신사고
SINSAGO

수학의 쎈 힘을 키우는 사전식 개념 기본서

개념 SSEN

수학 Ⅱ



정답 및 풀이·채움

채움은 옹골찬 풀이를 통하여 나의 부족한 부분을 채워 나가는 장입니다.

좋은책 신사고

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념SSEN

수학Ⅱ

● **정답 및 풀이를 통한 채움 전략** ●

전략 1	**풀이**	정확하고 자세하며, 논리적인 풀이를 제시한다.
전략 2	**해결 전략**	문제해결의 실마리를 제공한다.
전략 3	**Remark**	문제해결에 도움이 되는 보충 내용을 제시한다.
전략 4	**서술형 분석**	모범 답안과 단계별 배점을 제시한다.

정답 및 풀이

Ⅰ 집합과 명제

01 집합의 뜻과 표현 2
02 집합의 연산 7
03 명제 16
04 절대부등식 23

Ⅱ 함수

05 함수 28
06 합성함수와 역함수 35
07 여러 가지 함수의 그래프 42
08 유리함수 52
09 무리함수 63

Ⅲ 수열

10 등차수열 71
11 등비수열 79
12 수열의 합 89
13 수학적 귀납법 99

Ⅳ 지수와 로그

14 지수 108
15 로그 116

01 집합의 뜻과 표현

유제

본책 8~24쪽

001-1 (1) -4, -2, -1, 1, 2, 4는 4의 약수이므로
$A=\{x|x$는 4의 약수$\}$

(2) 5, 10, 15, …, 100은 100 이하의 5의 양의 배수이므로
$B=\{x|x$는 100 이하의 5의 양의 배수$\}$

(3) 1보다 큰 한 자리의 홀수는 3, 5, 7, 9이므로
$C=\{3, 5, 7, 9\}$

(4) 20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19이므로
$D=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

답 풀이 참조

001-2 ④ $\{x|x$는 한 자리의 2의 양의 배수$\}$
$=\{2, 4, 6, 8\}$
이므로 집합 A를 나타내는 것이 아닌 것은 ④이다.

답 ④

002-1 집합 B를 원소나열법으로 나타내면
$B=\{2, 3, 5, 7\}$
이므로 $x\in A$, $y\in B$일 때, $x+y$의 값은 다음 표와 같다.

x \ y	2	3	5	7
1	3	4	6	8
2	4	5	7	9
3	5	6	8	10
4	6	7	9	11

$\therefore C=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
따라서 집합 C의 원소의 개수는 9이다. 답 9

002-2 $x\in S$, $y\in S$에 대하여 (x, y)를 구해 보면 다음 표와 같다.

x \ y	1	2	3	4	5
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)

이 중에서 $x<y$인 것은 색칠한 부분과 같으므로
$A=\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$
따라서 집합 A의 원소의 개수는 10이다. 답 10

003-1 x와 $6-x$가 모두 자연수이므로
$x\geq 1$, $6-x\geq 1$
$\therefore 1\leq x\leq 5$
따라서 집합 A의 원소가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5이므로 원소가 3개인 집합은
$\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$

답 $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$

003-2 $x\in S$이면 $\frac{1}{1-x}\in S$에서

$5\in S$이면 $\frac{1}{1-5}=-\frac{1}{4}\in S$

$-\frac{1}{4}\in S$이면 $1\div\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}=\frac{4}{5}\in S$

$\frac{4}{5}\in S$이면 $1\div\left(1-\frac{4}{5}\right)=5\in S$

집합 S의 원소가 3개이므로
$S=\left\{-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5\right\}$
따라서 집합 S의 모든 원소의 곱은
$\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{4}{5}\times 5=-1$ 답 -1

004-1 ① $A=\{1\}$이므로 집합 A는 유한집합이다.
② $1<x<2$인 무리수는 무한히 많으므로 집합 B는 무한집합이다.
③ $x^2+2x-3<0$에서 $(x+3)(x-1)<0$이므로
$-3<x<1$
$\therefore C=\{x|x$는 $-3<x<1$인 자연수$\}=\varnothing$
따라서 집합 C는 공집합이므로 유한집합이다.
④ $x^2+4x-5=0$에서 $(x+5)(x-1)=0$이므로
$x=-5$ 또는 $x=1$
따라서 $D=\{-5, 1\}$이므로 집합 D는 유한집합이다.
⑤ $E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$이므로 집합 E는 무한집합이다.
이상에서 무한집합인 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

004-2 ①, ④ 원소의 개수가 1이므로 주어진 집합은 공집합이 아니다.
② {20, 30, 40, …}이므로 주어진 집합은 무한집합이다.
③ $|x|<1$에서 $-1<x<1$이므로 주어진 집합은 공집합이다.
⑤ {2, 3, 5, 7}이므로 주어진 집합은 공집합이 아니다.
이상에서 공집합인 것은 ③이다.

답 ③

005-1 ① 집합 $\{\varnothing\}$의 원소의 개수가 1이므로
$n(\{\varnothing\})=1$
② $n(\{1, 2\})=2$, $n(\{2, 3\})=2$이므로
$n(\{1, 2\})=n(\{2, 3\})$
③ $n(\{2, 3, 4\})-n(\{2, 3\})=3-2=1$
⑤ $n(\{3, 5, 7, 9\})=4$
이상에서 보기 중 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

005-2 $x^3-x^2-6x=0$에서
$x(x+2)(x-3)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
$\therefore A=\{-2, 0, 3\}$
$|x|=0$에서 $x=0$이므로 $B=\{0\}$
따라서 $n(A)=3$, $n(B)=1$이므로
$n(A)+n(B)-3+1-4$ 답 4

006-1 $A=\{2, 3, 5, 7\}$이므로
① $2\in A$ ② $5\in A$, $\{5\}\subset A$
③ $\{2, 7\}\subset A$
⑤ 집합 A의 원소 2에 대하여 $2\notin\{1, 3, 5, 7\}$이므로
$A\not\subset\{1, 3, 5, 7\}$
이상에서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

006-2 집합 A의 원소는
a, b, $\{c\}$, $\{c, d\}$
① 공집합은 모든 집합의 부분집합이므로 $\varnothing\subset A$
② $\{a, b\}$는 집합 A의 부분집합이므로
$\{a, b\}\subset A$
③ $\{c\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{c\}\in A$
④ $\{c\}$는 집합 A의 부분집합이 아니므로 $\{c\}\not\subset A$
⑤ $\{c, d\}$는 집합 A의 원소이므로 $\{c, d\}\in A$
이상에서 옳지 않은 것은 ④이다.

답 ④

007-1 $3\in B$이므로 $3\in A$
즉 $a^2+5a-3=3$이므로
$a^2+5a-6=0$, $(a+6)(a-1)=0$
$\therefore a=-6$ 또는 $a=1$
(i) $a=-6$일 때,
$A=\{-2, 3\}$, $B=\{3, 54\}$이므로
$A\neq B$
(ii) $a=1$일 때,
$A=\{-2, 3\}$, $B=\{-2, 3\}$이므로
$A=B$
(i), (ii)에서 $A=B$를 만족시키는 a의 값은 1이다.

답 1

007-2 $2\in A$이므로 $2\in B$
(i) $a-1=2$, 즉 $a=3$일 때,
$A=\{2, 4\}$, $B=\{2, 4, 5\}$이므로
$A\subset B$
(ii) $3a-4=2$, 즉 $a=2$일 때,
$A=\{2, 3\}$, $B=\{1, 2, 4\}$이므로
$A\not\subset B$
(i), (ii)에서 $A\subset B$를 만족시키는 a의 값은 3이다.

답 3

008-1 집합 $C=\{x\,|\,x\in B$이고 $x\notin A\}$이므로
$C=\{2, 4, 6\}$
$C\subset X\subset B$에서 집합 X는 집합 B의 부분집합 중 2, 4, 6을 원소로 갖는 집합이다.
따라서 집합 X의 개수는
$2^{7-3}=2^4=16$

답 16

008-2 집합 A의 원소 중 3의 배수는 3, 6, 9이고, 4의 배수는 4, 8이다.
따라서 구하는 집합의 개수는 집합 A의 부분집합 중 3, 6, 9는 원소로 갖고, 4, 8은 원소로 갖지 않는 집합의 개수이므로
$2^{10-3-2}=2^5=32$

답 32

중단원 연습 문제 본책 25~28쪽

01 ③, ⑤ **02** ④ **03** $B=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

04 6 **05** ① **06** 12 **07** 64 **08** 10

09 6 **10** $A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$ **11** ⑤

12 ②, ⑤ **13** 5 **14** -1 **15** ④ **16** 56

17 ③ **18** 2 **19** ② **20** ⑤

01 전략 집합은 어떤 대상이 그 모임에 속하는지 판단할 수 있는 기준이 분명해야 한다.

풀이 '많이', '가까운', '잘하는'은 기준이 명확하지 않으므로 ①, ②, ④는 집합이라고 할 수 없다.

답 ③, ⑤

Remark

③과 같이 모임에 속하는 대상이 무수히 많거나 ⑤와 같이 모임에 속하는 대상이 하나도 없더라도 기준이 명확하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것은 집합이다.

02 전략 0과 1 사이의 분모가 6인 분수를 나열한 후 기약분수가 아닌 것을 제외시킨다.

풀이 0과 1 사이의 분모가 6인 분수는 $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$이고 이 중 기약분수는 $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$이므로

$A=\left\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right\}$

① $\frac{1}{6}\in A$ ② $\frac{2}{6}\notin A$ ③ $\frac{4}{6}\notin A$ ⑤ $\frac{7}{6}\notin A$

답 ④

03 전략 집합 B의 원소는 집합 A의 원소에 의하여 정해지므로 먼저 집합 A의 원소를 구한다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 4\}$

$a=1$일 때, $b=\frac{1}{12}$

$a=2$일 때, $b=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$a=3$일 때, $b=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

$a=4$일 때, $b=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore B=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

답 $B=\left\{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$

04 해결과정 • $a\in A$, $b\in B$일 때, ab의 값은 다음 표와 같다.

a \ b	1	2	3
-1	-1	-2	-3
0	0	0	0

$\therefore A\otimes B=\{-3, -2, -1, 0\}$ → 40% 배점

또 $c\in A\otimes B$, $d\in A$일 때, cd의 값은 오른쪽 표와 같다.

c \ d	-1	0
-3	3	0
-2	2	0
-1	1	0
0	0	0

$\therefore (A\otimes B)\otimes A$

$=\{0, 1, 2, 3\}$ → 40% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 모든 원소의 합은

$0+1+2+3=6$ → 20% 배점

답 6

05 전략 원소의 개수가 0인 집합을 찾는다.

풀이 ① 0과 곱하여 1이 되는 x는 없다. 답 ①

06 전략 먼저 집합 A의 원소를 구한 후 $B\subset A$임을 이용한다.

풀이 $A=\{12, 24, 36, \cdots\}$이고 $B\subset A$이므로 k는 12의 배수이다.

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다.

답 12

07 전략 먼저 집합 A의 원소의 개수를 구한다.

풀이 $A=\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$

이므로 $n(A)=6$

따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^6=64$이다.

답 64

08 전략 $q=1, 2, 3, 4, 5$일 때 각각의 약수를 생각한다.

풀이 집합 X의 원소 (p, q)는

(i) $q=1$일 때, $(1, 1)$

(ii) $q=2$일 때, $(1, 2), (2, 2)$

(iii) $q=3$일 때, $(1, 3), (3, 3)$

(iv) $q=4$일 때, $(1, 4), (2, 4), (4, 4)$

(v) $q=5$일 때, $(1, 5), (5, 5)$

이상에서 집합 X의 원소의 개수는 10이다. 답 10

09 해결과정 • $A=\{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$이므로 $n(A)=4$ → 30% 배점

$|x|=-1$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로

$B=\varnothing$ $\therefore n(B)=0$ → 30% 배점

$x^4+x^3-x^2+x-2=0$에서

$(x^2+1)(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ ($\because x$는 실수)

따라서 $C=\{-2, 1\}$이므로 $n(C)=2$ → 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 값은

$n(A)+n(B)+n(C)=4+0+2$

$=6$ → 10% 배점

답 6

10 전략 조건 (나)에서 $1\in A$, $5\in A$, $8\in A$이므로 집합 A의 나머지 두 원소를 a, b로 놓고 주어진 조건을 만족시키는 a, b의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 집합 A의 원소는 5개이므로 집합 A의 나머지 두 원소를 a, b라 하면 조건 (나), (다)에서

$1+5+8+a+b=25$ $\therefore a+b=11$

(i) $a=3$이면 $b=8$

$A=\{1, 3, 5, 8\}$이므로 $n(A)=5$를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=6$이면 $b=5$

$A=\{1, 5, 6, 8\}$이므로 $n(A)=5$를 만족시키지 않는다.

(iii) $a=9$이면 $b=2$

$A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$이므로 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

이상에서

$A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$ 답 $A=\{1, 2, 5, 8, 9\}$

11 전략 x가 집합 S의 원소이면 $x\in S$이고, $\{x\}\subset S$이다.

풀이 ⑤ 1, 2는 S의 원소이므로 $\{1, 2\}\subset S$

답 ⑤

12 전략 $n(A)$는 유한집합 A의 원소의 개수를 뜻한다.

풀이 ① $n(\{0, 1\})=2$, $n(\{\varnothing\})=1$이므로

$n(\{0, 1\})-n(\{\varnothing\})=2-1=1$

③ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$이면 $n(A)=n(B)$이지만 $A\neq B$이다.

④ $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이면 $n(A)<n(B)$이지만 $A\not\subset B$이다.

⑤ $A=\varnothing$이므로 $n(A)=0$

이상에서 옳은 것은 ②, ⑤이다. 답 ②, ⑤

13 전략 조건제시법으로 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내어 본다.

풀이 $A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

이고 $B\subset A$, $A\neq B$이므로 a의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, 6, 9의 5개이다. 답 5

Remark

- $a=1$일 때 $B=\{1\}$
- $a=2$일 때 $B=\{1, 2\}$
- $a=3$일 때 $B=\{1, 3\}$
- $a=6$일 때 $B=\{1, 2, 3, 6\}$
- $a=9$일 때 $B=\{1, 3, 9\}$

14 문제이해 • $A=B$이므로 $a^2-3a-2=2$

$a^2-3a-4=0$, $(a+1)(a-4)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=4$ → 30% 배점

해결과정 • (i) $a=-1$일 때,

$A=\{-1, 2, 3\}$, $B=\{-1, 2, 3\}$이므로

$A=B$ → 30% 배점

(ii) $a=4$일 때,

$A=\{-7, 2, 4\}$, $B=\{-1, 2, 3\}$이므로

$A\neq B$ → 30% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 $a=-1$ → 10% 배점

답 -1

15 전략 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖는 집합이다.

풀이 집합 X의 개수가 16이므로

$2^{n-2}=2^4$

즉 $n-2=4$이므로

$n=6$

따라서 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 원소의 개수는 6이므로 부분집합의 개수는

$2^6=64$ 답 ④

16 전략 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 전체 부분집합에서 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합을 제외한 것과 같다.

풀이 $A=\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

집합 A의 부분집합 중 홀수를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 $\{2, 10, 50\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^3=8$

따라서 적어도 한 개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$64-8=56$

답 56

17 **전략** $A_1(3)$, $A_3(4)$, $A_2(a)$의 원소를 생각한다.

풀이 ㄱ. 3과 4는 서로소이므로

$N(3, 4)=1$

$\therefore 4\in A_1(3)$

ㄴ. $x\in A_3(4)$이면 $N(4, x)=3$이므로 x와 4의 양의 공약수가 3개이다.

이때 4의 양의 약수가 3개이므로 x는 4의 배수이어야 한다.

100 이하의 자연수 중 4의 배수는 25개이므로

$n(A_3(4))=25$

ㄷ. $x\in A_2(a)$이면 $N(a, x)=2$이므로 x와 a의 양의 공약수가 2개이다.

이때 a가 소수이면 a의 양의 약수가 2개이므로 x는 a의 배수이어야 한다.

즉 $n(A_2(a))$는 100 이하의 자연수 중 a의 배수의 개수와 같으므로

$$n(A_2(a))=\left[\frac{100}{a}\right]$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

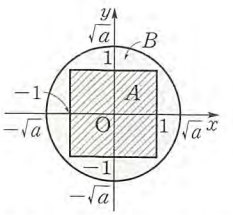
Remark

k 이하의 자연수 중 n의 배수의 개수는

$\left[\frac{k}{n}\right]$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

18 **전략** 집합 A가 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타내고 조건을 만족시키는 집합 B가 나타내는 영역을 생각한다.

풀이 $|x|\le 1$에서 $-1\le x\le 1$이고, $|y|\le 1$에서 $-1\le y\le 1$이므로 집합 A가 나타내는 영역은 오른쪽 그림의 빗금친 부분(경계선 포함)과 같다. 또 집합 B가 나타내는 영역은 중심이 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{a}$인 원의 내부(경계선 포함)이므로 $A\subset B$이려면 위의 그림과 같아야 한다.



즉 $A\subset B$가 성립하도록 하는 a의 값이 최소가 되는 경우는 원 $x^2+y^2=a$가 점 $(1, 1)$을 지날 때이고, 이때 $\sqrt{a}$는 두 점 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{a}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ $\therefore a=2$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

답 2

19 **전략** ab가 자연수의 제곱이 되는 각 경우의 집합 A를 구한다.

풀이 (i) $ab=4$일 때, $A=\{1, 4\}$

(ii) $ab=9$일 때, $A=\{1, 9\}$

(iii) $ab=16$일 때, $A=\{2, 8\}$

(iv) $ab=36$일 때, $A=\{4, 9\}$

이상에서 구하는 집합 A의 개수는 4이다.

답 ②

20 **전략** k, k^2, k^3, …의 일의 자리의 수를 구하여 집합 $A(k)$를 원소나열법으로 나타낸다.

풀이 ㄱ. $A(3)$은 3을 거듭제곱한 수들의 일의 자리의 수 전체의 집합이다. 3을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 3, 9, 7, 1이 차례로 반복되므로

$A(3)=\{1, 3, 7, 9\}$

$\therefore 1\in A(3)$

ㄴ. 6을 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 항상 6이므로

$A(6)=\{6\}$

$\therefore A(6)\not\subset A(3)$

ㄷ. $n=2$이면 $A(3^n)=A(3^2)=A(9)$이고, 9를 거듭제곱하면 일의 자리의 수는 9, 1이 차례로 반복되므로 $A(9)=\{1, 9\}$

$\therefore A(9)\subset A(3)$

따라서 $A(3^n)\subset A(3)$인 자연수 n이 존재한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

02 집합의 연산

유제

본책 33~54쪽

009-1 $|x|=1$에서 $x=\pm1$이므로

$A=\{-1, 1\}$

$x^3-x=0$에서 $x(x+1)(x-1)=0$이므로

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$\therefore B=\{-1, 0, 1\}$

5 이하의 소수는 2, 3, 5이므로

$C=\{2, 3, 5\}$

(1) $A\cup B=\{-1, 0, 1\}$

(2) $A\cap B=\{-1, 1\}$

(3) $A\cap B=\{-1, 1\}$이므로

$(A\cap B)\cup C=\{-1, 1, 2, 3, 5\}$

풀이 참조

009-2 두 집합 B, C를 원소나열법으로 나타내면

$B=\{3, 6, 9, \cdots\}$, $C=\{1, 3, 9\}$

이므로

$A\cap B=\{6\}\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$,

$B\cap C=\{3, 9\}\neq\varnothing$

따라서 서로소인 두 집합은 A와 C이다. 답 A, C

009-3 $a\in A$, $b\in A$이므로

$a=1, 2, 3$

$b=1, 2, 3$

$x=a+2b$의 값을 구하여 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

a \ b	1	2	3
1	3	5	7
2	4	6	8
3	5	7	9

따라서

$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\therefore n(A\cup B)=9$ 답 9

010-1 $A\cap B=\{4\}$에서 $4\in A\cap B$이므로

$4\in A$

따라서 $a^2+3a=4$이므로 $a^2+3a-4=0$

$(a+4)(a-1)=0$ $\therefore a=-4$ 또는 $a=1$

(i) $a=-4$일 때, $A=\{3, 4\}$, $B=\{-2, 4, 6\}$이므로

$A\cap B=\{4\}$

(ii) $a=1$일 때, $A=\{3, 4\}$, $B=\{3, 4, 6\}$이므로

$A\cap B=\{3, 4\}$

(i), (ii)에서 $A\cap B=\{4\}$를 만족시키는 a의 값은 -4이다. 답 -4

010-2 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$에서 $4\in A$ 또는 $5\in A$이므로

$2a+1=4$ 또는 $2a+1=5$

$\therefore a=\frac{3}{2}$ 또는 $a=2$

(i) $a=\frac{3}{2}$일 때,

$A=\{1, 2, 4\}$, $B=\left\{2, \frac{7}{2}\right\}$이므로

$A\cup B=\left\{1, 2, \frac{7}{2}, 4\right\}$

(ii) $a=2$일 때,

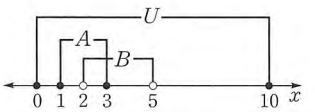
$A=\{1, 2, 5\}$, $B=\{2, 4\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$

(i), (ii)에서 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5\}$를 만족시키는 a의 값은 2이므로

$A=\{1, 2, 5\}$ 답 $\{1, 2, 5\}$

011-1 집합 U, A, B를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 수직선에서 각 집합을 구하면

(1) $A^C=\{x\mid 0\le x<1$ 또는 $3<x\le 10\}$

(2) $B^C=\{x\mid 0\le x\le 2$ 또는 $5\le x\le 10\}$

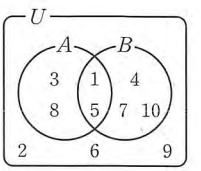
(3) $A-B=\{x\mid 1\le x\le 2\}$

(4) $A^C\cap B=B-A=\{x\mid 3<x<5\}$ 답 풀이 참조

011-2 전체집합

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

과 주어진 조건을 만족시키는 두 부분집합 A, B를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore A=\{1, 3, 5, 8\}$

답 $\{1, 3, 5, 8\}$

012-1 $A\cap B=A \iff A\subset B$

① $A\cup B=B \iff A\subset B$

② $B^C\subset A^C \iff A\subset B$

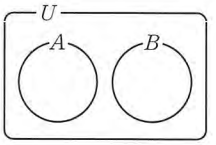
③ $(A-B)^C=U \iff A-B=\varnothing \iff A\subset B$

④ $B^C-A^C=\varnothing \iff B^C\subset A^C \iff A\subset B$

⑤ $A\cup B^C=U \iff B\subset A$

답 ⑤

012-2 A, B가 서로소이므로



$A\cap B=\varnothing$

$\iff A-B=A$

$\iff A\subset B^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

답 ㄱ, ㄷ, ㅁ

013-1 $B\cap X=X$에서 $X\subset B$이고,

$(B-A)\cup X=X$에서 $(B-A)\subset X$이므로

$(B-A)\subset X\subset B$

$B-A=\{5, 6, 7\}$이므로

$\{5, 6, 7\}\subset X\subset\{3, 4, 5, 6, 7\}$

따라서 집합 X는 집합 $B-A$의 원소 5, 6, 7을 반드시 원소로 갖는 집합 B의 부분집합이므로 구하는 집합 X의 개수는 $2^2=4$

답 4

013-2 $X\cap A^C=\varnothing \iff X-A=\varnothing \iff X\subset A$

$(A-B)\cup X=X \iff (A-B)\subset X$

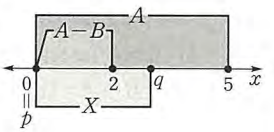
$\therefore (A-B)\subset X\subset A$

$A-B=\{x\mid 0\le x\le 2\}$이므로

$\{x\mid 0\le x\le 2\}\subset X\subset\{x\mid 0\le x\le 5\}$

따라서 오른쪽 그림에서 $p=0$이고, q의 최솟값은 2, 최댓값은 5이므로 구하는 q의 최댓값과 최솟값의 차는

$5-2=3$



답 3

014-1 (1) $(A\cap B)\cup(A^C\cap B)$

$=(A\cup A^C)\cap B=U\cap B=B$

(2) $\{A\cap(A^C\cup B)\}\cap\{B\cap(B\cup C)\}$

$=\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\}\cap B$

$=\{\varnothing\cup(A\cap B)\}\cap B$

$=(A\cap B)\cap B=A\cap B$

답 (1) B (2) $A\cap B$

014-2 (1) $(A-B)-C=(A\cap B^C)\cap C^C$

$=A\cap(B^C\cap C^C)$

$=A\cap(B\cup C)^C$

$=A-(B\cup C)$

(2) $A-(B-C)=A\cap(B\cap C^C)^C$

$=A\cap(B^C\cup C)$

$=(A\cap B^C)\cup(A\cap C)$

$=(A-B)\cup(A\cap C)$

답 풀이 참조

015-1 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\{(A\cup B)\cap(A\cup B^C)\}\cap B$

$=\{A\cup(B\cap B^C)\}\cap B$

$=(A\cup\varnothing)\cap B$

$=A\cap B$

따라서 주어진 조건은 $A\cap B=A$이므로

$A\subset B$

답 ①

Remark

② $A^C\subset B^C \iff B\subset A$

④ $A\cap B=\varnothing \iff A$, B는 서로소

015-2 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\{A\cap(A^C\cap B^C)^C\}\cup\{A\cap(A^C\cup B)\}$

$=\{A\cap(A\cup B)\}\cup\{(A\cap A^C)\cup(A\cap B)\}$

$=A\cup\{\varnothing\cup(A\cap B)\}$

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$

따라서 주어진 조건은

$A=A\cup B$ $\therefore B\subset A$

답 풀이 참조

016-1 주어진 연산을 정리하면

$A\triangle B=(A\cup B)\cap B^C$

$=(A\cap B^C)\cup(B\cap B^C)$

$=(A\cap B^C)\cup\varnothing$

$=A\cap B^C$

① $A\triangle\varnothing=A\cap\varnothing^C=A\cap U=A$

② $A\triangle U=A\cap U^C=A\cap\varnothing=\varnothing$

③ $A\triangle A^C=A\cap(A^C)^C=A\cap A=A$

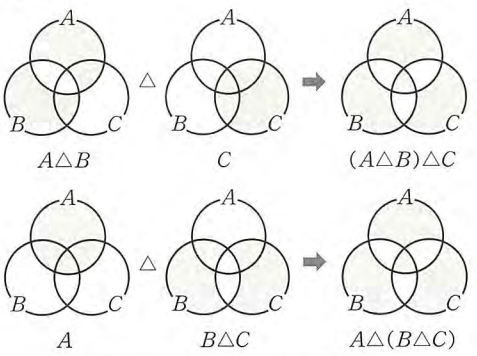
④ $A\triangle B^C=A\cap(B^C)^C=A\cap B$

⑤ $A^C \triangle B^C = A^C \cap (B^C)^C = A^C \cap B$
$= B \cap A^C = B \triangle A$

답 ③

016-2 주어진 연산을 정리하면
$A * B = (A^C \cap B^C)^C - (A \cap B)$
$= (A \cup B) - (A \cap B)$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 5\}$
$= \{1, 2, 4, 6\}$
따라서 집합 $A * B$의 원소의 개수는 4이다. 답 4

017-1



$\therefore (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ 답 풀이 참조

018-1 (1) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$이고 세 집합 $A - B$, $B - A$, $A \cap B$는 어느 두 집합을 짝지어도 서로소이므로
$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$
$= 10 + 8 + 5 = 23$
(2) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$에서
$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$ …… ㉠
그런데
$n(A^C \cap B^C) = n((A \cup B)^C)$
$= n(U) - n(A \cup B)$
이므로
$n(A \cup B) = n(U) - n(A^C \cap B^C)$
$= 45 - 15 = 30$
따라서 ㉠에서
$n(A) + n(B) = 30 + 10 = 40$

답 (1) 23 (2) 40

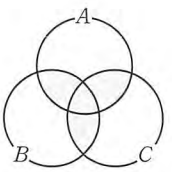
018-2 (1) 1부터 30까지의 자연수의 집합을 U, 4의 배수의 집합을 A라 하면
$n(U) = 30$, $n(A) = 7$
이때 4의 배수가 아닌 수의 집합은 A^C이므로
$n(A^C) = n(U) - n(A)$
$= 30 - 7 = 23$
(2) 1부터 30까지의 자연수의 집합을 U, 2의 배수의 집합을 A, 3의 배수의 집합을 B라 하면
$n(U) = 30$, $n(A) = 15$, $n(B) = 10$,
$n(A \cap B) = 5$
$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 15 + 10 - 5$
$= 20$
이때 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수의 집합은 $A^C \cap B^C$, 즉 $(A \cup B)^C$이므로
$n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B)$
$= 30 - 20$
$= 10$

답 (1) 23 (2) 10

019-1 1부터 100까지의 자연수 중 2의 배수의 집합을 A, 3의 배수의 집합을 B, 5의 배수의 집합을 C라 하자. $A \cap B$는 6의 배수의 집합, $B \cap C$는 15의 배수의 집합, $C \cap A$는 10의 배수의 집합, $A \cap B \cap C$는 30의 배수의 집합이고, 2 또는 3 또는 5로 나누어 떨어지는 수의 집합은 $A \cup B \cup C$이다.
$n(A) = 50$, $n(B) = 33$, $n(C) = 20$,
$n(A \cap B) = 16$, $n(B \cap C) = 6$,
$n(C \cap A) = 10$, $n(A \cap B \cap C) = 3$
$\therefore n(A \cup B \cup C)$
$= n(A) + n(B) + n(C)$
$- n(A \cap B) - n(B \cap C)$
$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
$= 50 + 33 + 20 - 16 - 6 - 10 + 3$
$= 74$

답 74

019-2 $U = A \cup B \cup C$이므로
$n(A \cup B \cup C) = n(U) = 44$
$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$
를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.



$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$
$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$-2\times n(A\cap B\cap C)$ ····· ㉠
$=n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-10$

그런데

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

에서

$44=24+19+23-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+5$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$
$=71-44=27$

따라서 ㉠에서

$n((A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A))$
$=27-10=17$ 답 17

Remark

$A\cap B$, $B\cap C$, $C\cap A$에는 모두 $A\cap B\cap C$가 포함되어 있으므로 ㉠과 같이
$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$에서
$2\times n(A\cap B\cap C)$를 빼야 한다.

020-1 동호회 회원 60명 전체의 집합을 U, 바둑을 좋아하는 사람의 집합을 A, 장기를 좋아하는 사람의 집합을 B라 하면

$n(U)=60$, $n(A)=38$, $n(B)=29$,
$n(A^C\cap B^C)=10$

그런데 $n(A^C\cap B^C)=n((A\cup B)^C)=10$에서

$n(A\cup B)=n(U)-n((A\cup B)^C)$
$=60-10=50$

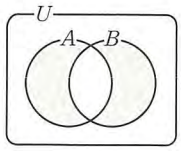
또한

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

이므로

$50=38+29-n(A\cap B)$
$\therefore n(A\cap B)=17$

바둑과 장기 중 한 가지만 좋아하는 사람의 집합은 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분이므로 구하는 사람의 수는



$n(A\cup B)-n(A\cap B)$
$=50-17=33$(명) 답 33

020-2 영화 A, B, C를 관람한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하면

$n(A)=26$, $n(B)=16$, $n(C)=25$,
$n(A\cap B\cap C)=5$, $n(A\cup B\cup C)=50$

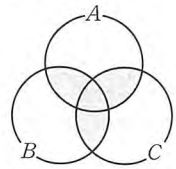
그런데

$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

이므로

$50=26+16+25-n(A\cap B)-n(B\cap C)$
$-n(C\cap A)+5$
$\therefore n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=22$

영화를 두 편 이상 관람한 학생들의 집합은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이므로 구하는 학생 수는



$n(A\cap B)+n(B\cap C)$
$+n(C\cap A)$
$-2\times n(A\cap B\cap C)$
$=22-10$
$=12$ 답 12

중단원 연습 문제 ◎ 본책 55~59쪽

01 16	**02** ⑤	**03** 8	**04** {1, 5, 6, 9}	
05 ③	**06** 33	**07** 16	**08** ⑤	**09** 9
10 ③	**11** $p=0$, $1\le q\le 2$		**12** ③	**13** ⑤
14 ③	**15** 33	**16** ①	**17** {3, 4, 5, 7, 9}	
18 25	**19** 13	**20** 55	**21** ④	**22** ④
23 ①				

01 전략 $A\cap B=\{2\}$에서 $2\in B$임을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

풀이 $A\cap B=\{2\}$이므로 $2\in B$
즉 $a^2-a-4=2$이어야 하므로
$a^2-a-6=0$, $(a+2)(a-3)=0$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=3$

(i) $a=-2$일 때,
$A=\{2, 3, 10\}$, $B=\{2, 3\}$이므로
$A\cap B=\{2, 3\}$
(ii) $a=3$일 때,
$A=\{-2, 2, 15\}$, $B=\{2, 3\}$이므로
$A\cap B=\{2\}$
(i), (ii)에서 $A\cap B=\{2\}$를 만족시키는 a의 값은 3이므로
$A=\{-2, 2, 15\}$, $B=\{2, 3\}$
$\therefore (A-B)\cup(B-A)=\{-2, 15\}\cup\{3\}$
$=\{-2, 3, 15\}$
따라서 $(A-B)\cup(B-A)$의 모든 원소의 합은
$-2+3+15=16$

답 16

02 전략 조건 $A\cup B=A$로부터 A, B 사이의 포함 관계를 생각한다.

풀이 $A\cup B=A \iff B\subset A$ ⬅①
$\iff A\cap B=B$ ⬅②
$\iff A^C\subset B^C$ ⬅③
$\iff A^C\cap B=\varnothing$ ⬅④
⑤ $U-A=A^C$이므로 $A^C\cup B\neq U-A$

답 ⑤

Remark
$A^C\cup B=U-A \iff A\cap B=\varnothing$

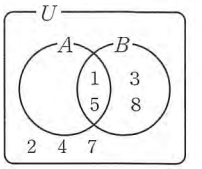
03 전략 세 집합 A, X, $(B-A)^C$ 사이의 포함 관계를 조사한다.

풀이 조건 (가)에서 $A\cup X=X \iff A\subset X$
조건 (나)에서 $(B-A)\subset X^C$이므로
$X\subset(B-A)^C$
$\therefore A\subset X\subset(B-A)^C$
이때
$B-A=\{2, 6, 7, 8\}-\{1, 2\}$
$=\{6, 7, 8\}$
에서 $(B-A)^C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 집합 X는 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합이다.
따라서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는
$2^{5-2}=2^3=8$

답 8

04 전략 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내어 본다.

풀이 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다. 이때
$U=\{1, 2, 3, \cdots, 9\}$
이므로



$A-B=\{6, 9\}$
$\therefore A=(A-B)\cup(A\cap B)=\{1, 5, 6, 9\}$

답 $\{1, 5, 6, 9\}$

05 전략 집합의 연산의 성질과 연산법칙, 드모르간 법칙을 이용한다.

풀이 ① $B-A=B\cap A^C=A^C\cap B$
② $(A^C-B)^C=(A^C\cap B^C)^C=A\cup B$
③ $(A-B^C)\cup B=\{A\cap(B^C)^C\}\cup B$
$=(A\cap B)\cup B=B$
④ $(A\cap B)\cup(A\cap B^C)=A\cap(B\cup B^C)$
$=A\cap U=A$
⑤ $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)=(A\cup B)\cap(A\cup B)^C$
$=\varnothing$

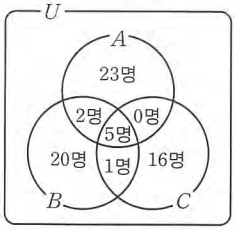
답 ③

06 전략 학생 전체의 집합을 U, 미술부, 응원부, 컴퓨터부를 선택한 학생이 집합을 각각 A, B, C로 놓고 주어진 조건을 집합의 원소의 개수로 나타낸다.

풀이 $n(U)=100$, $n(A)=30$, $n(B)=28$,
$n(C)=22$, $n(A\cap B)=7$,
$n(B\cap C)=6$, $n(C\cap A)=5$,
$n(A\cap B\cap C)=5$
$\therefore n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$
$=30+28+22-7-6-5+5$
$=67$
이때 어느 동아리도 선택하지 않은 학생의 집합은 $(A\cup B\cup C)^C$이므로
$n((A\cup B\cup C)^C)=n(U)-n(A\cup B\cup C)$
$=100-67=33$
따라서 구하는 학생 수는 33이다.

답 33

다른 풀이 100명의 학생 전체의 집합을 U, 미술부, 응원부, 컴퓨터부를 선택한 학생의 집합을 각각 A, B, C라 하고 벤 다이어그램에 각 부분의 학생 수를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 어느 동아리도 선택하지 않은 학생 수는

$100-(23+20+16+2+1+5)=33$

07 문제이해 • $A\cap B=\{1, 2\}$, $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로 집합 A, B는 모두 1과 2를 원소로 갖고, 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$의 모든 원소를 중복없이 나누어 가져야 한다. → 30% 배점

해결과정 • 즉 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 부분집합 중 원소 1, 2를 반드시 원소로 갖는 집합 A에 대하여

$B=(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}-A)\cup\{1, 2\}$

이므로 집합 A가 정해지면 집합 B가 하나로 결정된다. → 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 6\}$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$ → 40% 배점

답 16

08 전략 집합 A의 2를 제외한 나머지 원소로 가능한 것을 찾는다.

풀이 $2\in A$이고, 집합 A의 모든 원소의 곱이 12이므로 2를 제외한 집합 A의 나머지 원소의 곱이 6이 되어야 한다.

$1\times6=6$이므로

$A=\{1, 2, 6\}$ 또는 $A=\{2, 6\}$

$A\cup B=U$, $A\cap B=\{2\}$이므로

(i) $A=\{1, 2, 6\}$이면

$B=\{2, 3, 4, 5, 7\}$

$\therefore$ (집합 B의 모든 원소의 합)$=21$

(ii) $A=\{2, 6\}$이면

$B=\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

$\therefore$ (집합 B의 모든 원소의 합)$=22$

(i), (ii)에서 집합 B의 모든 원소의 합의 최댓값은 22이다.

답 ⑤

09 문제이해 • $A\cup B=\{x|x$는 $1\le x\le6$인 자연수$\}$

$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이므로 $3\in A$ 또는 $3\in B$이다. → 20% 배점

해결과정 • $3\in A$이면

$a^2+a+3=3$, $a^2+a=0$

$a(a+1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=-1$

(i) $a=0$이면

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{-3, 3, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-3, 1, 2, 3, 4, 6\}$

(ii) $a=-1$이면

$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{-1, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{-1, 1, 2, 3, 4, 6\}$ → 30% 배점

한편 $3\in B$이면 $3-a=3$ 또는 $a^2-a-3=3$이므로

$a=0$ 또는 $a^2-a-6=0$

$a=0$ 또는 $(a+2)(a-3)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=3$

(iii) $a=-2$이면

$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$이므로

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(iv) $a=3$이면

$A=\{1, 2, 4, 15\}$, $B=\{0, 3, 4, 6\}$이므로

$A\cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 15\}$ → 30% 배점

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값은 -2이다. → 10% 배점

답구하기 • 이때 $A\cap B=\{4, 5\}$이므로 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 9이다. → 10% 배점

답 9

Remark

$5\in A$ 또는 $5\in B$로 생각하여도 같은 결과를 얻는다.

10 전략 먼저 두 집합 A, B의 원소를 구한다.

풀이 $A=\{1, 3, 7, 9\}$, $B=\{1, 9\}$이므로

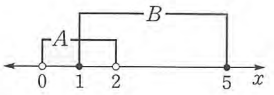
$\{1, 9\}\subset X\subset\{1, 3, 7, 9\}$

따라서 집합 X는 원소 1, 9를 반드시 원소로 갖는 집합 $\{1, 3, 7, 9\}$의 부분집합이므로 집합 X의 개수는 $2^{4-2}=2^2=4$

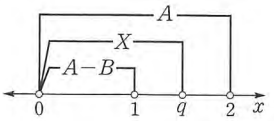
답 ③

11 전략 두 집합을 수직선 위에 나타낸 후, 주어진 조건을 만족시키는 A, B, X 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 $X-A=\emptyset$에서 $X\subset A$이고,
$(A-B)\cup X=X$에서 $(A-B)\subset X$이므로
$(A-B)\subset X\subset A$
두 집합 A, B를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$A-B=\{x\mid 0<x<1\}$
따라서 $\{x\mid 0<x<1\}\subset X\subset\{x\mid 0<x<2\}$를 만족시키는 집합 X를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$p=0$, $1\le q\le 2$

답 $p=0$, $1\le q\le 2$

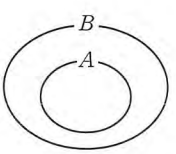
12 전략 $f(A)$의 의미를 이해하고, 성립하지 않는 것은 그 예를 찾아본다.

풀이 ㄱ. $U=A\cup A^C$, $A\cap A^C=\emptyset$이므로
$f(U)=f(A)+f(A^C)$
$\therefore f(A^C)=f(U)-f(A)$
ㄴ. $A\subset B$이므로 $x\in A$이면 $x\in B$이다.
$\therefore f(A)\le f(B)$
ㄷ. $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 3\}$이면
$A\cup B=\{1, 2, 3\}$이므로
$f(A\cup B)=6$, $f(A)=3$, $f(B)=4$
$\therefore f(A\cup B)\ne f(A)+f(B)$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

Remark
ㄷ. $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$

13 전략 두 집합 P, Q가 서로소이면 $P\cap Q=\emptyset$임을 이용한다.

