x+20y\ge 700,\ 10x+10y\ge 400$, 즉

$x+2y\ge 70,\ x+y\ge 40$ ...... ㉡

부등식 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$110x+120y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=-\dfrac{11}{12}x+\dfrac{k}{120}$

이 직선의 y절편이 $\dfrac{k}{120}$이므로 직선이 두 직선 $x+2y=70$, $x+y=40$의 교점 $(10,\ 30)$을 지날 때 k의 값이 최소가 된다.
따라서 이 동물에게 하루 동안 제공되는 사료의 비용의 최솟값은

$110\cdot 10+120\cdot 30=4700$ (원) 답 4700원

중단원 연습 문제 ◎ 본책 438~441쪽

01 2	02 7	03 2	04 $\frac{\pi}{2}$	05 ⑤
06 $1+\sqrt{2}$	07 ④	08 ①	09 ③	10 2
11 ②	12 $\frac{3}{2}$	13 4	14 500	
15 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	16 -3	17 ⑤		

01 전략 점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있으면 $b>f(a)$이고, 아랫부분에 있으면 $b<f(a)$이다.

풀이 직선 $y=-x+7$의 아랫부분을 나타내는 부등식은 $y<-x+7$

점 $(4,\ a)$가 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$a<-4+7 \quad \therefore a<3 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 $y=\frac{1}{2}x-5$의 윗부분을 나타내는 부등식은

$y>\frac{1}{2}x-5$

점 $(2a,\ 3a-1)$이 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$3a-1>\frac{1}{2}\cdot 2a-5, \quad 3a-1>a-5$

$\therefore a>-2 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\quad -2<a<3$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 그 합은 2이다.

답 2

02 문제이해 • 경계선은 중심이 $(0,\ -2)$이고 반지름의 길이가 5인 원이므로 이 원의 방정식은

$x^2+(y+2)^2=25$ ➜ 30% 배점

해결과정 • 색칠한 부분은 원 $x^2+(y+2)^2=25$의 내부(경계선 제외)이므로 주어진 그림의 색칠한 부분이 나타내는 부등식은

$x^2+(y+2)^2<25$

점 $(3,\ -a)$가 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

$3^2+(-a+2)^2<25$

$a^2-4a-12<0, \quad (a+2)(a-6)<0$

$\therefore -2<a<6$ ➜ 60% 배점

답구하기 • 따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다. ➜ 10% 배점

답 7

03 전략 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타낸다.

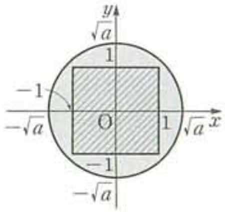
풀이 $|x|\le 1$에서

$-1\le x\le 1$

$|y|\le 1$에서

$-1\le y\le 1$

이므로 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 빗금친 부분(경계선 포함)과 같다.



이때 부등식 $x^2+y^2\le a$의 영역은 중심이 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{a}$인 원의 내부(경계선 포함)이므로 주어진 조건을 만족시키려면 원 $x^2+y^2=a$가 주어진 연립부등식의 영역인 정사각형에 외접하거나 정사각형의 외부에 있어야 한다.

이때 a의 값이 최소가 되는 경우는 원이 정사각형에 외접할 때이므로

$\sqrt{a}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \quad \therefore a=2$

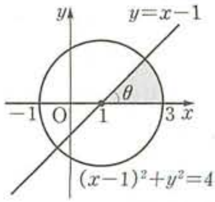
따라서 a의 최솟값은 2이다.

답 2

04 해결과정 • $x-y-1\ge 0$에서 $\quad y\le x-1$

$x^2+y^2-2x-3\le 0$에서 $\quad (x-1)^2+y^2\le 4$

따라서 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ➜ 50% 배점



직선 $y=x-1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=1 \quad \therefore \theta=45°$ ➜ 20% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 영역의 넓이는 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 45°인 부채꼴의 넓이와 같으므로

$\pi\cdot 2^2\cdot\frac{45°}{360°}=\frac{\pi}{2}$ ➜ 30% 배점

답 $\frac{\pi}{2}$

05 전략 경계선의 방정식을 구하고, 주어진 그림이 나타내는 영역의 부등식을 찾는다.