풀이 A, B^C이 서로소이므로
$A\cap B^C=A-B=\emptyset$
$\therefore A\subset B$



ㄱ. $A-B=\emptyset$
ㄴ. $A\cap B=A$이므로
$(A\cap B)^C=A^C$
ㄷ. $(A^C\cup B)\cap A=(A^C\cap A)\cup(B\cap A)$
$=\emptyset\cup A=A$
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

14 전략 보기의 각 집합을 주어진 $A\cup B^C$, $(A\cap B)^C$을 이용하여 나타내어 본다.

풀이 ㄱ. $(A\cup B^C)\cup(A\cap B)^C$
$=(A\cup B^C)\cup(A^C\cup B^C)$
$=(A\cup A^C)\cup B^C$
$=U\cup B^C=U$
이므로
$U=(A\cup B^C)\cup(A\cap B)^C$
$=\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12\}$
ㄴ. $A\cap B=((A\cap B)^C)^C=U-(A\cap B)^C$
$=\{2, 4, 8, 12\}$
ㄷ. $A^C\cap B=(A\cup B^C)^C=U-(A\cup B^C)$
$=\{1, 3, 9\}$
따라서 집합 $A^C\cap B$의 원소의 개수는 3이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

15 문제이해 • $A_2\cap(A_3\cup A_4)$
$=(A_2\cap A_3)\cup(A_2\cap A_4)$
$=A_6\cup A_4$ → 40% 배점

해결과정 • 따라서 구하는 원소의 개수는
$n(A_6\cup A_4)=n(A_6)+n(A_4)-n(A_6\cap A_4)$
$=n(A_6)+n(A_4)-n(A_{12})$
→ 40% 배점

답구하기 • 이때 $n(A_6)=16$, $n(A_4)=25$, $n(A_{12})=8$이므로
$n(A_6\cup A_4)=16+25-8=33$ → 20% 배점

답 33

16 전략 집합의 연산의 성질과 연산법칙, 드모르간 법칙을 이용한다.

풀이 ㄱ. $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$
$=U-(A\cap B)$
ㄴ. $(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B^C)\cap(A\cap C^C)$
$=A\cap(B^C\cap C^C)$
$=A\cap(B\cup C)^C$
$=A-(B\cup C)$
ㄷ. $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{2, 3\}$이면
$(B-C)\cup(C-B)=\{1\}\cup\{3\}=\{1, 3\}$이므로

$A \subset \{(B-C) \cup (C-B)\}$

이지만 $A \not\subset B$이고 $A \not\subset C$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ①

17 문제이해 • $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 9\}$, $C=\{2, 3, 5, 7\}$ → 20% 배점

해결과정 • $A \triangle B=(A-B) \cup (B-A)$
$=\{2, 4\} \cup \{9\}$
$=\{2, 4, 9\}$ → 40% 배점

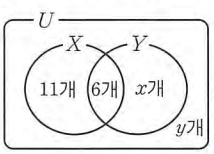
답구하기 • $\therefore (A \triangle B) \triangle C$
$=\{(A \triangle B)-C\} \cup \{C-(A \triangle B)\}$
$=\{4, 9\} \cup \{3, 5, 7\}$
$=\{3, 4, 5, 7, 9\}$ → 40% 배점

답 $\{3, 4, 5, 7, 9\}$

18 전략 $(X \cap Y) \subset Y \subset (X \cup Y)$임을 이용하여 $n(Y)$의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 $n(X^C)=n(U)-n(X)$이므로
$13=30-n(X)$ $\therefore n(X)=17$
또 $n(X-Y)=n(X)-n(X \cap Y)$이므로
$11=17-n(X \cap Y)$ $\therefore n(X \cap Y)=6$
이때 $(X \cap Y) \subset Y$이므로
$n(Y) \geq n(X \cap Y)=6$ …… ㉠
$n(X \cup Y)=n(X)+n(Y)-n(X \cap Y)$에서
$n(X \cup Y)=17+n(Y)-6$
$\therefore n(Y)=n(X \cup Y)-11$
따라서 $n(X \cup Y)$의 값이 최대일 때 $n(Y)$가 최댓값을 갖는다.
$(X \cup Y) \subset U$에서 $n(X \cup Y) \leq n(U)=30$이므로
$n(Y) \leq 30-11=19$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $6 \leq n(Y) \leq 19$이므로
$M=19$, $m=6$
$\therefore M+m=25$ 답 25

다른 풀이 $n(X)=17$, $n(X-Y)=11$에서
$n(X \cap Y)=n(X)-n(X-Y)=6$
이므로 $n(Y-X)=x$, $n((X \cup Y)^C)=y$라 하고 각 영역에 해당하는 집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$n(U)=30$이므로
$x+y=13$
$n(Y)$는 $x=13$, $y=0$일 때 최댓값을 가지므로
$M=6+13=19$
$n(Y)$는 $x=0$, $y=13$일 때 최솟값을 가지므로
$m=6+0=6$
$\therefore M+m=25$

19 전략 주어진 문제의 조건을 집합으로 나타내고, 각 집합의 원소의 개수를 구한다.

풀이 2학년 1반 학생 전체의 집합을 U, 책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합을 각각 A, B, C라 하면
$n(U)=35$, $n(A)=14$, $n(B)=16$,
$n(C)=15$, $n(A \cup B)=22$,
$n(A \cap C)=0$, $n(A^C \cap B^C \cap C^C)=3$
이때 $A^C \cap B^C \cap C^C=(A \cup B \cup C)^C$이므로
$n(A \cup B \cup C)=n(U)-n((A \cup B \cup C)^C)$
$=n(U)-n(A^C \cap B^C \cap C^C)$
$=35-3=32$
한편 $n(A \cap C)=0$에서 $n(A \cap B \cap C)=0$이므로 구하는 학생 수는 $n(A \cap B)+n(B \cap C)$의 값과 같다.
$n(A \cup B \cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)$
$-n(B \cap C)-n(C \cap A)+n(A \cap B \cap C)$
에서
$32=14+16+15-n(A \cap B)-n(B \cap C)$
$\therefore n(A \cap B)+n(B \cap C)=45-32$
$=13$
따라서 A, B, C 중 두 종류의 책만 읽은 학생 수는 13이다. 답 13

20 전략 주어진 문제의 조건을 집합으로 나타내고 각 집합의 원소의 개수를 구한다.

풀이 40명의 학생 전체의 집합을 U, 기종 A를 '합격'으로 평가한 학생의 집합을 A, 기종 B를 '합격'으로 평가한 학생의 집합을 B라 하면
$n(U)=40$, $n(A)=10$, $n(B)=5$
이때 두 기종을 모두 '불합격'으로 평가한 학생의 집합은 $A^C \cap B^C$, 즉 $(A \cup B)^C$이므로
$n((A \cup B)^C)=n(U)-n(A \cup B)$
$=40-n(A \cup B)$ …… ㉠

(i) $n(A\cup B)$의 값이 최대인 경우는 $A\cap B=\varnothing$일 때이므로

$n(A\cup B)\le n(A)+n(B)=10+5=15$

(ii) $n(A\cup B)$의 값이 최소인 경우는 $B\subset A$일 때이므로

$n(A\cup B)\ge n(A)=10$

(i), (ii)에서 $10\le n(A\cup B)\le 15$

이를 ㉠에 대입하면

$40-15\le 40-n(A\cup B)\le 40-10$

$\therefore 25\le n((A\cup B)^C)\le 30$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$30+25=55$ 답 55

Remark

$n(A\cup B)$의 값이 최대인 경우를 $A\cup B=U$일 때로 생각할 수 있지만 이 문제에서는

$n(A)+n(B)<n(U)$

이므로 $A\cup B=U$가 될 수 없다.

따라서 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서 $n(A\cap B)=0$, 즉 $A\cap B=\varnothing$일 때 $n(A\cup B)$의 값이 최대가 된다.

21 전략 X_3과 $X_4\cap X_5$의 원소의 개수를 각각 구한 다음 합집합의 원소의 개수를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 $X_4=\{x\mid x=4n+1,\ n$은 정수$\}$,

$X_5=\{x\mid x=5n+1,\ n$은 정수$\}$이므로

$x\in(X_4\cap X_5)$라 하면 $x-1$은 4와 5의 공배수이다.

즉 $x-1$은 20의 배수이므로

$x-1=0,\ 20,\ 40,\ 60,\ 80\ (\because 0\le x-1\le 99)$

$\therefore x=1,\ 21,\ 41,\ 61,\ 81$

즉 $X_4\cap X_5=\{1,\ 21,\ 41,\ 61,\ 81\}$이므로

$n(X_4\cap X_5)=5$

한편 $X_3=\{x\mid x=3n+1,\ n$은 정수$\}$,

즉 $X_3=\{1,\ 4,\ 7,\ \cdots,\ 100\}$이므로 $n(X_3)=34$

이때 $X_4\cap X_5$의 원소 중에서 X_3의 원소는 1, 61이므로

$n(X_3\cap X_4\cap X_5)=2$

따라서 $X_3\cup(X_4\cap X_5)$의 원소의 개수는

$n(X_3\cup(X_4\cap X_5))$

$=n(X_3)+n(X_4\cap X_5)-n(X_3\cap X_4\cap X_5)$

$=34+5-2=37$ 답 ④

22 전략 $X-Y=X$를 만족시키는 집합 X, Y 사이의 관계를 구한다.

풀이 $X-Y=X$이면 $X\cap Y=\varnothing$

ㄱ. $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=\{1\}$이면 $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$이므로 $A\triangledown B$, $B\triangledown C$

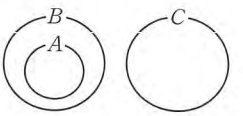
그러나 $A\cap C\ne\varnothing$이므로 $A\triangledown C$는 아니다.

ㄴ. $A\triangledown B^C$이면 $A\cap B^C=\varnothing$이므로

$A-B=\varnothing$ $\therefore A\subset B$

$B\triangledown C$이면 $B\cap C=\varnothing$

즉 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계는 오른쪽 벤 다이어그램과 같으므로



$A\cap C=\varnothing$ $\therefore A\triangledown C$

ㄷ. $(A\cup B)\triangledown C$이면

$(A\cup B)\cap C=\varnothing$

이므로 $(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$

$\therefore A\cap C=\varnothing,\ B\cap C=\varnothing$

$A\cap C=\varnothing$, 즉 $C\cap A=\varnothing$에서 $C-A=C$이므로

$(C-A)\cap B=C\cap B=\varnothing$

$\therefore (C-A)\triangledown B$

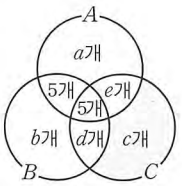
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

23 전략 세 집합의 원소의 개수를 벤 다이어그램에 나타내어 본다.

풀이 $n(A\cap B)=10$, $n(A\cap B\cap C)=5$에서

$n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=5$

이므로 각 영역에 해당하는 집합의 원소의 개수를 오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램에 나타내고 집합 $C-(A\cup B)$의 원소의 개수를 c라 하면



$n(C)=19$에서

$c+d+e+5=19$ $\therefore c=14-(d+e)$

따라서 $d+e$가 최대일 때 c는 최소가 된다.

$n(A)=14$에서

$a+e+5+5=14$ $\therefore e=4-a$

$n(B)=16$에서

$b+d+5+5=16$ $\therefore d=6-b$

이때 $a\ge 0$, $b\ge 0$이므로

$d\le 6,\ e\le 4$ $\therefore d+e\le 10$

따라서 $d+e$의 최댓값이 10이므로

$c\ge 14-10=4$

즉 구하는 최솟값은 4이다. 답 ①

03 명제

유제

본책 67~90쪽

021-1 (1) $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$P=\{1, 2, 3, 4\}$
(2) $U=\{x \mid x$는 자연수$\}$이므로
$P=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
답 (1) $\{1, 2, 3, 4\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

021-2 $x^2 \le 4$를 만족시키는 자연수 x는
$x=1$ 또는 $x=2$
$\therefore P=\{1, 2\}$ …… ㉠
x는 6의 약수를 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 6이므로
$Q=\{1, 2, 3, 6\}$ …… ㉡
또 x가 자연수이므로 $|x+2|<3$에서
$x+2<3$ $\therefore x<1$
그런데 $x<1$을 만족시키는 자연수는 없으므로
$R=\varnothing$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $R \subset P \subset Q$ 답 $R \subset P \subset Q$

022-1 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{1, 2, 3, 4\}$, $Q=\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(1) 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로
$P^C=\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(2) 조건 p 그리고 q의 진리집합은 $P \cap Q$이므로
$P \cap Q=\{4\}$
(3) 조건 $\sim p$ 또는 $\sim q$의 진리집합은 $P^C \cup Q^C$이므로
$P^C \cup Q^C=(P \cap Q)^C$
$=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
답 풀이 참조

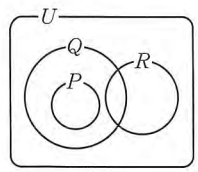
022-2 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{4, 8, 12, 16, 20\}$, $Q=\{5, 10, 15, 20\}$
조건 $\sim(p$ 또는 $\sim q)$는 $\sim p$ 그리고 q이므로 그 진리집합은 $P^C \cap Q$이다.
$\therefore P^C \cap Q=Q \cap P^C=Q-P$
$=\{5, 10, 15\}$
답 $\{5, 10, 15\}$

023-1 (1) p: $0<x<2$, q: $0 \le x<2$라 하고, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid 0<x<2\}$, $Q=\{x \mid 0 \le x<2\}$
따라서 $P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
(2) [반례] $x=-5$이면 $x^2 \ge 16$이지만 $x<4$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(3) [반례] $x=\sqrt{2}$이면 $x^2=2$이므로 x^2은 유리수이지만 x는 무리수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
(4) $2x-3=5$에서 $2x=8$
$\therefore x=4$
$x^2-5x+4=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=4$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{4\}$, $Q=\{1, 4\}$
따라서 $P \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
답 (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓 (4) 참

023-2 [반례] $a=\sqrt{2}$, $b=-\sqrt{2}$로 놓으면 a, b는 무리수이지만
$a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$
이므로 $a+b$는 유리수이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다. 답 풀이 참조

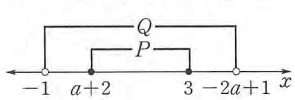
024-1 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이므로 $P^C \subset Q$
$\therefore Q^C \subset P$ 답 ③

024-2 세 집합 P, Q, R를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$P \subset Q$, $P \not\subset R$,
$Q \not\subset P$, $Q \not\subset R$, $R \not\subset P$
따라서 참인 명제는 ① $p \longrightarrow q$이다.
답 ①

025-1 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $P \subset Q$일 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.
따라서 $P \subset Q$가 성립하도록 두 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



즉 $a+2>-1$, $-2a+1>3$이므로
$a>-3$, $a<-1$
$\therefore -3<a<-1$

답 ④

026-1 (1) 대우: $x^2+y^2\le 0$이면 $xy\ge 0$이다. (참)
(2) 대우: $x\le 0$ 또는 $y\le 0$이면 $x+y\le 0$이다. (거짓)
[반례] $x=-1$, $y=2$이면 $x+y>0$이다.

답 풀이 참조

Remark
임의의 두 실수 x, y에 대하여 $x^2\ge 0$, $y^2\ge 0$이므로
$x^2+y^2\le 0 \iff x^2=0,\ y^2=0 \iff x=0,\ y=0$

027-1 (1) 주어진 명제의 대우는
'$x=2$이고 $y=3$이면 $xy=6$이다.'
이고, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
… 증명 끝

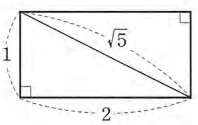
(2) 주어진 명제의 대우는
'x, y가 실수일 때, $x\ne 0$ 또는 $y\ne 0$이면 $x^2+y^2\ne 0$이다.'
이고, 이 명제는 참이므로 주어진 명제도 참이다.
… 증명 끝

답 풀이 참조

028-1 x가 유리수라고 가정하면 유리수끼리의 곱셈은 유리수이므로 $x\cdot x=x^2$은 유리수이다.
이것은 x^2이 무리수라는 가정에 모순이므로 x^2이 무리수이면 x도 무리수이다. … 증명 끝

답 풀이 참조

028-2 오른쪽 그림에서 직사각형의 대각선의 길이는 피타고라스 정리에 의하여



$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$가 유리수라 가정하면
$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 정수, $p\ne 0$)
로 놓을 수 있다. 양변을 제곱하면
$5=\frac{q^2}{p^2}$ $\therefore q^2=5p^2$ …… ㉠
㉠에서 q^2이 5의 배수이므로 q도 5의 배수이다.
$q=5k$ (k는 정수)로 놓고 ㉠에 대입하면
$(5k)^2=5p^2$ $\therefore p^2=5k^2$ …… ㉡
㉡에서 p^2이 5의 배수이므로 p도 5의 배수이다.
그런데 p, q가 모두 5의 배수인 것은 p, q가 서로소라는 가정에 모순이다.
따라서 $\sqrt{5}$는 유리수가 아니다. … 증명 끝

답 풀이 참조

029-1 ① 명제 $p\longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q\longrightarrow \sim p$도 참이다.
② 명제 $q\longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow \sim q$도 참이다.
③ 명제 $p\longrightarrow q$와 $q\longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 $p\longrightarrow \sim r$도 참이다.
④ 명제 $\sim r\longrightarrow p$는 명제 $p\longrightarrow \sim r$의 역이므로 반드시 참이라고는 할 수 없다.
⑤ 명제 $p\longrightarrow \sim r$가 참이므로 그 대우 $r\longrightarrow \sim p$도 참이다.

답 ④

029-2 ㄱ. 명제 $r\longrightarrow s$, $s\longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r\longrightarrow q$도 참이다.
ㄴ. 명제 $r\longrightarrow \sim p$, $\sim p\longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r\longrightarrow q$도 참이다.
ㄷ. 명제 $p\longrightarrow \sim s$가 참이면 명제 $s\longrightarrow \sim p$도 참이다. 즉 명제 $r\longrightarrow s$, $s\longrightarrow \sim p$, $\sim p\longrightarrow q$가 참이므로 명제 $r\longrightarrow q$도 참이다.
이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 명제 $r\longrightarrow q$가 참임을 보일 수 있는 명제이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

Remark
참인 두 명제가 주어졌을 때, 앞의 명제의 결론과 뒤의 명제의 가정이 같아야만 삼단논법을 활용할 수 있다. 두 명제에서 연결 고리를 찾을 수 없을 때에는 두 명제의 대우를 찾아 삼단논법을 활용하도록 한다.

030-1 (1) $x>0$이고 $y>0 \Longrightarrow xy>0$
$x>0$이고 $y>0 \not\Longleftarrow xy>0$
따라서 $x>0$이고 $y>0$인 것은 $xy>0$이기 위한 충분 조건이다.

[⟶의 반례] $x=-1$, $y=-2$이면 $xy>0$이지만 $x<0$, $y<0$이다.

(2) $x+y$가 짝수 $\not\Longrightarrow$ x, y가 모두 짝수

$x+y$가 짝수 $\Longleftarrow$ x, y가 모두 짝수

따라서 $x+y$가 짝수인 것은 x, y가 모두 짝수이기 위한 필요 조건이다.

[⟶의 반례] $x=1$, $y=3$이면 $x+y$는 짝수이지만 x, y는 모두 홀수이다.

(3) △ABC가 이등변삼각형 $\not\Longrightarrow$ △ABC가 정삼각형

△ABC가 이등변삼각형 $\Longleftarrow$ △ABC가 정삼각형

[⟶의 반례] 삼각형의 세 변의 길이가 2, 2, 3이면 이등변삼각형이지만 정삼각형은 아니다.

따라서 △ABC가 이등변삼각형인 것은 △ABC가 정삼각형이기 위한 필요 조건이다.

(4) $x=y=0 \Longleftrightarrow |x|+|y|=0$

따라서 $x=y=0$은 $|x|+|y|=0$이기 위한 필요충분 조건이다.

답 (1) 충분 (2) 필요 (3) 필요 (4) 필요충분

031-1 p는 q이기 위한 필요조건이므로

$Q \subset P$

$\therefore P \cup Q=P$, $P \cap Q=Q$,

$Q-P=\varnothing$, $P^C-Q^C=\varnothing$

따라서 옳은 것은 ④이다.

답 ④

031-2 q가 p이기 위한 필요조건이므로

$q \Longleftarrow p$, 즉 $P \subset Q$

또 q가 r이기 위한 충분조건이므로

$q \Longrightarrow r$, 즉 $Q \subset R$

ㄱ. $P \subset Q$, $Q \subset R$이므로 $P \subset R$

ㄴ. $P \subset Q$에서 $P \cup Q=Q$이므로

$P \cup Q=Q \subset R$

ㄷ. $P \subset R$에서 $R^C \subset P^C$이므로

$P^C \cap R^C=R^C$

$\therefore P^C \cap R^C=R^C \subset Q^C$ ($\because Q \subset R$)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

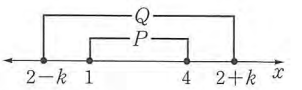
032-1 주어진 조건을 각각

p: $1 \le x \le 4$, q: $|x-2| \le k$

로 놓고 각각의 진리집합을 P, Q라 하면

$P=\{x \mid 1 \le x \le 4\}$, $Q=\{x \mid 2-k \le x \le 2+k\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이고, 이를 만족시키도록 집합 P, Q를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$2-k \le 1$에서 $k \ge 1$

$2+k \ge 4$에서 $k \ge 2$

따라서 $k \ge 2$이므로 k의 최솟값은 2이다.

답 2

032-2 주어진 조건을 각각

p: $a \le x \le b$, q: $x+4>0$, r: $|x|<1$

로 놓고 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid a \le x \le b\}$,

$Q=\{x \mid x>-4\}$,

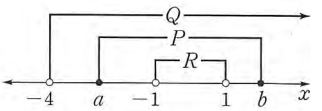
$R=\{x \mid -1<x<1\}$

이때 p는 q이기 위한 충분조건이고 r이기 위한 필요조건이므로

$p \Longrightarrow q$, $r \Longrightarrow p$

즉 $P \subset Q$, $R \subset P$이므로 $R \subset P \subset Q$

이를 만족시키도록 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore -4<a \le -1$, $b \ge 1$

따라서 a의 최댓값은 -1이고 b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $-1+1=0$

답 0

중단원 연습 문제 본책 91~95쪽

01 3	02 ④	03 ㄱ, ㄷ	04 ③	05 ④
06 a	07 ④	08 ④	09 $-\frac{1}{2}<a \le \frac{1}{3}$	
10 ㄴ	11 ⑤	12 ㄱ, ㄷ	13 ③	14 ④
15 ③	16 ①	17 −10	18 ㄱ, ㄴ	19 16
20 ⑤				

01 전략 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 명제라 한다.

풀이 ㄱ. x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되므로 명제가 아니다.
ㄴ. $3+4=7$은 참인 명제이다.
ㄷ. 2는 소수이지만 짝수이므로 거짓인 명제이다.
ㄹ. 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
ㅁ. 마름모는 두 대각선이 직교하는 사각형이지만 정사각형이 아니므로 거짓인 명제이다.
이상에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ으로 3개이다. 답 3

02 전략 명제 $p \longrightarrow q$에서 p를 만족하지만 q를 만족시키지 않는 경우가 있는 것을 찾는다.

풀이 ④ $x(x+1)=12$에서 $x^2+x-12=0$
$(x+4)(x-3)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=3$
따라서 -4는 자연수가 아니므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ $x(x+2)=6$에서 $x^2+2x-6=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{7}$
따라서 x는 무리수이므로 주어진 명제는 참이다.
답 ④

Remark
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해는
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

03 전략 명제와 그 대우의 참, 거짓은 항상 일치하므로 명제 또는 그 대우와 역의 참, 거짓을 알아본다.

풀이 ㄱ. 대우: x 또는 y가 짝수이면 xy는 짝수이다. (참)
[증명] (짝수)×(짝수)=(짝수),
(짝수)×(홀수)=(짝수),
(홀수)×(짝수)=(짝수)
이므로 x 또는 y가 짝수이면 xy는 짝수이다.
역: x, y가 모두 홀수이면 xy는 홀수이다. (참)
따라서 주어진 명제의 역, 대우가 모두 참이다.
ㄴ. 대우: xy가 홀수이면 x^2+y^2은 짝수이다. (참)
[증명] xy가 홀수이면 x, y는 모두 홀수이고 x^2, y^2도 홀수이다. 따라서 x^2+y^2은 짝수이다.
역: xy가 짝수이면 x^2+y^2은 홀수이다. (거짓)
[반례] $x=2$, $y=2$이면 xy가 짝수이지만 $x^2+y^2=8$이므로 짝수이다.
ㄷ. 명제: $x^2+xy+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이다. (참)
[증명] $x^2+xy+y^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2=0$이면
$x+\dfrac{y}{2}=0$, $y=0$ $\therefore x=0$, $y=0$
따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
역: $x=0$이고 $y=0$이면 $x^2+xy+y^2=0$이다. (참)
이상에서 명제의 역, 대우가 모두 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

Remark
실수 a, b에 대하여
$a^2+b^2=0 \iff a=0, b=0$

04 전략 명제가 참이면 그 대우도 참임을 이용한다.

풀이 명제 $p \longrightarrow q$가 참이므로 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$도 참이다.
따라서 두 명제 $\sim r \longrightarrow \sim q$, $\sim q \longrightarrow \sim p$가 모두 참이므로 명제 $\sim r \longrightarrow \sim p$도 반드시 참이다.
답 ③

05 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면 $\sim p$의 진리집합은 P^C, 'p이고 q'의 진리집합은 $P \cap Q$임을 이용한다.

풀이 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{2, 3, 4, 5\}$, $Q=\{4, 5, 6, 7, 8\}$
① $\sim p$의 진리집합은 P^C이므로
$P^C=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$
② $\sim q$의 진리집합은 Q^C이므로
$Q^C=\{1, 2, 3, 9, 10\}$
③ 'p이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P \cap Q^C$이므로
$P \cap Q^C=\{2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 9, 10\}$
$=\{2, 3\}$
④ '$\sim p$이고 q'의 진리집합은 $P^C \cap Q$이므로
$P^C \cap Q=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8\}$
$=\{6, 7, 8\}$
⑤ '$\sim p$이고 $\sim q$'의 진리집합은 $P^C \cap Q^C$이므로
$P^C \cap Q^C=\{1, 6, 7, 8, 9, 10\} \cap \{1, 2, 3, 9, 10\}$
$=\{1, 9, 10\}$
따라서 진리집합이 $\{6, 7, 8\}$인 것은 ④이다. 답 ④

06 문제이해 • 두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각 P^C, Q^C이다. ➔ 20% 배점

해결과정 • 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 거짓이 되기 위해서는 $Q^C \not\subset P^C$이어야 하므로 Q^C의 원소이면서 P^C의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. ➔ 50% 배점

답구하기 • $a \in Q^C$이지만 $a \notin P^C$이므로 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 거짓임을 보여주는 반례는 a이다. ➔ 30% 배점

답 a

다른 풀이 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'의 대우가 'p이면 q이다.'이므로 P의 원소이면서 Q의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.

$a \in P$, $a \notin Q$이므로 명제 '$\sim q$이면 $\sim p$이다.'가 거짓임을 보여주는 반례는 a이다.

07 전략 명제 $p \longrightarrow q$와 그 역 $q \longrightarrow p$가 모두 참인 것을 찾는다.

풀이 ① p: $xy<0 \Longrightarrow q$: $x^2+y^2>0$이고,
p: $xy<0 \Longleftarrow\!\!\!\!\!\!/\;\; q$: $x^2+y^2>0$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$\longleftarrow\!\!\!\!\!\!/$의 반례] $x=1$, $y=2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $xy>0$이다.

② p: $x>y>0 \Longrightarrow q$: $x^2>y^2$이고,
p: $x>y>0 \Longleftarrow\!\!\!\!\!\!/\;\; q$: $x^2>y^2$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$\cdot$ 의 반례] $x=-3$, $y=1$이면 $x^2>y^2$이지만 $x<y$이다.

③ p: $x^2+y^2>0 \Longrightarrow\!\!\!\!\!\!/\;\; q$: $x+y>0$이고,
p: $x^2+y^2>0 \Longleftarrow\!\!\!\!\!\!/\;\; q$: $x+y>0$
따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.
[$\longrightarrow\!\!\!\!\!\!/$의 반례] $x=1$, $y=-2$이면 $x^2+y^2>0$이지만 $x+y<0$이다.

④ p: $x^2+y^2=0 \Longleftrightarrow q$: $|x|+|y|=0$
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ p: $x>1$이고 $y>1 \Longrightarrow q$: $x+y>2$이고,
p: $x>1$이고 $y>1 \Longleftarrow\!\!\!\!\!\!/\;\; q$: $x+y>2$
따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.
[$\longleftarrow\!\!\!\!\!\!/$의 반례] $x=-1$, $y=5$이면 $x+y>2$이지만 $x<1$이고 $y>1$이다.

이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ④이다.

답 ④

08 전략 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때 $P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 이용한다.

풀이 ① $P \not\subset Q$이므로 명제 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.
② $R \not\subset P^C$이므로 명제 $r \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.
③ $P \not\subset Q^C$이므로 명제 $p \longrightarrow \sim q$는 거짓이다.
④ $R \subset (P \cup Q)$이므로 명제 $r \longrightarrow (p$ 또는 $q)$는 참이다.
⑤ $(P \cap R) \not\subset Q$이므로 명제 $(p$이고 $r) \longrightarrow q$는 거짓이다.

답 ④

09 해결과정 • q: $3x-1=10$에서

$3x=11 \quad \therefore x=\frac{11}{3}$

r: $x^2+3x-10=0$에서

$(x+5)(x-2)=0 \quad \therefore x=-5$ 또는 $x=2$

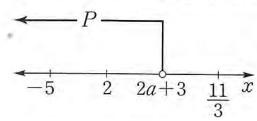
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid x<2a+3\}$, $Q=\left\{\frac{11}{3}\right\}$, $R=\{-5, 2\}$ ➔ 40% 배점

명제 $q \longrightarrow p$는 거짓이고, 명제 $r \longrightarrow p$는 참이므로

$Q \not\subset P$, $R \subset P$ ➔ 20% 배점

이를 만족시키도록 집합 P를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $2<2a+3 \le \frac{11}{3}$이므로

$-1<2a \le \frac{2}{3} \quad \therefore -\frac{1}{2}<a \le \frac{1}{3}$ ➔ 20% 배점

답 $-\frac{1}{2}<a \le \frac{1}{3}$

10 전략 명제 '모든 x에 대하여 $p(x)$'가 거짓이면 이 명제의 부정인 '어떤 x에 대하여 $\sim p(x)$'는 참이다.

풀이 명제 '우리 서점에서는 모든 재고 도서를 할인 판매한다.'가 거짓이므로 이 명제의 부정인 명제 '우리 서점의 어떤 재고 도서는 할인 판매하지 않는다.'가 참이다.

따라서 이 서점에는 할인 판매하는 재고 도서가 있는지 없는지는 알 수 없으므로 ㄱ, ㄷ이 참인지 알 수 없다. 이 서점에는 할인 판매하지 않는 재고 도서가 있다는 뜻이므로 ㄴ만이 참이라 할 수 있다.

답 ㄴ

11 전략 귀류법은 결론을 부정하여 가정에 모순이 됨을 이끌어 냄으로써 그 명제가 참임을 증명하는 방법이다.

풀이 a, b를 모두 홀수 라 하면

$a=2k-1$, $b=2l-1$ (k, l은 자연수)

로 놓을 수 있으므로

$$ab=(2k-1)(2l-1)$$
$$=4kl-2k-2l+1$$
$$=2(2kl-k-l)+1$$

그런데 k, l이 자연수이므로 $2kl-k-l$은 음이 아닌 정수 이다. 따라서 ab는 홀수 가 되어 ab가 짝수라는 가정에 모순이므로 ab가 짝수이면 a 또는 b는 짝수이다.

∴ (가) 홀수 (나) 음이 아닌 정수 (다) 홀수

답 ⑤

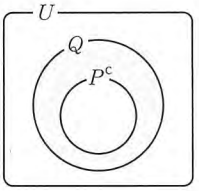
12 전략 조건 p, q 사이의 관계를 이용하여 진리집합 P, Q 사이의 포함 관계를 구한다.

풀이 $\sim p$가 q이기 위한 충분조건이므로

$\sim p \Longrightarrow q$, 즉 $P^C \subset Q$

ㄱ. $P^C \subset Q$이므로 $x \in P^C$이면 $x \in Q$이다.

ㄴ. x가 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분의 원소이면 $x \in P$이지만 $x \in Q$, 즉 $x \notin Q^C$이다.



ㄷ. $P^C \subset Q$에서

$Q^C \subset P$

∴ $P-Q=P \cap Q^C=Q^C$

따라서 $x \in Q^C$이면 $x \in (P-Q)$이다.

이상에서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄷ

Remark

두 집합 A, B에 대하여

$A \subset B \Longleftrightarrow x \in A$이면 $x \in B$이다.

13 전략 각 조건의 진리집합 사이의 포함 관계를 이용한다.

풀이 조건 p의 진리집합은 $P=\{x \mid 3 \le x \le 7\}$

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x \mid x \le k\}$

$P \subset Q$가 성립하려면 $k \ge 7$이어야 하므로 k의 최솟값은 7이다.

답 ③

14 전략 두 개의 참인 명제가 주어졌으므로 삼단논법을 이용한다.

풀이 q는 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이다.

r는 $\sim q$이기 위한 충분조건이므로 명제 $r \longrightarrow \sim q$가 참이다. 따라서 그 대우 $q \longrightarrow \sim r$도 참이다.

명제 $\sim p \longrightarrow q$, $q \longrightarrow \sim r$가 모두 참이므로 명제 $\sim p \longrightarrow \sim r$도 참이다.

∴ $P^C \subset R^C$

답 ④

15 전략 $p \Longrightarrow q$인 것을 찾는다.

풀이 ㄱ. $p \not\Longrightarrow q$이고 $p \Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이다.

[$\longrightarrow$의 반례] $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 4, 5\}$이면 $n(A) \le n(B)$이지만 $A \not\subset B$이다.

ㄴ. $p \not\Longrightarrow q$이고 $p \not\Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 아무 조건도 아니다.

[$\longrightarrow$의 반례] $A=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2, 3\}$이면 $A-B=\varnothing$

따라서 $n(A-B)=0$이지만 $n(A) \ne n(B)$이다.

[$\longleftarrow$의 반례] $A=\{1\}$, $B=\{2\}$이면 $A-B=\{1\}$

따라서 $n(A)=n(B)$이지만 $n(A-B) \ne 0$이다.

ㄷ. $p \Longrightarrow q$이고 $p \not\Longleftarrow q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이다.

[$\longleftarrow$의 반례] $U=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면 $A \cup B=U$이지만 $A \ne B^C$이다.

이상에서 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

16 전략 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$, 즉 $p \Longleftrightarrow q$이면 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

풀이 ㄱ. p: $A \cup B^C=U \Longleftrightarrow q$: $B-A=\varnothing$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

[$\Longleftrightarrow$의 증명] $A \cup B^C=U \Longleftrightarrow (A \cup B^C)^C=U^C$

$\Longleftrightarrow A^C \cap B=\varnothing$

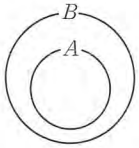
$\Longleftrightarrow B-A=\varnothing$

ㄴ. p: $A \cup B=\varnothing \Longrightarrow q$: $A \subset B$

p: $A \cup B=\varnothing \not\Longleftarrow q$: $A \subset B$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

[⟵의 반례] 오른쪽 그림과 같은 경우 $A \subset B$이지만 $A \cup B = B \neq \emptyset$이다.

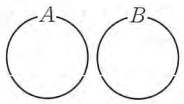


ㄷ. $p: A-B=A \not\Longrightarrow q: B=\emptyset$

$p: A-B=A \Longleftarrow q: B=\emptyset$

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이다.

[⟶의 반례] 오른쪽 그림과 같은 경우 $A-B=A$이지만 $B \neq \emptyset$이다.



이상에서 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

17 해결과정 • 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x \mid -2<x<-1 \text{ 또는 } x>5\}$,

$Q=\{x \mid x>a\}$,

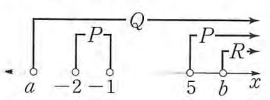
$R=\{x \mid x>b\}$

q는 p이기 위한 필요조건이고, r는 p이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$, $R \subset P$, 즉 $R \subset P \subset Q$

이어야 한다. ➡ 50% 배점

이를 만족시키도록 집합 P, Q, R를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$a \leq -2$, $b \geq 5$

➡ 30% 배점

답구하기 • 따라서 a의 최댓값은 -2, b의 최솟값은 5이므로 구하는 곱은

$(-2) \cdot 5 = -10$ ➡ 20% 배점

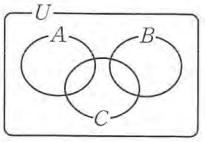
답 -10

18 전략 명제 '어떤 x에 대하여 $p(x)$'가 거짓이면 '모든 x에 대하여 $\sim p(x)$'는 참이고, 명제 '모든 x에 대하여 $\sim q(x)$'가 거짓이면 '어떤 x에 대하여 $q(x)$'는 참이다.

풀이 ㄱ. p의 부정 '$x \in A$인 모든 x에 대하여 $x \notin B$이다.'가 참이므로 $A \cap B = \emptyset$이다.

ㄴ. q의 부정 '$x \in C$인 어떤 x에 대하여 $x \in A$이다.'가 참이므로 $A \cap C \neq \emptyset$이다. 이때 $(A \cap C) \subset (A \cup C)$이므로 $A \cup C \neq \emptyset$이다.

ㄷ. 세 집합 A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같이 $B \cap C \neq \emptyset$인 경우도 있다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ㄱ, ㄴ

19 전략 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이면 $P^C \subset Q$이다.

풀이 $P=\{2, 3, 5, 7\}$이므로

$P^C=\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

이때 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이려면 $P^C \subset Q$이어야 하므로 집합 Q는 1, 4, 6, 8, 9, 10을 반드시 원소로 갖는 집합 U의 부분집합이다.

따라서 집합 Q의 개수는

$2^{10-6}=2^4=16$

답 16

Remark 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$에 대하여

① 집합 A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

② 집합 A의 원소 중에서 특정한 k $(k<n)$개의 원소를 반드시 원소로 갖는 집합 A의 부분집합의 개수 ➡ 2^{n-k}

20 전략 조건이 '적어도~'의 꼴로 주어지면 조건의 부정을 이용한다.

풀이 조건 t의 부정은

$\sim t$: a와 b는 모두 1이 아니다.

조건 $a \neq 1$의 진리집합은 $P \cup Q$이고, 조건 $b \neq 1$의 진리집합은 $R \cup S$이므로 조건 $\sim t$의 진리집합은

$(P \cup Q) \cap (R \cup S)$

조건 t의 진리집합을 T라 하면 조건 $\sim t$의 진리집합은 T^C이므로

$T^C=(P \cup Q) \cap (R \cup S)$

$\therefore T=\{(P \cup Q) \cap (R \cup S)\}^C$

$=(P \cup Q)^C \cup (R \cup S)^C$

$=(P^C \cap Q^C) \cup (R^C \cap S^C)$

$=(P^C-Q) \cup (R^C-S)$

답 ⑤

04 절대부등식

유제 본책 100~108쪽

033-1 (1) $(a^2+b^2)-(2a+2b-2)$
$=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)$
$=(a-1)^2+(b-1)^2\geq 0$
$\therefore a^2+b^2\geq 2a+2b-2$
여기서 등호는 $a-1=0$, $b-1=0$, 즉 $a=b=1$일 때 성립한다.

(2) 세 수 A, B, C에 대하여
$A^2=(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=6+7+2\sqrt{42}=13+2\sqrt{42}$
$B^2=(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2=5+8+4\sqrt{10}=13+2\sqrt{40}$
$C^2=(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2=3+10+2\sqrt{30}=13+2\sqrt{30}$
$\sqrt{42}>\sqrt{40}>\sqrt{30}$이므로 $A^2>B^2>C^2$
그런데 A, B, C는 모두 양수이므로
$A>B>C$

답 (1) $a^2+b^2\geq 2a+2b-2$ (2) $A>B>C$

034-1 (1) $a^2+b^2+1-ab+a+b$
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2-2ab+2a+2b)$
$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(a^2+2a+1)$
$+(b^2+2b+1)\}$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\}$
a, b가 실수이므로
$(a-b)^2\geq 0$, $(a+1)^2\geq 0$, $(b+1)^2\geq 0$
따라서 $a^2+b^2+1-ab+a+b\geq 0$이므로
$a^2+b^2+1\geq ab-a-b$
여기서 등호는 $a=b=-1$일 때 성립한다.
… 증명 끝

(2) $(|a|-|b|)^2-|a-b|^2$
$=a^2-2|a||b|+b^2-(a-b)^2$
$=a^2-2|ab|+b^2-a^2+2ab-b^2$
$=2(ab-|ab|)$
$ab\leq|ab|$이므로 $ab-|ab|\leq 0$
$\therefore (|a|-|b|)^2\leq|a-b|^2$
(i) $|a|\geq|b|$일 때,
$|a|-|b|\geq 0$, $|a-b|\geq 0$이므로
$|a|-|b|\leq|a-b|$
(ii) $|a|<|b|$일 때,
$|a|-|b|<0$, $|a-b|>0$이므로
$|a|-|b|<|a-b|$
(i), (ii)에서 $|a|-|b|\leq|a-b|$
여기서 등호는 $|ab|=ab$, $|a|\geq|b|$일 때 성립한다.
… 증명 끝

답 풀이 참조

035-1 (1) $\frac{4y}{x}>0$, $\frac{x}{y}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=4$
$\therefore \frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\geq 4$
$\left(\text{단, 등호는 } \frac{4y}{x}=\frac{x}{y}, \text{ 즉 } x=2y\text{일 때 성립}\right)$
… 증명 끝

(2) $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)=xy+9+1+\frac{9}{xy}$
$=xy+\frac{9}{xy}+10$
$xy>0$, $\frac{9}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$xy+\frac{9}{xy}\geq 2\sqrt{xy\cdot\frac{9}{xy}}=6$
$\therefore xy+\frac{9}{xy}+10\geq 16$
$\therefore \left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{9}{x}\right)\geq 16$
$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{9}{xy}, \text{ 즉 } xy=3\text{일 때 성립}\right)$
… 증명 끝

답 풀이 참조

035-2 $x>0$, $y>0$, $z>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ …… ㉠
$y+z\geq 2\sqrt{yz}$ …… ㉡
$z+x\geq 2\sqrt{zx}$ …… ㉢
㉠×㉡×㉢을 하면
$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$
(단, 등호는 $x=y=z$일 때 성립) … 증명 끝

답 풀이 참조

036-1 (1) $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{8}{x}+y\right)=8+xy+\frac{16}{xy}+2$

$=10+xy+\frac{16}{xy}$

$xy>0$, $\frac{16}{xy}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$10+xy+\frac{16}{xy}\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$

$=10+2\cdot 4=18$

$\left(\text{단, 등호는 } xy=\frac{16}{xy}, \text{ 즉 } xy=4\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{8}{x}+y\right)$의 최솟값은 18이다.

(2) $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

그런데 $x+y=8$이므로

$4\geq\sqrt{xy}$

양변을 제곱하면 $xy\leq 16$

따라서 xy의 최댓값은 16이다.

답 (1) 18 (2) 16

036-2 a, b, c가 양수이므로

$\frac{1}{a}>0$, $\frac{1}{b}>0$, $\frac{1}{c}>0$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$

$=3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

$=3\cdot\frac{1}{3}=1$

따라서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$은 $a=b=c=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.

답 1

037-1 (1) 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(3^2+4^2)(a^2+4b^2)\geq(3a+8b)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a}{3}=\frac{2b}{4}, \text{ 즉 } 2a=3b\text{일 때 성립}\right)$

$a^2+4b^2=10$이므로

$250\geq(3a+8b)^2$

$\therefore -5\sqrt{10}\leq 3a+8b\leq 5\sqrt{10}$

따라서 $3a+8b$의 최댓값은 $5\sqrt{10}$이다.

(2) 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+3^2)(a^2+b^2)\geq(a+3b)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{b}{3}, \text{ 즉 } 3a=b\text{일 때 성립}\right)$

$a+3b=20$이므로

$10(a^2+b^2)\geq 400$

$\therefore a^2+b^2\geq 40$

따라서 a^2+b^2의 최솟값은 40이다.

답 (1) $5\sqrt{10}$ (2) 40

037-2 실수 a, b, c, x, y, z에 대하여

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$

이 성립하므로 $a=1$, $b=2$, $c=2$를 대입하면

$(1^2+2^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+2y+2z)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}\text{일 때 성립}\right)$

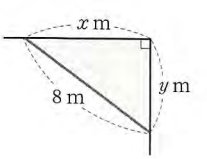
$x^2+y^2+z^2=4$이므로

$9\cdot 4\geq(x+2y+2z)^2$

$\therefore -6\leq x+2y+2z\leq 6$

답 $-6\leq x+2y+2z\leq 6$

038-1 오른쪽 그림과 같이 꽃밭에서 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x m, y m라고 하면 피타고라스 정리에 의하여



$x^2+y^2=8^2$

$x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}$

$64\geq 2xy$

$\therefore xy\leq 32$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

꽃밭의 넓이는 $S=\frac{1}{2}xy(\text{m}^2)$이므로

$S=\frac{1}{2}xy\leq\frac{1}{2}\times 32=16(\text{m}^2)$

따라서 꽃밭의 넓이의 최댓값은 $x=y=4\sqrt{2}$일 때 16 m^{2}이다.

답 16 m^2

038-2 세 개의 구 O_1, O_2, O_3의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2, r_3이라 하면 겉넓이는 각각 $4\pi r_1^2$, $4\pi r_2^2$, $4\pi r_3^2$이므로

$4\pi(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=60\pi$

$\therefore r_1^2+r_2^2+r_3^2=15$ ····· ㉠

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\geq(r_1+r_2+r_3)^2$

$3(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\geq(r_1+r_2+r_3)^2$

(단, 등호는 $r_1=r_2=r_3$일 때 성립)

㉠을 대입하면 $3\cdot15\geq(r_1+r_2+r_3)^2$

$\therefore 0<r_1+r_2+r_3\leq3\sqrt{5}$

$\overline{PQ}=2(r_1+r_2+r_3)$이므로 구하는 선분 PQ의 길이의 최댓값은 $2\cdot3\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ 답 $6\sqrt{5}$

중단원 연습 문제 본책 109~111쪽

01 $P<Q$ **02** ① **03** ⑤ **04** 6 **05** 6

06 ② **07** $a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$ **08** ③

09 $2\sqrt{10}$ **10** $\frac{2}{3}$ **11** ② **12** 4 **13** ①

14 8

01 문제이해 • $a>0$, $b>0$이므로 두 수 P, Q는 양수이다. → 20% 배점

해결과정 • $P^2-Q^2=\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{2}$

$=-\sqrt{ab}<0$ → 50% 배점

$\therefore P^2<Q^2$ → 10% 배점

답구하기 • 그런데 P, Q는 모두 양수이므로

$P<Q$ → 20% 배점

답 $P<Q$

02 전략 주어진 세 수는 근호를 포함한 양수이므로 제곱하여 대소를 비교한다.

풀이 $A^2=(2\sqrt{3}+\sqrt{15})^2=12+15+4\sqrt{45}$

$=27+12\sqrt{5}$

$B^2=(2\sqrt{5}+3)^2=20+9+12\sqrt{5}=29+12\sqrt{5}$

$C^2=(\sqrt{30}+\sqrt{6})^2=30+6+2\sqrt{180}=36+12\sqrt{5}$

이므로 $A^2<B^2<C^2$

그런데 A, B, C는 모두 양수이므로

$A<B<C$ 답 ①

03 전략 $A>0$, $B>0$일 때, $A^2>B^2\iff A>B$임을 이용한다.

풀이 $(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$

$=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2$

$=2(\boxed{|ab|-ab})$

$|ab|\geq ab$이므로 $2(\boxed{|ab|-ab})\geq0$

$\therefore |a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$

그런데 $|a+b|\boxed{\geq}0$, $|a|+|b|\boxed{\geq}0$이므로

$|a+b|\leq|a|+|b|$

(단, 등호는 $\boxed{|ab|=ab}$일 때 성립)

$\therefore$ (가) $|ab|-ab$ (나) $\geq$ (다) $|ab|=ab$ 답 ⑤

04 해결과정 • $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

$=\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$

$=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$ → 30% 배점

$\geq2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$ → 30% 배점

$=2+2+2$

$=6$ (단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립) → 30% 배점

답구하기 • 따라서 주어진 식의 최솟값은 6이다.

→ 10% 배점 답 6

Remark

$x+\frac{1}{x}+x+\frac{4}{x}$ $(x>0)$의 최솟값을 구할 때,

$x+\frac{1}{x}+x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=2+2\cdot2=6$

에서 $x+\frac{1}{x}+x+\frac{4}{x}$의 최솟값이 6이라 생각하면 안 된다.

$x+\frac{1}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=1$이고,

$x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}$에서 등호가 성립하는 조건은 $x=2$이므로 두 식의 등호가 동시에 성립할 수 없기 때문이다.

이 문제에서는 세 식 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}$,

$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}$에서 등호가 성립할 조건이 동시에 성립할 수 있으므로 위와 같이 풀 수 있다.

05 전략 x, y, z가 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+2^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(x+y+2z)^2$

$\left(\text{단, 등호는 } x=y=\frac{z}{2}\text{일 때 성립}\right)$

$x+y+2z=6$이므로 $6(x^2+y^2+z^2)\geq36$

$\therefore x^2+y^2+z^2\geq6$

따라서 $x^2+y^2+z^2$의 최솟값은 6이다. 답 6

06 전략 실수의 대소 관계를 이해하여 주어진 식의 대소를 비교한다.

풀이 $0<a<b$에서 $a-b<0$

$$A-B=\frac{a}{a+1}-\frac{b}{b+1}=\frac{a-b}{(a+1)(b+1)}<0$$

$\therefore A<B$ …… ㉠

$$A-C=\frac{a}{a+1}-\frac{a+b}{a+b+2}$$

$$=\frac{a-b}{(a+1)(a+b+2)}<0$$

$\therefore A<C$ …… ㉡

$$B-C=\frac{b}{b+1}-\frac{a+b}{a+b+2}$$

$$=\frac{b-a}{(b+1)(a+b+2)}>0$$

$\therefore B>C$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $A<C<B$ 답 ②

07 전략 두 수의 차의 부호를 조사한다.

풀이 $0<a<1$일 때,

$0<a^2<1,\ 0<\sqrt{a}<1,\ \frac{1}{a}>1$

이므로 주어진 네 수 중 $\frac{1}{a}$이 가장 크다.

$a^2-a=a(a-1)<0$이므로 $a^2<a$

$a-\sqrt{a}=\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)<0$이므로 $a<\sqrt{a}$

$\therefore a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$

답 $a^2<a<\sqrt{a}<\frac{1}{a}$

08 전략 $A-B>0 \iff A>B$임을 이용한다.

풀이 ㄱ. $\frac{a^2}{1+a^2}-\frac{b^4}{1+b^4}$

$$=\frac{a^2(1+b^4)-b^4(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^4)}$$

$$=\frac{a^2-b^4}{(1+a^2)(1+b^4)}<0$$

$\therefore \frac{a^2}{1+a^2}<\frac{b^4}{1+b^4}$

ㄴ. $a>0,\ b>0$이므로

$1<a^2<b^4 \iff 1<a<b^2$

따라서 $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a}=\frac{a-b^2}{ab^2}<0$이므로

$\frac{1}{b^2}<\frac{1}{a}$

ㄷ. [반례] $a=1.2,\ b=1.1$이면 $1<a<b^2$이지만

$$\frac{a^4b^2}{a^2b^4}=\frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{1.2}{1.1}\right)^2>1$$

$\therefore a^4b^2>a^2b^4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

09 문제이해 • $x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4x+9y\geq 2\sqrt{4x\cdot 9y}$

$\therefore 20\geq 12\sqrt{xy}$ → 40% 배점

해결과정 • $\therefore (2\sqrt{x}+3\sqrt{y})^2$

$=4x+9y+12\sqrt{xy}$

$=20+12\sqrt{xy}$

$\leq 20+20$

$=40$ (단, 등호는 $4x=9y$일 때 성립)

→ 40% 배점

답구하기 • 따라서 $2\sqrt{x}+3\sqrt{y}$의 최댓값은 $\sqrt{40}=2\sqrt{10}$이다. → 20% 배점

답 $2\sqrt{10}$

10 문제이해 • $a+b+c=1$에서

$a+b=1-c$ …… ㉠

$a^2+b^2+c^2=3$에서

$a^2+b^2=3-c^2$ …… ㉡

→ 30% 배점

해결과정 • $a,\ b$는 실수이므로 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2)(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ …… ㉢

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$2(3-c^2)\geq(1-c)^2,\quad 6-2c^2\geq 1-2c+c^2$

$3c^2-2c-5\leq 0,\quad (3c-5)(c+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq c\leq\frac{5}{3}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

→ 50% 배점

답구하기 • 따라서 c의 최댓값은 $\frac{5}{3}$, 최솟값은 -1이므로

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}+(-1)=\frac{2}{3}$ → 20% 배점

답 $\frac{2}{3}$

다른 풀이 $a+b+c=1$에서

$a+b=1-c$ …… ㉠

$a^2+b^2+c^2=3$에서

$a^2+b^2=3-c^2$ …… ㉡

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$(1-c)^2=3-c^2+2ab$

$\therefore ab=c^2-c-1$ ····· ㉢

㉠, ㉢에서 a, b는 t에 대한 이차방정식

$t^2-(1-c)t+c^2-c-1=0$의 두 근이다.

이때 a, b는 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

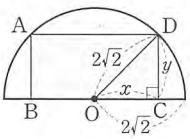
$D=(1-c)^2-4(c^2-c-1)\geq 0$

$3c^2-2c-5\leq 0$, $(3c-5)(c+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq c\leq \frac{5}{3}$

11 전략 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 문자로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 직사각형의 가로의 길이를 $2x$, 세로의 길이를 y로 놓으면 $\triangle OCD$에서 피타고라스 정리에 의하여



$x^2+y^2=8$

x^2, y^2은 양수이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}$ (단, 등호는 $x=y=2$일 때 성립)

$\therefore 8\geq 2xy$

따라서 직사각형의 넓이 $2xy$는 $x=y=2$일 때 최댓값 8을 가지고, 이때 직사각형의 둘레의 길이는

$4x+2y=12$ 답 ②

12 전략 '허근을 갖는다.'는 조건에서 a의 값의 범위를 구하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

풀이 $x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-a<0$ $\therefore a>1$

따라서 $a-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-1+\frac{4}{a-1}\geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{4}{a-1}}=4$

$\left(\text{단, 등호는 } a-1=\frac{4}{a-1}, \text{ 즉 } a=3\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $a-1+\frac{4}{a-1}$의 최솟값은 4이다. 답 4

13 전략 $S_1+S_2+S_3=a$이고 S_1, S_2, S_3의 제곱의 합의 최솟값을 구하므로 코시-슈바르츠 부등식을 이용한다.

풀이 코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\geq(S_1+S_2+S_3)^2$

$S_1+S_2+S_3=a$이므로

$3(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\geq a^2$

$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2\geq\frac{a^2}{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } S_1=S_2=S_3=\frac{a}{3}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $S_1^2+S_2^2+S_3^2$의 최솟값은 $\frac{a^2}{3}$이다. 답 ①

14 전략 $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$로 놓고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 xy의 최댓값을 구한다.

풀이 $\angle APB$는 반원에 대한 원주각이므로

$\angle APB=90°$

$\overline{CM}$, $\overline{CN}$은 현의 수직이등분선이므로

$\angle CMP=\angle CNP=90°$

따라서 $\square MCNP$는 직사각형이다.

$\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=y$라 하면 $\triangle APB$는 직각삼각형이므로

$x^2+y^2=8^2$

$x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\geq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$, $64\geq 2xy$

$\therefore xy\leq 32$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

한편 $\overline{MP}=\frac{x}{2}$, $\overline{NP}=\frac{y}{2}$이므로 $\square MCNP$의 넓이는

$\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{4}xy\leq\frac{1}{4}\cdot 32=8$

따라서 $\square MCNP$의 넓이의 최댓값은 8이다. 답 8

다른 풀이 $\overline{PC}$를 그으면

$\square MCNP=\triangle MCP+\triangle NCP$

$=\frac{1}{2}\triangle ACP+\frac{1}{2}\triangle BCP$

$=\frac{1}{2}\triangle ABP$

따라서 $\triangle ABP$의 넓이가 최대일 때, $\square MCNP$의 넓이도 최대이다. 이때 $\triangle ABP$의 밑변을 $\overline{AB}$로 고정하면 높이의 최댓값은 반지름의 길이이므로

$\triangle ABP\leq\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(반지름의 길이)

$=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$

$\therefore \square MCNP=\frac{1}{2}\triangle ABP\leq\frac{1}{2}\cdot 16=8$

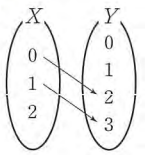
따라서 $\square MCNP$의 넓이의 최댓값은 8이다.

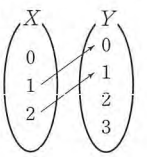
05 함수

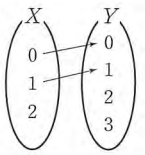
유제

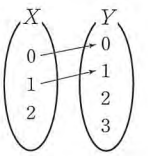
본책 118~134쪽

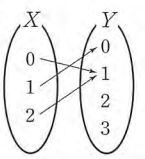
039-1 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

⑤는 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응하므로 이 대응은 함수이다. 답 ⑤

040-1 $f(-3)=\frac{6}{-3}=-2$, $f(-2)=\frac{6}{-2}=-3$, $f(2)=\frac{6}{2}=3$, $f(3)=\frac{6}{3}=2$이므로 함수 f의 치역은

$\{-3, -2, 2, 3\}$

답 $\{-3, -2, 2, 3\}$

040-2 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

(i) x가 짝수, 즉 $x=2, 4, 6, 8, 10$일 때,

$f(2)=2+2=4$, $f(4)=4+2=6$,

$f(6)=6+2=8$, $f(8)=8+2=10$,

$f(10)=10+2=12$

(ii) x가 홀수, 즉 $x=1, 3, 5, 7, 9$일 때,

$f(1)=7-1=6$, $f(3)=7-3=4$,

$f(5)=7-5=2$, $f(7)=7-7=0$,

$f(9)=7-9=-2$

(i), (ii)에서 함수 f의 치역은

$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

답 $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

040-3 자연수 k에 대하여

(i) $n=3k$일 때, $f(n)=0$

(ii) $n=3k-1$일 때, $n=3(k-1)+2$이므로

$f(n)=2$

(iii) $n=3k-2$일 때, $n=3(k-1)+1$이므로

$f(n)=1$

이상에서 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이므로 치역의 모든 원소의 합은

$0+1+2=3$

답 3

041-1 $f(-2)=g(-2)$에서

$f(-2)=-(-2)^2+3\cdot(-2)-5=-15$,

$g(-2)=(-2)^2+a\cdot(-2)+b$

$=-2a+b+4$

이므로

$-2a+b+4=-15$

$\therefore 2a-b=19$ …… ㉠

$f(2)=g(2)$에서

$f(2)=-2^2+3\cdot2-5=-3$,

$g(2)=2^2+2a+b=2a+b+4$

이므로

$2a+b+4=-3$

$\therefore 2a+b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-13$

답 $a=3$, $b=-13$

041-2 ㄱ. $f(-1)=-6$, $f(0)=-5$, $f(1)=-4$

$g(-1)=-4$, $g(0)=-5$, $g(1)=-4$

즉 $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$이지만

$f(-1)\neq g(-1)$이므로 두 함수 f, g는 서로 같지 않다.

ㄴ. $f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f(1)=2$

$g(-1)=0$, $g(0)=0$, $g(1)=2$

즉 $f(-1)=g(-1)$, $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$

이므로 두 함수 f, g는 서로 같다.

ㄷ. $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$

$g(-1)=-1$, $g(0)=0$, $g(1)=1$

즉 $f(-1)=g(-1)$, $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$

이므로 두 함수 f, g는 서로 같다.

ㄹ. $f(-1)=1$, $f(0)=\frac{1}{2}$, $f(1)=\frac{1}{3}$

$g(-1)=1$, $g(0)=\frac{1}{2}$, $g(1)=\frac{1}{3}$

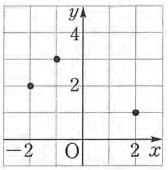
즉 $f(-1)=g(-1)$, $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)$

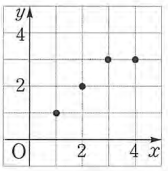
이므로 두 함수 f, g는 서로 같다.

이상에서 두 함수 f, g가 서로 같은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

042-1 (1), (3)은 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩 대응하므로 함수이다. 따라서 (1), (3)의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

(1) 

(3) 

그러나 (2)는 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

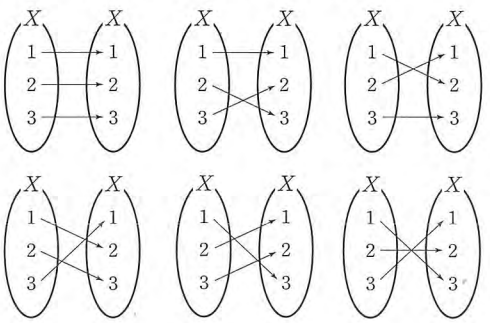
답 풀이 참조

042-2 그래프 (1)에서는 X의 원소 0에 대응하는 원소가 없으므로 함수의 그래프가 아니다. 또 그래프 (3)에서는 X의 원소 1에 대응하는 원소가 -1, 2의 2개이므로 함수의 그래프가 아니다.

그래프 (2)는 X의 각 원소에 공역의 원소가 하나씩 대응하므로 함수의 그래프이다.

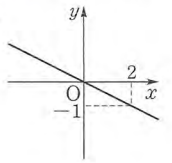
답 (2)

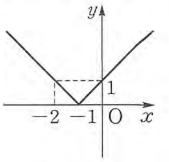
043-1 $X=\{1, 2, 3\}$일 때, X에서 X로의 일대일 대응은 다음 그림과 같이 6가지가 있다.

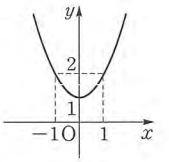


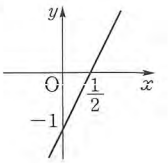
답 풀이 참조

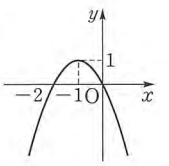
043-2 각 함수의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

ㄱ. 

ㄴ. 

ㄷ. 

ㄹ. 

ㅁ. 

ㄴ. $x=-2$일 때, $y=|-2+1|=|-1|=1$

$x=0$일 때, $y=1$

따라서 일대일 대응이 아니다.

ㄷ. $x=-1$일 때, $y=(-1)^2+1=2$

$x=1$일 때, $y=1^2+1=2$

따라서 일대일 대응이 아니다.

ㅁ. $x=-2$일 때, $y=-(-2+1)^2+1=0$

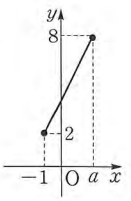
$x=0$일 때, $y=-(0+1)^2+1=0$

따라서 일대일 대응이 아니다.

이상에서 일대일 대응인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

044-1 함수 f가 일대일 대응이 되려면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=2$, $f(a)=8$

$f(x)=2x+b$이므로

$-2+b=2$, $2a+b=8$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=2+4=6$

답 6

045-1 (i) 일대일함수: $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4, 5 중 하나이므로 5개

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$의 값을 제외한 4개

$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(a)$, $f(b)$를 제외한 3개

따라서 일대일함수의 개수는

$p=5\cdot4\cdot3=60$

(ii) 상수함수는 5개이므로 $q=5$

$\therefore p+q=65$

답 65

045-2 집합 X에 대하여 X에서 X로의 함수를 f라 하면

(1) $f(a)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

$f(b)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

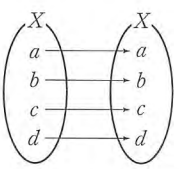
$f(c)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

$f(d)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d 중 하나이므로 4개

따라서 함수의 개수는

$4\cdot4\cdot4\cdot4=4^4=256$

(2) 항등함수는 오른쪽 그림과 같은 1가지 경우뿐이므로 항등함수의 개수는 1이다.



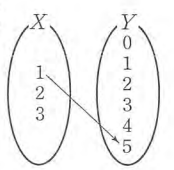
답 (1) 256 (2) 1

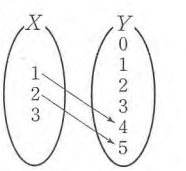
중단원 연습 문제 ◎ 본책 135~138쪽

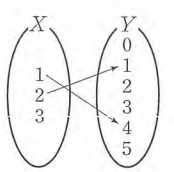
01 ⑤	02 ③	03 -2	04 ⑤	05 2
06 5	07 ③	08 ②	09 6	10 $\frac{1}{4}$
11 $\frac{21}{4}$	12 $a>-1$		13 2	14 ⑤
15 ②	16 ③	17 ③		

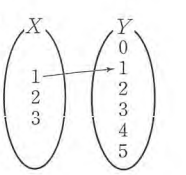
01 전략 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는지 확인한다.

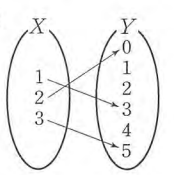
풀이 각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

따라서 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩 대응하는 것은 ⑤이므로 X에서 Y로의 함수는 ⑤이다.

답 ⑤

02 전략 정의역의 원소를 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 x에 각각 대입하여 함숫값을 구한다.

풀이 $X=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$에서

$f(-3)=3$, $f(-2)=f(2)=2$, $f(-1)=f(1)=1$, $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 치역 A는

$A=\{0, 1, 2, 3\}$

또 $g(-3)=1$, $g(-2)=0$, $g(-1)=-1$, $g(0)=-2$, $g(1)=-3$, $g(2)=-4$에서 함수 $g(x)$의 치역 B는

$B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

따라서 $A\cup B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$이므로

$n(A\cup B)=8$

답 ③

03 문제이해 • 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=x^3+x-1$이 서로 같으므로

$f(-1)=g(-1)$, $f(1)=g(1)$ → 30% 배점

해결과정 • 이때 $f(-1)=g(-1)$에서

$-a+b=(-1)^3+(-1)-1$

$\therefore -a+b=-3$ ····· ㉠

$f(1)=g(1)$에서

$a+b=1^3+1-1$

$\therefore a+b=1$ ····· ㉡

➔ 30% 배점

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

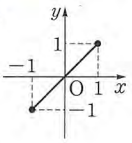
$a=2,\ b=-1$ ➔ 20% 배점

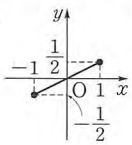
답구하기 • $\therefore ab=2\cdot(-1)=-2$ ➔ 20% 배점

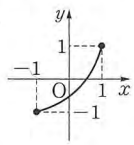
답 -2

04 전략 주어진 정의역과 공역에서 각각의 함수의 그래프를 그려 본다.

풀이 각 함수의 그래프를 그려 보면 다음과 같다.

ㄱ. 

ㄴ. 

ㄷ. 

치역과 공역이 같고, 그래프가 치역의 각 원소 a에 대하여 직선 $y=a$와 한 점에서 만나면 일대일 대응이다.

따라서 일대일 대응인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ⑤

Remark

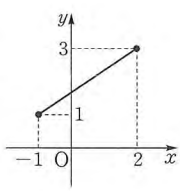
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{2}x$의 치역은 $\left\{f(x)\middle|-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{2}\right\}$이므로 치역과 공역이 같지 않다.

따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x$는 일대일함수이지만 일대일 대응은 아니다.

05 전략 함수 $f(x)=ax+b$가 일대일 대응이면 x의 값이 증가할 때, y의 값은 항상 증가하거나 항상 감소한다.

풀이 (i) $a=0$일 때, $f(x)=b$가 되어 일대일 대응이 될 수 없다.

(ii) $a>0$일 때, 함수 f가 일대일 대응이 되려면 그 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=1,\ f(2)=3$

$f(x)=ax+b$이므로

$-a+b=1,\ 2a+b=3$

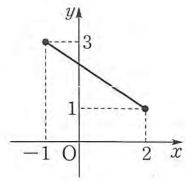
두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3},\ b=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=2$

(iii) $a<0$일 때, 함수 f가 일대일 대응이 되려면 그 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=3,\ f(2)=1$

$f(x)=ax+b$이므로

$-a+b=3,\ 2a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{2}{3},\ b=\frac{7}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=2$

이상에서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

답 2

06 전략 정의역의 각 원소에 대하여 함숫값으로 가능한 것의 개수를 찾는다.

풀이 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수를 f라 하면

(i) 함수의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

따라서 함수의 개수는

$5\cdot5\cdot5=5^3=125$

(ii) 일대일함수의 개수

$f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 a, b, c, d, e 중 하나이므로 5개

$f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1)$의 값을 제외한 4개

$f(3)$의 값이 될 수 있는 것은 $f(1), f(2)$의 값을 제외한 3개

따라서 일대일함수의 개수는

$5\cdot4\cdot3=60$

(i), (ii)에서 $p=125$, $q=60$이므로

$p-2q=125-2\cdot60=5$

답 5

07 전략 공역의 원소가 2개이므로 함수의 총 개수에서 상수함수가 되는 경우를 제외한다.

풀이 X에서 Y로의 모든 함수의 개수는

X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소는 4, 5의 2개

X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소는 4, 5의 2개

X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소는 4, 5의 2개

이므로

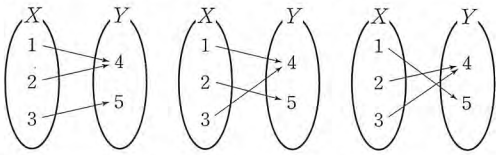
$2\cdot2\cdot2=8$

한편 치역이 $\{4\}$ 또는 $\{5\}$인 함수의 개수는 2이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

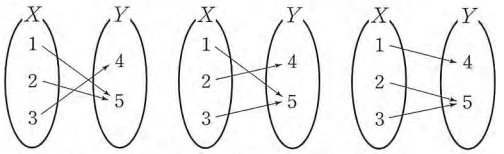
$8-2=6$ 답 ③

다른 풀이 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수도 있다.

(i) Y의 원소 4에 X의 원소가 2개 대응할 때



(ii) Y의 원소 5에 X의 원소가 2개 대응할 때



이상에서 구하는 함수의 개수는 6이다.

08 전략 주어진 조건에 의하여 $f(1)=f(-1)$임을 알 수 있다.

풀이 주어진 조건에 의하여 $f(1)=f(-1)$이어야 하고, 함숫값 $f(1)$은 -1, 0, 1 중 하나이다.

이때 그 각각에 대하여 0에 대응하는 함숫값 $f(0)$도 -1, 0, 1 중 하나이므로 구하는 함수의 개수는

$3\cdot3=9$

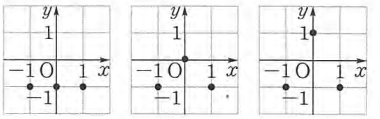
답 ②

Remark

$f(x)=f(-x)$를 만족시키는 함수 f의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(1)=f(-1)=-1$

인 경우의 함수 f의 그래프는 다음과 같다.



09 전략 주어진 관계식에 적당한 x의 값을 대입하여 $g(2)$의 값이 나타나도록 한다.

풀이 $f(2x-3)=g(x+1)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(-1)=g(2)$

$\therefore g(2)=f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)+3=6$

답 6

다른 풀이 $f(2x-3)=g(x+1)$에서 $x+1=t$로 놓으면

$x=t-1$

$\therefore g(t)=f(2(t-1)-3)$

$=f(2t-5)$

$=(2t-5)^2-2(2t-5)+3$

$=4t^2-24t+38$

$\therefore g(2)=4\cdot2^2-24\cdot2+38$

$=6$

10 전략 $f(x+2)=f(x)$를 이용하여 $f\left(\frac{9}{2}\right)=f(a)$를 만족시키는 a의 값을 $-1\le x\le1$인 범위에서 찾는다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(2+\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)$

$=f\left(2+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}$

답 $\frac{1}{4}$

11 해결과정 • $f(x+y)=f(x)f(y)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)f(0)$

$f(0)>0$이므로 양변을 $f(0)$으로 나누면

$f(0)=1$ → 30% 배점

㉠의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1+1)=f(1)f(1)$

$\therefore f(2)=2\cdot 2=4$ → 30% 배점

㉠의 양변에 $x=2$, $y=-2$를 대입하면

$f(2-2)=f(2)f(-2)$

$f(0)=f(2)f(-2)$, $1=4f(-2)$

$\therefore f(-2)=\frac{1}{4}$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore f(-2)+f(0)+f(2)$

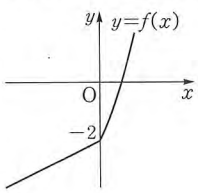
$=\frac{1}{4}+1+4=\frac{21}{4}$ → 10% 배점

답 $\frac{21}{4}$

12 문제이해 • $y=x^2+2x-2$에서

$y=(x+1)^2-3$이므로 이차함수 $y=x^2+2x-2$는 $x\geq -1$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값이 항상 증가한다. → 20% 배점

해결과정 • $y=x^2+2x-2$는 $x\geq 0$에서 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하므로 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 일대일 대응이 되려면 오른쪽 그림과 같이 $x<0$에서 직선 $y=(a+1)x-2$도 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 그래프이어야 한다.



즉 $a+1>0$이므로

$a>-1$ → 30% 배점

이때 곡선 $y=x^2+2x-2$와 직선 $y=(a+1)x-2$는 모두 점 $(0, -2)$를 지나므로 함수 $f(x)$는 치역과 공역이 실수 전체의 집합으로 같다. → 30% 배점

답구하기 • 따라서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이 되기 위한 실수 a의 값의 범위는

$a>-1$ → 20% 배점

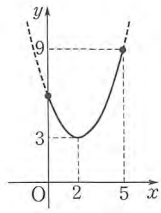
답 $a>-1$

13 문제이해 • 집합 Y에 속하는 임의의 원소 y에 대하여 $y=f(x)$인 x가 집합 X에 속하므로 함수 f의 치역과 공역이 같아야 한다. → 30% 배점

해결과정 • 오른쪽 그림에서

$f(2)=3$, $f(5)=9$

이어야 하므로



$b=3$, $9a+b=9$ → 30% 배점

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=3$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore ab=\frac{2}{3}\cdot 3=2$ → 10% 배점

답 2

14 전략 일대일 대응의 정의를 이용한다.

풀이 함수 f가 일대일 대응이면

(i) 치역과 공역이 같다.

이때 치역은 항상 공역의 부분집합이므로 치역과 공역이 같으려면 공역이 치역의 부분집합이어야 한다.

$\therefore Y\subset f(X)$

(ii) 정의역 X의 임의의 두 원소 a, b에 대하여 '$a\neq b$이면 $f(a)\neq f(b)$'이므로 그 대우인 '$f(a)=f(b)$이면 $a=b$'가 성립한다.

(i), (ii)에서 함수 f가 일대일 대응이기 위한 필요충분조건은 ⑤이다.

답 ⑤

15 전략 정의역의 각 원소에 대하여 함숫값으로 가능한 것의 개수를 찾는다.

풀이 $f(-x)=-f(x)$이므로

$f(-2)=-f(2)$, $f(-1)=-f(1)$,

$f(0)=-f(0)$

ㄱ. $f(0)=-f(0)$이므로

$2f(0)=0$

$\therefore f(0)=0$

ㄴ. $f(-2)=-f(2)$이고 $f(1)=-f(-1)$이므로

$f(-2)=f(1)$이면

$-f(2)=-f(-1)$

$\therefore f(2)=f(-1)$

ㄷ. $f(-2)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개

$f(-2)=-f(2)$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-2)$의 값과 같은 1개

$f(-1)$의 값이 될 수 있는 것은 -2, -1, 0, 1, 2 중 하나이므로 5개

$f(-1)=-f(1)$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 $-f(-1)$의 값과 같은 1개

또 ㄱ에서 $f(0)=0$이므로 구하는 함수의 개수는 $5\cdot1\cdot5\cdot1\cdot1=25$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

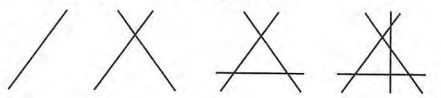
16 전략 n은 자연수이므로 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$인 각각의 경우를 함수의 정의에 따라 직선을 그려서 생각한다.

풀이 (i) $n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때, $f(n)$은



$f(1)=2$ $f(2)=3$ $f(3)=4$ $f(4)=5$ $\cdots$

(ii) $n=1, 2, 3, 4, \cdots$일 때, $g(n)$은



$g(1)=2$ $g(2)=4$ $g(3)=7$ $g(4)=11$ $\cdots$

ㄱ. $f(2)=3$, $g(2)=4$이다.

ㄴ. $f(n)$은 한 평면에 서로 다른 n개의 직선을 평행하게 그렸을 때 나누어진 영역의 수이므로

$f(n)=n+1$

ㄷ. [반례] $n=3$일 때, $g(3)=7$이고 $f(4)=5$이므로 $g(3)>f(4)$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

Remark

나누어진 영역의 수가 최대가 되려면 임의의 두 직선은 반드시 한 점에서 만나야 하고, 어떤 세 직선도 한 점에서 만나지 않아야 한다.

17 전략 함수 $f: A\longrightarrow B$가 일대일 대응이고 $f(A)=B$에서 $f(A)=\{1, 2, 3\}$이므로 $p=1$ 또는 $p=2$ 또는 $p=3$일 때의 n의 값을 구해 본다.

풀이 집합 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 15\}$의 원소 중

(i) $f(n)=1$을 만족시키는 n의 값은

$2\times1=2$, $2\times3=6$, $2\times5=10$, $2\times7=14$

에서 2, 6, 10, 14

(ii) $f(n)=2$를 만족시키는 n의 값은

$2^2\times1=4$, $2^2\times3=12$

에서 4, 12

(iii) $f(n)=3$을 만족시키는 n의 값은

$2^3\times1=8$

에서 8

$P=\{2, 6, 10, 14\}$, $Q=\{4, 12\}$, $R=\{8\}$이라 하면 함수 f는 일대일 대응이므로 집합 A는 세 집합 P, Q, R에서 각각 한 개의 원소를 택하여 만들 수 있다.

따라서 집합 A의 개수는

$4\cdot2\cdot1=8$

답 ③

06 합성함수와 역함수

유제

본책 144~162쪽

046-1 $g(x)=(h\circ f)(x)=h(f(x))$에서 $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 1이므로

$g(1)=(h\circ f)(1)=h(f(1))=h(2)$

그런데 $g(1)=0$이므로

$h(2)=0$ 답 0

047-1 $f(x)=\frac{x}{2}$에서

$f^1(x)=f(x)=\frac{x}{2}$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{4}=\frac{x}{2^2}$

$f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2^2}=\frac{x}{2^3}$

$\vdots$

$\therefore f^n(x)=\frac{x}{2^n}$

따라서 $f^6(x)=\frac{x}{2^6}$이므로

$f^6(192)=\frac{192}{2^6}=\frac{192}{64}=3$

답 3

047-2 $f(x)=-x+4$에서

$f^1(x)=f(x)=-x+4$

$f^2(x)=(f\circ f)(x)=-(-x+4)+4=x$

따라서 $f^3(x)=(f\circ f^2)(x)=-x+4$

$f^4(x)=(f\circ f^3)(x)=-(-x+4)+4=x$

$\therefore f^n(x)=\begin{cases}-x+4 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

답 $f^n(x)=\begin{cases}-x+4 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

048-1 $f(x)=x-1$, $g(x)=ax+5$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+5)$

$=ax+5-1=ax+4$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-1)$

$=a(x-1)+5=ax-a+5$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이다.

즉 $ax+4=ax-a+5$이므로

$4=-a+5$ $\therefore a=1$

따라서 $g(x)=x+5$이므로

$g(-2)=-2+5=3$ 답 3

048-2 $f(x)=ax+b$, $g(x)=4x-3$에서

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x-3)$

$=a(4x-3)+b$

$=4ax-3a+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$

$=4(ax+b)-3$

$=4ax+4b-3$

$f\circ g=g\circ f$이므로 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이다.

즉 $4ax-3a+b=4ax+4b-3$이므로

$-3a+b=4b-3$

$3a+3b=3$ $\therefore a+b=1$ …… ㉠

또 $f(-1)=5$이므로 $-a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=3$

답 $a=-2$, $b=3$

049-1 (1) $(f\circ h)(x)=f(h(x))=3h(x)-1$이고,

$(f\circ h)(x)=g(x)$이므로

$3h(x)-1=2x+5$ $\therefore h(x)=\frac{2}{3}x+2$

(2) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(3-2x)$이고,

$(h\circ g)(x)=f(x)$이므로

$h(3-2x)=2x-1$ …… ㉠

$3-2x=1$로 놓으면 $x=1$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$h(1)=2\cdot1-1=1$

답 (1) $h(x)=\frac{2}{3}x+2$ (2) 1

049-2 $f\left(\frac{2x-1}{3}\right)=4x-5$ …… ㉠

$\frac{2x-1}{3}=t$로 놓으면

$2x-1=3t$ $\therefore x=\frac{3t+1}{2}$

$x=\frac{3t+1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$f(t)=4\cdot\frac{3t+1}{2}-5=6t-3$

$\therefore f\left(\frac{3-x}{2}\right)=6\cdot\frac{3-x}{2}-3=-3x+6$

답 $f\left(\frac{3-x}{2}\right)=-3x+6$

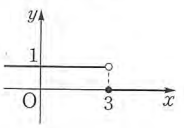
050-1 (i) $x<3$일 때, $f(x)=1$이므로

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=1$

(ii) $x\geq 3$일 때, $f(x)=4$이므로

$y=(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(4)=0$

(i), (ii)에서 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

051-1 $f^{-1}(2)=a$, $f^{-1}(9)=b$ (a, b는 실수)로 놓으면

$f(a)=2$, $f(b)=9$

$a^3+1=2$, $b^3+1=9$

$\therefore a^3=1$, $b^3=8$

이때 a, b는 실수이므로 $a=1$, $b=2$

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(9)=1+2=3$ 답 3

051-2 함수 f의 역함수 f^{-1}가 존재하므로 두 함수 f, f^{-1}는 모두 X에서 X로의 일대일 대응이다.

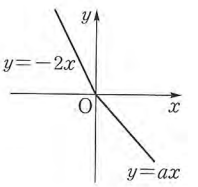
따라서 X의 각 원소 2, 4, 6은 f^{-1}에 의하여 X의 각 원소 2, 4, 6에 하나씩 대응하므로

$f^{-1}(2)+f^{-1}(4)+f^{-1}(6)$의 값은 집합 $X=\{2, 4, 6\}$의 원소의 합과 같다.