풀이 주어진 그림에서 경계선의 방정식은

$y=-x,\ x=-1,\ y=0$

이고, 주어진 그림의 색칠한 부분이 나타내는 영역은 다음과 같다.

(i) $y \geq -x$, $x \leq -1$, $y \geq 0$

$\therefore x+y \geq 0$, $x+1 \leq 0$, $y \geq 0$

(ii) $y \geq -x$, $x \geq -1$, $y \leq 0$

$\therefore x+y \geq 0$, $x+1 \geq 0$, $y \leq 0$

(iii) $y \leq -x$, $x \geq -1$, $y \geq 0$

$\therefore x+y \leq 0$, $x+1 \geq 0$, $y \geq 0$

(iv) $y \leq -x$, $x \leq -1$, $y \leq 0$

$\therefore x+y \leq 0$, $x+1 \leq 0$, $y \leq 0$

이상에서 구하는 부등식은

$y(x+1)(x+y) \leq 0$

답 ⑤

다른 풀이 주어진 그림에서 경계선의 방정식은

$y=-x$, $x=-1$, $y=0$

이므로

$y(x+1)(x+y)\square\ 0$ …… ㉠

으로 놓는다.

색칠한 부분에 속하는 점 $(-2,\ -1)$의 좌표를 ㉠의 좌변에 대입하면

$-1\cdot(-2+1)\cdot(-2-1)=-3<0$

이때 경계선을 포함하므로 구하는 부등식은

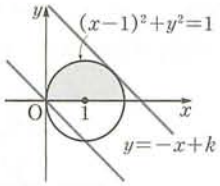
$y(x+1)(x+y) \leq 0$

06

문제이해 • $x^2-2x+y^2 \leq 0$에서

$(x-1)^2+y^2 \leq 1$

이므로 주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다. ➾ 30% 배점



해결과정 • $x+y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$y=-x+k$ …… ㉠

k는 직선 ㉠의 y절편이므로 직선 ㉠이 원 $(x-1)^2+y^2=1$의 위쪽에서 접할 때 k의 값이 최대이다. 이때 원의 중심 $(1,\ 0)$과 직선 ㉠, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$\dfrac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1$, $|1-k|=\sqrt{2}$

$1-k=\pm\sqrt{2}$

$\therefore k=1\pm\sqrt{2}$

즉 $x+y$의 최댓값은 $1+\sqrt{2}$이다. ➾ 40% 배점

또 직선 ㉠이 원점을 지날 때 k의 값이 최소이므로 $x+y$의 최솟값은 0이다. ➾ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $M=1+\sqrt{2}$, $m=0$이므로

$M-m=1+\sqrt{2}$ ➾ 10% 배점

답 $1+\sqrt{2}$

07

전략 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 경계로 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$가

① 서로 반대쪽에 있으면 $f(a,\ b)f(c,\ d)<0$

② 서로 같은 쪽에 있으면 $f(a,\ b)f(c,\ d)>0$

풀이 ㄱ. 두 점 $P_1(a_1,\ b_1)$, $P_3(a_3,\ b_3)$은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위에 있지 않으므로

$f(a_1,\ b_1) \neq 0$, $f(a_3,\ b_3) \neq 0$

그러나 $f(a_1,\ b_1)$, $f(a_3,\ b_3)$의 대소 관계는 알 수 없다.

ㄴ. 점 $P_2(a_2,\ b_2)$는 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형 위에 있으므로

$f(a_2,\ b_2)=0$

이때 $f(a_1,\ b_1) \neq 0$이므로

$\{f(a_1,\ b_1)\}^2>\{f(a_2,\ b_2)\}^2$

ㄷ. 두 점 $P_1(a_1,\ b_1)$, $P_3(a_3,\ b_3)$은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 경계로 서로 반대쪽에 있으므로

$f(a_1,\ b_1)f(a_3,\ b_3)<0$

$\therefore \dfrac{f(a_1,\ b_1)}{f(a_3,\ b_3)}<0$

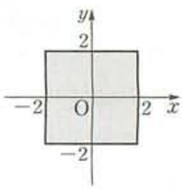
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

08

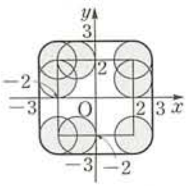
전략 주어진 연립부등식의 영역을 좌표평면에 나타낸 후, 그 영역에 속하는 점들을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원을 그린다.