$\therefore f^{-1}(2)+f^{-1}(4)+f^{-1}(6)=12$ 답 12

052-1 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일 대응이어야 한다.

따라서 $x\geq 0$인 부분에서의 직선의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 음수가 되어야 하므로



$a<0$

답 $a<0$

052-2 (i) $x\geq 1$일 때,

$f(x)=(x-1)+kx-2$

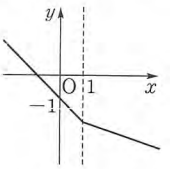
$=(k+1)x-3$

(ii) $x<1$일 때,

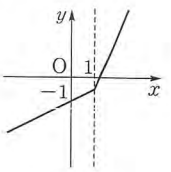
$f(x)=-(x-1)+kx-2$

$=(k-1)x-1$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1] 또는 [그림 2]와 같아야 한다.



[그림 1]



[그림 2]

즉 $x\geq 1$인 부분과 $x<1$인 부분의 직선의 기울기는 같은 부호이어야 하므로

$(k+1)(k-1)>0$

$\therefore k<-1$ 또는 $k>1$ 답 $k<-1$ 또는 $k>1$

053-1 $(f^{-1}\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ(f^{-1})^{-1}=g^{-1}\circ f$이므로

$f^{-1}\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1}$

$=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ f)\circ f^{-1}$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(f\circ f^{-1})$

$=(f^{-1}\circ g^{-1})\circ I$ (I는 항등함수)

$=f^{-1}\circ g^{-1}$

$=(g\circ f)^{-1}$

$\therefore (f^{-1}\circ(f^{-1}\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(2)=(g\circ f)^{-1}(2)$

$(g\circ f)^{-1}(2)=k$ (k는 상수)로 놓으면 $(g\circ f)(k)=2$에서

$(g\circ f)(k)=g(f(k))=g(-3k+2)$

$=\frac{1}{2}(-3k+2)+3=-\frac{3}{2}k+4$

이므로

$-\frac{3}{2}k+4=2$ $\therefore k=\frac{4}{3}$

$\therefore (g\circ f)^{-1}(2)=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

053-2 $f\circ g=g\circ f=I$이므로 $g=f^{-1}$

$\therefore g(x)=f^{-1}(x)$

이때 $f(1)=2$에서 $f^{-1}(2)=1$이고,

$(g^{-1}\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g$이므로

$(g^{-1}\circ f)^{-1}(2)=(f^{-1}\circ g)(2)$

$=f^{-1}(g(2))=f^{-1}(f^{-1}(2))$

$=f^{-1}(1)=g(1)$

$=3$ 답 3

053-3 $g^{-1}\circ f^{-1}\circ h=I$ (I는 항등함수)에서

$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ h=I$

이므로

$h=(g^{-1}\circ f^{-1})^{-1}=(f^{-1})^{-1}\circ(g^{-1})^{-1}=f\circ g$

$\therefore h(x)=(f\circ g)(x)$

$=f(g(x))$

$=f(-x+3)$

$=2(-x+3)-7$

$=-2x-1$

답 $h(x)=-2x-1$

054-1 함수 $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\frac{3}{2}x-\frac{4}{3}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$\frac{3}{2}x=y+\frac{4}{3}$ $\therefore x=\frac{2}{3}y+\frac{8}{9}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}$, 즉 $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}$

함수 $g(x)=-2x+\frac{1}{3}$은 실수 전체의 집합 R에서 R로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=-2x+\frac{1}{3}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$2x=y-\frac{1}{3}$ $\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$, 즉 $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}$

$\therefore (f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

$=f^{-1}(g^{-1}(x))$

$=f^{-1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)$

$=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)+\frac{8}{9}$

$=-\frac{1}{3}x+1$

답 $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)=-\frac{1}{3}x+1$

055-1 (1) 주어진 그림에서 $f(-1)=0$이므로

$f^{-1}(0)=-1$

$\therefore (f\circ f)(0)+f^{-1}(0)=f(f(0))+f^{-1}(0)$

$=f(1)+(-1)$

$=\frac{3}{2}-1$

$=\frac{1}{2}$

(2) 주어진 그림에서 $f(1)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$이므로

$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=1$, $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

$\therefore (f\circ f)^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=(f^{-1}\circ f^{-1})\left(\frac{5}{2}\right)$

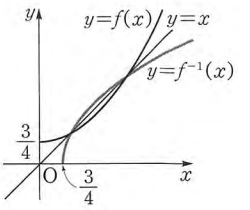
$=f^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)$

$=f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$

$=1$

답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1

056-1 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 이때 함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프의 교점이 2개 존재하고, 그 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}=x$에서 $x^2+3=4x$

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 (1, 1), (3, 3)이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(3-1)^2+(3-1)^2}$

$=2\sqrt{2}$

답 $2\sqrt{2}$

중단원 연습 문제 본책 163~165쪽

01 -1	**02** ②	**03** 풀이 참조		**04** ④
05 -1	**06** ④	**07** ④	**08** 5	**09** 1
10 8	**11** ④	**12** ①	**13** 490	**14** 4
15 ③				

01 전략 $f^1, f^2, f^3, f^4, \cdots$를 구하여 f^n을 추론한다.

풀이 $f(x)=2x+1$에서

$f^2(x)=f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1$
$=4x+3=2^2x+2^2-1$

$f^3(x)=f(f^2(x))=f(4x+3)=2(4x+3)+1$
$=8x+7=2^3x+2^3-1$

$f^4(x)=f(f^3(x))=f(8x+7)=2(8x+7)+1$
$=16x+15=2^4x+2^4-1$

$\vdots$

$f^n(x)=2^nx+2^n-1$

$\therefore f^n(-1)=-2^n+2^n-1=-1$

답 -1

다른 풀이 $f(-1)=2\cdot(-1)+1=-1$이므로

$f^2(-1)=f(f(-1))=f(-1)=-1$

$f^3(-1)=f(f^2(-1))=f(-1)=-1$

$\vdots$

$f^n(-1)=-1$

02 전략 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$가 성립하므로 이 등식이 x에 대한 항등식임을 이용하여 계수를 비교한다.

풀이 $f\circ g=g\circ f$에서 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+a)$
$=a(bx+a)+b$
$=abx+a^2+b$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$
$=b(ax+b)+a$
$=abx+b^2+a$

이므로

$abx+a^2+b=abx+b^2+a$

$a^2+b=b^2+a$,

$a^2-b^2-a+b=0$

$(a-b)(a+b)-(a-b)=0$,

$(a-b)(a+b-1)=0$

$\therefore a-b=0$ 또는 $a+b-1=0$

그런데 $a\neq b$, 즉 $a-b\neq 0$이므로

$a+b-1=0$

$\therefore a+b=1$

$\therefore f(1)+g(1)=a+b+b+a$
$=2(a+b)$
$=2\cdot 1=2$

답 ②

03 문제이해 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\leq 0)\\ -\frac{1}{3}x+1 & (x\geq 0)\end{cases}$이므로

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}-f(x)+1 & (f(x)\leq 0)\\ -\frac{1}{3}f(x)+1 & (f(x)\geq 0)\end{cases}$

30% 배점

해결과정 (i) $x\leq 0$일 때,

$f(x)=-x+1\geq 0$이므로

$(f\circ f)(x)=-\frac{1}{3}f(x)+1$
$=-\frac{1}{3}(-x+1)+1$
$=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

(ii) $0\leq x\leq 3$일 때,

$f(x)=-\frac{1}{3}x+1\geq 0$이므로

$(f\circ f)(x)=-\frac{1}{3}f(x)+1$
$=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}x+1\right)+1$
$=\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}$

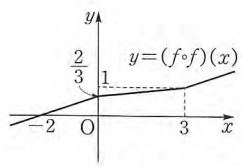
(iii) $x\geq 3$일 때,

$f(x)=-\frac{1}{3}x+1<0$이므로

$(f\circ f)(x)=-f(x)+1$
$=-\left(-\frac{1}{3}x+1\right)+1$
$=\frac{1}{3}x$

50% 배점

답구하기 이상에서 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



20% 배점

답 풀이 참조

04 전략 역함수의 성질을 이용하여 먼저 $(g\circ f)(2)$의 값을 구한다.

풀이 $f^{-1}\circ g^{-1}=(g\circ f)^{-1}$이므로

$(g\circ f)^{-1}(1)=(f^{-1}\circ g^{-1})(1)=2$

$\therefore (g\circ f)(2)=1$

이때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))$이고, $f(2)=2$이므로

$g(2)=1$

또 $(g\circ f)(1)=3$에서 $g(f(1))=3$

$g(3)=3$이고, 함수 g는 일대일 대응이므로

$f(1)=3$

$\therefore f(1)+g(2)=3+1=4$

답 ④

05 문제이해 · $f(x)$의 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 일대일 대응이다.

$\therefore a\neq 0$ → 20% 배점

해결과정 · $y=ax+5$로 놓고 x에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{a}(y-5)$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=\frac{1}{a}(x-5)$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{5}{a}$ → 40% 배점

답구하기 · $f(x)=f^{-1}(x)$에서 $ax+5=\frac{1}{a}x-\frac{5}{a}$이므로

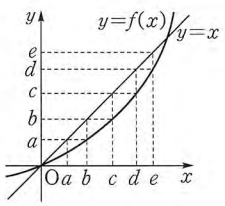
$a=\frac{1}{a}$, $5=-\frac{5}{a}$

$\therefore a=-1$ → 40% 배점

답 -1

06 전략 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하여 표시한 후 $f(a)=b \Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$f^{-1}(b)=k$로 놓으면

$f(k)=b$

위의 그림에서 $f(c)=b$이므로

$k=c$, 즉 $f^{-1}(b)=c$

$f^{-1}(c)=l$로 놓으면 $f(l)=c$

위의 그림에서 $f(d)=c$이므로

$l=d$, 즉 $f^{-1}(c)=d$

$\therefore (f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))$

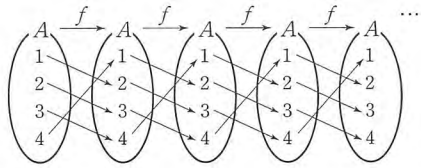
$=f^{-1}(c)$

$=d$

답 ④

07 전략 f^1, f^2, f^3, f^4, …를 구하여 f^n을 추론한다.

풀이 주어진 함수를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $f^4(x)=x$이므로

$f^{2014}(2)=f^{4\cdot 503+2}(2)$

$=f^2(2)=4$

$f^{2015}(3)=f^{4\cdot 503+3}(3)$

$=f^3(3)=2$

$\therefore f^{2014}(2)+f^{2015}(3)=6$

답 ④

08 전략 합성함수 f^1, f^2, f^3, …의 치역을 조사하고 $f^n(a)=0$이면 $f^{n+1}(a)=0$임을 이용한다.

풀이 정의역의 원소를 30부터 차례로 대입하여 각각의 $f^n(x)$의 함숫값을 구하면 다음 표와 같다.

x \ f^n	$f(x)$	$f^2(x)$	$f^3(x)$	$f^4(x)$	$f^5(x)$	…
30	15	7	3	1	0	0
29, 28	14	7	3	1	0	0
27, 26	13	6	3	1	0	0
25, 24	12	6	3	1	0	0
23, 22	11	5	2	1	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3, 2	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

따라서 $n=5, 6, 7, \cdots$일 때, 합성함수 f^n의 정의역의 모든 원소의 함숫값이 0이 되므로 구하는 n의 최솟값은 5이다.

답 5

09 문제이해 · $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(5x+1)$

$=2(5x+1)-1$

$=10x+1$

이므로

$(h\circ g\circ f)(x)=(h\circ(g\circ f))(x)$
$=h((g\circ f)(x))$
$=h(10x+1)$ ➔ 40% 배점

해결과정 • 즉 $(h\circ g\circ f)(x)=h(10x+1)=100x^2$이므로 $10x+1=t$로 놓으면

$x=\dfrac{t-1}{10}$

$\therefore h(t)=100\left(\dfrac{t-1}{10}\right)^2$
$=t^2-2t+1$
$\therefore h(x)=x^2-2x+1$ ➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore h(2)=2^2-2\cdot2+1=1$ ➔ 10% 배점

답 1

10 문제이해 • 임의의 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$를 만족시키므로 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, 함수 $f(x)$는 $g(x)$의 역함수이다. ➔ 30% 배점

해결과정 • $g(g(k))=0$, 즉 $f^{-1}(f^{-1}(k))=0$에서 $f(0)=f^{-1}(k)$이고, $f(0)=3$이므로
$f^{-1}(k)=3$ ➔ 50% 배점

답구하기 • 따라서 $f(3)=k$이므로
$k=3^2-2\cdot3+5=8$ ➔ 20% 배점

답 8

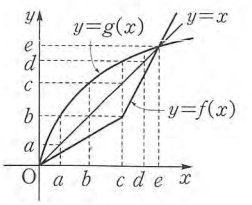
11 전략 함수 g가 일대일 대응이므로 정의역의 서로 다른 두 원소에 대응하는 공역의 원소가 서로 다름을 이용한다.

풀이 함수 g는 일대일 대응이고 $g(1)=1$이므로
$g(2)=0$ 또는 $g(2)=2$
$g(2)=0$이라 하면
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(0)=1$
그런데 이것은 주어진 조건 $(f\circ g)(2)=2$에 모순이므로 $g(2)=2$이다.
$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)$이므로
$f(2)=2$
따라서 $f(0)=1$, $f(2)=2$이므로 $f(1)=0$이고,
$g(1)=1$, $g(2)=2$이므로 $g(0)=0$이다.
$f(2)=2$에서 $f^{-1}(2)=2$이고, $g(2)=2$에서 $g^{-1}(2)=2$이므로
$(f\circ g)(0)+(g^{-1}\circ f^{-1})(2)$
$=f(g(0))+g^{-1}(f^{-1}(2))$
$=f(0)+g^{-1}(2)$
$=1+2=3$

답 ④

12 전략 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 구하여 표시한 후 $f(a)=b\Longleftrightarrow f^{-1}(b)=a$임을 이용한다.

풀이 직선 $y=x$를 이용하여 y축과 점선이 만나는 점의 y좌표를 주어진 그림에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

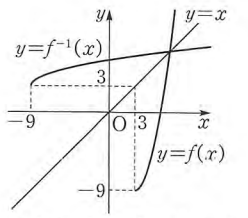


$f(c)=b$이므로
$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$
이때 $g^{-1}(b)=k$라 하면 $g(k)=b$이고, 위의 그림에서 $g(a)=b$이므로 $k=a$
$\therefore g^{-1}(f(c))=a$

답 ①

13 전략 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 그 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$와 그 역함수의 그래프의 교점이 1개 존재하고, 그 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 함수 $y=x^2-6x$ $(x\geq3)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 함수 $y=x^2-6x$ $(x\geq3)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
$x^2-6x=x$에서 $x^2-7x=0$
$x(x-7)=0$ $\therefore x=7$ $(\because x\geq3)$
따라서 구하는 교점의 좌표가 $(7,\ 7)$이므로
$a=b=7$
$\therefore 10ab=10\cdot7\cdot7=490$

답 490

14 전략 $f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 a로 나타낸다.

풀이 $-a-2\le x\le a$일 때,

$f(-a-2)\le f(x)\le f(a)$

그런데 $f(-a-2)=2(-a-2)+3=-2a-1$,

$f(a)=2a+3$이므로

$-2a-1\le f(x)\le 2a+3$ ····· ㉠

$f(x)=t$로 놓으면

$-2a-1\le t\le 2a+3$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)=(t-2)^2$이고

㉠에서 $-2a-3\le t-2\le 2a+1$

이때 $|-2a-3|>|2a+1|$이므로

$0\le(t-2)^2\le(-2a-3)^2$

$\therefore 0\le(t-2)^2\le(2a+3)^2$

즉 $(g\circ f)(x)$의 치역은

$A=\{y\,|\,0\le y\le(2a+3)^2\}$

집합 A의 원소 중 자연수가 100개 이상이어야 하므로

$(2a+3)^2\ge 100$

이때 a는 자연수이므로

$2a+3\ge 10$ $\therefore a\ge\frac{7}{2}$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 4

15 전략 x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$, $g(x)$의 함수식을 각각 구한다.

풀이 $f(x)=\begin{cases}4x & \left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)\\ -4x+4 & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\\ 0 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ 이고,

$g(x)=\begin{cases}2 & (0\le x\le 1)\\ -2x+4 & (1\le x\le 2)\end{cases}$ 이므로

$(g\circ f)(x)=\begin{cases}2 & (0\le f(x)\le 1)\\ -2f(x)+4 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$

(i) $0\le x\le\frac{1}{4}$일 때,

$0\le f(x)\le 1$이므로

$(g\circ f)(x)=2$

(ii) $\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}$일 때,

$1\le f(x)\le 2$이므로

$(g\circ f)(x)=-2f(x)+4$

$=-2\cdot 4x+4=-8x+4$

(iii) $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{4}$일 때,

$1\le f(x)\le 2$이므로

$(g\circ f)(x)=-2f(x)+4$

$=-2(-4x+4)+4$

$=8x-4$

(iv) $\frac{3}{4}\le x\le 1$일 때,

$0\le f(x)\le 1$이므로

$(g\circ f)(x)=2$

(v) $1\le x\le 2$일 때,

$f(x)=0$이므로

$(g\circ f)(x)=2$

이상에서 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 ③과 같다. 답 ③

다른 풀이 본책 150쪽 **특강 053**을 이용하여 합성함수의 그래프를 그리는 방법을 나타내면 다음과 같다.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
x의 값	$t=f(x)$의 값	$y=g(t)$의 값	그래프 개형
$0\to\frac{1}{2}$	$0\to 2$	$2\to 2\to 0$	↘
$\frac{1}{2}\to 1$	$2\to 0$	$0\to 2\to 2$	↗
$1\to 2$	0	2	→

07 여러 가지 함수의 그래프

유제

본책 170~189쪽

057-1 함수 $f(x)=(a-2)x+a-2b$의 그래프는 기울기가 $a-2$이고, y절편이 $a-2b$인 직선이다.
함수 $f(x)$의 그래프가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $45°$이므로

$a-2=\tan 45°=1$

$\therefore a=3$ ····· ㉠

또 y절편이 1이므로

$a-2b=1$ ····· ㉡

㉡에 ㉠을 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=4$

답 4

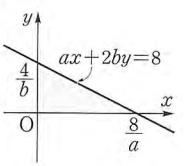
Remark

함수 $y=ax+b$의 그래프가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$a=\tan\theta$

057-2 $ax+2by=8$에서 x절편은 $\frac{8}{a}$, y절편은 $\frac{4}{b}$이고, $a>0$, $b>0$이므로 $\frac{8}{a}>0$, $\frac{4}{b}>0$

따라서 직선 $ax+2by=8$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 넓이가 4이므로



$\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{a}\cdot\frac{4}{b}=4$

$\therefore ab=4$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\cdot\sqrt{4}=4$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

답 4

058-1 $f(x)=\frac{1}{3}x+a$라 하면 $\frac{1}{3}>0$이므로

$f(-3)=0$, $f(6)=b$

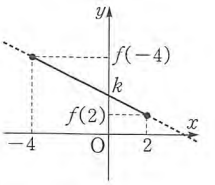
즉 $f(-3)=\frac{1}{3}\cdot(-3)+a=a-1=0$에서 $a=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x+1$이므로

$f(6)=\frac{1}{3}\cdot 6+1=2+1=3$ $\therefore b=3$

답 $a=1$, $b=3$

058-2 $f(x)=-\frac{1}{2}x+k$라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $-4\leq x\leq 2$에서 주어진 일차함수는 $x=2$일 때 최솟값을 갖고, $x=-4$일 때 최댓값을 갖는다.



즉 $f(2)=1$에서

$f(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2+k=k-1=1$ $\therefore k=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$이므로 구하는 최댓값은

$-\frac{1}{2}\cdot(-4)+2=4$

답 4

059-1 (1) $f(x)=2mx-m-3$이라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 직선이고, $-1<x\leq 1$에서 항상 $y<0$이 되려면 $f(x)$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 있어야 한다.

즉 $f(-1)\leq 0$, $f(1)<0$이어야 한다. 이때

$f(-1)=-2m-m-3$

$=-3m-3$

이므로

$-3m-3\leq 0$ $\therefore m\geq -1$ ····· ㉠

또 $f(1)=2m-m-3=m-3$이므로

$m-3<0$ $\therefore m<3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\leq m<3$

(2) y를 m에 대한 함수로 생각하고

$f(m)=(2x-1)m-3$

으로 놓으면 $y=f(m)$의 그래프는 직선이고, $1<m\leq 2$에서 항상 $y>0$이 되어야 하므로 $f(1)\geq 0$, $f(2)>0$이어야 한다. 이때

$f(1)=(2x-1)-3$

$=2x-4$

이므로 $2x-4\geq 0$

$\therefore x\geq 2$ ····· ㉠

또 $f(2)=(2x-1)\cdot 2-3=4x-5$이므로

$4x-5>0$

$\therefore x>\frac{5}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\geq 2$

답 (1) $-1\leq m<3$ (2) $x\geq 2$

Remark

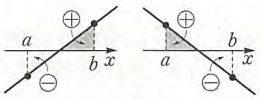
일차함수 $y=f(x)$에 대하여 $a\le x\le b$에서 y의 값의 부호와 함숫값 사이의 관계는 다음과 같다.

(1) y가 항상 양일 때 (2) y가 항상 음일 때



$f(a)>0,\ f(b)>0$ $f(a)<0,\ f(b)<0$

(3) y가 양, 음의 값을 모두 가질 때



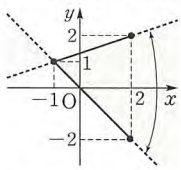
$f(a)f(b)<0$

059-2 $y=mx+m+1$을 m에 대하여 정리하면

$m(x+1)+1-y=0$

이므로 $y=mx+m+1$의 그래프는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

$f(x)=mx+m+1$로 놓으면 $y=f(x)$는 집합 A를 정의역, 집합 B를 공역으로 하는 함수이고, $y=f(x)$의 그래프는 직선이므로 $y=f(x)$의 기울기는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기보다 작거나 같고, 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기보다 크거나 같아야 한다.



(i) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$$

(ii) 두 점 $(-1,\ 1)$, $(2,\ -2)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-2-1}{2-(-1)}=-1$$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$$-1\le m\le\frac{1}{3}$$

답 $-1\le m\le\frac{1}{3}$

다른 풀이 함수 $f(x)$의 그래프가 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 집합 A에서 집합 B로의 함수가 정의되려면 $-2\le f(2)\le 2$이면 된다.

$f(x)=mx+m+1$에서

$f(2)=2m+m+1=3m+1$

이므로

$-2\le 3m+1\le 2,\quad -3\le 3m\le 1$

$\therefore\ -1\le m\le\frac{1}{3}$

060-1 $y=x^2+kx-3k$를 k에 대하여 정리하면

$k(x-3)+x^2-y=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립하려면

$x-3=0,\ x^2-y=0$

$\therefore\ x=3,\ y=9$

점 $\mathrm{P}(3,\ 9)$가 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

$y=(x-3)^2+9=x^2-6x+18$

이 식이 $y=x^2+kx-3k$와 일치하므로

$k=-6$

답 -6

060-2 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓으면

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

① 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

② 축이 y축의 왼쪽에 있으므로

$$-\frac{b}{2a}<0\quad\therefore\ b<0\ (\because\ a<0)$$

③ y축과 $y>0$인 부분에서 만나므로 $c>0$

④ $f(1)=a+b+c$이고 그래프에서 $x=1$일 때 $y<0$이므로 $a+b+c<0$

⑤ $f(-2)=4a-2b+c$이고 그래프에서 $x=-2$일 때, $y<0$이므로

$4a-2b+c<0$

답 ③

061-1 (1) $y=-|x-3|+1$에서

(i) $x<3$일 때, $x-3<0$이므로

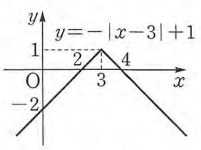
$y=-\{-(x-3)\}+1=x-2$

(ii) $x\ge 3$일 때, $x-3\ge 0$이므로

$y=-(x-3)+1$

$=-x+4$

(i), (ii)에서 구하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$에서

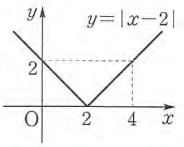
(i) $x<2$일 때, $x-2<0$이므로

$y=-(x-2)=-x+2$

(ii) $x\ge 2$일 때, $x-2\ge 0$이므로

$y=x-2$

(i), (ii)에서 구하는 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



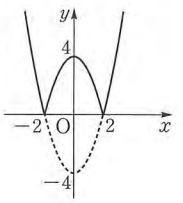
답 풀이 참조

Remark

$\sqrt{\{f(x)\}^2}=|f(x)|$이므로

$y=\sqrt{\{f(x)\}^2} \Longleftrightarrow y=|f(x)|$

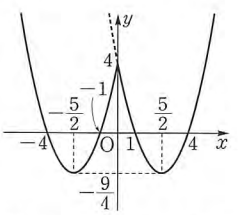
062-1 (1) $y=|x^2-4|$의 그래프는 $y=x^2-4$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



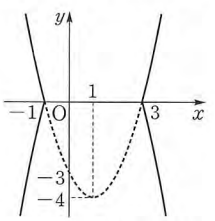
(2) $x^2=|x|^2$이므로

$y=x^2-5|x|+4=|x|^2-5|x|+4$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=x^2-5x+4$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음 $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



(3) $|y|=x^2-2x-3$의 그래프는 $y=x^2-2x-3$의 그래프에서 $y\geq 0$인 부분만 남기고, $y<0$인 부분을 없앤 다음 $y\geq 0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

063-1 $2|x|+|y|=6$에서

(i) $x\geq 0$, $y\geq 0$일 때,

$2x+y=6 \quad \therefore y=-2x+6$

(ii) $x\geq 0$, $y<0$일 때,

$2x-y=6 \quad \therefore y=2x-6$

(iii) $x<0$, $y\geq 0$일 때,

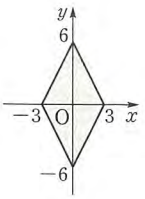
$-2x+y=6 \quad \therefore y=2x+6$

(iv) $x<0$, $y<0$일 때,

$-2x-y=6 \quad \therefore y=-2x-6$

이상에서 방정식 $2|x|+|y|=6$이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12=36$



답 36

Remark

$2|x|+|y|=6$의 그래프는 $2x+y=6$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이다.

063-2 $|x-2|+|y-1|=1$에서

(i) $x\geq 2$, $y\geq 1$일 때,

$(x-2)+(y-1)=1$

$\therefore y=-x+4$

(ii) $x\geq 2$, $y<1$일 때,

$(x-2)-(y-1)=1$

$\therefore y=x-2$

(iii) $x<2$, $y\geq 1$일 때,

$-(x-2)+(y-1)=1$

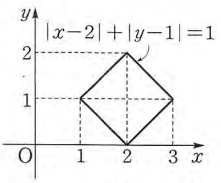
$\therefore y=x$

(iv) $x<2$, $y<1$일 때,

$-(x-2)-(y-1)=1$

$\therefore y=-x+2$

이상에서 $|x-2|+|y-1|=1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

Remark

$|x-2|+|y-1|=1$의 그래프는 $|x|+|y|=1$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

064-1 $y=|x+2|+|x|+|x-3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -2, 0, 3이다.

(i) $x<-2$일 때,

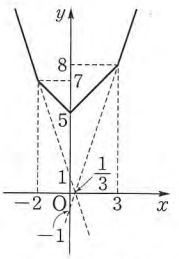
$x+2<0$, $x<0$, $x-3<0$이므로
$y=-(x+2)-x-(x-3)$
$\therefore y=-3x+1$

(ii) $-2\le x<0$일 때,
$x+2\ge 0$, $x<0$, $x-3<0$이므로
$y=x+2-x-(x-3)$
$\therefore y=-x+5$

(iii) $0\le x<3$일 때,
$x+2>0$, $x\ge 0$, $x-3<0$이므로
$y=x+2+x-(x-3)$
$\therefore y=x+5$

(iv) $x\ge 3$일 때,
$x+2>0$, $x>0$, $x-3\ge 0$
이므로
$y=x+2+x+x-3$
$\therefore y=3x-1$

이상에서 구하는 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



풀이 참조

064-2 $y=|x|-|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 0, 1이다.

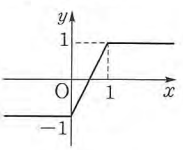
(i) $x<0$일 때,
$x<0$, $x-1<0$이므로
$y=-x+(x-1)$ $\therefore y=-1$

(ii) $0\le x<1$일 때,
$x\ge 0$, $x-1<0$이므로
$y=x+(x-1)$ $\therefore y=2x-1$

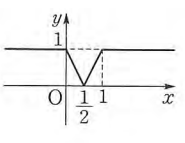
(iii) $x\ge 1$일 때,
$x>0$, $x-1\ge 0$이므로
$y=x-(x-1)$ $\therefore y=1$

이상에서 함수 $y=|x|-|x-1|$의 그래프는 [그림 1]과 같다.

그런데 $y=||x|-|x-1||$의 그래프는 [그림 1]에서 $y\ge 0$인 부분은 그대로 두고, $y<0$인 부분은 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 [그림 2]와 같고, 치역은 $\{y|0\le y\le 1\}$이다.



[그림 1]



[그림 2]

풀이 참조

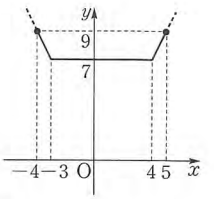
065-1 $y=|x-4|+|x+3|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -3, 4이다.

(i) $-4\le x<-3$일 때,
$y=-(x-4)-(x+3)=-2x+1$

(ii) $-3\le x<4$일 때,
$y=-(x-4)+x+3=7$

(iii) $4\le x\le 5$일 때,
$y=x-4+x+3=2x-1$

이상에서 함수 $y=|x-4|+|x+3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 9, 최솟값은 7이다.



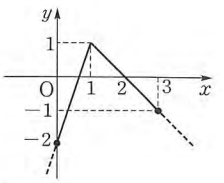
최댓값: 9, 최솟값: 7

065-2 $y=x-2|x-1|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 1이다.

(i) $0\le x<1$일 때,
$y=x+2(x-1)=3x-2$

(ii) $1\le x\le 3$일 때,
$y=x-2(x-1)=-x+2$

(i), (ii)에서 함수 $y=x-2|x-1|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1, 최솟값은 -2이다.



따라서 $M=1$, $m=-2$이므로
$M+m=-1$

-1

066-1 x가 정수가 되는 값을 경계로 구간을 나누면

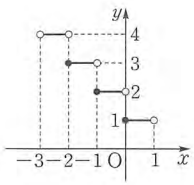
(i) $-3<x<-2$일 때, $[x]=-3$이므로
$y=1-[x]=4$

(ii) $-2\le x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로
$y=1-[x]=3$

(iii) $-1\le x<0$일 때, $[x]=-1$이므로
$y=1-[x]=2$

(iv) $0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로
$y=1-[x]=1$

이상에서 $-3<x<1$에서의 함수 $y=1-[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

066-2 n이 정수일 때, $n\le x<n+1$이면

$[x]=n$

$n\le x<n+1$의 각 변에 -1을 곱하면

$-n-1<-x\le -n$

(i) $-n-1<-x<-n$, 즉 $n<x<n+1$이면

$[x]=n$, $[-x]=-n-1$이므로

$f(x)=n+(-n-1)=-1$

(ii) $-x=-n$, 즉 $x=n$이면

$[x]=n$, $[-x]=-n$이므로

$f(x)=n+(-n)=0$

(i), (ii)에서 $f(x)$의 치역은 $\{-1, 0\}$이다.

답 $\{-1, 0\}$

066-3 정수 n에 대하여 $n-\frac{1}{2}\le x<n+\frac{1}{2}$일 때, $\{x\}=n$이므로 x의 값이 (정수)$-\frac{1}{2}$이 되는 값을 경계로 구간을 나눈다.

(i) $-1\le x<-\frac{1}{2}$일 때, $\{x\}=-1$이므로

$y=\{x\}=-1$

(ii) $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$일 때, $\{x\}=0$이므로

$y=\{x\}=0$

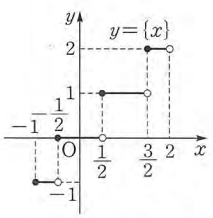
(iii) $\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$일 때, $\{x\}=1$이므로

$y=\{x\}=1$

(iv) $\frac{3}{2}\le x<2$일 때, $\{x\}=2$이므로

$y=\{x\}=2$

이상에서 $-1\le x<2$에서의 함수 $y=\{x\}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

Remark

$\{x\}$는 x를 소수 첫째 자리에서 반올림한 값과 같다.

067-1 $f(x)$는 우함수, $g(x)$는 기함수이므로

$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

$\therefore f(-3)+g(-2)=f(3)-g(2)$

$=1-(-3)$

$=4$

답 4

067-2 $f\circ g$는 우함수이므로 $h=f\circ g$로 놓으면 $h(-x)=h(x)$이다.

ㄱ, ㄴ. [반례] $f(x)=x^2$(우함수), $g(x)=x^4$(우함수)이면

$h(x)=(f\circ g)(x)$

$=f(g(x))$

$=f(x^4)=x^8$ (우함수)

ㄷ. g가 기함수이면 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키므로

$h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))$

그런데 h는 우함수이므로

$h(-x)=h(x)=f(g(x))$

$\therefore f(-g(x))=f(g(x))$

따라서 f는 우함수이다.

ㄹ. $k=g\circ f$라 하면

(i) f가 우함수일 때,

$f(-x)=f(x)$이므로

$k(-x)=g(f(-x))$

$=g(f(x))=k(x)$

따라서 k는 우함수이다.

(ii) f가 기함수일 때,

$f\circ g$가 우함수이므로 g는 우함수이어야 한다.

$k(-x)=g(f(-x))$

$=g(-f(x))$

$=g(f(x))$

$=k(x)$

따라서 k는 우함수이다.

(i), (ii)에서 $g\circ f$는 우함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

답 ㄷ, ㄹ

중단원 연습 문제 본책 190~193쪽

01 5, 13 **02** $m\geq1$ **03** 13 **04** 풀이 참조

05 $k=0$ 또는 $k>1$ **06** 풀이 참조 **07** ②

08 $-1\leq m<\frac{1}{3}$ **09** $a>2$ **10** ② **11** ⑤

12 ④ **13** 4 **14** ④ **15** 6 **16** 2

17 20 **18** ① **19** ④ **20** ③

01 해결과정 • $f(x)=ax+b$로 놓으면 $-2\leq x\leq1$에서

(i) $a>0$일 때,

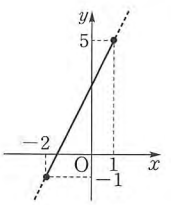
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$f(-2)=-2a+b=-1$,

$f(1)=a+b=5$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=3$



→ 40% 배점

(ii) $a<0$일 때,

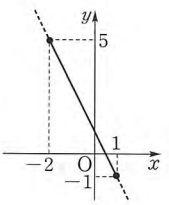
$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$f(-2)=-2a+b=5$,

$f(1)=a+b=-1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-2$, $b=1$



→ 40% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서

$a^2+b^2=2^2+3^2=13$

또는 $a^2+b^2=(-2)^2+1=5$

→ 20% 배점

답 5, 13

02 전략 주어진 구간에서 함숫값이 항상 양이 되는 경우를 생각해 본다.

풀이 함수 $f(x)=mx+2m-3$에 대하여 $1<x<3$에서 $f(x)>0$이 항상 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 $1<x<3$에서 x축보다 위쪽에 있어야 하므로 $f(1)\geq0$이고 $f(3)\geq0$이어야 한다.

$f(1)=m+2m-3\geq0$에서

$3m\geq3$

$\therefore m\geq1$ ····· ㉠

$f(3)=3m+2m-3\geq0$에서

$5m\geq3$

$\therefore m\geq\frac{3}{5}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 m의 값의 범위는

$m\geq1$

답 $m\geq1$

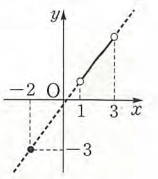
Remark

$f(x)=mx+2m-3$

$=(x+2)m-3$

에서 $y=f(x)$의 그래프는 m의 값에 관계없이 점 $(-2, -3)$을 지나므로 $1<x<3$에서 항상 $f(x)>0$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때 $f(1)\geq0$이면 $f(3)\geq0$이 항상 성립함을 알 수 있다.



03 문제이해 • $y=|x+3|+|x+1|+|x|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -3, -1, 0이다. → 20% 배점

해결과정 • (i) $-4\leq x<-3$일 때,

$y=-(x+3)-(x+1)-x$

$=-3x-4$

(ii) $-3\leq x<-1$일 때,

$y=x+3-(x+1)-x=-x+2$

(iii) $-1\leq x<0$일 때,

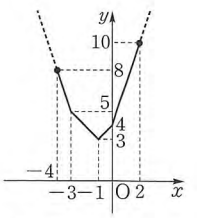
$y=x+3+x+1-x=x+4$

(iv) $0\leq x\leq2$일 때,

$y=x+3+x+1+x$

$=3x+4$

이상에서 $-4\leq x\leq2$에서의 $y=|x+3|+|x+1|+|x|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



→ 60% 배점

답구하기 • 따라서 $M=10$, $m=3$이므로

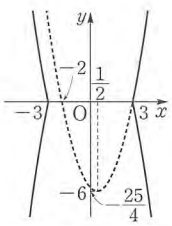
$M+m=13$

→ 20% 배점

답 13

04 전략 $f(x)=x^2-x-6$의 그래프를 그린 후 $|y|=f(|x|)$의 그래프를 그리는 방법을 이용한다.

풀이 $|y|=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$, 즉 $y=x^2-x-6$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남긴 다음 이 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



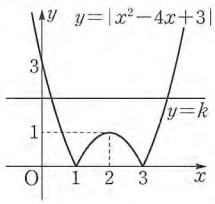
답 풀이 참조

05 전략 방정식 $|x^2-4x+3|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x+3|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

풀이 방정식 $|x^2-4x+3|=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=|x^2-4x+3|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

오른쪽 그림에서 구하는 k의 값 또는 k의 값의 범위는

$k=0$ 또는 $k>1$



답 $k=0$ 또는 $k>1$

06 전략 주어진 구간에서 x가 정수가 되는 값을 경계로 구간을 나누어 그래프를 그린다.

풀이 x가 정수가 되는 값을 경계로 구간을 나누면

(i) $-2\leq x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로

$y=-2x$

(ii) $-1\leq x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$y=-x$

(iii) $0\leq x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$y=0$

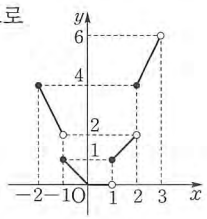
(iv) $1\leq x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$y=x$

(v) $2\leq x<3$일 때, $[x]=2$이므로

$y=2x$

이상에서 $-2\leq x<3$에서의 함수 $y=x[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

07 전략 직선 $y=mx-3m+1$이 m의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표를 구한 후 두 점 A, B 사이를 지나는 경우를 알아본다.

풀이 y를 m에 대하여 정리하면

$y=m(x-3)+1$ ····· ㉠

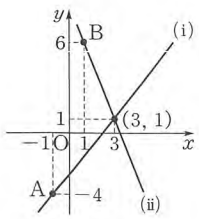
이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 점 (3, 1)을 지난다.

(i) 직선 ㉠이 점 A(−1, −4)를 지날 때,

$$m=\frac{1-(-4)}{3-(-1)}=\frac{5}{4}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(1, 6)을 지날 때,

$$m=\frac{1-6}{3-1}=-\frac{5}{2}$$



(i), (ii)에서 직선 ㉠이 두 점 A, B 사이를 지나도록 하는 m의 값의 범위는

$$-\frac{5}{2}<m<\frac{5}{4}$$

이므로 구하는 모든 정수 m의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

답 ②

08 해결과정 • $y=|x-3|+2$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 3이다.

(i) $x<3$일 때,

$y=-(x-3)+2=-x+5$

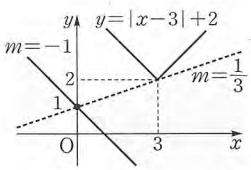
(ii) $x\geq 3$일 때,

$y=x-3+2=x-1$

한편 직선 $y=mx+1$은 기울기가 m이고 y절편이 1인 직선이다.

이때 두 그래프가 만나지 않으려면 직선 $y=mx+1$이 다음 그림의 색칠한 부분에 포함되어야 한다.

➔ 70% 배점



답구하기 • 따라서 직선 $y=mx+1$이 직선 $y=-x+5$에 평행할 때의 기울기는 -1이고, 점 (3, 2)를 지날 때의 기울기는 $\frac{2-1}{3-0}=\frac{1}{3}$이므로 구하는 m의 값의 범위는

$$-1\leq m<\frac{1}{3}$$

➔ 30% 배점

답 $-1\leq m<\frac{1}{3}$

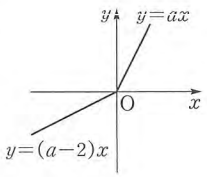
09 전략 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값을 경계로 구간을 나눈다.

풀이 $|x|=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases} ax & (x\geq 0) \\ (a-2)x & (x<0) \end{cases}$

그런데 $a>0$이므로 $x\geq 0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 양수인 직선이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 일대일 대응이기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 $x<0$일 때에도 함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 양수인 직선이어야 한다.



즉 $a-2>0$이어야 하므로

$a>2$ 답 $a>2$

Remark

문제에서 a가 양수라는 조건이 없으면 두 직선 $y=ax$, $y=(a-2)x$의 기울기가 모두 음수인 경우, 즉 $a<0$이고 $a-2<0$인 경우에도 $f(x)$가 일대일 대응이 된다.

10 전략 $f(|-x|)=f(|x|)$이므로 $y=f(|x|)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

풀이 $y=f(|x|)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프에서 $x\geq 0$인 부분만 남기고, $x<0$인 부분을 없앤 다음, $x\geq 0$인 부분을 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y=f(|x|)$의 그래프는 ②이다. 답 ②

11 전략 $A\cap B\neq\emptyset$이려면 함수 $y=|x|-|x-2|$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나야 함을 이용한다.

풀이 $y=|x|-|x-2|$에서 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 0, 2이다.

(i) $x<0$일 때,

$y=-x+(x-2)=-2$

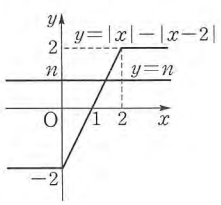
(ii) $0\leq x<2$일 때,

$y=x+(x-2)=2x-2$

(iii) $x\geq 2$일 때,

$y=x-(x-2)=2$

이상에서 $y=|x|-|x-2|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



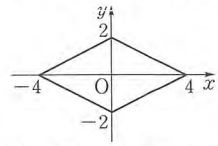
그런데 직선 $y=n$은 x축에 평행하고, $A\cap B\neq\emptyset$이므로

$-2\leq n\leq 2$

따라서 n의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

12 전략 $|y|=f(|x|)$의 그래프를 그리는 방법을 이용하여 도형 $|x|+2|y|=4$를 그린다.

풀이 $|x|+2|y|=4$의 그래프는 $x+2y=4$의 그래프에서 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분만 남기고, 나머지 부분은 $x\geq 0$, $y\geq 0$인 부분을 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



또 $x^2+y^2=r^2$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원이다.

원점과 직선 $x+2y=4$ 사이의 거리를 d라 할 때,

$d=\frac{4\sqrt{5}}{5}$이므로 r의 값의 범위에 따라 두 그래프의 교점의 개수 n의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $r=d$이면 $n=4$

(ii) $d<r<2$이면 $n=8$

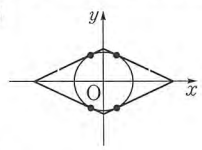
(iii) $r=2$이면 $n=6$

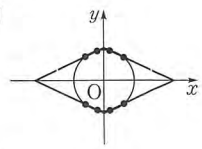
(iv) $2<r<4$이면 $n=4$

(v) $r=4$이면 $n=2$

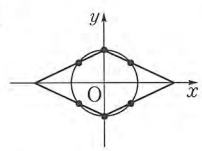
(vi) $r<d$ 또는 $r>4$이면 $n=0$

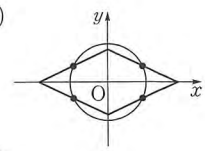
(i) (ii)



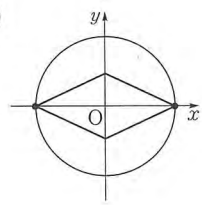


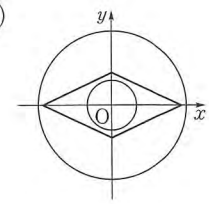
(iii) (iv)





(v) (vi)



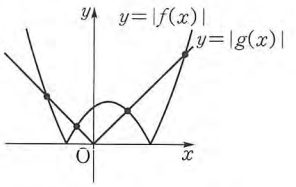


이상에서 교점의 개수 n은 0, 2, 4, 6, 8이므로 n의 최댓값은 8이다. 답 ④

13 전략 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$의 실근의 개수는 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=|g(x)|$의 그래프의 교점의 개수

와 같다.

풀이 두 함수 $y=|f(x)|$, $y=|g(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같으므로 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$의 실근의 개수는 두 그래프의 교점의 개수인 4이다.

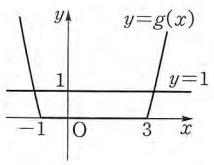


따라서 집합 A의 원소의 개수는 4이다. 답 4

14 전략 $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$일 때로 x의 값의 범위를 나누어 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

풀이 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leq -1 \text{ 또는 } x\geq 3) \\ 0 & (-1<x<3) \end{cases}$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=1$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 부등식 $g(x)\leq 0$의 해는 $-1<x<3$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

15 문제이해 • 점 P의 좌표를 x라 하면 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리가 각각 $|x+3|$, $|x|$, $|x-3|$이므로 점 P와 세 점 A, B, C 사이의 거리의 합은

$|x+3|+|x|+|x-3|$ → 30% 배점

해결과정 • $y=|x+3|+|x|+|x-3|$으로 놓으면 절댓값 기호 안의 식의 값을 0으로 하는 x의 값은 -3, 0, 3이다.

(i) $x<-3$일 때,

$y=-(x+3)-x-(x-3)=-3x$

(ii) $-3\leq x<0$일 때,

$y=x+3-x-(x-3)=-x+6$

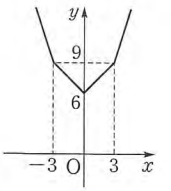
(iii) $0\leq x<3$일 때,

$y=x+3+x-(x-3)=x+6$

(iv) $x\geq 3$일 때,

$y=x+3+x+x-3=3x$ → 40% 배점

답구하기 • 이상에서 $y=|x+3|+|x|+|x-3|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 최솟값은 6이다.



→ 30% 배점

답 6

Remark

점 P가 점 B의 위치에 있을 때, 점 P와 세 점 사이의 거리의 합이 최소가 된다.

16 문제이해 • $h(x)=g(f(x))$

$=\left[x+\frac{1}{2}\right]$ → 10% 배점

해결과정 • $-1\leq x<2$에서 $-\frac{1}{2}\leq x+\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$이므로 $x+\frac{1}{2}$이 정수가 되는 값을 경계로 구간을 나누면

(i) $-\frac{1}{2}\leq x+\frac{1}{2}<0$, 즉 $-1\leq x<-\frac{1}{2}$일 때,

$h(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$

(ii) $0\leq x+\frac{1}{2}<1$, 즉 $-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}$일 때,

$h(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]=0$

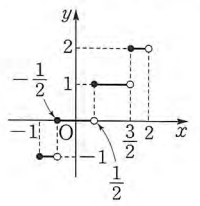
(iii) $1\leq x+\frac{1}{2}<2$, 즉 $\frac{1}{2}\leq x<\frac{3}{2}$일 때,

$h(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]=1$

(iv) $2\leq x+\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$, 즉 $\frac{3}{2}\leq x<2$일 때,

$h(x)=\left[x+\frac{1}{2}\right]=2$ → 50% 배점

이상에서 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



→ 20% 배점

답구하기 • 따라서 치역은 $\{-1, 0, 1, 2\}$이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2=2$ → 20% 배점

답 2

17 전략 원과 주어진 함수의 그래프를 좌표평면 위에 나타내어 본다.

풀이 직선 $y=mx$가 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$에 접하려면 방정식 $(x-1)^2+(mx-3)^2=2$, 즉

$(m^2+1)x^2-2(3m+1)x+8=0$

이 중근을 가져야 한다.

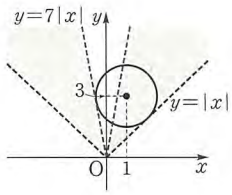
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3m+1)^2-8(m^2+1)=0$

$m^2+6m-7=0, \quad (m+7)(m-1)=0$

$\therefore m=-7$ 또는 $m=1$

따라서 오른쪽 그림에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$와 $y=m|x|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만 만나려면 $y=m|x|$의 그래프가 색칠한 부분에 포함되어야 하므로



$1<m<7$

이므로 구하는 모든 정수 m의 값의 합은

$2+3+4+5+6=20$

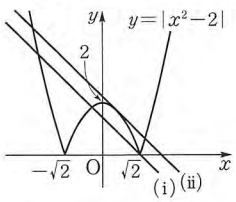
답 20

18 전략 주어진 방정식을 $f(x)=g(x)$ 꼴로 변형하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 3개가 될 때를 조사한다.

풀이 $|x^2-2|+x-k=0$에서

$|x^2-2|=-x+k$

따라서 함수 $y=|x^2-2|$의 그래프와 직선 $y=-x+k$를 그리면 다음 그림과 같다.



(i) 직선 $y=-x+k$가 점 $(\sqrt{2}, 0)$을 지날 때,

$0=-\sqrt{2}+k$

$\therefore k=\sqrt{2}$

(ii) 함수 $y=-x^2+2$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 접할 때,

$-x^2+2=-x+k$, 즉 $x^2-x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4k+8=0$

$\therefore k=\frac{9}{4}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은

$\sqrt{2}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

답 ①

19 전략 함수 $y=x-[x]$의 그래프와 직선 $y=mx+1$이 서로 다른 두 점에서 만날 때의 m의 값의 범위를 조사한다.

풀이 $f(x)=x-[x]$라 하면

⋮

$-2\le x<-1$일 때, $[x]=-2$이므로

$f(x)=x+2$

$-1\le x<0$일 때, $[x]=-1$이므로

$f(x)=x+1$

$0\le x<1$일 때, $[x]=0$이므로

$f(x)=x$

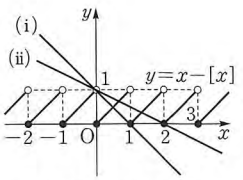
$1\le x<2$일 때, $[x]=1$이므로

$f(x)=x-1$

⋮

따라서 함수 $y=f(x)$, 즉 $y=x-[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

또 직선 $y=mx+1$은 y절편이 1인 직선이다.



(i) 직선 $y=mx+1$이 점 $(1, 0)$을 지날 때,

$0=m+1 \quad \therefore m=-1$

(ii) 직선 $y=mx+1$이 점 $(2, 0)$을 지날 때,

$0=2m+1 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-1\le m<-\frac{1}{2}$

답 ④

20 전략 $x=1, 2, 3, \cdots$을 $f(x)$에 대입하여 함수 $f(x)$의 성질을 찾는다.

풀이 ㄱ. $n=1$이면

$f(1)=\left[\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{3}\right]=0-0=0$

$n=2$이면 $\quad f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]-\left[\frac{2}{3}\right]=1-0=1$

$n=3$이면 $f(3)=\left[\frac{3}{2}\right]-\left[\frac{3}{3}\right]=1-1=0$

$n=4$이면 $f(4)=\left[\frac{4}{2}\right]-\left[\frac{4}{3}\right]=2-1=1$

$n\geq 5$이면 $f(n)\geq 1$

따라서 $f(n)=0$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 1, 3의 2이다.

ㄴ. $f(1)=f(3)=0$,
$f(2)=f(4)=f(5)=f(6)=f(7)=f(9)=1$,
$f(8)=f(10)=f(11)=f(12)=f(13)$
$=f(15)=2$,
$f(14)=3$
이므로 정의역이 {1, 2, 3, …, 15}이면 치역은 {0, 1, 2, 3}이다.

ㄷ. $x=6k$ (k는 자연수)라 하면

$$f(6k)=\left[\frac{6k}{2}\right]-\left[\frac{6k}{3}\right]=[3k]-[2k]$$
$$=3k-2k=k$$

따라서 정의역이 6의 배수로만 이루어진 유한집합이면 정의역은
$\{6k_1, 6k_2, \cdots, 6k_n\}$ (k_n은 자연수)
이고, 치역은
$\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$
이므로 정의역과 치역의 원소의 개수는 n으로 서로 같다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

08 유리함수

유제

본책 200~222쪽

068-1 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$

즉 $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$가 x에 대한 항등식이므로

$a+b=2$, $a-b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

$\therefore ab=1$ 답 1

068-2 주어진 식의 우변을 통분하여 계산하면

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}$$
$$=\frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{a(x^2-5x+6)+b(x^2-4x+3)+c(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{(a+b+c)x^2-(5a+4b+3c)x+6a+3b+2c}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

주어진 식이 x에 대한 항등식이 되려면

$a+b+c=0$ …… ㉠
$5a+4b+3c=-2$ …… ㉡
$6a+3b+2c=1$ …… ㉢
㉠에서 $c=-a-b$ …… ㉣
㉣을 ㉡, ㉢에 각각 대입하여 정리하면
$2a+b=-2$, $4a+b=1$
두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{2}$, $b=-5$

이 값을 ㉣에 대입하면 $c=\frac{7}{2}$

$$\therefore 2a+3b+4c=2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot(-5)+4\cdot\frac{7}{2}$$
$$=2$$

답 2

069-1 (1) $\dfrac{x^2+3x+1}{x+3}=\dfrac{x(x+3)+1}{x+3}$

$=x+\dfrac{1}{x+3}$

$\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=\dfrac{x(x-3)+1}{x-3}$

$=x+\dfrac{1}{x-3}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(x+\dfrac{1}{x+3}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x-3}\right)$

$=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x-3}$

$=\dfrac{x-3-(x+3)}{(x+3)(x-3)}$

$=-\dfrac{6}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\dfrac{x+3}{x+1}=1+\dfrac{2}{x+1}$, $\dfrac{x+5}{x+3}=1+\dfrac{2}{x+3}$,

$\dfrac{x+7}{x+5}=1+\dfrac{2}{x+5}$, $\dfrac{x+9}{x+7}=1+\dfrac{2}{x+7}$

$\therefore$ (주어진 식)

$=\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)-\left(1+\dfrac{2}{x+3}\right)$

$-\left(1+\dfrac{2}{x+5}\right)+\left(1+\dfrac{2}{x+7}\right)$

$=\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x+3}\right)-\left(\dfrac{2}{x+5}-\dfrac{2}{x+7}\right)$

$=\dfrac{2(x+3)-2(x+1)}{(x+1)(x+3)}-\dfrac{2(x+7)-2(x+5)}{(x+5)(x+7)}$

$=\dfrac{4}{(x+1)(x+3)}-\dfrac{4}{(x+5)(x+7)}$

$=\dfrac{4(x+5)(x+7)-4(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$

$=\dfrac{32(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$

답 (1) $-\dfrac{6}{(x+3)(x-3)}$

(2) $\dfrac{32(x+4)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$

070-1 $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

$+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$

$=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)$

$+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+4}\right)$

$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{x+4-x}{x(x+4)}$

$=\dfrac{4}{x(x+4)}$ 답 $\dfrac{4}{x(x+4)}$

070-2 (1) $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{19\cdot20}$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots$

$+\left(\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{19}\right)+\left(\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{20}\right)$

$=1-\dfrac{1}{20}=\dfrac{19}{20}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{18\cdot20}$

$=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots$

$+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{20}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{17}-\dfrac{1}{19}\right)+\left(\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{20}\right)\right\}$

$-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{20}\right)=\dfrac{531}{760}$

답 (1) $\dfrac{19}{20}$ (2) $\dfrac{531}{760}$

Remark

부분분수로의 변형을 이용하여 분수의 합을 구할 때 (1)과 같이 연달아 소거되는 경우에는 앞에서 첫 번째 수가 남으면 뒤에서도 첫 번째 수가 남는다. 또 (2)와 같이 건너뛰며 소거되는 경우에는 앞에서 첫 번째, 세 번째가 남으면 뒤에서도 첫 번째, 세 번째가 남는다. 즉 수가 연쇄적으로 소거될 때 앞에서 남는 수와 뒤에서 남는 수는 서로 대칭이 되는 위치에 있다.

071-1 (1) $\dfrac{\dfrac{2x-3y}{x-y}-1}{2-\dfrac{x}{x-y}}=\dfrac{\dfrac{2x-3y-(x-y)}{x-y}}{\dfrac{2(x-y)-x}{x-y}}$

$=\dfrac{x-2y}{x-2y}=1$

(2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1-a}{(1-a)-1}}$

$=\dfrac{1}{1+\dfrac{1-a}{a}}$

$=\dfrac{a}{a+(1-a)}=a$

$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+a}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1+a}{(1+a)-1}}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1+a}{a}}$

$=\dfrac{a}{a-(1+a)}$

$=-a$

$\therefore$ (주어진 식)$=a\cdot(-a)=-a^2$

답 (1) 1 (2) $-a^2$

다른 풀이 (1) $\dfrac{\dfrac{2x-3y}{x-y}-1}{2-\dfrac{x}{x-y}}$

$=\dfrac{(x-y)\left(\dfrac{2x-3y}{x-y}-1\right)}{(x-y)\left(2-\dfrac{x}{x-y}\right)}$

$=\dfrac{2x-3y-(x-y)}{2(x-y)-x}$

$=\dfrac{x-2y}{x-2y}=1$

071-2 $\dfrac{36}{151}=\dfrac{1}{\dfrac{151}{36}}=\dfrac{1}{4+\dfrac{7}{36}}$

$=\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{\dfrac{36}{7}}}=\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{7}}}$

이므로

$a=4, b=5, c=7$

$\therefore a+b+c=4+5+7=16$

답 16

072-1 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore x-\dfrac{1}{x}=2$

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=2^2+2=6$

(2) $x^3-\dfrac{1}{x^3}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=2^3+3\cdot2=14$

(3) $x^6+\dfrac{1}{x^6}=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)^2+2=14^2+2=198$

답 (1) 6 (2) 14 (3) 198

072-2 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\dfrac{1}{x}=0$ $\therefore x+\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore 2x^2-x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$

$=2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=2\cdot(4^2-2)-4=24$

답 24

073-1 $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{4}$이므로

$4(x-y)=x+y$

$\therefore 3x=5y$, 즉 $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3}$

$\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{3}=k(k\neq0)$로 놓으면

$x=5k, y=3k$

$\therefore \dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2\cdot5k\cdot3k}{(5k)^2+(3k)^2}=\dfrac{30k^2}{34k^2}=\dfrac{15}{17}$

답 $\dfrac{15}{17}$

073-2 $x+\dfrac{2}{y}=0$에서 $x=-\dfrac{2}{y}$

$y+\dfrac{1}{z}=0$에서 $\dfrac{1}{z}=-y$ $\therefore z=-\dfrac{1}{y}$

$\therefore \dfrac{xz}{x^2+z^2}=\dfrac{\left(-\dfrac{2}{y}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{y}\right)}{\left(-\dfrac{2}{y}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{y}\right)^2}$

$=\dfrac{\dfrac{2}{y^2}}{\dfrac{5}{y^2}}=\dfrac{2}{5}$

답 $\dfrac{2}{5}$

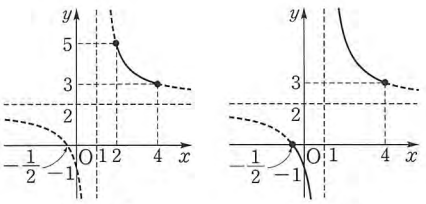
074-1 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2(x-1)+3}{x-1}=\dfrac{3}{x-1}+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

(1) $x=2$일 때 $y=5$이고, $x=4$일 때 $y=3$이므로
[그림 1]에서 치역은 $\{y\,|\,3\le y\le 5\}$

(2) $y=0$일 때 $x=-\dfrac{1}{2}$이고, $y=3$일 때 $x=4$이므로
[그림 2]에서 정의역은

$$\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le x<1 \text{ 또는 } 1<x\le 4\right\}$$



[그림 1] [그림 2]

답 (1) $\{y\,|\,3\le y\le 5\}$
(2) $\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{1}{2}\le x<1 \text{ 또는 } 1<x\le 4\right\}$

075-1 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=3$이므로 주어진 함수의 식을

$$y=\frac{k}{x-1}+3\ (k\neq 0)$$

으로 놓을 수 있다. 이 함수의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=\frac{k}{0-1}+3 \qquad \therefore k=1$$

따라서 $y=\dfrac{1}{x-1}+3=\dfrac{3x-2}{x-1}$이므로

$a=3,\ b=-2,\ c=-1$

$\therefore abc=6$ 답 6

다른 풀이 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{a(x+c)-ac+b}{x+c}$

$$=\frac{-ac+b}{x+c}+a$$

이므로 이 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-c,\ y=a$

$\therefore a=3,\ c=-1$

즉 $y=\dfrac{3x+b}{x-1}$의 그래프가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$$2=\frac{b}{-1} \qquad \therefore b=-2$$

$\therefore abc=6$

076-1 $y=\dfrac{4x+5}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)+7}{2x-1}$

$$=\frac{7}{2x-1}+2=\frac{7}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=2$의 교점 $\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$에 대하여 대칭이다.

따라서 $m=\dfrac{1}{2}$, $n=2$이므로

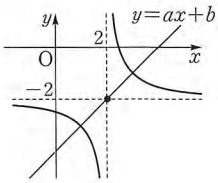
$$m+n=\frac{5}{2}$$

답 $\dfrac{5}{2}$

076-2 $y=\dfrac{-2x+5}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)+1}{x-2}$

$$=\frac{1}{x-2}-2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는 두 점근선 $x=2$, $y=-2$의 교점 $(2,\ -2)$를 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선에 대하여 대칭이다.



이때 $a>0$이므로

$a=1$

점 $(2,\ -2)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y+2=1\cdot(x-2)$

$\therefore y=x-4$

$\therefore a=1,\ b=-4$

답 $a=1,\ b=-4$

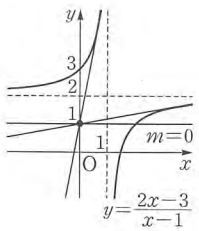
077-1 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)-1}{x-1}=-\dfrac{1}{x-1}+2$

이므로 $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$의 그래프는 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또 직선 $y=mx+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

(i) $m=0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\frac{2x-3}{x-1}$의 그래프와 직선이 한 점에서 만난다.



(ii) $m\neq0$일 때,

$\frac{2x-3}{x-1}=mx+1$에서

$2x-3=(mx+1)(x-1)$

$2x-3=mx^2-mx+x-1$

$\therefore mx^2-(m+1)x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 곡선과 직선이 만나야 하므로

$D=(m+1)^2-8m\geq0$

$m^2-6m+1\geq0$ ····· ㉠

이때 $m^2-6m+1=0$의 두 근이 $3-2\sqrt{2}$, $3+2\sqrt{2}$이므로 ㉠의 해는

$m\leq3-2\sqrt{2}$ 또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

그런데 $m\neq0$이므로

$m<0$ 또는 $0<m\leq3-2\sqrt{2}$

또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$m\leq3-2\sqrt{2}$ 또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

답 $m\leq3-2\sqrt{2}$ 또는 $m\geq3+2\sqrt{2}$

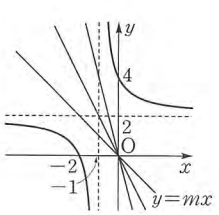
077-2 $n(A\cap B)=0$이려면 $y=\frac{2x+4}{x+1}$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나지 않아야 한다.

$$y=\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$$

이므로 $y=\frac{2x+4}{x+1}$의 그래프는 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, $y=mx$는 원점을 지나는 직선이다.

(i) $m=0$일 때,

오른쪽 그림과 같이 곡선과 직선이 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $m\neq0$일 때,

$\frac{2x+4}{x+1}=mx$에서

$2x+4=mx(x+1)$

$\therefore mx^2+(m-2)x-4=0$

위의 이차방정식의 판별식을 D라 하면 곡선과 직선이 만나지 않아야 하므로

$D=(m-2)^2+16m<0$

$m^2+12m+4<0$

$\therefore -6-4\sqrt{2}<m<-6+4\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-6-4\sqrt{2}<m<-6+4\sqrt{2}$

답 $-6-4\sqrt{2}<m<-6+4\sqrt{2}$

078-1 $f_2(x)=(f_1\circ f_1)(x)=f_1(f_1(x))$

$$=\frac{f_1(x)}{f_1(x)-1}$$

$$=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}$$

$$=x$$

따라서 $f_2(x)=f_4(x)=\cdots=f_{2k}(x)$($k$는 자연수)는 항등함수이므로

$f_{2000}(x)=f_{2\times1000}(x)=x$

$\therefore f_{2000}(3)=3$ 답 3

078-2 $f_2(x)=(f_1\circ f_1)(x)=f_1(f_1(x))$

$$=1-\frac{1}{f_1(x)}$$

$$=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

$$=-\frac{1}{x-1}$$

$f_3(x)=(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))$

$$=1-\frac{1}{f_2(x)}=1-\frac{1}{-\frac{1}{x-1}}$$

$=x$

따라서 $f_3(x)=f_6(x)=\cdots=f_{3k}(x)$($k$는 자연수)는 항등함수이므로

$f_{1000}(x)=f_{3\times333+1}(x)$

$=f_1(x)=1-\frac{1}{x}$

$\therefore f_{1000}(2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 답 $\frac{1}{2}$

079-1 $(f^{-1})^{-1}=f$이므로 $f^{-1}(x)$의 역함수가 $f(x)$이다.

$y=\frac{x-5}{-2x+3}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(-2x+3)=x-5$

$(2y+1)x=3y+5$

$\therefore x=\frac{3y+5}{2y+1}$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\frac{3x+5}{2x+1}$

따라서 $f(x)=\frac{3x+5}{2x+1}$이므로

$a=3, b=5, c=1$

$\therefore a+b+c=9$ 답 9

중단원 연습 문제 본책 223~226쪽

01 42 **02** ② **03** ② **04** 12 **05** 4

06 $\frac{8}{1-a^8}$ **07** ② **08** 3 **09** 46

10 ⑤ **11** 103 **12** 7 **13** ③ **14** ③

15 $\frac{3}{8}\le m\le\frac{2}{3}$ **16** −6 **17** $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

18 4 **19** $-\frac{13}{2}$ **20** ① **21** ⑤

01 전략 (분자의 차수)<(분모의 차수)가 되도록 분수식을 변형한 후, 두 개씩 묶어서 계산한다.

풀이 $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$

$\frac{3x+7}{x+2}=\frac{3(x+2)+1}{x+2}=3+\frac{1}{x+2}$

$\frac{2x+9}{x+4}=\frac{2(x+4)+1}{x+4}=2+\frac{1}{x+4}$

$\frac{3x+16}{x+5}=\frac{3(x+5)+1}{x+5}=3+\frac{1}{x+5}$

이므로 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\frac{2x+3}{x+1}+\frac{3x+7}{x+2}-\frac{2x+9}{x+4}-\frac{3x+16}{x+5}$

$=\left(2+\frac{1}{x+1}\right)+\left(3+\frac{1}{x+2}\right)-\left(2+\frac{1}{x+4}\right)$

$-\left(3+\frac{1}{x+5}\right)$

$=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}\right)$

$=\frac{3}{(x+1)(x+4)}+\frac{3}{(x+2)(x+5)}$

$=\frac{3(x+2)(x+5)+3(x+1)(x+4)}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}$

$=\frac{6x^2+36x+42}{(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)}$

$\therefore f(x)=6x^2+36x+42$

따라서 $f(x)$의 상수항은 42이다. 답 42

다른 풀이 다항식 $f(x)$의 상수항은 $x=0$일 때 $f(x)$의 값, 즉 $f(0)$이므로 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3+\frac{7}{2}-\frac{9}{4}-\frac{16}{5}=\frac{f(0)}{1\cdot2\cdot4\cdot5}$

$\therefore f(0)=42$

02 전략 주어진 등식의 양변을 x로 나누고 곱셈공식의 변형을 이용한다.

풀이 $x^2-5x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-5+\frac{1}{x}=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=5$이므로

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

$=5^2-4=21$

그런데 $0<x<1$에서 $x-\frac{1}{x}<0$이므로

$x-\frac{1}{x}=-\sqrt{21}$ 답 ②

03 전략 주어진 함수의 식을

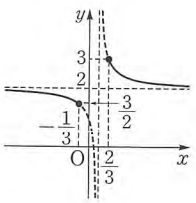
$y=\frac{k}{3(x-p)}+q\ (k\neq0)$ 꼴로 변형하여 그래프를 그린 후 최댓값과 최솟값을 찾는다.

풀이 $y=\frac{6x-1}{3x-1}=\frac{2(3x-1)+1}{3x-1}$

$=\frac{1}{3x-1}+2=\frac{1}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}+2$

이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\frac{1}{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$x\le-\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge\frac{2}{3}$에서 $y=\frac{6x-1}{3x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$x=\frac{2}{3}$일 때 최댓값 3,

$x=-\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{3}{2}$

을 갖는다.

따라서 $M=3$, $m=\frac{3}{2}$이므로

$M+m=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

답 ②

04 문제이해 • 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=2$이므로 주어진 함수를

$y=\frac{k}{x-1}+2\ (k\neq0)$ ····· ㉠

로 놓을 수 있다. → 30% 배점

해결과정 • 이때 ㉠의 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{k}{3-1}+2$ $\therefore k=-4$

$k=-4$를 ㉠에 대입하면

$y=\frac{-4}{x-1}+2$

$=\frac{2(x-1)-4}{x-1}$

$=\frac{2x-6}{x-1}$ → 40% 배점

답구하기 • 따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=-1$이므로

$abc=12$ → 30% 배점

답 12

05 전략 주어진 함수의 역함수를 구하여 원래 함수와 비교한다.

풀이 $y=\frac{ax+b}{x-3}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(x-3)=ax+b$

$(y-a)x=3y+b$

$\therefore x=\frac{3y+b}{y-a}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{3x+b}{x-a}$

$\therefore f^{-1}(x)=\frac{3x+b}{x-a}$

이때 $f(x)=f^{-1}(x)$이므로

$\frac{ax+b}{x-3}=\frac{3x+b}{x-a}$

$\therefore a=3$

이때 함수 $y=\frac{3x+b}{x-3}$의 그래프가 점 $\left(1,\ -\frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$-\frac{1}{2}=\frac{3+b}{1-3}$ $\therefore b=-2$

$\therefore 2a+b=2\cdot3+(-2)$

$=4$

답 4

06 전략 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$임을 이용하여 분모를 통분한다.

풀이 (주어진 식)

$=\frac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{2(1+a^2)+2(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}$

$=\frac{4(1+a^4)+4(1-a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}$

$=\frac{8}{1-a^8}$

답 $\frac{8}{1-a^8}$

07 전략 분모, 분자를 각각 통분하여 간단히 한다.

풀이 $\frac{x-\frac{2}{x-1}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=\frac{x-\frac{2}{x-1}}{1-\frac{x}{x-1}}$

$=\frac{x(x-1)-2}{(x-1)-x}$

$=-x^2+x+2$

따라서 $-x^2+x+2=ax^2+bx+c$이므로

$a=-1,\ b=1,\ c=2$

$\therefore abc=-2$

답 ②

08 해결과정 • 주어진 식을 통분하여 계산하면

$$\frac{a^2+2}{bc}+\frac{b^2+2}{ca}+\frac{c^2+2}{ab}$$

$$=\frac{a(a^2+2)+b(b^2+2)+c(c^2+2)}{abc}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3+2(a+b+c)}{abc}$$

$$=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ (\because a+b+c=0)$$ → 40% 배점

또 $a+b+c=0$이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=0$$

에서

$a^3+b^3+c^3=3abc$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore$ (주어진 식)$=\frac{3abc}{abc}$

$=3$ → 20% 배점

답 3

09 전략 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 이용하여 $f(x)$의 각 항을 부분분수로 변형한다.

풀이 $f(x)$

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\cdots+\frac{1}{(x-59)(x-60)}$$

$$=\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x-60}-\frac{1}{x-59}\right)$$

$$=\frac{1}{x-60}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{60}{x(x-60)}$$

이므로

$$f(62)=\frac{60}{62(62-60)}=\frac{15}{31}$$

따라서 $p=31,\ q=15$이므로

$p+q=46$

답 46

10 전략 주어진 연산의 정의에 따라 각 괄호 안을 먼저 계산한다.

풀이 $x◎1=\frac{x+1}{x-1}$,

$\frac{1}{x◎1}=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{x+1}$이므로

$$(x◎1)◎\left(\frac{1}{x◎1}\right)=\frac{x+1}{x-1}◎\frac{x-1}{x+1}$$

$$=\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}$$

$$=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{2x}$$

답 ⑤

11 문제이해 • $x^4-7x^2+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-7+\frac{1}{x^2}=0$ $\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=7$ → 20% 배점

해결과정 • $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=7+2=9$이고

$x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=3$ → 30% 배점

$$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=7^2-2=47$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=3^3-3\cdot3=18$$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore x^4+3x^3+2+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}$

$$=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+2$$

$=47+3\cdot18+2=103$ → 10% 배점

답 103

12 해결과정 • $y=\dfrac{-x+1}{x+2}=\dfrac{-(x+2)+3}{x+2}$

$=\dfrac{3}{x+2}-1$

이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{3}{x-a+2}-1+b$ …… ㉠ ➔ 30% 배점

$y=\dfrac{x+c}{x+1}=\dfrac{(x+1)-1+c}{x+1}$에서

$y=\dfrac{-1+c}{x+1}+1$ …… ㉡ ➔ 30% 배점

㉠의 그래프와 ㉡의 그래프가 일치하므로

$-a+2=1,\ -1+b=1,\ 3=-1+c$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $a=1,\ b=2,\ c=4$이므로

$a+b+c=7$ ➔ 20% 배점

답 7

다른 풀이 $y=\dfrac{x+c}{x+1}$, 즉 $y=\dfrac{-1+c}{x+1}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 $-b$만큼 평행이동하면

$y=\dfrac{-1+c}{x+a+1}+1-b$

이 그래프가 $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$, 즉 $y=\dfrac{3}{x+2}-1$의 그래프와 일치하므로

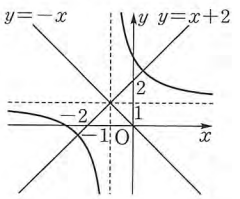
$a+1=2,\ 1-b=-1,\ -1+c=3$

따라서 $a=1,\ b=2,\ c=4$이므로

$a+b+c=7$

13 전략 분수함수의 그래프는 두 점근선의 교점을 지나면서 기울기가 1, -1인 직선에 대하여 각각 대칭이다.

풀이 두 직선 $y=x+2$, $y=-x$의 교점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이므로 오른쪽 그림에서 주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식은



$x=-1,\ y=1$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=\dfrac{2}{x+1}+1$이므로

$a=-1,\ b=1$

$\therefore a+b=0$

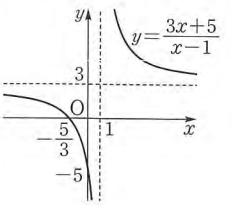
답 ③

14 전략 주어진 함수를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $y=\dfrac{3x+5}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+8}{x-1}$

$=\dfrac{8}{x-1}+3$

에서 주어진 함수의 그래프는 $y=\dfrac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이다.

ㄴ. 그래프는 제3사분면을 지난다.

ㄷ. 그래프는 두 점근선의 교점 $(1,\ 3)$을 지나고 기울기가 1, -1인 두 직선에 대하여 각각 대칭이다.

기울기가 1이고 점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-3=x-1$, 즉 $y=x+2$

기울기가 -1이고 점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은 $y-3=-(x-1)$, 즉 $y=-x+4$

따라서 주어진 그래프는 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+4$에 대하여 각각 대칭이다.

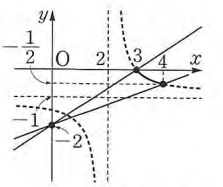
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

15 문제이해 • $y=\dfrac{-x+3}{x-2}=\dfrac{-(x-2)+1}{x-2}$

$=\dfrac{1}{x-2}-1$

이므로 $3\le x\le4$에서 주어진 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 이때 직선 $y=mx-2$는 m의 값에 관계없이 점 $(0,\ -2)$를 지난다. ➔ 40% 배점



해결과정 • (i) 직선 $y=mx-2$가 점 $(3,\ 0)$을 지날 때,

$0=3m-2$ $\therefore m=\dfrac{2}{3}$

(ii) 직선 $y=mx-2$가 점 $\left(4,\ -\dfrac{1}{2}\right)$을 지날 때,

$-\dfrac{1}{2}=4m-2$ $\therefore m=\dfrac{3}{8}$ ➔ 40% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$\frac{3}{8} \le m \le \frac{2}{3}$ ➔ 20% 배점

답 $\frac{3}{8} \le m \le \frac{2}{3}$

16 해결과정 · 점 $(1, 3)$이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$f(1)=3$, 즉 $\frac{a-1}{b+1}=3$

$\therefore a=3b+4$ …… ㉠ ➔ 30% 배점

또 점 $(1, 3)$이 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이고, $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 점 $(3, 1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이다.

$f(3)=1$, 즉 $\frac{3a-1}{3b+1}=1$

$\therefore 3a=3b+2$ …… ㉡ ➔ 30% 배점

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1, b=-\frac{5}{3}$ ➔ 20% 배점

답구하기 · $\therefore a+3b=-1+3\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$

$=-6$ ➔ 20% 배점

답 -6

17 전략 주어진 유리함수를 $y=f(x)$로 놓고 x에 대하여 푼 후, x와 y를 바꾸어 역함수를 구한다.

풀이 $y=\frac{-6x+4}{2x-1}$로 놓고 x에 대하여 풀면

$y(2x-1)=-6x+4$

$(2y+6)x=y+4$ $\therefore x=\frac{y+4}{2y+6}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\frac{x+4}{2x+6}$

$\therefore g(x)=\frac{x+4}{2x+6}$

$g(x)=\frac{x+4}{2x+6}=\frac{\frac{1}{2}(2x+6)+1}{2x+6}$

$=\frac{1}{2x+6}+\frac{1}{2}$

에서 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=\frac{1}{2}$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

답 $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

다른 풀이 $f(x)=\frac{-6x+4}{2x-1}$

$=\frac{-3(2x-1)+1}{2x-1}$

$=\frac{1}{2x-1}-3$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{1}{2}$, $y=-3$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}, -3\right)$이다.

한편 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 $y=f(x)$의 그래프의 점근선과 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $y=g(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-3$, $y=\frac{1}{2}$이므로 구하는 교점의 좌표는

$\left(-3, \frac{1}{2}\right)$이다.

18 전략 $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}=\frac{AD}{BC}$임을 이용하여 주어진 식의 좌변을 정리한다.

풀이 주어진 식의 좌변을 정리하면

$\frac{x}{1+\frac{2}{x+1}}=\frac{x}{\frac{x+3}{x+1}}=\frac{x^2+x}{x+3}$

$=\frac{x(x+3)-2(x+3)+6}{x+3}$

$=x-2+\frac{6}{x+3}$

즉 $x-2+\frac{6}{x+3}=x+a+\frac{b}{x+3}$가 x에 대한 항등식이므로

$a=-2, b=6$ $\therefore a+b=4$

답 4

19 전략 주어진 조건에서 $x+y=a$, $xy=b$로 놓고 a, b의 값을 구한다.

풀이 $x+y-3xy=9$, $3x+3y+xy=7$에서

$x+y=a$, $xy=b$로 놓으면

$a-3b=9$, $3a+b=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=3, b=-2$

즉 $x+y=3$, $xy=-2$이므로 구하는 값은

$$\frac{1-\frac{y}{x+y}}{1-\frac{x}{x+y}}-\frac{1-\frac{x}{x-y}}{1+\frac{y}{x-y}}$$

$$=\frac{(x+y)-y}{(x+y)-x}-\frac{(x-y)-x}{(x-y)+y}$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$

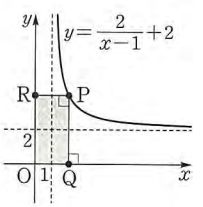
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{3^2-2\cdot(-2)}{-2}$$

$$=-\frac{13}{2}$$

답 $-\frac{13}{2}$

20 전략 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{k}{x-p}+q$이다.

풀이 $x>0$에서 정의된 함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프는 위의 그림과 같다.



$y=\frac{2}{x-1}+2$의 그래프 위의 점 P의 좌표를

$$\left(t,\ \frac{2}{t-1}+2\right)\ (t>1)$$

라 하면 직사각형 ROQP의 넓이는

$$t\left(\frac{2}{t-1}+2\right)=\{(t-1+1)\left(\frac{2}{t-1}+2\right)$$

$$=4+2(t-1)+\frac{2}{t-1}$$

이때 $t-1>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4+2(t-1)+\frac{2}{t-1}\geq4+2\sqrt{2(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}$$

$$=8$$

(단, 등호는 $t=2$일 때 성립)

따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최솟값은 8이다.

답 ①

21 전략 $f^{n+1}(x)=(f\circ f^n)(x)=x$이면 $f^n(x)$의 역함수는 $f(x)$임을 이용한다.

풀이 $f(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$이므로

$$f^2(x)=f(f(x))$$

$$=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{x}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}$$

$$f^3(x)=f(f^2(x))=1-\frac{1}{\frac{1}{1-x}}=x$$

$$f^4(x)=f(f^3(x))=1-\frac{1}{x}$$

$$\vdots$$

따라서 $f^{2016}(x)=f^{672\cdot3}(x)=x$이고,

$f^{2016}(x)=(f\circ f^{2015})(x)=x$에서 $f^{2015}(x)$의 역함수는 $f(x)$이다.