풀이 연립부등식 $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.

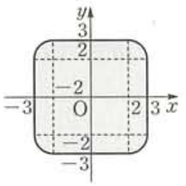


부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 1$의 영역은 중심이 오른쪽 그림의 정사각형의 내부(경계선 포함)에 있고 반지름의 길이가 1인 원의 내부(경계선 포함)이다.

원의 중심이 정사각형 위에 있을 때의 원의 내부는 [그림 1]의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같으므로 구하는 부등식의 영역은 [그림 2]의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



[그림 1]



[그림 2]

답 ①

09 전략 주어진 직선을 평행이동한 직선의 방정식을 구한 후, 직선 $y=f(x)$의 윗부분을 나타내는 부등식은 $y>f(x)$임을 이용한다.

풀이 직선 $x+2y+3=0$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$x-1+2(y+1)+3=0$$

$$x+2y+4=0 \qquad \therefore y=-\frac{1}{2}x-2$$

이때 직선 l의 윗부분을 나타내는 부등식은

$$y>-\frac{1}{2}x-2$$

이고, 점 $(4,\ a)$가 이 부등식의 영역에 속해야 하므로

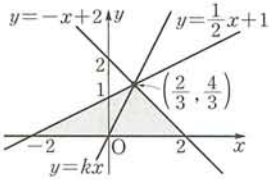
$$a>-\frac{1}{2}\cdot 4-2 \qquad \therefore a>-4$$

따라서 정수 a의 최솟값은 -3이다.

답 ③

10 전략 직선 $y=kx$는 원점을 지나는 직선임을 이용한다.

풀이 주어진 연립부등식의 영역은 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



직선 $y=kx$는 원점, 즉 색칠한 부분인 삼각형의 밑변의 중점을 지나므로 직선 $y=kx$가 주어진 연립부등식의 영역의 넓이를 이등분하려면 두 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 $y=-x+2$의 교점인 점 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$를 지나야 한다.

즉

$$\frac{4}{3}=k\cdot\frac{2}{3} \qquad \therefore k=2$$

답 2

11 전략 먼저 경계선의 그래프를 좌표평면에 나타내고, 경계선 위에 있지 않은 점의 좌표를 대입하여 부등식의 영역을 찾는다.

풀이 $(x^2-4y^2)(x^2-6x+y^2+8)\le 0$에서

$$(x+2y)(x-2y)\{(x-3)^2+y^2-1\}\le 0$$

이므로 경계선의 방정식은

$$x+2y=0,\ x-2y=0,\ (x-3)^2+y^2=1$$

이때 원 $(x-3)^2+y^2=1$의 중심 $(3,\ 0)$과 직선 $x\pm 2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3|}{\sqrt{1+4}}=\frac{3}{\sqrt{5}}>1$$

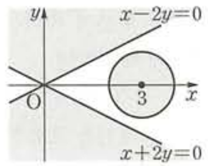
이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

또 경계선 위에 있지 않은 점 $(3,\ 0)$의 좌표를 주어진 부등식의 좌변에 대입하면

$$(9-0)(9-18+0+8)=-9\le 0$$

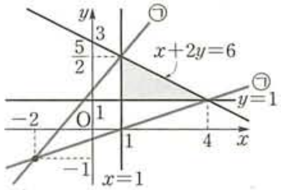
즉 부등식이 성립하므로 점 $(3,\ 0)$이 속하는 영역은 구하는 부등식의 영역에 적합하다.