$\therefore g(2015)=f(2015)$

$$=1-\frac{1}{2015}=\frac{2014}{2015}$$

답 ⑤

09 무리함수

유제

본책 232~249쪽

080-1 $\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}}$

$=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}$

$=\left|a+\frac{1}{a}\right|-\left|a-\frac{1}{a}\right|$

이때 $0<a<1$에서 $a+\frac{1}{a}>0$, $a-\frac{1}{a}<0$이므로

(주어진 식)$=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=2a$

답 $2a$

080-2 $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}-2}$

$=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|$

이때 $0<a<1$에서 $a-\frac{1}{a}<0$이므로

$\sqrt{x^2-4}=-\left(a-\frac{1}{a}\right)=-a+\frac{1}{a}$

$\therefore \sqrt{x^2-4}+x=\left(-a+\frac{1}{a}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a}$

답 $\frac{2}{a}$

081-1 (1) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})}$

$=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

$=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})}$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}$

$+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}$

$=(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$

$+(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$

$=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

(2) $\frac{4}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=\frac{4\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$

$=\frac{4(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$

$=\frac{2(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$

$=\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$

$=\sqrt{2}+1$

답 (1) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ (2) $\sqrt{2}+2-\sqrt{6}$ (3) $\sqrt{2}+1$

082-1 (1) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x+2\sqrt{2}y)(\sqrt{2}+1)=(x+4y)+(x+2y)\sqrt{2}$

즉 $(x+4y)+(x+2y)\sqrt{2}=-7-3\sqrt{2}$이고

$x+4y$, $x+2y$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+4y=-7$, $x+2y=-3$

두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-2$

$\therefore x^2+y^2=1+(-2)^2=5$

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하여 정리하면

$(x-\sqrt{3})(y-\sqrt{3})=(xy+3)-(x+y)\sqrt{3}$

09 무리함수

즉 $(xy+3)-(x+y)\sqrt{3}=6-4\sqrt{3}$이고 $xy+3$, $x+y$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$xy+3=6,\ x+y=4$

$\therefore xy=3,\ x+y=4$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=16-6=10$

답 (1) 5 (2) 10

082-2 $x^2+\sqrt{2}y^2-5x+4\sqrt{2}y-6-5\sqrt{2}=0$에서

$x^2-5x-6+(y^2+4y-5)\sqrt{2}=0$

$x^2-5x-6,\ y^2+4y-5$는 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-5x-6=0,\ y^2+4y-5=0$

위의 두 식을 풀면

$x=-1$ 또는 $x=6,\ y=-5$ 또는 $y=1$

따라서 $x+y$의 최댓값은

$6+1=7$

답 7

083-1 (1) 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프이므로 $x=1,\ y=2$를 대입하면

$2=\sqrt{a}\quad \therefore a=4$

$\therefore y=\sqrt{4x}$

(2) 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\ (a<0)$의 그래프이므로 $x=-1,\ y=-2$를 대입하면

$-2=-\sqrt{-a},\quad \sqrt{-a}=2$

$-a=4\quad \therefore a=-4$

$\therefore y=-\sqrt{-4x}$

답 (1) $y=\sqrt{4x}$ (2) $y=-\sqrt{-4x}$

083-2 $y=\sqrt{-x}\ (x\le 0)$에서

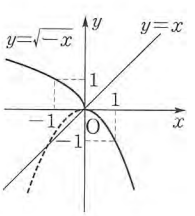
$y^2=-x$

$\therefore x=-y^2\ (y\ge 0)$

x와 y를 서로 바꾸면

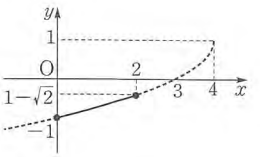
$y=-x^2\ (x\ge 0)$

따라서 $y=\sqrt{-x}$의 그래프는 $y=-x^2\ (x\ge 0)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참조

084-1 $y=1-\sqrt{-x+4}=1-\sqrt{-(x-4)}$에서 주어진 함수의 그래프는 $y=-\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 주어진 함수는

$x=2$일 때 최댓값 $1-\sqrt{2}$,

$x=0$일 때 최솟값 -1

을 갖는다.

답 최댓값: $1-\sqrt{2}$, 최솟값: -1

084-2 $y=-\sqrt{x+1}-2$의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

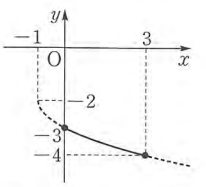
따라서 오른쪽 그림에서

$y=-4$일 때 $x=3$,

$y=-3$일 때 $x=0$

이므로 정의역은

$\{x\mid 0\le x\le 3\}$



즉 $a=0,\ b=3$이므로 $\quad a+b=3$

답 3

085-1 주어진 무리함수의 그래프는 $y=p\sqrt{-x}\ (p<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을 $y=p\sqrt{-(x-1)}+1$로 놓을 수 있다.

이 함수의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=p\sqrt{-(0-1)}+1$

$-1=p+1\quad \therefore p=-2$

따라서 주어진 무리함수는

$y=-2\sqrt{-(x-1)}+1=-2\sqrt{-x+1}+1$

즉 $p=-2,\ q=1,\ r=1$이므로

$p+q+r=0$

답 0

085-2 $y=\sqrt{a-x}+2$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프의 함수의 식은

$y=\sqrt{a-(x+2)}+2+b$

$=\sqrt{a-2-x}+2+b$

이 식이 $y=\sqrt{1-x}+5$와 같아야 하므로

$a-2=1,\ 2+b=5$

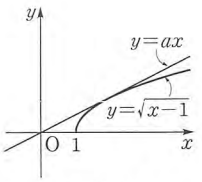
$\therefore a=3,\ b=3$

답 $a=3,\ b=3$

Remark

두 무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\,(a\neq 0)$, $y=\sqrt{a'(x-p')}+q'\,(a'\neq 0)$에서 $a=a'$이면 두 함수의 그래프는 평행이동에 의하여 겹쳐질 수 있다.

086-1 $y=\sqrt{x-1}$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, $y=ax$는 원점을 지나는 직선이므로 오른쪽 그림에서 곡선과 직선이 접하려면 $a>0$이어야 한다.



$ax=\sqrt{x-1}$의 양변을 제곱하면

$a^2x^2=x-1 \quad \therefore a^2x^2-x+1=0$

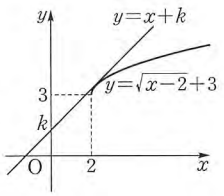
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a^2=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a>0)$

답 $\frac{1}{2}$

086-2 $y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프는 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=x+k$는 기울기가 1이고 y절편이 k인 직선이다.



$y=\sqrt{x-2}+3$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때, $\sqrt{x-2}+3=x+k$에서

$x+k-3=\sqrt{x-2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+(2k-7)x+k^2-6k+11=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-7)^2-4(k^2-6k+11)=0$

$4k^2-28k+49-4k^2+24k-44=0$

$-4k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$

따라서 주어진 함수의 그래프와 직선이 만나지 않으려면 $k>\frac{5}{4}$

답 $k>\frac{5}{4}$

087-1 함수 $y=-\sqrt{2x+1}-1$의 치역이 $\{y\,|\,y\leq -1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\leq -1\}$이다.

$y=-\sqrt{2x+1}-1$에서

$\sqrt{2x+1}=-y-1, \quad 2x+1=(y+1)^2$

$\therefore x=\frac{1}{2}(y+1)^2-\frac{1}{2}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ (x\leq -1)$

답 $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ (x\leq -1)$

087-2 $y=x^2-4x+7$로 놓으면

$y=(x-2)^2+3\ (x\geq 2)$

에서 치역이 $\{y\,|\,y\geq 3\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\geq 3\}$이다.

$y=(x-2)^2+3$에서

$(x-2)^2=y-3, \quad x-2=\pm\sqrt{y-3}$

그런데 $x\geq 2$이므로

$x-2=\sqrt{y-3}$

$\therefore x=\sqrt{y-3}+2$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x-3}+2\ (x\geq 3)$

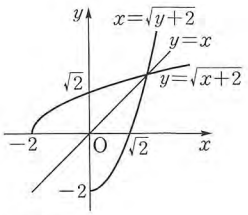
따라서 $a=1$, $b=-3$, $c=2$, $d=3$이므로

$a+b+c+d=3$

답 3

087-3 함수 $y=\sqrt{x+2}$에서 x와 y를 서로 바꾸면 $x=\sqrt{y+2}$이므로 두 함수는 서로 역함수이다. 따라서 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$, $x=\sqrt{y+2}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉 두 함수 $y=\sqrt{x+2}$, $x=\sqrt{y+2}$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\sqrt{x+2}$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



따라서 두 식을 연립한 방정식 $\sqrt{x+2}=x$의 양변을 제곱하면

$x+2=x^2, \quad x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x>0$이므로 $x=2$, $y=2$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

답 $(2,\ 2)$

중단원 연습 문제 ◎ 본책 250~253쪽

01 12 **02** 14 **03** $2-\sqrt{2}$ **04** ⑤ **05** 0
06 $-\frac{1}{2}$ **07** ④ **08** 20 **09** 13
10 191 **11** 3 **12** ⑤ **13** 3 **14** 8
15 $0<k<\frac{1}{2}$ **16** -2 **17** ④ **18** ③
19 ③ **20** ③ **21** ⑤

01 전략 분모를 유리화하여 간단히 정리한다.

풀이
$$\frac{12}{1+\frac{1}{2-\sqrt{3}}}+\frac{12}{1+\frac{1}{2+\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{12}{1+\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}+\frac{12}{1+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$
$$=\frac{12}{1+(2+\sqrt{3})}+\frac{12}{1+(2-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{12}{3+\sqrt{3}}+\frac{12}{3-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{12(3-\sqrt{3})+12(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{72}{6}=12$$
답 12

02 전략 먼저 $x+y$, xy의 값을 구한 후 주어진 식을 $x+y$, xy를 포함한 식으로 변형한다.

풀이 $x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$
$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$
$$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$$
$$=\frac{4^2-2\cdot1}{1}=14$$
답 14

03 해결과정 • $x=2-\sqrt{2}$에서 $x-2=-\sqrt{2}$
양변을 제곱하면 $(x-2)^2=2$
$x^2-4x+4=2$
$\therefore x^2-4x+2=0$ ➔ 30% 배점

$x^4-4x^3+3x^2-3x+2$를 x^2-4x+2로 나누면 몫이 x^2+1, 나머지가 x이므로 ➔ 40% 배점
답구하기 • $x^4-4x^3+3x^2-3x+2$
$=(x^2-4x+2)(x^2+1)+x$
$=x=2-\sqrt{2}$ ($\because x^2-4x+2=0$) ➔ 30% 배점
답 $2-\sqrt{2}$

04 전략 주어진 함수를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\,(a\neq0)$ 꼴로 변형한다.

풀이 ① $6-2x\geq0$에서 $x\leq3$이므로 주어진 무리함수의 정의역은 $\{x|x\leq3\}$이다.
② $\sqrt{6-2x}\geq0$에서 $y=\sqrt{6-2x}+1\geq1$이므로 주어진 무리함수의 치역은 $\{y|y\geq1\}$이다.
③ $x=0$을 $y=\sqrt{6-2x}+1$에 대입하면 $y=\sqrt{6}+1$이므로 $y=\sqrt{6-2x}+1$의 그래프는 점 $(0,\sqrt{6}+1)$을 지난다.
④ $y=\sqrt{6-2x}+1=\sqrt{-2(x-3)}+1$이므로 $y=\sqrt{6-2x}+1$의 그래프는 $y=\sqrt{-2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
⑤ $y=-\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면
$y=-\sqrt{2(x-3)}-1$
이것을 다시 x축에 대하여 대칭이동하면
$-y=-\sqrt{2(x-3)}-1$
$\therefore y=\sqrt{2x-6}+1$
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다. 답 ⑤

05 전략 그래프를 보고 주어진 식을 $f(x)=-\sqrt{a(x-p)}+q\,(a\neq0)$ 꼴로 나타낸 후 그래프가 지나는 한 점의 좌표를 함수식에 대입한다.

풀이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}\,(a<0)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$f(x)=-\sqrt{a(x-4)}+2$
로 놓을 수 있다.
이 함수의 그래프가 점 $(0,-2)$를 지나므로
$-2=-\sqrt{a(0-4)}+2$ $\therefore a=-4$
따라서 $f(x)=-\sqrt{-4(x-4)}+2$이므로
$f(3)=-\sqrt{-4(3-4)}+2=0$
답 0

06 해결과정 • $(f\circ g)^{-1}(1)=(g^{-1}\circ f^{-1})(1)$
$=g^{-1}(f^{-1}(1))$

에서 $f^{-1}(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$\sqrt{k+4}-1=1$

$\sqrt{k+4}=2,\quad k+4=4$

$\therefore k=0$ → 40% 배점

즉 $(f\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(0)$에서 $g^{-1}(0)=m$이라 하면 $g(m)=0$이므로

$\sqrt{2m+1}=0,\quad 2m+1=0$

$\therefore m=-\frac{1}{2}$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore (f\circ g)^{-1}(1)=g^{-1}(f^{-1}(1))$
$=g^{-1}(0)$
$=-\frac{1}{2}$ → 20% 배점

답 $-\frac{1}{2}$

07 전략 주어진 식을 통분하여 간단히 정리한다.

풀이 $\frac{1}{a+\sqrt{ab}}+\frac{1}{b+\sqrt{ab}}$

$=\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}+\frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}$

$=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$=\frac{1}{\sqrt{ab}}$

답 ④

08 전략 주어진 식을 통분하여 계산한 후 x의 값을 대입한다.

풀이 $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1-x}$

$=2\sqrt{x+1}$

$=2\sqrt{99+1}=20$ 답 20

다른 풀이 $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{100}-\sqrt{99}}$

$=\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}+\sqrt{100}+\sqrt{99}}{(\sqrt{100}+\sqrt{99})(\sqrt{100}-\sqrt{99})}$

$=2\sqrt{100}=20$

09 해결과정 • $x=2-\sqrt{3}$을 $ax^3+bx=\frac{1}{x}$에 대입하면

$a(2-\sqrt{3})^3+b(2-\sqrt{3})=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

좌변을 전개하여 정리하면

$a(2-\sqrt{3})^3+b(2-\sqrt{3})$
$=a(8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3})+b(2-\sqrt{3})$
$=(26a+2b)-(15a+b)\sqrt{3}$

우변을 정리하면

$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$
$=2+\sqrt{3}$ → 40% 배점

즉 $(26a+2b)-(15a+b)\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$이고 $26a+2b$, $-(15a+b)$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$26a+2b=2,\quad -(15a+b)=1$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1,\ b=14$ → 50% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=13$ → 10% 배점

답 13

10 전략 먼저 $x+y$, xy의 값을 구한 후 주어진 식을 $x+y$, xy를 포함한 식으로 변형한다.

풀이 $x+y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$
$=10$

$xy=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1$

$\therefore 2x^2-5xy+2y^2=2(x^2+y^2)-5xy$
$=2\{(x+y)^2-2xy\}-5xy$
$=2(x+y)^2-9xy$
$=2\cdot 10^2-9\cdot 1$
$=191$ 답 191

다른 풀이 $x-y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$

$=4\sqrt{6}$

$xy=1$이므로

$2x^2-5xy+2y^2=2(x^2-2xy+y^2)-xy$

$=2(x-y)^2-xy$

$=2\cdot(4\sqrt{6})^2-1$

$=191$

11 문제이해 • $(a\circledcirc b)+(2b\circledcirc a)=1$에서

$(a+b\sqrt{2})+(2b+a\sqrt{2})=1$

$\therefore (a+2b)+(a+b)\sqrt{2}=1$ ➔ 40% 배점

해결과정 • $a+2b$, $a+b$가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+2b=1$, $a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$ ➔ 40% 배점

답구하기 • $\therefore (-a)\circledcirc\sqrt{2b}=1\circledcirc\sqrt{2}$

$=1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$=3$ ➔ 20% 배점

답 3

12 전략 $(2-\sqrt{3})^{21}=(2-\sqrt{3})^{20}(2-\sqrt{3})$임을 이용한다.

풀이 $(2-\sqrt{3})^{21}=(2-\sqrt{3})^{20}(2-\sqrt{3})$이므로

$x+y\sqrt{3}=(a+b\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$

$=(2a-3b)+(-a+2b)\sqrt{3}$

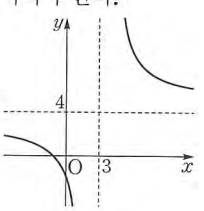
a, b, x, y가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=2a-3b$, $y=-a+2b$ 답 ⑤

13 전략 $k<0$일 때와 $k>0$일 때로 나누어 그래프를 그려 본다.

풀이 $k<0$이면 함수 $y=\dfrac{k}{x-3}+4$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않으므로 $k>0$이어야 한다.

또 [그림 1]과 같이 그래프가 y축과 $y<0$인 부분에서 만날 때에만 이 함수의 그래프가 모든 사분면을 지나므로



[그림 1]

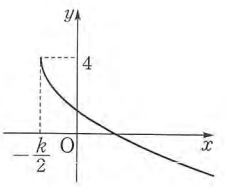
$\dfrac{k}{0-3}+4<0$

$\therefore k>12$ …… ㉠

한편 $y=-\sqrt{2x+k}+4=-\sqrt{2\left(x+\dfrac{k}{2}\right)}+4$에서

$k<0$이면 이 함수의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으므로 $k>0$이어야 한다.

또 [그림 2]와 같이 그래프가 y축과 $y>0$인 부분에서 만날 때에만 이 함수의 그래프가 제1, 2, 4사분면을 지나므로



[그림 2]

$-\sqrt{k}+4>0$

$\sqrt{k}<4$

$\therefore 0<k<16$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $12<k<16$

따라서 구하는 정수 k는 13, 14, 15의 3개이다.

답 3

14 문제이해 • $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면

$y=\sqrt{a(x-1)}-4$ $(a\neq 0)$ ➔ 30% 배점

해결과정 • 이 그래프가 직선 $y=x-3$에 접하므로 두 식을 연립하여 얻은 방정식

$\sqrt{a(x-1)}-4=x-3$, 즉 $\sqrt{a(x-1)}=x+1$

의 양변을 제곱하면

$ax-a=x^2+2x+1$

$\therefore x^2+(2-a)x+1+a=0$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2-a)^2-4(1+a)=0$

$a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a\neq 0$) ➔ 40% 배점

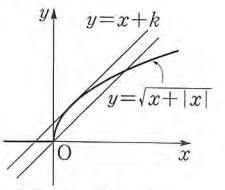
답 8

15 문제이해 • $x\geq 0$일 때,

$y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$

$x<0$일 때, $y=\sqrt{x+|x|}=\sqrt{x+(-x)}=0$

함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



➔ 40% 배점

해결과정 • (i) 직선 $y=x+k$가 원점을 지날 때,

$k=0$

(ii) $y=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 접할 때,

두 식을 연립하여 얻은 방정식 $\sqrt{2x}=x+k$의 양변을 제곱하면

$2x=x^2+2kx+k^2$

$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-k^2=0$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ → 40% 배점

답구하기 • (i), (ii)에서 $0<k<\frac{1}{2}$일 때, 함수 $y=\sqrt{x+|x|}$의 그래프와 직선 $y=x+k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $\sqrt{x+|x|}=x+k$는 서로 다른 세 실근을 갖는다. → 20% 배점

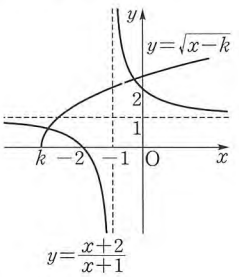
답 $0<k<\frac{1}{2}$

16 전략 $n(A\cap B)=2$이려면 두 집합 A, B가 나타내는 그래프의 교점이 2개이어야 한다.

풀이 $n(A\cap B)=2$이려면 두 함수 $y=\frac{x+2}{x+1}$, $y=\sqrt{x-k}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$y=\frac{x+2}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=\frac{1}{x+1}+1$

이므로 두 함수 $y=\frac{x+2}{x+1}$, $y=\sqrt{x-k}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면

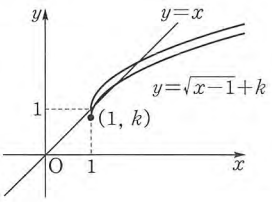
$k\le -2$

따라서 구하는 k의 최댓값은 -2이다.

답 -2

17 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 무리함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



앞의 그림에서 $y=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값은 1이다.

답 ④

Remark

두 그래프가 접하려면 $\sqrt{x-1}+k=x$에서

$\sqrt{x-1}=x-k$

양변을 제곱하면 $x-1=x^2-2kx+k^2$

$\therefore x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2k+1)\}^2-4(k^2+1)=0$ $\therefore k=\frac{3}{4}$

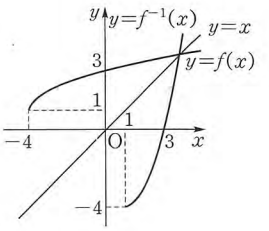
따라서 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $\frac{3}{4}<k\le 1$이다.

18 전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용한다.

풀이 주어진 그래프에서 $a=4$, $b=1$이므로

$f(x)=\sqrt{x+4}+1$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.



$\sqrt{x+4}+1=x$에서 $\sqrt{x+4}=x-1$

양변을 제곱하면

$x+4=(x-1)^2$, $x^2-3x-3=0$

$\therefore x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ ($\because x\ge 1$)

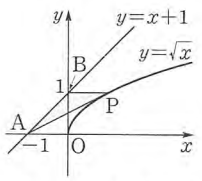
따라서 구하는 교점의 좌표가 $\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$이므로

$p+q=3+\sqrt{21}$

답 ③

19 전략 밑변의 길이가 일정한 삼각형의 넓이는 삼각형의 높이가 최소일 때 최소가 된다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 △ABP에서 선분 AB를 밑변으로 생각하면 점 P에서 직선 AB에 이르는 거리가 높이가 된다.



따라서 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}$에 접할 때의 접점이 P일 때, △ABP의 넓이는 최소가 된다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식이 $y=x+1$이므로 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행하면서 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 접하는 직선을

$y=x+k$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다. $y=\sqrt{x}$와 $y=x+k$를 연립하여 얻은 방정식 $x+k=\sqrt{x}$의 양변을 제곱하면

$x^2+2kx+k^2=x$

$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(2k-1)^2-4k^2=0, \quad -4k+1=0$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

직선 $y=x+\frac{1}{4}$ 위의 한 점 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|0-\frac{1}{4}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

이고, 밑변 AB의 길이는

$\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$

따라서 △ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{3}{8}$$

답 ③

20 전략 주어진 그래프에서 점근선과 y절편을 이용하여 a, b, c의 값의 부호를 구한다.

풀이 $y=\frac{bx+c}{x-a}=\frac{b(x-a)+ab+c}{x-a}$

$=\frac{ab+c}{x-a}+b$

의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$, $y=b$이므로 주어진 그래프에서

$a<0$, $b>0$

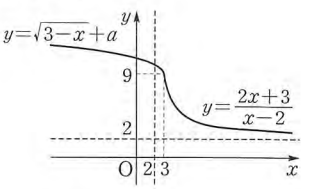
또 $y=\frac{bx+c}{x-a}$의 그래프가 y축과 x축의 아랫부분에서 만나므로

$-\frac{c}{a}<0 \quad \therefore c<0 \ (\because a<0)$

따라서 $y=a\sqrt{x+b}+c$의 그래프는 $y=a\sqrt{x}$ ($a<0$)의 그래프를 x축의 방향으로 $-b$ ($-b<0$)만큼, y축의 방향으로 c ($c<0$)만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다. 답 ③

21 전략 주어진 조건을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

풀이 조건 (가)에서 치역이 $\{y|y>2\}$이고, 조건 (나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉 $f(3)=9$이므로 $a=9$

이때 $f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이므로

$f(2)f(k)=10f(k)=40$

$\therefore f(k)=4$

$f(k)=4$에서 $k>3$이므로

$\frac{2k+3}{k-2}=4, \quad 2k+3=4k-8$

$\therefore k=\frac{11}{2}$

답 ⑤

10 등차수열

유제

본책 260~277쪽

088-1 (1) $a_1=1=1^2$, $a_2=4=2^2$, $a_3=9=3^2$, $a_4=16=4^2$, $a_5=25=5^2$, …

따라서 주어진 수열의 일반항은 $a_n=n^2$

(2) $a_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot(1+1)}$

$a_2=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot(2+1)}$

$a_3=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3\cdot(3+1)}$

$a_4=\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4\cdot(4+1)}$

$a_5=\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{5\cdot(5+1)}$

⋮

따라서 주어진 수열의 일반항은

$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

(3) $a_1=1=\frac{1}{9}\cdot 9=\frac{1}{9}(10-1)$

$a_2=11=\frac{1}{9}\cdot 99=\frac{1}{9}(10^2-1)$

$a_3=111=\frac{1}{9}\cdot 999=\frac{1}{9}(10^3-1)$

$a_4=1111=\frac{1}{9}\cdot 9999=\frac{1}{9}(10^4-1)$

$a_5=11111=\frac{1}{9}\cdot 99999=\frac{1}{9}(10^5-1)$

⋮

따라서 주어진 수열의 일반항은

$a_n=\frac{1}{9}(10^n-1)$

답 (1) $a_n=n^2$ (2) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ (3) $a_n=\frac{1}{9}(10^n-1)$

089-1 (1) 공차를 d라 하면 제10항이 2이므로

$20+(10-1)d=2$

$\therefore d=-2$

(2) 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 5, 공차가 $8-5=3$이므로

$a_n=5+(n-1)\cdot 3=3n+2$

제n항이 29라 하면

$3n+2=29$, $3n=27$

$\therefore n=9$

따라서 29는 제9항이다.

(3) 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 70, 공차가 $66-70=-4$이므로

$a_n=70+(n-1)\cdot(-4)=-4n+74$

처음으로 0보다 작아지는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-4n+74<0$에서

$4n>74$ $\therefore n>18.5$

따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 19이므로 처음으로 0보다 작아지는 항은 제19항이다.

답 (1) −2 (2) 제9항 (3) 제19항

090-1 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 제3항과 제9항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$(a+2d)+(a+8d)=0$

$\therefore a+5d=0$ …… ㉠

또 제5항이 2이므로

$a+4d=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10$, $d=-2$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=10+(n-1)\cdot(-2)=-2n+12$

답 $a_n=-2n+12$

090-2 첫째항을 a, 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_{10}=a+9d=23$ …… ㉠

$a_{20}=a+19d=53$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-4$, $d=3$

따라서 일반항 a_n은

$a_n=-4+(n-1)\cdot 3=3n-7$

제n항이 세 자리 정수라고 하면

$100\le 3n-7\le 999$

$\frac{107}{3}\le n\le\frac{1006}{3}$

$\therefore 35.\times\times\times\le n\le 335.\times\times\times$

따라서 세 자리 정수가 되는 항은 제36항부터 제335항까지이다.

답 제36항부터 제335항까지

091-1 등차수열 32, x_1, x_2, …, x_{10}, -34의 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=32+(n-1)d$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 제12항이 -34이므로

$32+(12-1)d=-34$

$11d=-66$

$\therefore d=-6$

답 -6

091-2 등차수열 5, x_1, x_2, …, x_n, 45의 첫째항은 5, 공차는 4이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=5+(n-1)\cdot 4=4n+1$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 제$(n+2)$항이 45이므로

$4(n+2)+1=45$, $4(n+2)=44$

$n+2=11$

$\therefore n=9$

답 9

092-1 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

세 수의 합이 18이므로

$(a-d)+a+(a+d)=18$ …… ㉠

세 수의 곱이 120이므로

$(a-d)a(a+d)=120$ …… ㉡

㉠에서 $3a=18$

$\therefore a=6$

$a-6$을 ㉡에 대입하면

$(6-d)\cdot 6\cdot(6+d)=120$

$36-d^2=20$, $d^2=16$

$\therefore d=\pm 4$

따라서 구하는 세 수는 2, 6, 10이므로 구하는 합은

$2^2+6^2+10^2=4+36+100=140$

답 140

092-2 삼차방정식 $x^3-6x^2-4x+k=0$의 세 근을 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=6$

$3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$를 방정식에 대입하면

$2^3-6\cdot 2^2-4\cdot 2+k=0$

$\therefore k=24$

답 24

092-3 등차수열을 이루는 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$라 하자.

네 수의 합이 24이므로

$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=24$ …… ㉠

가운데 두 수의 곱이 처음 수와 마지막 수의 곱보다 32가 크므로

$(a-d)(a+d)=(a-3d)(a+3d)+32$ …… ㉡

㉠에서 $4a=24$

$\therefore a=6$

$a=6$을 ㉡에 대입하면

$(6-d)(6+d)=(6-3d)(6+3d)+32$

$36-d^2=36-9d^2+32$, $8d^2=32$

$d^2=4$ $\therefore d=\pm 2$

따라서 구하는 네 수는 0, 4, 8, 12

답 0, 4, 8, 12

093-1 세 수 $4a-3$, a^2+1, 3이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$a^2+1=\frac{(4a-3)+3}{2}$$

$a^2+1=2a$, $a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$ $\therefore a=1$

따라서 세 수는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$1+2+3=6$

답 6

093-2 $f(x)=2x^2+ax$라 하면 $f(x)$를 $x+1$, $x-2$, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 각각

$f(-1)=2-a$, $f(2)=8+2a$, $f(3)=18+3a$

이때 $f(-1)$, $f(2)$, $f(3)$이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$8+2a=\frac{(2-a)+(18+3a)}{2}$$

$8+2a=10+a$ $\therefore a=2$

답 2

094-1 $\frac{1}{4}$, a, b, c, d, e, 1이 이 순서로 조화수열을 이루므로 각 항의 역수로 이루어진 수열

$4, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}, 1$

은 이 순서로 등차수열을 이룬다.

이 등차수열의 공차를 x라 하면 첫째항이 4, 제7항이 1이므로

$4+(7-1)x=1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{7}{2}$, $\frac{1}{b}=3$, $\frac{1}{c}=\frac{5}{2}$, $\frac{1}{d}=2$, $\frac{1}{e}=\frac{3}{2}$이므로

$a=\frac{2}{7}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{5}$, $d=\frac{1}{2}$, $e=\frac{2}{3}$

답 $a=\frac{2}{7}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{2}{5}$, $d=\frac{1}{2}$, $e=\frac{2}{3}$

094-2 a, b, c가 이 순서로 조화수열을 이루므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$에서 $b=\frac{2ac}{a+c}$

$\therefore \frac{b}{a-b}+\frac{b}{c-b}$

$=\frac{\frac{2ac}{a+c}}{a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{\frac{2ac}{a+c}}{c-\frac{2ac}{a+c}}$

$=\frac{2ac}{a(a+c)-2ac}+\frac{2ac}{c(a+c)-2ac}$

$=\frac{2ac}{a(a-c)}+\frac{2ac}{c(c-a)}$

$=\frac{2c}{a-c}+\frac{2a}{c-a}$

$=\frac{2c-2a}{a-c}=\frac{-2(a-c)}{a-c}$

$=-2$

답 -2

095-1 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=130$에서

$a+2d=26$ …… ㉠

$S_8=\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=172$에서

$2a+7d=43$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=32$, $d=-3$

$\therefore S_{10}=\frac{10\{2\cdot 32+(10-1)\cdot(-3)\}}{2}=185$

답 185

095-2 등차수열

$5, x_1, x_2, \cdots, x_n, 41$

의 첫째항이 5, 끝항이 41, 항의 개수가 $n+2$, 수열의 합이 230이므로

$\frac{(n+2)(5+41)}{2}=230$

$23(n+2)=230, \quad n+2=10$

$\therefore n=8$

따라서 등차수열

$5, x_1, x_2, \cdots, x_8, 41$

의 공차를 d라 하면 제10항이 41이므로

$5+(10-1)d=41$

$9d=36 \quad \therefore d=4$

답 4

096-1 이 수열의 공차를 d라 하면 첫째항부터 제8항까지의 합이 -80이므로

$\frac{8\{2\cdot(-17)+(8-1)d\}}{2}=-80$

$-34+7d=-20 \quad \therefore d=2$

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 첫째항이 -17, 공차가 2이므로

$a_n=-17+(n-1)\cdot 2=2n-19$

처음으로 양수가 나오는 항은 $a_n>0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $2n-19>0$에서

$2n>19 \quad \therefore n>\frac{19}{2}=9.5$

따라서 처음으로 양수가 나오는 항은 제10항이다.

(2) 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{n\{2\cdot(-17)+(n-1)\cdot 2\}}{2}$

$=n(n-18)=n^2-18n$

$=(n-9)^2-81$

이므로 $n=9$일 때 S_n이 최소가 된다.

따라서 제9항까지의 합이 최소가 된다.

(3) 제n항까지의 합이 40이 된다고 하면

$S_n=n^2-18n=40, \quad n^2-18n-40=0$

$(n+2)(n-20)=0$

$\therefore n=20 \ (\because n>0)$

따라서 제20항까지의 합이 40이 된다.

답 (1) 제10항 (2) 제9항 (3) 제20항

097-1 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2\cdot 1^2-3\cdot 1=-1$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=4n-5$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=4n-5$

$a_n>35$에서

$4n-5>35$, $4n>40$

$\therefore n>10$

따라서 $a_n>35$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 11이다. 답 11

097-2 $S_n=3n^2-2n$이므로 $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2-2n-\{3(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=6n-5$

$a_n=6n-5$에 n 대신 $2n$을 대입하면

$a_{2n}=12n-5=7+(n-1)\cdot 12$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 7이고 공차가 12인 등차수열이므로

$$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\frac{n\{2\cdot 7+(n-1)\cdot 12\}}{2}$$

$$=6n^2+n$$

답 $6n^2+n$

중단원 연습 문제 ◎ 본책 278~281쪽

01 제17항 **02** 3 **03** -2, 2, 6

04 ⑤ **05** 제7항, 최댓값: 196

06 제4항 **07** ② **08** 22 **09** 10 **10** ②

11 ⑤ **12** 1 : 2 : 3 **13** 13 **14** ②

15 16 **16** 66 **17** 73 **18** ② **19** 18

20 45 **21** 145 **22** ④

01 전략 일반항 a_n을 구하여 $a_n=33$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구한다.

풀이 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_n=a+(n-1)d$

$a_3=5$에서

$a+2d=5$ …… ㉠

$a_{10}=19$에서

$a+9d=19$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $d=2$

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$

제n항이 33이라 하면

$2n-1=33$, $2n=34$

$\therefore n=17$

따라서 33은 제17항이다. 답 제17항

02 전략 제5항이 -7임을 이용하여 공차를 구한다.

풀이 등차수열 9, a, b, c, -7의 공차를 d, 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=9+(n-1)d$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 제5항이 -7이므로

$9+(5-1)d=-7$, $9+4d=-7$

$4d=-16$ $\therefore d=-4$

$\therefore a=9-4=5$, $b=5-4=1$, $c=1-4=-3$

$\therefore a+b+c=5+1+(-3)=3$

답 3

다른 풀이 b는 9와 -7의 등차중항이므로

$$b=\frac{9+(-7)}{2}=1$$

등차수열 9, a, b, c, -7의 공차를 d라 하면

$a=b-d$, $c=b+d$

$\therefore a+b+c=(b-d)+b+(b+d)$

$=3b-3\cdot 1-3$

03 전략 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$로 놓고, 주어진 조건에 맞는 식을 세운다.

풀이 등차수열을 이루는 세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하자.

세 수의 합이 6이므로

$(a-d)+a+(a+d)=6$ …… ㉠

세 수의 곱이 -24이므로

$(a-d)a(a+d)=-24$ …… ㉡

㉠에서 $3a=6$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하면

$(2-d)\cdot 2\cdot(2+d)=-24$, $4-d^2=-12$

$d^2=16$ $\therefore d=\pm 4$

따라서 구하는 세 수는 -2, 2, 6

답 -2, 2, 6

04 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 첫째항과 공차를 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4=28$에서

$$\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=28$$

$$\therefore 2a+3d=14 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$S_9=153$에서

$$\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=153$$

$$\therefore a+4d=17 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $d=4$

$$\therefore S_{15}=\frac{15\{2\cdot1+(15-1)\cdot4\}}{2}=435$$

답 ⑤

05 전략 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n을 n에 대한 이차식으로 나타낸 후, 이차식의 최대·최소를 이용한다.

풀이 첫째항이 52, 공차가 -8이므로 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2\cdot52+(n-1)\cdot(-8)\}}{2}=-4n^2+56n$$

$$=-4(n-7)^2+196$$

따라서 $n=7$, 즉 제7항까지의 합이 최대가 되고, 그 때의 최댓값은 196이다. 답 제7항, 최댓값: 196

다른 풀이 첫째항이 52, 공차가 -8이므로 주어진 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=52+(n-1)\cdot(-8)=-8n+60$$

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-8n+60<0$에서

$$-8n<-60 \quad \therefore n>\frac{60}{8}=7.5$$

따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제8항이다. 즉 주어진 등차수열은 첫째항부터 제7항까지가 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대가 된다.

첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 S_n의 최댓값은

$$S_7=\frac{7\{2\cdot52+(7-1)\cdot(-8)\}}{2}=196$$

06 해결과정 • $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=-4\cdot1^2+24\cdot1=20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=-4n^2+24n-\{-4(n-1)^2+24(n-1)\}$$

$$=-8n+28 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$$a_n=-8n+28$$ → 50% 배점

처음으로 음수가 되는 항은 $a_n<0$을 만족시키는 최초의 항이므로 $-8n+28<0$에서

$$-8n<-28$$

$$\therefore n>\frac{28}{8}=3.5$$ → 30% 배점

답구하기 • 따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 4이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제4항이다. → 20% 배점

답 제4항

07 전략 일반항에 n 대신 $2n$ 또는 $n-1$을 대입하거나 반례를 찾아 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ㄱ. $a_n=5n$에 n 대신 $2n$을 대입하면

$$a_{2n}=5\cdot2n=10n$$

ㄴ. $n+1=k$로 놓으면 $n=k-1$이므로

$a_{n+1}=2n+1$에서

$$a_k=2(k-1)+1=2k-1$$

$$\therefore a_n=2n-1 \ (n\geq2)$$

ㄷ. [반례] 수열 $\{a_n\}$이 0, 2, 0, 8, 0, 18, …이면

$a_{2n}=2n^2$이지만 $a_n\neq n^2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

08 해결과정 • 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=10$에서 $a+2d=10$ $\cdots\cdots ㉠$ → 20% 배점

$a_7:a_9=7:8$에서

$$(a+6d):(a+8d)=7:8$$

$$7(a+8d)=8(a+6d)$$

$$\therefore a=8d \quad \cdots\cdots ㉡$$ → 30% 배점

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=8$, $d=1$ → 20% 배점

답구하기 • $\therefore a_{15}=8+(15-1)\cdot1=22$ → 30% 배점

답 22

09 전략 첫째항을 a, 공차를 d로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, d에 대한 식을 세운다.

풀이 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=16$에서 $a+d=16$ …… ㉠

$a_5=10$에서 $a+4d=10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=18,\ d=-2$

따라서 $a_k=0$에서 $18+(k-1)\cdot(-2)=0$

$-2k=-20$ $\therefore k=10$ 답 10

10 전략 첫째항을 a로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a의 값을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 공차가 6이므로 첫째항을 a라 하면

$a_2=a+6,\ a_3=a+2\cdot6=a+12$

$|a_2-3|=|a_3-3|$이므로

$|a+6-3|=|a+12-3|$

$|a+3|=|a+9|$

이때 $a+3\neq a+9$이므로

$a+3=-(a+9)$

즉 $2a=-12$이므로

$a=-6$

$\therefore a_5=-6+(5-1)\cdot6=18$ 답 ②

다른 풀이 $|a_2-3|=|a_3-3|$이므로 절댓값의 정의에 의하여 a_2, a_3을 좌표로 하는 점에서 3을 좌표로 하는 점까지의 거리가 같다.

즉 $\frac{a_2+a_3}{2}=3$이므로 $a_2+a_3=6$

수열 $\{a_n\}$의 공차가 6이므로 첫째항을 a라 하면

$(a+6)+(a+2\cdot6)=6$ $\therefore a=-6$

$\therefore a_5=-6+(5-1)\cdot6=18$

11 전략 공차를 d로 놓고 6개의 내각의 크기를 d에 대한 식으로 나타낸 후, 육각형의 내각의 크기의 총합을 이용한다.

풀이 공차를 d라 하면 6개의 내각의 크기는

$90°,\ 90°+d,\ 90°+2d,\ 90°+3d,\ 90°+4d,$

$90°+5d$

육각형의 내각의 크기의 총합은

$180°\times(6-2)=720°$

이므로

$90°+(90°+d)+(90°+2d)+(90°+3d)$

$+(90°+4d)+(90°+5d)=720°$

$540°+15d=720°,$ $15d=180°$

$\therefore d=12°$

따라서 가장 큰 내각의 크기는

$90°+5\times12°=150°$

답 ⑤

Remark 다각형의 내각의 크기의 총합

n각형의 내각의 크기의 총합은 $180°\times(n-2)$

12 전략 y는 x와 z의 등차중항, y^2은 $-x^2$과 z^2의 등차중항임을 이용하여 x, y, z 사이의 관계식을 세운다.

풀이 y는 x와 z의 등차중항이므로

$y=\frac{x+z}{2}$ …… ㉠

y^2은 $-x^2$과 z^2의 등차중항이므로

$y^2=\frac{-x^2+z^2}{2}$

$=\frac{(x+z)(-x+z)}{2}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $y=-x+z$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$-x+z=\frac{x+z}{2},$ $-2x+2z=x+z$

$\therefore z=3x$

$z=3x$를 ㉢에 대입하면

$y=-x+3x=2x$

$\therefore x:y:z=x:2x:3x=1:2:3$

답 1 : 2 : 3

13 해결과정 • $a_7a_8<0$에서

$(19+6d)(19+7d)<0$

$\therefore -\frac{19}{6}<d<-\frac{19}{7}$

그런데 d는 정수이므로 $d=-3$ ➔ 30% 배점

$\therefore S_n=\frac{n\{2\cdot19+(n-1)\cdot(-3)\}}{2}$

$=\frac{n(-3n+41)}{2}$ ➔ 20% 배점

$S_n>0$에서

$\frac{n(-3n+41)}{2}>0,$ $n(3n-41)<0$

$\therefore 0<n<\frac{41}{3}$ ➔ 30% 배점

답구하기 • 따라서 S_n이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 최댓값은 13이다. ➔ 20% 배점

답 13

14 전략 구하는 값을 S_n을 이용하여 나타내어 본다.