따라서 구하는 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



답 ②

12 문제이해 • 주어진 연립부등식의 영역은 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



➔ 30% 배점

해결과정 • $\frac{y+1}{x+2}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y+1=k(x+2) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

k는 직선 ㉠의 기울기이고, ㉠은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다. ➔ 20% 배점

직선 ㉠이 두 직선 $x+2y=6$, $x=1$의 교점 $\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$를 지날 때 k의 값이 최대이므로

$$\frac{5}{2}+1=k(1+2) \qquad \therefore k=\frac{7}{6}$$

➔ 20% 배점

또 직선 ㉠이 두 직선 $x+2y=6$, $y=1$의 교점 $(4,\ 1)$을 지날 때 k의 값이 최소이므로

$$1+1=k(4+2) \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$ ➜ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $\dfrac{y+1}{x+2}$의 최댓값은 $\dfrac{7}{6}$, 최솟값은 $\dfrac{1}{3}$이므로 구하는 합은

$$\frac{7}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$$ ➜ 10% 배점

답 $\dfrac{3}{2}$

13 (전략) 주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타낸 후, $x^2+y^2=k\ (k\ge0)$로 놓고 이 그래프를 부등식의 영역과 만나도록 하면서 움직여 본다.

(풀이) 부등식 $|x|+|y|\le2$에서

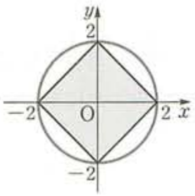
(i) $x\ge0,\ y\ge0$일 때, $\quad x+y\le2$
$\quad \therefore y\le-x+2$

(ii) $x\ge0,\ y<0$일 때, $\quad x-y\le2$
$\quad \therefore y\ge x-2$

(iii) $x<0,\ y\ge0$일 때, $\quad -x+y\le2$
$\quad \therefore y\le x+2$

(iv) $x<0,\ y<0$일 때, $\quad -x-y\le2$
$\quad \therefore y\ge-x-2$

이상에서 주어진 부등식의 영역을 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$x^2+y^2=k\ (k\ge0)$로 놓으면 $\sqrt{k}$는 중심이 $(0,\ 0)$인 이 원의 반지름의 길이이고, 이 원이 주어진 부등식의 영역인 정사각형에 외접할 때 k의 값이 최대이므로

$$\sqrt{k}=2 \qquad \therefore k=4$$

따라서 x^2+y^2의 최댓값은 4이다. 답 4

Remark 부등식 $|x|+|y|\le k$, $|x|+|y|\ge k\ (k\ge0)$의 영역

① 부등식 $|x|+|y|\le k$의 영역
➡ 도형 $|x|+|y|=k$의 내부(경계선 포함)

② 부등식 $|x|+|y|\ge k$의 영역
➡ 도형 $|x|+|y|=k$의 외부(경계선 포함)

14 (전략) 구입할 제품 P, Q의 알의 개수를 미지수 $x,\ y$로 놓고 주어진 조건을 이용하여 부등식을 세운다.

(풀이) 수험생이 하루에 구입할 제품 P, Q의 알의 개수를 각각 $x,\ y$라 하면 제품을 구입할 때 드는 비용은 $150x+100y$(원)이다.

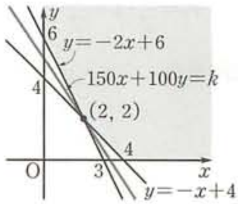
$x,\ y$는 각각 두 제품 P, Q의 알의 개수이므로

$$x\ge0,\ y\ge0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

하루에 비타민B_1을 60 mg 이상, 비타민C를 80 mg 이상 섭취해야 하므로

$$20x+10y\ge60,\ 20x+20y\ge80$$
$$\therefore 2x+y\ge6,\ x+y\ge4 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

부등식 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



$150x+100y=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{100}$$

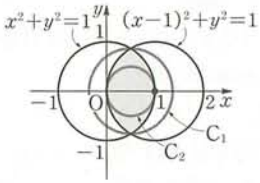
이 직선의 y절편이 $\dfrac{k}{100}$이므로 이 직선이 두 직선 $2x+y=6,\ x+y=4$의 교점 $(2,\ 2)$를 지날 때 k의 값이 최소가 된다.