풀이 $a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$
$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})$
$-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$
$=S_{20}-S_{10}$
$=(20^2-20)-(10^2-10)$
$=380-90=290$

답 ②

15 전략 S_{2n-1}, S_{2n}을 n에 대한 식으로 나타내고, 이것을 이용하여 a_8의 값을 구한다.

풀이 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이므로
$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\cdot(-3)=S_1-3n+3$
수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이므로
$S_{2n}=S_2+(n-1)\cdot2=S_2+2n-2$
$\therefore a_8=S_8-S_7$
$=(S_2+2\cdot4-2)-(S_1-3\cdot4+3)$
$=S_2-S_1+15$
$=a_2+15$ ($\because a_2=S_2-S_1$)
$=1+15$ ($\because a_2=1$)
$=16$

답 16

16 전략 $S_n-S_{n-1}=a_n$ $(n\geq2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 $n=1$일 때,
$a_1=S_1=-2\cdot1^2+23\cdot1=21$ …… ㉠
$n\geq2$일 때,
$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=-2n^2+23n-\{-2(n-1)^2+23(n-1)\}$
$=-4n+25$ …… ㉡
㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로
$a_n=-4n+25$
$a_n>0$에서 $-4n+25>0$
$\therefore n<\frac{25}{4}=6.25$
따라서 $a_n>0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값이 6이므로 첫째항부터 제6항까지는 양수이다.
따라서 구하는 합은 첫째항부터 제6항까지의 합이므로
$S_6=-2\cdot6^2+23\cdot6=66$

답 66

17 해결과정 • 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는
$a_2-a_1=3-1=2$
$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$ → 30% 배점
$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=S_n$이라 하면
$S_n=a_n{}^2=(2n-1)^2$
이므로
$b_1=S_1=(2\cdot1-1)^2=1$
$b_{10}=S_{10}-S_9=(2\cdot10-1)^2-(2\cdot9-1)^2$
$=19^2-17^2=72$ → 60% 배점
답구하기 • $\therefore b_1+b_{10}=1+72=73$ → 10% 배점

답 73

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는
$a_2-a_1=3-1=2$
$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot2=2n-1$
$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=S_n$이라 하면
$S_n=a_n{}^2=(2n-1)^2$
$n=1$일 때,
$b_1=S_1=(2\cdot1-1)^2=1$ …… ㉠
$n\geq2$일 때,
$b_n=S_n-S_{n-1}$
$=(2n-1)^2-\{2(n-1)-1\}^2$
$=8n-8$ …… ㉡
㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로
$b_1=1$, $b_n=8n-8$ $(n\geq2)$
$\therefore b_1+b_{10}=1+(8\cdot10-8)=73$

18 전략 $3a_{n+1}-2a_n=b_n$으로 놓고, $b_{n+1}-b_n$을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 공차가 -3인 등차수열이므로
$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n=-3$
$3a_{n+1}-2a_n=b_n$이라 하면
$d=b_{n+1}-b_n$
$=(3a_{n+2}-2a_{n+1})-(3a_{n+1}-2a_n)$
$=3(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n)$
$=3\cdot(-3)-2\cdot(-3)$
$=-3$
$\therefore d^2=(-3)^2=9$

답 ②

19 전략 세 선분 AD, CD, AB의 길이를 각각 $a-d$, a, $a+d$로 놓고 닮음인 두 삼각형의 대응하는 변의 길이의 비가 같음을 이용한다.

풀이 $\overline{AD}=a-d$, $\overline{CD}=a$, $\overline{AB}=a+d\,(a>d>0)$라 하자.

$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AD}:\overline{AB}$, $\overline{AB}^2=\overline{AC}\cdot\overline{AD}$

$(a+d)^2=\{(a-d)+a\}(a-d)$

$=(2a-d)(a-d)$

$a^2+2ad+d^2=2a^2-3ad+d^2$

$a^2=5ad$ $\therefore a=5d\ (\because a\neq0)$

$\therefore \overline{AD}=5d-d=4d$,

$\overline{CD}=5d$, $\overline{AB}=5d+d=6d$

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$이므로

$(6\sqrt{5})^2=(9d)^2-(6d)^2$, $180=45d^2$

$d^2=4$ $\therefore d=2\ (\because d>0)$

$\therefore \overline{AC}=9d=9\cdot2=18$ 답 18

Remark

$\triangle ABD$와 $\triangle ACB$에서

$\angle A$는 공통, $\angle ADB=\angle ABC=90^\circ$

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ACB$ (AA 닮음)

20 해결과정 • a_{45}는 a_{10}과 a_{80}, a_{11}과 a_{79}, a_{12}와 a_{78}, …, a_{44}와 a_{46}의 등차중항이므로

$2a_{45}=a_{10}+a_{80}=a_{11}+a_{79}$

$=a_{12}+a_{78}=\cdots=a_{44}+a_{46}$

$\therefore a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{80}$

$=(a_{10}+a_{80})+(a_{11}+a_{79})+(a_{12}+a_{78})+\cdots$

$+(a_{44}+a_{46})+a_{45}$

$=35\cdot2a_{45}+a_{45}=71a_{45}$ …… ㉠

➡ 30% 배점

b_{55}는 b_{20}과 b_{90}, b_{21}과 b_{89}, b_{22}와 b_{88}, …, b_{54}와 b_{56}의 등차중항이므로

$2b_{55}=b_{20}+b_{90}=b_{21}+b_{89}$

$=b_{22}+b_{88}=\cdots=b_{54}+b_{56}$

$\therefore b_{20}+b_{21}+b_{22}+\cdots+b_{90}$

$=(b_{20}+b_{90})+(b_{21}+b_{89})+(b_{22}+b_{88})+\cdots$

$+(b_{54}+b_{56})+b_{55}$

$=35\cdot2b_{55}+b_{55}=71b_{55}$ …… ㉡

➡ 30% 배점

㉠, ㉡에서 $71a_{45}=71b_{55}$

$\therefore a_{45}=b_{55}$

이때 b_{55}는 b_{30}과 b_{80}의 등차중항이므로

$b_{55}=\dfrac{b_{30}+b_{80}}{2}$ ➡ 30% 배점

답구하기 • 즉 $a_m=b_{55}$이므로 $m=45$ ➡ 10% 배점

답 45

Remark

등차수열을 이루는 5개의 수

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

에 대하여 세 수 a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 a_3은 a_2와 a_4의 등차중항이다. ➡ $2a_3=a_2+a_4$

또 세 수 a_1, a_3, a_5는 이 순서로 등차수열을 이루므로 a_3은 a_1과 a_5의 등차중항이다. ➡ $2a_3=a_1+a_5$

21 전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1, 공차가 3이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\dfrac{n\{2\cdot1+(n-1)\cdot3\}}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

$\therefore \dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\dfrac{3n-1}{2}$

$b_n=\dfrac{3n-1}{2}$이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 $\dfrac{3}{2}$인 등차수열이므로 수열 b_1, b_3, b_5, …는 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore$ (주어진 식) $=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{19}$

$=\dfrac{10(b_1+b_{19})}{2}$

$=\dfrac{10(1+28)}{2}$

$=145$

답 145

다른 풀이 $a_n=1+(n-1)\cdot3=3n-2$이고

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\dfrac{(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{2}$

이때 a_n은 a_1과 a_{2n-1}의 등차중항이므로

$a_n=\dfrac{a_1+a_{2n-1}}{2}$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}=(2n-1)a_n$

$\therefore$ (주어진 식)

$=a_1+\dfrac{3a_2}{3}+\dfrac{5a_3}{5}+\cdots+\dfrac{19a_{10}}{19}$

$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$

$=\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10(1+28)}{2}=145$

22 전략 공차가 0이 아닌 등차수열의 합은 상수항이 0인 이차식임을 이용하여 p, q의 값을 구한다.

풀이 ㄱ. 등차수열의 합 A_n, B_n은 상수항이 0인 이차식이므로 A_n+B_n도 상수항이 0이다.

$q=0$

또 $A_1+B_1=a_1+b_1=0$이므로

$3+p+q=0$ $\therefore p=-3$ ($\because q=0$)

따라서 $p=-3$, $q=0$이므로 $p-q=-3$

ㄴ. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항을 합하여 만든 수열 $\{a_n+b_n\}$은 공차가 d_a+d_b인 등차수열이다.

ㄱ에서 $A_n+B_n=3n^2-3n$이므로

$n=1$일 때,

$a_1+b_1=0$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}&a_n+b_n\\&=(A_n-A_{n-1})+(B_n-B_{n-1})\\&=(A_n+B_n)-(A_{n-1}+B_{n-1})\\&=3n^2-3n-\{3(n-1)^2-3(n-1)\}\\&=6n-6\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항은

$a_n+b_n=6n-6$

따라서 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 0이고 공차가 6인 등차수열이다.

ㄷ. $d_a+d_b=6$이고 $d_a>0$, $d_b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$d_a+d_b\geq 2\sqrt{d_a d_b}$, $\sqrt{d_a d_b}\leq 3$

$\therefore d_a d_b\leq 3^2=9$

(단, 등호는 $d_a=d_b=3$일 때 성립)

따라서 $d_a d_b$의 최댓값은 9이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

11 등비수열

유제

본책 287~301쪽

098-1 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2=12$에서 $a+ar=12$

$\therefore a(1+r)=12$ …… ㉠

$a_4+a_5=324$에서 $ar^3+ar^4=324$

$\therefore ar^3(1+r)=324$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=27$ $\therefore r=3$ ($\because r$는 실수)

$r=3$을 ㉠에 대입하면

$4a=12$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$ 답 $a_n=3^n$

098-2 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$a_8=ar^7=\frac{3}{128}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^5=\frac{1}{32}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r$는 실수)

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{2^{n-1}}$

$|a_{n+1}-a_n|<\frac{1}{1000}$에서

$\left|\frac{3}{2^n}-\frac{3}{2^{n-1}}\right|<\frac{1}{1000}$

$\frac{3}{2^n}<\frac{1}{1000}$, $2^n>3000$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$n\geq 12$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 12이다.

답 12

099-1 등비수열 400, a, b, c, $\frac{25}{16}$의 공비를 r ($r>0$), 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=400\cdot r^{n-1}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제 5 항이 $\frac{25}{16}$이므로

$400r^4=\frac{25}{16}$, $r^4=\frac{1}{256}$

$\therefore r=\frac{1}{4}$ ($\because r>0$) 답 $\frac{1}{4}$

099-2 등비수열 4, x_1, x_2, x_3, x_4, $\frac{243}{256}$의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면 $a_n=4\cdot r^{n-1}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제6항이 $\frac{243}{256}$이므로

$4r^5=\frac{243}{256}$, $r^5=\frac{243}{1024}=\left(\frac{3}{4}\right)^5$

$\therefore r=\frac{3}{4}$ ($\because r$는 실수)

$\therefore a_n=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

x_3은 제4항이므로

$x_3=a_4=4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{16}$ 답 $\frac{27}{16}$

100-1 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하자.

세 실수의 합이 42이므로 $a+ar+ar^2=42$

$\therefore a(1+r+r^2)=42$ …… ㉠

세 실수의 곱이 512이므로 $a\cdot ar\cdot ar^2=512$

$(ar)^3=512$ $\therefore ar=8$ ($\because ar$는 실수)

즉 $a=\frac{8}{r}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{8}{r}(1+r+r^2)=42$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$8r^2-34r+8=0$, $4r^2-17r+4=0$

$(4r-1)(r-4)=0$ $\therefore r=\frac{1}{4}$ 또는 $r=4$

$r=\frac{1}{4}$일 때 $a=32$, $r=4$일 때 $a=2$이므로 구하는 세 수는 2, 8, 32 답 2, 8, 32

100-2 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표는 방정식 $x^3-2x^2+2x=x+k$, 즉 $x^3-2x^2+x-k=0$의 세 근이다. 세 근이 등비수열을 이루므로 세 근을 a, ar, ar^2이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+ar+ar^2=2$ …… ㉠

$a\cdot ar+ar\cdot ar^2+ar^2\cdot a=1$ …… ㉡

$a\cdot ar\cdot ar^2=k$ …… ㉢

㉡에서 $ar(a+ar+ar^2)=1$이므로 여기에 ㉠을 대입하면

$ar\cdot 2=1$ $\therefore ar=\frac{1}{2}$

㉢에서 $(ar)^3=k$이므로

$k=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ 답 $\frac{1}{8}$

Remark 삼차방정식의 근과 계수의 관계

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

101-1 첫날에 책을 읽은 후 남아 있는 책의 면수는

$\frac{1}{2}\times 1024$

두 번째 날에 책을 읽은 후 남아 있는 책의 면수는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1024=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1024$

세 번째 날에 책을 읽은 후 남아 있는 책의 면수는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1024=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 1024$

⋮

n번째 날에 책을 읽은 후 남아 있는 책의 면수는

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 1024$

n번째 날에 책의 마지막 면을 읽는다고 하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^n\times 1024<1$ …… ㉠

$\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{1024}$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로

$n>10$

따라서 ㉠을 만족시키는 최소의 자연수는 11이므로 책의 마지막 면을 읽는 것은 책을 읽기 시작한 지 11일째이다. 답 11일 째

101-2 한 변의 길이가 10인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10^2=25\sqrt{3}$

1회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$25\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}$

2회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$25\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$

3회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\vdots$

n회 시행 후에 남아 있는 종이의 넓이는

$25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10회 반복했을 때, 남아 있는 종이의 넓이는

$25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ 답 $25\sqrt{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

102-1 세 수 $x-2$, $x+2$, $x+7$이 이 순서로 등비수열을 이루므로 $x+2$는 $x-2$와 $x+7$의 등비중항이다. 즉

$(x+2)^2=(x-2)(x+7)$

$x^2+4x+4=x^2+5x-14$

$\therefore x=18$ 답 18

102-2 a는 4와 b의 등비중항이므로

$a^2=4b$ …… ㉠

c는 b와 36의 등비중항이므로

$c^2=36b$ …… ㉡

b는 a와 c의 등차중항이므로

$2b=a+c$ …… ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면

$c^2=9\cdot4b=9a^2$

$\therefore c=3a$ ($\because a$, c는 양수)

$c=3a$를 ㉢에 대입하면

$2b=4a$ $\quad\therefore b=2a$

$b=2a$를 ㉠에 대입하면

$a^2=8a$, $\quad a(a-8)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=8$

그런데 a는 양수이므로 $\quad a=8$

$b=2a$, $c=3a$이므로

$b=16$, $c=24$ 답 $a=8$, $b=16$, $c=24$

103-1 (1) 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(\sqrt{3})^{n-1}$

이때 27을 제n항이라 하면

$(\sqrt{3})^{n-1}=27$, $\quad(\sqrt{3})^{n-1}=(\sqrt{3})^6$

$n-1=6$

$\therefore n=7$

따라서 주어진 수열의 합은 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{3}$인 등비수열의 첫째항부터 제 7 항까지의 합이므로

$$\frac{1\cdot\{(\sqrt{3})^7-1\}}{\sqrt{3}-1}=\frac{27\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\frac{(27\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{80+26\sqrt{3}}{2}$$
$$=40+13\sqrt{3}$$

(2) $\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\cdots+2$

$=\frac{1}{2^5}(1+2+2^2+\cdots+2^6)$

$=\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1\cdot(2^7-1)}{2-1}$

$=\frac{127}{32}$

(3) 첫째항이 1, 공비가 i인 등비수열이고 i^{60}은 제61항이므로 주어진 수열의 합은

$$\frac{1\cdot(1-i^{61})}{1-i}=\frac{1-(i^4)^{15}\cdot i}{1-i}$$
$$=\frac{1-i}{1-i}$$
$$=1$$

(4) $0.9+0.99+0.999+\cdots+0.999999$

$=(1-0.1)+(1-0.1^2)+(1-0.1^3)+\cdots$
$\quad+(1-0.1^6)$

$=6-(0.1+0.1^2+0.1^3+\cdots+0.1^6)$

$=6-\frac{0.1\times(1-0.1^6)}{1-0.1}$

$=6-\frac{0.999999}{9}$

$=5.888889$

답 (1) $40+13\sqrt{3}$ (2) $\frac{127}{32}$ (3) 1 (4) 5.888889

다른 풀이 (3) $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$이므로

$i+i^2+i^3+i^4=0$

$\therefore 1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{60}$

$=1+(i+i^2+i^3+i^4)+(i^5+i^6+i^7+i^8)$
$\quad+\cdots+(i^{57}+i^{58}+i^{59}+i^{60})$

$=1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
$\quad+\cdots+i^{56}(i+i^2+i^3+i^4)$

$=1$

104-1 주어진 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$S_3=2$에서

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$S_6=18$에서

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=18 \quad \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(r^3+1)=18, \quad r^3+1=9$

$r^3=8 \quad \therefore r=2 \ (\because r$는 실수)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$7a=2 \quad \therefore a=\frac{2}{7}$

$$\therefore S_n=\frac{\frac{2}{7}(2^n-1)}{2-1}=\frac{2}{7}(2^n-1)$$

답 $S_n=\frac{2}{7}(2^n-1)$

104-2 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=36 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$S_{2n}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^n+1)(r^n-1)}{r-1}=54 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$36(r^n+1)=54$

$r^n+1=\frac{3}{2} \quad \therefore r^n=\frac{1}{2}$

$$\therefore S_{3n}=\frac{a(r^{3n}-1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$$

$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdot(r^{2n}+r^n+1)$$

$$=36\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1\right\}=63$$

답 63

104-3 주어진 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$$

합이 처음으로 500보다 커지는 항은 $S_n>500$을 만족시키는 최초의 항이므로 $5(2^n-1)>500$에서

$2^n-1>100 \quad \therefore 2^n>101$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n\geq 7$

따라서 $S_n>500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 7이다.

답 7

105-1 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^1-1=2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3^n-1)-(3^{n-1}-1)$

$=2\cdot 3^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2\cdot 3^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이다.

답 풀이 참조

105-2 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=5\cdot 4-5=15 \quad \cdots\cdots ㉠$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(5\cdot 4^n-5)-(5\cdot 4^{n-1}-5)$

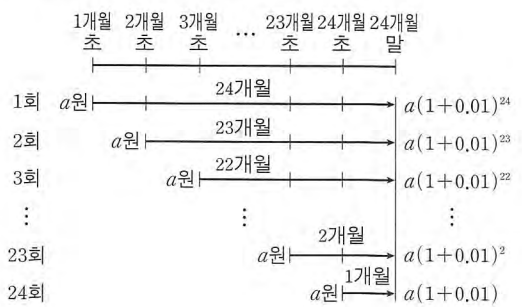
$=15\cdot 4^{n-1} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=15\cdot 4^{n-1}$

답 $a_n=15\cdot 4^{n-1}$

106-1 매월 초에 적립해야 하는 금액을 a원이라 하고, 매월 적립해야 하는 a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 2년 후의 적립금의 원리합계는

$a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{24}$

이고, 이 값이 3000000원이므로

$$\frac{a\times1.01(1.01^{24}-1)}{1.01-1}=3000000$$

$$\therefore a=\frac{3000000\times0.01}{1.01(1.01^{24}-1)}$$

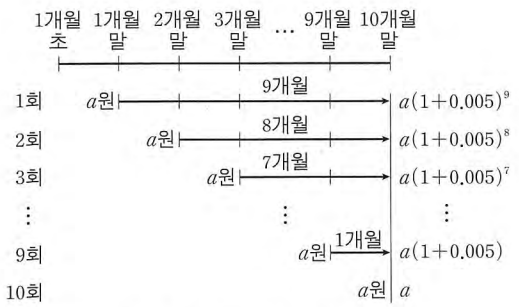
$$=\frac{30000}{1.01(1.27-1)}$$

$=110011.\times\times\times$(원)

이때 천의 자리에서 반올림하므로 매월 적립해야 하는 금액은 11만 원이다.

답 11만 원

106-2 매월 말에 적립해야 하는 금액을 a원으로 놓고, 매월 적립해야 하는 a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10개월 후의 적립금의 원리합계는

$a+a(1+0.005)+a(1+0.005)^2+\cdots$

$+a(1+0.005)^9$

$$=\frac{a(1.005^{10}-1)}{1.005-1}$$

$$=\frac{a(1.051-1)}{0.005}$$

$=10.2a$(원)

이것이 30만 원이 되어야 하므로

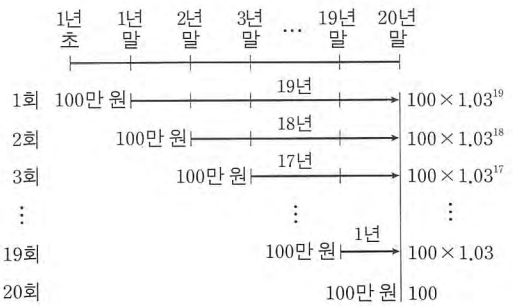
$10.2a=300000$

$\therefore a=29411.\times\times\times$(원)

이때 백 원 미만은 버리므로 영은이가 매월 말에 적립해야 하는 금액은 29400원이다.

답 29400원

107-1 매년 말에 적립하는 100만 원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 20년 후 연말의 적립금의 원리합계는

$100+100\times1.03+100\times1.03^2+\cdots$

$+100\times1.03^{19}$

$$=\frac{100(1.03^{20}-1)}{1.03-1}=\frac{100(1.81-1)}{0.03}$$

$=2700$(만 원) …… ㉠

올해 초에 한꺼번에 받는 금액을 S만 원이라 하면 S만 원의 20년 동안의 원리합계는

$S\times1.03^{20}=1.81S$(만 원)

이것이 ㉠과 같아야 하므로

$1.81S=2700$

$$\therefore S=\frac{2700}{1.81}=1491.\times\times\times\text{(만 원)}$$

이때 만 원 미만은 버리므로 올해 초에 한꺼번에 받는 금액은 1491만 원이다.

답 1491만 원

중단원 연습 문제 본책 302~305쪽

01 $\frac{4}{3}$ **02** ③ **03** 5 **04** 28 **05** 7

06 ④ **07** 56000원 **08** 20 **09** ②

10 108 **11** $2\sqrt{3}$ **12** ④ **13** 16 **14** 12

15 1293만 원 **16** 114000원 **17** ⑤

18 ③ **19** ④

01 전략 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고 주어진 조건을 이용하여 a, r의 값을 구한다.

풀이 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 $a_n=ar^{n-1}$

$a_2+a_5=24$에서

$ar+ar^4=24$

$\therefore ar(1+r^3)=24$ …… ㉠

$a_4+a_7=96$에서

$ar^3+ar^6=96$

$\therefore ar^3(1+r^3)=96$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a(1+2^3)=24$ $\therefore a=\frac{4}{3}$ 답 $\frac{4}{3}$

02 전략 등비수열 1, a, b, 64에서 첫째항은 1이고, 64는 제4항임을 이용하여 공비를 구한다.

풀이 등비수열 1, a, b, 64의 공비를 r, 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=r^{n-1}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 제4항이 64이므로

$r^3=64$ $\therefore r=4$ ($\because r$는 실수)

$\therefore a_n=4^{n-1}$

a, b는 각각 제2항, 제3항이므로

$a=4^{2-1}=4$, $b=4^{3-1}=16$

$\therefore |a-b|=12$ 답 ③

03 전략 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2으로 놓고, 주어진 조건에 맞는 식을 세운다.

풀이 등비수열을 이루는 세 실수를 a, ar, ar^2이라 하자.

세 실수의 합이 35이므로 $a+ar+ar^2=35$

$\therefore a(1+r+r^2)=35$ ····· ㉠

세 실수의 곱이 1000이므로

$a\cdot ar\cdot ar^2=1000$

$(ar)^3=1000$ $\therefore ar=10$ ($\because ar$는 실수)

즉 $a=\frac{10}{r}$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$\frac{10}{r}(1+r+r^2)=35$

양변에 r를 곱하여 정리하면

$10r^2-25r+10=0$

$2r^2-5r+2=0$, $(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

$r=\frac{1}{2}$일 때 $a=20$, $r=2$일 때 $a=5$이므로 세 수는 5, 10, 20이다.

따라서 가장 작은 수는 5이다. 답 5

04 해결과정 · 3은 x와 y의 등차중항이므로

$6=x+y$ → 30% 배점

2는 x와 y의 등비중항이므로

$2^2=xy$ $\therefore 4=xy$ → 30% 배점

답구하기 · $\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=6^2-2\cdot 4=28$ → 40% 배점

답 28

05 해결과정 · 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$S_5=1$에서

$\frac{a(1-r^5)}{1-r}=1$ ····· ㉠ → 20% 배점

$S_{10}=3$에서

$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=3$

····· ㉡ → 20% 배점

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+r^5=3$ $\therefore r^5=2$ → 20% 배점

답구하기 · $\therefore S_{15}=\frac{a(1-r^{15})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r}$

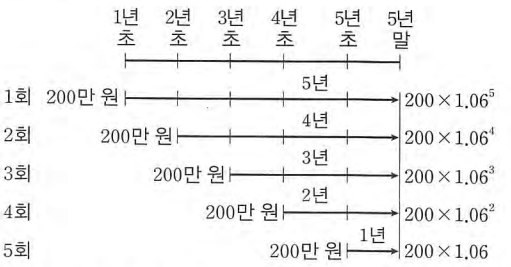
$=\frac{a(1-r^5)}{1-r}\cdot(1+r^5+r^{10})$

$=1\cdot(1+2+2^2)=7$ → 40% 배점

답 7

06 전략 조건을 그림으로 나타낸 후 적립금의 원리합계를 구한다.

풀이 매년 초에 적립하는 200만 원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 5년 후 연말의 적립금의 원리합계는

$200\times 1.06+200\times 1.06^2+\cdots+200\times 1.06^5$

$$=\frac{200\times1.06(1.06^5-1)}{1.06-1}$$
$$=\frac{212(1.34-1)}{0.06}$$
$=1201.\times\times\times$(만 원)

이때 만 원 미만은 버리므로 5년 후 연말의 적립금의 원리합계는 1201만 원이다.

답 ④

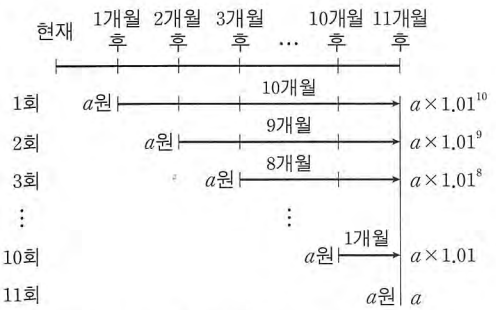
07 전략 매달 갚아야 하는 금액을 a원으로 놓고, 60만 원을 11개월 동안 예금했을 때의 원리합계와 a원씩 11개월 동안 납입한 납입금의 원리합계가 같음을 이용한다.

풀이 60만 원의 11개월 동안의 원리합계는

600000×1.01^{11}

$=600000\times1.12=672000$(원) …… ㉠

한 달 후부터 a원씩 갚는다고 할 때, a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 11개월 후의 납입금의 원리합계는

$a+a\times1.01+a\times1.01^2+\cdots+a\times1.01^{10}$

$$=\frac{a(1.01^{11}-1)}{1.01-1}=\frac{a(1.12-1)}{0.01}$$
$=12a$(원)

이것이 ㉠과 같아야 하므로

$$12a=672000 \quad \therefore a=\frac{672000}{12}=56000$$

따라서 선아가 매달 갚아야 하는 금액은 56000원이다.

답 56000원

08 문제이해 • 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 2이므로

$a_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$ ➔ 30% 배점

해결과정 • $5a_{n+1}-a_n=5\cdot2^{n+1}-2^n$

$=10\cdot2^n-2^n$

$=9\cdot2^n=18\cdot2^{n-1}$ ➔ 40% 배점

따라서 수열 $\{5a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 18, 공비가 2인 등비수열이므로

$a=18$, $r=2$ ➔ 20% 배점

답구하기 • $\therefore a+r=20$ ➔ 10% 배점

답 20

09 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r로 놓고, 주어진 조건을 이용하여 a, r에 대한 식을 세운다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{31}{2}$에서

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=\frac{31}{2}$$
$$\therefore a(1+r+r^2+r^3+r^4)=\frac{31}{2}$$

$a_1a_2a_3a_4a_5=32$에서

$a\cdot ar\cdot ar^2\cdot ar^3\cdot ar^4=32$, $(ar^2)^5=32$

$\therefore ar^2=2$ ($\because ar^2$은 실수)

$$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4}$$
$$=\frac{r^4+r^3+r^2+r+1}{ar^4}$$
$$=\frac{a(1+r+r^2+r^3+r^4)}{(ar^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{31}{2}}{2^2}=\frac{31}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{31}{8}$$

답 ②

10 전략 $2^4\cdot3^6$이 a^n과 b^n의 등비중항임을 이용하여 ab에 대한 식을 세운다.

풀이 $2^4\cdot3^6$은 a^n과 b^n의 등비중항이므로

$(2^4\cdot3^6)^2=a^nb^n$

즉 $(ab)^n=2^8\cdot3^{12}$이므로 a, b, n이 모두 자연수이려면 n은 8과 12의 공약수이어야 한다.

이때 ab의 값이 최소가 되려면 n이 최대이어야 하므로 n의 최댓값은 8과 12의 최대공약수인 4이다.

$n=4$일 때

$(ab)^4=2^8\cdot3^{12}=(2^2\cdot3^3)^4$

이므로 ab의 최솟값은 $2^2\cdot3^3=4\cdot27=108$

답 108

11 문제이해 • 이차방정식

$x^2+(a+6)x+2b-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a-6$, $\alpha\beta=2b-1$ …… ㉠

→ 20% 배점

해결과정 • a는 α와 β의 등차중항이고, b는 α와 β의 등비중항이므로

$2a=\alpha+\beta$, $b^2=\alpha\beta$ …… ㉡

→ 20% 배점

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a=-a-6$, $b^2=2b-1$

즉 $3a=-6$, $(b-1)^2=0$이므로

$a=-2$, $b=1$ …… ㉢

→ 20% 배점

㉢을 ㉠에 대입하면

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=(-4)^2-4\cdot1=12$ → 20% 배점

답구하기 • $\therefore \alpha-\beta=2\sqrt{3}$ ($\because \alpha>\beta$) → 20% 배점

답 $2\sqrt{3}$

12 전략 a_n과 S_n을 구하여 주어진 식에 대입하거나 주어진 수열의 일반항을 구하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 $a_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

ㄱ. $2S_n=2\cdot\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ …… ㉠

$-3a_{n+1}+3=-3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3=3-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore 2S_n=-3a_{n+1}+3$

ㄴ. $S_n+a_n=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{S_n+a_n\}$은 등비수열이 아니다.

ㄷ. ㉠에서 $2S_n-3=-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

따라서 수열 $\{2S_n-3\}$은 첫째항이 -1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

13 전략 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ ($n\geq2$)임을 이용하여 먼저 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 찾는다.

풀이 $n=1$일 때,

$a_1=S_1=4^1-3=1$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(4^n-3)-(4^{n-1}-3)$

$=4^n-4^{n-1}$

$=4\cdot4^{n-1}-4^{n-1}=3\cdot4^{n-1}$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 다르므로

$a_1=1$, $a_n=3\cdot4^{n-1}$ ($n\geq2$)

이때 $a_{2n}=3\cdot4^{2n-1}$이므로

$a_{2n}=3\cdot4^{2(n-1)+1}=12\cdot16^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 16이다. 답 16

다른 풀이 수열 $\{a_{2n}\}$은 a_2, a_4, a_6, …이므로 공비는 $\frac{a_4}{a_2}$로 구할 수 있다. 이때

$a_2=S_2-S_1$, $a_4=S_4-S_3$

이므로

$\frac{a_4}{a_2}=\frac{S_4-S_3}{S_2-S_1}$

$=\frac{(4^4-3)-(4^3-3)}{(4^2-3)-(4-3)}$

$=\frac{192}{12}=16$

14 문제이해 • 1초 후의 점 P의 좌표는 1

2초 후의 점 P의 좌표는 $1-2^1$

3초 후의 점 P의 좌표는 $1-2^1+2^2$

4초 후의 점 P의 좌표는 $1-2^1+2^2-2^3$

⋮

n초 후의 점 P의 좌표는

$1-2^1+2^2-2^3+\cdots+(-2)^{n-1}$

$=1+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{n-1}$

$=\frac{1\cdot\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$

$=\frac{1-(-2)^n}{3}$ → 40% 배점

해결과정 • $\frac{1-(-2)^n}{3}\geq1000$에서

$(-2)^n \le -2999$

이때 $(-2)^{11}=-2048$, $(-2)^{12}=4096$, $(-2)^{13}=-8192$이므로

$n=13, 15, 17, \cdots$ → 30% 배점

답구하기 • 따라서 12초와 13초 사이에 좌표가 1000인 점을 처음으로 지나므로

$p=12$ → 30% 배점

답 12

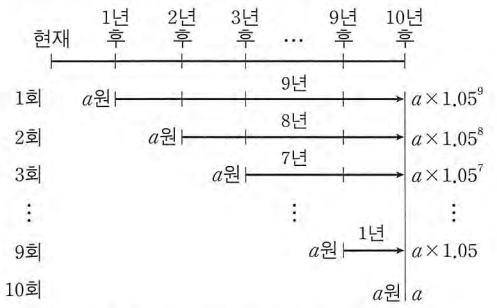
15 전략 매년 받는 금액을 a원으로 놓고, 1억 원을 10년 동안 예금했을 때의 원리합계와 a원씩 10년 동안 적립한 적립금의 원리합계가 같음을 이용한다.

풀이 1억 원의 10년 동안의 원리합계는

$10^8 \times 1.05^{10}=10^8 \times 1.63$

$=163 \times 10^6$(원) …… ㉠

1년 후부터 매년 a원씩 받는다고 할 때, a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10년 후의 적립금의 원리합계는

$a+a\times1.05+a\times1.05^2+\cdots+a\times1.05^9$

$=\dfrac{a(1.05^{10}-1)}{1.05-1}=\dfrac{a(1.63-1)}{0.05}$

$=12.6a$(원)

이것이 ㉠과 같아야 하므로

$12.6a=163\times10^6$

$\therefore a=\dfrac{163\times10^6}{12.6}=12936507.\times\times\times$

이때 만 원 미만은 버리므로 매년 받는 금액은 1293만 원이다.

답 1293만 원

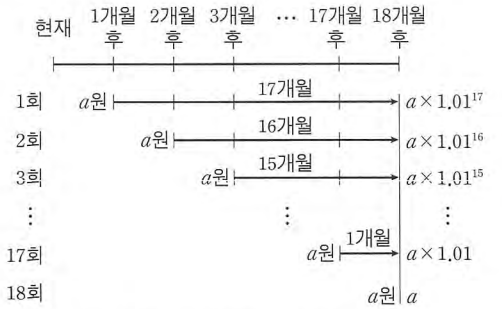
16 해결과정 • 190만 원의 18개월 동안의 원리합계는

1900000×1.01^{18}

$=1900000\times1.2=2280000$(원) …… ㉠

→ 30% 배점

한 달 후부터 a원씩 갚는다고 할 때, a원의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 18개월 후의 납입금의 원리합계는

$a+a\times1.01+a\times1.01^2+\cdots+a\times1.01^{17}$

$=\dfrac{a(1.01^{18}-1)}{1.01-1}=\dfrac{a(1.2-1)}{0.01}=20a$(원)

→ 40% 배점

답구하기 • 이것이 ㉠과 같아야 하므로

$20a=2280000$

$\therefore a=\dfrac{2280000}{20}=114000$

따라서 매달 갚아야 하는 금액은 114000원이다.

→ 30% 배점

답 114000원

17 전략 n이 a와 x의 등비중항임을 이용하여 n, a, x 사이의 관계식을 세운다.

풀이 n이 a와 x의 등비중항이므로 $n^2=ax$

이때 $x=n+a$이므로

$n^2=a(n+a)$, $n^2-an-a^2=0$

$\therefore n=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4a^2}}{2}$

$=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a$ ($\because n\ge0$, $a\ge0$)

$0\le a<1$이므로

$0\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$,

즉 $0\le n<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

그런데 $1<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2$이고, n은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$

$n=0$이면 $a=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\cdot 0=0$이므로 $x=0$이 되어 모순이다. ($\because x>0$)

따라서 $n=1$이고, $a=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$이므로

$$x=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

답 ⑤

18 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_1, P_2, P_3, …의 좌표를 구한 후, 점 P_n의 좌표가 $(10, 2^{10})$이 되는 n의 값을 구한다.

풀이 점 P_1의 좌표가 $(1, 1)$이므로

$1<2^1$에서 점 P_2의 좌표는 $(1, 2)$

$2=2^1$에서 점 P_3의 좌표는 $(2, 1)$

$1<2^2$에서 점 P_4의 좌표는 $(2, 2)$

$2<2^2$에서 점 P_5의 좌표는 $(2, 3)$

$3<2^2$에서 점 P_6의 좌표는 $(2, 4)$

$4=2^2$에서 점 P_7의 좌표는 $(3, 1)$

$1<2^3$에서 점 P_8의 좌표는 $(3, 2)$

⋮

따라서 P_1, P_2, P_3, …, P_n의 좌표를 다음과 같이 분류할 수 있다.

$(1, 1)$, $(1, 2)$ ➡ 2^1개

$(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 2^2)$ ➡ 2^2개

$(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, …, $(3, 2^3)$ ➡ 2^3개

⋮ ⋮

$(10, 1)$, $(10, 2)$, $(10, 3)$, …, $(10, 2^{10})$

➡ 2^{10}개

즉 구하는 n의 값은

$$2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{10}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}-2$$

답 ③

19 전략 첫째 해부터 19년째 해까지의 연봉의 합과 20년째 해부터 28년째 해까지의 연봉의 합을 각각 구해 더한다.

풀이 입사 첫째 해의 연봉은 a(원)

입사 2년째 해의 연봉은

$a+a\times 0.08=a\times 1.08$(원)

입사 3년째 해의 연봉은

$a\times 1.08+(a\times 1.08)\times 0.08=a\times 1.08^2$(원)

⋮

입사 19년째 해의 연봉은 $a\times 1.08^{18}$(원)

따라서 입사 후 19년째 해까지의 연봉의 합은

$$a+a\times 1.08+a\times 1.08^2+\cdots+a\times 1.08^{18}$$

$$=\frac{a(1.08^{19}-1)}{1.08-1}=\frac{a(4\times 1.08-1)}{0.08}$$

$$=\frac{332}{8}a=\frac{83}{2}a\text{(원)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해의 연봉의 $\frac{2}{3}$이므로

$$a\times 1.08^{18}\times\frac{2}{3}\text{(원)}$$

입사 20년째 해부터 입사 28년째 해까지의 연봉의 합은

$$a\times 1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times 9=a\times 4\times 6=24a\text{(원)}$$

$\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 입사 후 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은

$$\frac{83}{2}a+24a=\frac{131}{2}a\text{(원)}$$

답 ④

12 수열의 합

유제

본책 311~326쪽

108-1 $\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)=(n^2-1)+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)$

이므로

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)\\&=(n^2-1)+\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^2+1)\\&=n^2-1+\sum_{k=1}^{n-1}\{(k^2-1)-(k^2+1)\}\\&=n^2-1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)\\&=n^2-1-2(n-1)\\&=n^2-2n+1\end{aligned}$$

답 n^2-2n+1

108-2 $\sum_{k=1}^{n}a_k=10n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=5n$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(2a_k-3b_k+5)&=2\sum_{k=1}^{n}a_k-3\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n}5\\&=20n-15n+5n\\&=10n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{5}\left\{\sum_{k=1}^{n}(2a_k-3b_k+5)\right\}&=\sum_{n=1}^{5}10n\\&=10\sum_{n=1}^{5}n\\&=10(1+2+\cdots+5)\\&=10\cdot 15\\&=150\end{aligned}$$

답 150

109-1 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)^2$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\\&=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&\quad-4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n\\&=\frac{n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}}{3}\\&=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}\end{aligned}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}\\&=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k&=\sum_{k=1}^{n}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}2-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\\&=2n-\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}\\&=2n-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\\&=2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

답 (1) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ (2) $2n-2+\frac{1}{2^{n-1}}$

Remark 등차수열이나 등비수열이 아닌 수열의 합

(i) 일반항을 구하여 그 합을 Σ를 사용하여 나타낸다.

(ii) Σ의 성질, 자연수의 거듭제곱의 합의 공식 등을 이용하여 그 합을 구한다.

110-1 (1) $\sum_{m=1}^{k}km=k\sum_{m=1}^{k}m$

$$\begin{aligned}&=k\cdot\frac{k(k+1)}{2}\\&=\frac{k^2(k+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}(k^3+k^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{주어진 식})&=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2}(k^3+k^2)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{5}k^3+\sum_{k=1}^{5}k^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2+\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6}\right\}\\&=140\end{aligned}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{k}(6j-2)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{6\sum_{j=1}^{k}j-\sum_{j=1}^{k}2\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{6\cdot\frac{k(k+1)}{2}-2k\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)$

$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=n(n+1)^2$

답 (1) 140 (2) $n(n+1)^2$

110-2 $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=k}^{n}\frac{(-1)^j}{j}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(-1)^k}{k}+\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

$=\left\{\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

$+\left\{\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\right\}+\cdots$

$+\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}+\frac{(-1)^n}{n}\right\}+\frac{(-1)^n}{n}$

분모가 같은 것끼리 모아서 정리하면

(구하는 합) $=\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}\times 2$

$+\frac{(-1)^3}{3}\times 3+\cdots+\frac{(-1)^n}{n}\times n$

$=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots$

$+(-1)^n$

$=\frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}$

$=\frac{-1+(-1)^n}{2}$

답 $\frac{-1+(-1)^n}{2}$

Remark

$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n$은 첫째항이 -1, 공비가 -1인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로 등비수열의 합의 공식을 이용하여 구한다.