따라서 필요한 최소 비용은

$$150\cdot2+100\cdot2=500(\text{원})$$
$$\therefore a=500$$

답 500

15 **문제이해 •** 주어진 연립부등식의 영역은 다음 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



➜ 20% 배점

해결과정 • 주어진 연립부등식의 영역을 포함하는 원 중에서 넓이가 가장 작은 원을 C_1이라 하면 원 C_1은 두 원의 교점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

$x^2+y^2=1$에서 $y^2=1-x^2$을 $(x-1)^2+y^2=1$에 대입하면

$$(x-1)^2+1-x^2=1, \qquad 2x=1$$
$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

$x=\dfrac{1}{2}$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$$y^2=\frac{3}{4} \qquad \therefore y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉 두 원의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ➜ 40% 배점

또 주어진 연립부등식의 영역에 포함되는 원 중에서 넓이가 가장 큰 원을 C_2라 하면 원 C_2는 두 원의 중심을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로

$r_2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ ➜ 30% 배점

답구하기 • $\therefore r_1r_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ ➜ 10% 배점

답 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

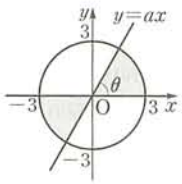
16 전략 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 연립부등식의 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.

풀이 부등식 $(ax-y)y\geq 0$에서

$ax-y\geq 0$, $y\geq 0$ 또는 $ax-y\leq 0$, $y\leq 0$

(i) $a>0$일 때,

주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



직선 $y=ax$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 연립부등식의 영역의 넓이가 3π이므로

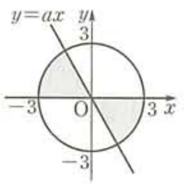
$2\cdot\pi\cdot 3^2\cdot\frac{\theta}{360^\circ}=3\pi \qquad \therefore \theta=60^\circ$

이때 a는 직선 $y=ax$ $(a>0)$의 기울기이므로

$a=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

(ii) $a<0$일 때,

주어진 연립부등식의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.



이때 직선 $y=ax$ $(a<0)$는 (i)의 직선 $y=ax$ $(a>0)$, 즉 $y=\sqrt{3}x$를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로

$y=-\sqrt{3}x \qquad \therefore a=-\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 a의 값의 곱은 -3이다.

답 -3

17 전략 두 실수 a, b에 대하여 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$가 성립할 조건은 $a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$임을 이용한다.

풀이 주어진 등식이 성립하기 위해서는 두 실수 x, y가

$x-y+1<0$이고 $x^2+y^2-2<0$ 또는

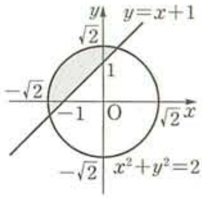
$x-y+1=0$ 또는 $x^2+y^2-2=0$

을 만족시켜야 한다.

즉 영역 D는 연립부등식

$\begin{cases} x-y+1\leq 0 \\ x^2+y^2-2\leq 0 \end{cases}$ … ㉠

의 영역과 직선 $y=x+1$, 원 $x^2+y^2=2$이다.



ㄱ. 점 $(-1, 1)$의 좌표를 ㉠의 두 부등식의 좌변에 각각 대입하면

$-1-1+1=-1\leq 0$,

$1+1-2=0\leq 0$

이므로 점 $(-1, 1)$은 영역 D에 속한다.

ㄴ. 점 (a, b)가 영역 D에 속하면

$a-b+1\leq 0$, $a^2+b^2-2\leq 0$

점 $(-b, -a)$의 좌표를 ㉠의 두 부등식의 좌변에 각각 대입하면

$-b+a+1\leq 0$, $b^2+a^2-2\leq 0$

따라서 점 $(-b, -a)$도 영역 D에 속한다.

ㄷ. $\sqrt{a^2+b^2}$은 점 (a, b)와 원점 사이의 거리와 같다. 위의 그림에서 $\sqrt{a^2+b^2}$의 최솟값은 원점과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

나를 바꾸는 힘 신사고 | SINSAGO |

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념 SSEN

수학 I

SINSAGO WINDOW	internet | www.sinsago.co.kr
mail | 우137-828. 서울시 서초구 동작대로 212 (방배동 764-30)	
tel | 1661-5590	fax | 02-3481-5762