111-1 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=3^{n+1}-3$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=3^2-3=6$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n+1}-3-(3^n-3)$

$=3^{n+1}-3^n=3\cdot 3^n-3^n$

$=2\cdot 3^n$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2\cdot 3^n$

$\therefore \sum_{k=1}^{100}\frac{a_{2k}}{3}=\sum_{k=1}^{100}\frac{2\cdot 3^{2k}}{3}=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{100}3^{2k}$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{9(9^{100}-1)}{9-1}$

$=\frac{3}{4}(9^{100}-1)$

답 $\frac{3}{4}(9^{100}-1)$

Remark

$\sum_{k=1}^{100}3^{2k}$은 $\sum_{k=1}^{100}3^{2k}=\sum_{k=1}^{100}9^k$에서 첫째항 9, 공비가 9인 등비수열의 제100항까지의 합이다.

111-2 $b_n=na_n$이라 하면

$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$n=1$일 때, $b_1=S_1=1$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때,

$b_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}-\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

$=\frac{n(n+1)}{2}$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$b_n=\frac{n(n+1)}{2}$

이때 $b_n=na_n$이므로

$na_n=\frac{n(n+1)}{2}$ $\therefore a_n=\frac{n+1}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}\frac{k+1}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}1$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{20\cdot 21}{2}+\frac{1}{2}\cdot 20$

$=115$

답 115

112-1 (1) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\frac{1}{4n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{4(n+1)}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$$

답 (1) $\frac{n}{4(n+1)}$ (2) $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$

112-2 $S_n=n^2+3n$이므로

$n=1$일 때, $a_1=S_1=4$ …… ㉠

$n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$$
$$=n^2+3n-(n^2+n-2)$$
$$=2n+2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=2n+2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{n}{8(n+2)}$$

답 $\frac{n}{8(n+2)}$

113-1 (1) $\frac{3}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n+4}}$

$$=\frac{3(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n+4})}{(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n+4})(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n+4})}$$
$$=\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{20} \frac{3}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1})$$
$$-(\sqrt{7}-\sqrt{4})+(\sqrt{10}-\sqrt{7})$$
$$+(\sqrt{13}-\sqrt{10})+\cdots+(\sqrt{64}-\sqrt{61})$$
$$=\sqrt{64}-\sqrt{4}$$
$$=8-2=6$$

(2) $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n+1}$$

답 (1) 6 (2) $\frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n+1}$

114-1 주어진 수열을 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\underbrace{\left(\frac{1}{1}\right)}_{\text{제1군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}_{\text{제2군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)}_{\text{제3군}}, \underbrace{\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)}_{\text{제4군}}, \cdots$

제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

제1군부터 제13군까지의 항의 개수는 $\frac{13\cdot 14}{2}=91$,

제14군까지의 항의 개수는 $\frac{14\cdot 15}{2}=105$이므로 제100항은 제14군의 9번째 항이다.

이때 제n군의 분모는 $2n-1$이고 분자는 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열을 이루므로 제100항은

$$\frac{1\cdot 2^{9-1}}{2\cdot 14-1}=\frac{256}{27}$$

답 $\frac{256}{27}$

115-1 $i\geq j$인 i줄의 수끼리 군으로 묶으면

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(2, 3)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(5, 6, 7)}_{\text{제3군}}, \underbrace{(10, 11, 12, 13)}_{\text{제4군}}, \cdots$

각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면

$a_1=1$, $a_2=1+1$,

$a_3=1+1+3$,

$a_4=1+1+3+5$, $\cdots$

$$a_n=1+1+3+5+\cdots+(2n-3)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$
$$=n^2-2n+2$$

위에서 i번째 줄, 왼쪽에서 j번째에 있는 수는 제i군의 j번째 항이고, 각 군은 공차가 1인 등차수열로 이루어져 있으므로 구하는 수는

$$a_i+(j-1)\cdot 1=i^2-2i+2+j-1$$
$$=i^2-2i+j+1$$

답 ①

116-1 (1) 주어진 합을 S로 놓으면

$$S=4\cdot 1+8\cdot 3+12\cdot 3^2+\cdots+4n\cdot 3^{n-1} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 3을 곱하면

$$3S=4\cdot 3+8\cdot 3^2+12\cdot 3^3+\cdots+4n\cdot 3^n \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠−㉡을 하면

$$-2S=4(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-4n\cdot 3^n$$
$$=4\cdot\frac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}-4n\cdot 3^n$$
$$=2(1-2n)3^n-2$$
$$\therefore S=(2n-1)3^n+1$$

(2) 주어진 합을 S로 놓으면

$$S=\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$
$$=\frac{1\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}$$
$$=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{n}{2^n}$$
$$=2-\frac{n+2}{2^n}$$
$$\therefore S=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$$

답 (1) $(2n-1)3^n+1$ (2) $4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$

중단원 연습 문제 본책 327~330쪽

01 20	02 ④	03 $2^{n+1}-n-2$		04 5
05 190	06 $\frac{29}{45}$	07 ③	08 ②	09 495
10 ③	11 13	12 ③	13 ⑤	14 5
15 ①	16 $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5n+1}-1)}{10}$		17 40	18 20
19 100	20 4	21 5050	22 0	

01 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$임을 이용한다.

풀이
$$\sum_{k=1}^{20}(2k-k^2)+\sum_{k=1}^{20}(k-1)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{20}(2k-k^2)+\sum_{k=1}^{20}(k^2-2k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{20}\{(2k-k^2)+(k^2-2k+1)\}$$
$$=\sum_{k=1}^{20}1=20$$

답 20

02 전략 먼저 $(2a_k-3)^2$을 전개한 후, Σ의 성질을 이용한다.

풀이
$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{5}(4a_k{}^2-12a_k+9)$$
$$=4\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2-12\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}9$$
$$=4\cdot 55 \quad 12\cdot 15+9\cdot 5=85$$

답 ④

Remark

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)=2\sum_{k=1}^{5}a_k-\sum_{k=1}^{5}3=2\cdot 15-3\cdot 5=15$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)^2\neq\left\{\sum_{k=1}^{5}(2a_k-3)\right\}^2$$

즉 $\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\neq\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2$이 성립하지 않음에 주의한다.

03 전략 수열의 일반항을 구한 후, 합을 Σ를 사용하여 나타낸다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면
$$a_n=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}$$
$$=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}$$
$$=2^n-1$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은
$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{2\cdot(2^n-1)}{2-1}-n$$
$$=2^{n+1}-n-2$$

답 $2^{n+1}-n-2$

04 해결과정 · 괄호 안을 계산하면
$$\sum_{m=1}^{k}m=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2+k}{2}$$ → 30% 배점
$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}m\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ → 40% 배점

답구하기 · $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=35$에서
$$n(n+1)(n+2)=5\cdot 6\cdot 7 \quad \therefore n=5$$
→ 30% 배점

답 5

05 전략 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면 $a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$임을 이용하여 일반항 a_n을 구한다.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면
$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$$
$n=1$일 때, $a_1=S_1=-1$ …… ㉠
$n\geq 2$일 때,
$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$$
$$=2n-3 \quad \cdots\cdots ㉡$$
㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로
$$a_n=2n-3$$
따라서 $a_{2k}=2\cdot 2k-3=4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=4\cdot\frac{10\cdot11}{2}-3\cdot10$$
$$=220-30=190$$

답 190

06 전략 일반항을 구하여 부분분수로 변형한 후 합의 꼴로 나타낸다.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{29}{45}$$

답 $\frac{29}{45}$

07 전략 주어진 수열의 규칙을 찾아 군으로 묶고, 제1군부터 제 n군까지의 항의 개수를 구한다.

풀이 주어진 수열을 각 군의 끝항이 1이 되도록 군으로 묶으면

$$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(2,\ 1)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(3,\ 2,\ 1)}_{\text{제3군}},\ \underbrace{(4,\ 3,\ 2,\ 1)}_{\text{제4군}},\ \cdots$$

제n군의 항의 개수가 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

ㄱ. 제1군부터 제5군까지의 항의 개수는 $\frac{5\cdot6}{2}=15$이고 제6군까지의 항의 개수는 $\frac{6\cdot7}{2}=21$이므로 이 수열의 제20항은 제6군의 5번째 항이다.
제n군은 첫째항이 n, 공차가 -1인 등차수열로 이루어져 있으므로 제n군의 k번째 항은
$n+(k-1)\cdot(-1)=n-k+1$
따라서 제20항은
$6-5+1=2$

ㄴ. 10은 제10군의 첫째항에서 처음으로 나타난다.
제1군부터 제9군까지의 항의 개수는 $\frac{9\cdot10}{2}=45$이므로 10은 제46항에서 처음으로 나타난다.

ㄷ. 10은 제10군에서 처음으로 나타나서 이후 각 군에서 한 번씩 나타나므로 10번째 나타나는 10은 제19군에서 나타난다.
제19군의 k번째 항을 10이라 하면
$19-k+1=10 \quad \therefore k=10$
따라서 10번째 나타나는 10은 제19군의 10번째 항이므로
$$\frac{18\cdot19}{2}+10=171+10=181$$
즉 10번째 나타나는 10은 제181항이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

08 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-2k-1\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot11}{2}-10$$
$$=385-110-10=265$$

답 ②

09 문제이해 · $a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$=n^2$$

$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}2=2n$ → 40% 배점

해결과정 • $\sum_{n=1}^{20} a_n = a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{20}$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})$

$+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$

$=\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$

$=\sum_{n=1}^{10} n^2+\sum_{n=1}^{10} 2n$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore \sum_{n=1}^{20} a_n=\sum_{n=1}^{10} n^2+2\sum_{n=1}^{10} n$

$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}$

$=385+110$

$=495$ → 30% 배점

답 495

10 전략 $\sum_{k=0}^{n} a_k=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k$임을 이용한다.

풀이 $\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$에서

$x^2+\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$

$x^2+\sum_{k=1}^{n}\{(x-k)^2-(x+k)^2\}=0$

$x^2+\sum_{k=1}^{n}(-4kx)=0$

$x^2-4x\sum_{k=1}^{n} k=0$

$x^2-4x\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0$

$x^2-2n(n+1)x=0$

$x\{x-2n(n+1)\}=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2n(n+1)$

$\therefore a_n=2n(n+1)$ ($\because a_n\neq 0$)

따라서 구하는 값은

$a_{10}=2\cdot 10\cdot 11=220$

답 ③

11 전략 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하고, 이것을 $a_{n+1}b_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$에 대입하여 b_n을 구한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d ($d\neq 0$)라 하면

$a_n=0+(n-1)d=(n-1)d$ …… ㉠

$a_{n+1}b_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$에 ㉠을 대입하면

$(n+1-1)d\cdot b_n=\sum_{k=1}^{n}(k-1)d$

$nd\cdot b_n=d\left\{\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}$

$nd\cdot b_n=\frac{nd(n-1)}{2}$

$\therefore b_n=\frac{n-1}{2}$ ($\because n\neq 0,\ d\neq 0$)

$\therefore b_{27}=\frac{27-1}{2}=13$

답 13

12 전략 $j=k,\ k+1,\ k+2,\ \cdots,\ n$을 대입하여 합의 꼴로 나타낸 후 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$을 대입한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}\right)$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots$

$+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots$

$+\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{개}}$

$=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}=n$

답 ③

13 전략 주어진 수열의 합을 Σ를 사용하지 않고 각 항의 합으로 나타낸다.

풀이 $\sum_{n=1}^{50} na_n=400$, $\sum_{n=1}^{49} na_{n+1}=300$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+50a_{50}=400$ …… ㉠

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+49a_{50}=300$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=100$

$\therefore \sum_{n=1}^{50} a_n=100$

답 ⑤

14 문제이해 • $(x^2-1)f(x)-2=0$에서

$(x^2-1)f(x)=2$

$x\neq\pm1$이므로

$$f(x)=\frac{2}{x^2-1}$$

$$=\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$ → 30% 배점

해결과정 • $\therefore \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$=f(1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1+\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=1+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}$$ → 30% 배점

$\frac{5}{2}-\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{32}{15}$에서

$\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{11}{30}$

$30(2n+1)=11n(n+1)$

$11n^2-49n-30=0$

$(n-5)(11n+6)=0$

$\therefore n=5$ 또는 $n=-\frac{6}{11}$ → 30% 배점

답구하기 • 그런데 n은 자연수이므로

$n=5$ → 10% 배점

답 5

15 전략 $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k\,(k\geq1)$임을 이용한다.

풀이 $a_1=S_1=2$이고, $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k\,(k\geq1)$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_kS_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)$$

$$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}$$

따라서 $\frac{1}{2}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{6}$ $\therefore S_{11}=6$

답 ①

16 문제이해 • 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=5n^2-3n$$ → 10% 배점

해결과정 • $n=1$일 때, $a_1=S_1=2$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(5n^2-3n)-\{5(n-1)^2-3(n-1)\}$$

$$=10n-8$$ …… ㉡

㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로

$a_n=10n-8$ → 30% 배점

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}})(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}})}$$

$$=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n}$$

$$=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10(n+1)-8-(10n-8)}$$

$$=\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{10}$$ → 30% 배점

답구하기 • 따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k})$$

$$=\frac{1}{10}\{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2})$$

$$+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_3})+\cdots+(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})\}$$

$$=\frac{1}{10}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1})$$

$$=\frac{1}{10}(\sqrt{10n+2}-\sqrt{2})$$

$=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5n+1}-1)}{10}$ → 30% 배점

답 $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5n+1}-1)}{10}$

17 문제이해 • 주어진 수열을 각 군의 끝항이 1이 되도록 군으로 묶으면

$\underbrace{(1)}_{\text{제1군}}, \underbrace{(3, 1)}_{\text{제2군}}, \underbrace{(3^2, 3, 1)}_{\text{제3군}}, \underbrace{(3^3, 3^2, 3, 1)}_{\text{제4군}},$

$\underbrace{(3^4, 3^3, 3^2, 3, 1)}_{\text{제5군}}, \cdots$ → 20% 배점

해결과정 • 제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

따라서 제1군부터 제9군까지의 항의 개수가 $\dfrac{9\cdot 10}{2}=45$이므로 제45항은 제9군의 끝항이다. 즉 첫째항부터 제45항까지의 합은 제1군부터 제9군까지의 모든 항의 합이다. → 30% 배점

제n군은 첫째항이 3^{n-1}, 공비가 $\dfrac{1}{3}$, 항의 개수가 n인 등비수열로 이루어져 있으므로 제n군의 모든 항의 합은

$\dfrac{3^{n-1}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3^n-1}{2}$ → 20% 배점

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{3^k-1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{9}3^k-\sum_{k=1}^{9}1\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{3(3^9-1)}{3-1}-9\right\}$

$=\dfrac{3^{10}-21}{4}$ → 20% 배점

답구하기 • 따라서 $a=10$, $b=4$이므로

$ab=10\cdot 4=40$ → 10% 배점

답 40

18 해결과정 • $S_n=1+\dfrac{3}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^{n-1}}$에서

$S_{50}=1+\dfrac{3}{3}+\dfrac{5}{3^2}+\cdots+\dfrac{99}{3^{49}}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{3}$을 곱하면

$\dfrac{1}{3}S_{50}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{99}{3^{50}}$ …… ㉡

→ 30% 배점

㉠−㉡을 하면

$\dfrac{2}{3}S_{50}=1+2\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{49}}\right)-\dfrac{99}{3^{50}}$

$=1+2\cdot\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3^{49}}\right)}{1-\dfrac{1}{3}}-\dfrac{99}{3^{50}}$

$=2-\dfrac{1}{3^{49}}-\dfrac{99}{3^{50}}=2-\dfrac{1}{3^{49}}-\dfrac{33}{3^{49}}$

$=2-\dfrac{34}{3^{49}}$ → 40% 배점

$\therefore S_{50}=\dfrac{3}{2}\left(2-\dfrac{34}{3^{49}}\right)=3-\dfrac{17}{3^{48}}$ → 20% 배점

답구하기 • 따라서 $a=3$, $b=17$이므로

$a+b=20$ → 10% 배점

답 20

19 전략 $n=2, 3, 4, \cdots, k$일 때 집합 S를 직접 구해서 $f(k)$를 구한다.

풀이 $n=2$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3\}$이므로

$S=\{3^4\}$ $\therefore f(2)=1$

$n=3$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3, 3^5\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8\}$ $\therefore f(3)=3$

$n=4$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3, 3^5, 3^7\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8, 3^{10}, 3^{12}\}$ $\therefore f(4)=5$

$\vdots$

$n=k$일 때, 주어진 집합은 $\{3, 3^3, 3^5, \cdots, 3^{2k-1}\}$이므로

$S=\{3^4, 3^6, 3^8, \cdots, 3^{4(k-1)}\}$

$\therefore f(k)=2k-3$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=2}^{11}f(n)=\sum_{n=2}^{11}(2n-3)$

$=\displaystyle\sum_{n=1}^{11}(2n-3)-(2\cdot 1-3)$

$=2\cdot\dfrac{11\cdot 12}{2}-3\cdot 11-(-1)$

$=100$

답 100

20 전략 점 P가 0에서 출발하여 n초 동안 이동한 거리를 구하여 그 거리를 6으로 나누었을 때의 나머지를 구한다.

풀이 점 P가 출발하여 n초 동안 이동한 거리는

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

이때 a_n은 점 P가 이동한 거리를 6으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$n=100$일 때, 점 P가 이동한 거리는

$\frac{100\cdot 101}{2}=5050$이고 $5050=6\cdot 841+4$이므로 5050을 6으로 나누었을 때의 나머지는 4이다.

$\therefore a_{100}=4$

$n=200$일 때, 점 P가 이동한 거리는

$\frac{200\cdot 201}{2}=20100$이고 $20100=6\cdot 3350$이므로 20100을 6으로 나누었을 때의 나머지는 0이다.

$\therefore a_{200}=0$

$\therefore a_{100}+a_{200}=4+0=4$

답 4

21 전략 $10000=100\cdot 100$이므로 한 변의 길이가 1인 정사각형이 가로로 100개, 세로로 100개가 놓인 그림을 생각해 본다.

풀이 $\sum_{k=0}^{99}(-1)^k(100-k)^2$

$=100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots-3^2+2^2-1^2$

주어진 그림과 같은 방법으로 생각하면

$100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots-3^2+2^2-1^2$

$=1+2+3+\cdots+99+100$

$=\sum_{k=1}^{100} k=\frac{100\cdot 101}{2}=5050$

답 5050

Remark

$\sum_{k=0}^{99}(-1)^k(100-k)^2$

$=100^2-99^2+98^2-97^2+\cdots-3^2+2^2-1^2$

$=(100^2+98^2+\cdots+2^2)-(99^2+97^2+\cdots+3^2+1^2)$

$=\sum_{k=1}^{50}(2k)^2-\sum_{k=1}^{50}(2k-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{50}(4k^2-4k^2+4k-1)$

$=\sum_{k=1}^{50}(4k-1)$

$=4\cdot\frac{50\cdot 51}{2}-50$

$=5100-50=5050$

22 전략 항을 순서대로 3개씩 군으로 묶어 생각한다.

풀이 주어진 수열을 각 군의 항의 개수가 3이 되도록 군으로 묶으면

$\underbrace{(1,0,2)}_{\text{제1군}},\ \underbrace{(1,0,5)}_{\text{제2군}},\ \underbrace{(1,0,8)}_{\text{제3군}},\ \underbrace{(1,1,1)}_{\text{제4군}},$

$\underbrace{(1,1,4)}_{\text{제5군}},\ \cdots,\ (2,9,7),\ (3,0,0)$

주어진 수열은 102, 105, 108, 111, 114, …, 297, 300의 각 자리의 숫자를 나열한 수열이므로 제n군은

$102+(n-1)\cdot 3=3n+99$

의 각 자리의 숫자로 이루어져 있다.

$3n+99=300$에서 $3n=201$

$\therefore n=67$

따라서 (3, 0, 0)은 제67군이다.

각 군의 항의 개수는 3이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는 $3n$

따라서 제1군부터 제67군까지의 항의 개수는

$3\cdot 67=201$이므로 정중앙에 위치한 항은 제101항이다.

이때 제1군부터 제33군까지의 항의 개수는

$3\cdot 33=99$이고 제34군까지의 항의 개수는

$3\cdot 34=102$이므로 제101항은 제34군의 2번째 항이다.

따라서 $3\cdot 34+99=201$에서 제34군은 (2, 0, 1)이므로 구하는 항은 0이다.

답 0

13 수학적 귀납법

유제

본책 337~351쪽

117-1 $a_{n+1}+3=a_n$, 즉 $a_{n+1}=a_n-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -3인 등차수열이다.
이때 첫째항이 1이므로
$a_n=1+(n-1)\cdot(-3)=-3n+4$
$a_k=-3k+4=-101$이므로
$-3k=-105$
$\therefore k=35$

답 35

117-2 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
이때 첫째항이 5, 공차가 $a_2-a_1=-1-5=-6$이므로
$a_n=5+(n-1)\cdot(-6)=-6n+11$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(-6k+11)$$
$$=-6\cdot\frac{10\cdot11}{2}+11\cdot10$$
$$=-330+110$$
$$=-220$$

답 -220

Remark 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

118-1 $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.
이때 첫째항이 3이므로
$a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{3^k}=\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$$

답 $\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

118-2 ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{1}=4$이므로

$$S_n=\frac{1\cdot(4^n-1)}{4-1}=\frac{1}{3}(4^n-1)$$

$S_k\geq500$에서

$$\frac{1}{3}(4^k-1)\geq500,\quad 4^k\geq1501$$

$4^5=1024$, $4^6=4096$이므로
$k\geq6$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 6

119-1 $a_{n+1}=a_n+2^n+1$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$a_2=a_1+2^1+1$
$a_3=a_2+2^2+1$
$a_4=a_3+2^3+1$
⋮
$+)\ a_n=a_{n-1}+2^{n-1}+1$
$a_n=a_1+(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})+n-1$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k+n-1$$
$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+n-1$$
$$=2^n+n-2$$

답 $a_n=2^n+n-2$

119-2 $a_n=a_{n-1}-\frac{2}{n^2-1}$에서

$$a_n-a_{n-1}=-\frac{2}{n^2-1}=-\frac{2}{(n-1)(n+1)}$$
$$=-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}$$

이므로 n에 2, 3, 4, …, $n-1$, n을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$a_2-a_1=-1+\frac{1}{3}$
$a_3-a_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$a_4-a_3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
⋮

$$a_{n-1}-a_{n-2}=-\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n}$$
$$+)\ a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}$$
$$a_n-a_1=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore a_n=a_1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$
$$=1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{-n(n+1)+2(n+1)+2n}{2n(n+1)}$$
$$=\frac{-n^2+3n+2}{2n(n+1)}$$

답 $a_n=\frac{-n^2+3n+2}{2n(n+1)}$

120-1 $a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=2^1 a_1$$
$$a_3=2^2 a_2$$
$$a_4=2^3 a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=2^{n-1}a_{n-1}$$
$$a_n=(2^1\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\cdots\cdot 2^{n-1})a_1$$
$$=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}\cdot 1$$
$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

답 $a_n=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

120-2 $a_n=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)a_{n-1}$에서

$$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n-1}$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a_1$$
$$a_3=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}a_2$$
$$a_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}a_{n-1}$$
$$a_n=\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\right.$$
$$\left.\cdots\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)\right\}a_1$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot 2$$
$$=\frac{n+1}{n}$$

답 $a_n=\frac{n+1}{n}$

121-1 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$를 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{3}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}\alpha$$

$\frac{2}{3}\alpha=2$이므로 $\alpha=3$

$$\therefore a_{n+1}-3=\frac{1}{3}(a_n-3)$$

따라서 수열 $\{a_n-3\}$은 첫째항이 $a_1-3=1-3=-2$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n-3=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

답 $a_n=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

다른 풀이 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$의 n에 $n+1$을 대입한 식에서 원래의 점화식을 변끼리 빼면

$$a_{n+2}=\frac{1}{3}a_{n+1}+2$$
$$-)\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$$
$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$$

이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 a_2-a_1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

이때 $a_2=\frac{1}{3}a_1+2=\frac{1}{3}\cdot 1+2=\frac{7}{3}$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{7}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더

하면

$$\begin{aligned}
a_2-a_1 &= \frac{4}{3}\\
a_3-a_2 &= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\\
a_4-a_3 &= \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\\
&\vdots\\
+)\ a_n-a_{n-1} &= \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\\
\hline
a_n-a_1 &= \frac{4}{3}\cdot\left\{1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right.\\
&\qquad \left.+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$=1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$$

121-2 $2a_{n+1}-a_n-6=0$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3$을 $a_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}\alpha$$

$\frac{1}{2}\alpha=3$이므로 $\alpha=6$

$$\therefore\ a_{n+1}-6=\frac{1}{2}(a_n-6)$$

따라서 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=2-6=-4$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-6=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$$

답 $a_n=-4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+6$

122-1 $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=0$에서

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$$

따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=4-1=3$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$a_{n+1}-a_n=3\cdot3^{n-1}=3^n \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2-a_1 &= 3\\
a_3-a_2 &= 3^2\\
a_4-a_3 &= 3^3\\
&\vdots\\
+)\ a_n-a_{n-1} &= 3^{n-1}\\
\hline
a_n-a_1 &= 3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=\frac{1}{2}(3^n-1)$$

답 $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$

122-2 $a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=1$에서

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n+1$$

$$\therefore\ b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

따라서 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이 b_1+1이고, 공비가 2인 등비수열이다.

$b_1=a_2-a_1=2-1=1$이므로 $b_1+1=1+1=2$

$$\therefore\ b_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n,\ \text{즉 } b_n=2^n-1$$

$$\therefore\ a_{n+1}-a_n=2^n-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_n-a_1=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-(n-1)$$

$$\therefore\ a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k-(n-1)$$

$$=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

$$=2^n-n$$

답 $a_n=2^n-n$

123-1 $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$의 양변의 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=b_n+3$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$, 공차가 3인 등차수열이므로

$$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot3=3n-\frac{5}{2}$$

이때 $b_n=\frac{1}{a_n}$이므로

$$\frac{1}{a_n}=3n-\frac{5}{2}=\frac{6n-5}{2}$$

$$\therefore a_n=\frac{2}{6n-5}$$

$$\therefore a_{50}=\frac{2}{6\cdot 50-5}=\frac{2}{295}$$

답 $\frac{2}{295}$

123-2 $3a_na_{n+1}=a_n-2a_{n+1}$의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$$3=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+3$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n+3$$

위의 등식을 $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$로 놓으면

$$b_{n+1}=2b_n-\alpha$$

$-\alpha=3$이므로 $\alpha=-3$

$$\therefore b_{n+1}+3=2(b_n+3)$$

따라서 수열 $\{b_n+3\}$은 첫째항이

$b_1+3=\frac{1}{a_1}+3=1+3=4$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$b_n+3=4\cdot 2^{n-1} \qquad \therefore b_n=2^{n+1}-3$$

이때 $b_n=\frac{1}{a_n}$이므로 $\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$$

답 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$

124-1 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ ……㉠

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$ ……㉡

㉡의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

125-1 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$ ……㉠

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

(우변)$=\frac{4}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq 2)$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$ ……㉡

㉡의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}$$

이때 $\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

이므로 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

중단원 연습 문제 본책 352~355쪽

01 $S_n=3(2^n-1)$ **02** ④ **03** ⑤ **04** ③

05 $\frac{3^{19}}{2^{17}}-3$ **06** 2036 **07** ① **08** ②

09 ③ **10** 10 **11** $\frac{281}{2}$ **12** 26 **13** 32

14 (가) 1 (나) $2k+1$ **15** 2 **16** 194 **17** 513

18 1

01 전략 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

풀이 $a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 첫째항이 3, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{3}=2$이므로

$$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$$ 답 $S_n=3(2^n-1)$

Remark 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

02 전략 주어진 관계식의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더한다.

풀이 $a_{n+1}-a_n+\frac{1}{n(n+1)}$, 즉

$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$a_3=a_2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$
$$a_4=a_3+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$\vdots$$
$$+)\ a_n=a_{n-1}+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n=a_1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}$$

$\therefore a_{10}=2-\frac{1}{10}=\frac{19}{10}$ 답 ④

03 전략 주어진 관계식의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱한다.

풀이 $\sqrt{n+1}\,a_{n+1}=\sqrt{n}\,a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}a_1$$
$$a_3=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a_2$$
$$a_4=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}a_3$$
$$\vdots$$
$$\times)\ a_n=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}a_{n-1}$$

$$a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}\right)a_1$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot1000=\frac{1000}{\sqrt{n}}$$

$\therefore a_{100}=\frac{1000}{\sqrt{100}}=\frac{1000}{10}=100$ 답 ⑤

04 전략 주어진 관계식을 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형한다.

풀이 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(1-a_n)$을 $a_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{2}(a_n-\alpha)$로 놓으면

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}\alpha$$

$\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=\frac{1}{3}$

$$\therefore a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{1}{3}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{1}{3}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$$

이때 $a_{50}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{49}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{49}}$이므로

$k=49$ 답 ③

05 문제이해 • $2a_{n+2}-5a_{n+1}+3a_n=0$에서

$2(a_{n+2}-a_{n+1})=3(a_{n+1}-a_n)$

$\therefore a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{3}{2}(a_{n+1}-a_n)$ → 30% 배점

해결과정 • 따라서 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 $a_2-a_1=3-1=2$, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이므로

$a_{n+1}-a_n=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ → 20% 배점

n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2-a_1 &= 2\cdot 1\\
a_3-a_2 &= 2\cdot\frac{3}{2}\\
a_4-a_3 &= 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&\vdots\\
+)\ a_n-a_{n-1} &= 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\\
\hline
a_n-a_1 &= 2\left\{1+\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right\}
\end{aligned}$$

$\therefore a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

$=1+\frac{2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$

$=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore a_{20}=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{19}-3$

$=\frac{3^{19}}{2^{17}}-3$ → 20% 배점

답 $\frac{3^{19}}{2^{17}}-3$

06 문제이해 • $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$의 양변의 역수를 취하면

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{a_n}$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+1$ → 30% 배점

해결과정 • $\frac{1}{a_n}=b_n$으로 놓으면

$b_{n+1}=2b_n+1$

위의 등식을 $b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$로 놓으면

$b_{n+1}=2b_n-\alpha$

$-\alpha=1$이므로 $\alpha=-1$

$\therefore b_{n+1}+1=2(b_n+1)$

따라서 수열 $\{b_n+1\}$은 첫째항이

$b_1+1=\frac{1}{a_1}+1=1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n+1=2\cdot 2^{n-1}$ $\therefore b_n=2^n-1$

이때 $b_n=\frac{1}{a_n}$이므로 $\frac{1}{a_n}=2^n-1$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}(2^k-1)$

$=\sum_{k=1}^{10}2^k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}-10$

$=2046-10$

$=2036$ → 30% 배점

답 2036

07 전략 $n=2$일 때 주어진 부등식이 성립함을 보인 다음, $n=k$ $(k\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 성립함을 보인다.

풀이 (i) $n=2$일 때,

$(1+h)^2=1+2h+h^2>\boxed{1+2h}$ $(\because h^2>0)$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq 2)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

위의 부등식의 양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^k(1+h)>(\boxed{1+kh})(1+h)$

$=1+(k+1)h+kh^2$

$>1+(k+1)h$ $(\because kh^2>0)$

$\therefore (1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$

따라서 $n=k+1$일 때에도 주어진 부등식이 성립한다.

$\therefore$ (가) $1+2h$ (나) $1+kh$

답 ①

08 전략 주어진 관계식의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더한다.

풀이 $a_{n+1}-a_n=2n$, 즉 $a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 더하면

$$\begin{aligned}
a_2&=a_1+2\cdot 1\\
a_3&=a_2+2\cdot 2\\
a_4&=a_3+2\cdot 3\\
&\vdots\\
+)\ a_n&=a_{n-1}+2(n-1)\\
\hline
a_n&=a_1+2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}\\
&=a_1+2\sum_{k=1}^{n-1}k=a_1+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\
&=n^2-n+a_1
\end{aligned}$$

$a_{10}=94$이므로 $10^2-10+a_1=94$

$90+a_1=94$ $\therefore a_1=4$ 답 ②

09 전략 주어진 등식의 n에 $n+1$을 대입한 식에서 원래의 식을 변끼리 빼서 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n+1}{2}a_n$ …㉠

㉠의 n에 $n+1$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}$ …㉡

㉡−㉠을 하면

$a_{n+1}=\frac{n+2}{2}a_{n+1}-\frac{n+1}{2}a_n$

$\frac{n}{2}a_{n+1}=\frac{n+1}{2}a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입한 후 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{2}{1}a_1\\
a_3&=\frac{3}{2}a_2\\
a_4&=\frac{4}{3}a_3\\
&\vdots\\
\times)\ a_n&=\frac{n}{n-1}a_{n-1}\\
\hline
a_n&=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\right)a_1\\
&=n\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

$a_k=17$에서 $\frac{k}{2}=17$

$\therefore k=34$ 답 ③

10 문제이해 • $a_{n+1}=2a_n+7$을 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$로 놓으면

$a_{n+1}=2a_n-\alpha$

$-\alpha=7$이므로 $\alpha=-7$

$\therefore a_{n+1}+7=2(a_n+7)$ → 30% 배점

해결과정 • 따라서 수열 $\{a_n+7\}$은 첫째항이 $a_1+7=-1+7=6$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n+7=6\cdot 2^{n-1}$

$\therefore a_n=3\cdot 2^n-7$ → 20% 배점

답구하기 • $a_n>2000$에서

$3\cdot 2^n-7>2000$, $3\cdot 2^n>2007$

$2^n>\frac{2007}{3}=669$ → 30% 배점

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 $a_n>2000$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 10이다. → 20% 배점

답 10

11 전략 a_1, a_2, a_3, …을 차례로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 $a_{n+2}a_n=a_{n+1}$에서 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ……㉠

㉠의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_3=\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}$, $a_4=\frac{a_3}{a_2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$,

$a_5=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, $a_6=\frac{a_5}{a_4}=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$,

$a_7=\frac{a_6}{a_5}=\frac{2}{3}\cdot 3=2$, $a_8=\frac{a_7}{a_6}=2\cdot\frac{3}{2}=3$, …

즉 수열 $\{a_n\}$은 2, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$가 반복되어 나타난다.

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{100}a_{2n}&=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{200}\\
&=(a_2+a_4+a_6)+(a_8+a_{10}+a_{12})\\
&\quad+\cdots+(a_{194}+a_{196}+a_{198})+a_{200}\\
&=(a_2+a_4+a_6)+(a_2+a_4+a_6)\\
&\quad+\cdots+(a_2+a_4+a_6)+a_2\\
&=33\left(3+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)+3\\
&=\frac{281}{2}
\end{aligned}$$

답 $\frac{281}{2}$

12 전략 $\sum_{k=1}^{11} a_k$를 합의 꼴로 나타내어 연속하는 세 항씩 묶어서 계산한다.

풀이 $\sum_{k=1}^{11} a_k=a_1+a_2+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10}+a_{11})$
$=2+3+(3+1)+(6+1)+(9+1)$
$=5+4+7+10=26$ 답 26

13 해결과정 • 조건 (나)의 $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n-b_n$의 n에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2}+b_{n+2}=a_{n+1}-b_{n+1}$ ……㉠

조건 (다)에서 $a_{n+1}-b_{n+1}=2(a_n+b_n)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$a_{n+2}+b_{n+2}=2(a_n+b_n)$ → 30% 배점

따라서 수열 $\{a_{2n-1}+b_{2n-1}\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2-1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_{2n-1}+b_{2n-1}=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore a_{11}+b_{11}=2^{6-1}=2^5$
$=32$ → 30% 배점

답 32

14 전략 먼저 a_1의 값을 이용하여 (가)에 알맞은 수를 구한 다음, 식을 계산하여 (나)에 알맞은 식을 구한다.

풀이 (i) $n=1$일 때, $a_1=\dfrac{2-\boxed{\text{(가)}}}{1}=1$이어야 하므로

$2-\boxed{\text{(가)}}=1$
$\therefore \boxed{\text{(가)}}=1$

(ii) $n=k$일 때 $a_k=\dfrac{2k-1}{k}$이라 가정하면 $n=k+1$일 때,

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k+\frac{2k^2+k+1}{2k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k-1}{k}+\frac{2k^2+k+1}{2k(k+1)}$$
$$=\frac{(2k-1)(k+1)+2k^2+k+1}{2k(k+1)}$$
$$=\frac{4k^2+2k}{2k(k+1)}$$
$$=\frac{2k(2k+1)}{2k(k+1)}$$
$$=\frac{\boxed{2k+1}}{k+1}$$

$\therefore$ (가) 1 (나) $2k+1$ 답 (가) 1 (나) $2k+1$

15 문제이해 • $2S_{n+1}=S_n+2$, 즉 $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+1$을 $S_{n+1}-\alpha=\frac{1}{2}(S_n-\alpha)$로 놓으면

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2}\alpha$

$\frac{1}{2}\alpha=1$이므로 $\alpha=2$

$\therefore S_{n+1}-2=\frac{1}{2}(S_n-2)$ → 30% 배점

해결과정 • 따라서 수열 $\{S_n-2\}$는 첫째항이 $S_1-2=a_1-2=1-2=-1$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$S_n-2=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore S_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ → 20% 배점

$\therefore a_{10}=S_{10}-S_9$
$=2-\left(\frac{1}{2}\right)^9-\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^9$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore 2^{10}a_{10}=2^{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9=2$ → 20% 배점

답 2

Remark 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이 S_n일 때,
$a_1=S_1$, $a_n=S_n-S_{n-1}$ (단, $n\geq 2$)

16 전략 $a_1=a$, $a_2=b$로 놓고 a_7을 a, b로 나타낸 후 $a_7=120$임을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $a_1=a$, $a_2=b$ (a, b는 $a<b$인 자연수)라 하면

$a_3=a+b$
$a_4=b+(a+b)=a+2b$
$a_5=(a+b)+(a+2b)=2a+3b$
$a_6=(a+2b)+(2a+3b)=3a+5b$
$a_7=(2a+3b)+(3a+5b)=5a+8b$
$a_8=(3a+5b)+(5a+8b)=8a+13b$

$a_7=120$이므로

$5a+8b=120$ ……㉠

$\therefore 5a=8(15-b)$, $8b=5(24-a)$

이때 5와 8은 서로소이므로 a는 8의 배수, b는 5의

배수이어야 한다.
따라서 $a=8m$, $b=5n$ (m, n은 자연수)으로 놓으면 ㉠에서
$40m+40n=120$ $\therefore m+n=3$
m, n이 자연수이므로
$m=1$, $n=2$ 또는 $m=2$, $n=1$
$m=1$, $n=2$이면 $a=8$, $b=10$
$m=2$, $n=1$이면 $a=16$, $b=5$
그런데 $a<b$이므로 $a=8$, $b=10$
$\therefore a_8=8a+13b=8\cdot 8+13\cdot 10=194$

답 194

17 전략 주어진 부등식을 변형하여 k의 값의 범위를 구한다.

풀이 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면
$n<\dfrac{k}{a_n}<n+2$
$\therefore na_n<k<(n+2)a_n$
이때 na_n, $(n+2)a_n$은 자연수이므로 위의 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는
$(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$
이므로
$a_{n+1}=2a_n-1$
이 식을 변형하면
$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$
따라서 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=2-1=1$, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n-1=2^{n-1}$
$\therefore a_n=2^{n-1}+1$
$\therefore a_{10}=2^9+1=513$

답 513

18 전략 $\sum$의 정의와 성질을 이용하여 식을 변형하고, 수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{13}{12}}>1$
이므로 부등식 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
$\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}>1$
$n=k+1$일 때,
$\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+3}\frac{1}{k+1+i}$
$=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{3k+4}$
$=\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\boxed{\frac{1}{k+1}}$
$=\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3k+3}\right)$
이때
$\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+4}-\dfrac{2}{3k+3}$
$=\dfrac{2}{(3k+2)(3k+3)(3k+4)}>0$
이므로
$\displaystyle\sum_{i=1}^{2k+3}\frac{1}{k+1+i}>\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{1}{k+i}>1$
따라서 $p=\dfrac{13}{12}$, $f(k)=\dfrac{1}{k+1}$이므로
$\dfrac{1}{p}+f(12)=\dfrac{12}{13}+\dfrac{1}{13}=1$

답 1

14 지수

유제

본책 365~379쪽

126-1 ① 1의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=1$이므로

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 1의 세제곱근은 1, $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

이다.

② -16의 제곱근을 x라 하면 $x^2=-16$이므로

$x=\pm 4i$

따라서 -16의 제곱근은 $-4i$, $4i$이다.

③ 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{8}$이다.

④ 자연수 n이 홀수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{5}$의 한 개이다.

⑤ 자연수 n이 짝수일 때, -6의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

답 ④

127-1

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}\times\sqrt[6]{\frac{\sqrt{x}}{x}}\div\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\times\frac{\sqrt[6]{\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}\times\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}$$

$=1$

답 1

128-1 (1)

$$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}\times\sqrt[4]{x^3}}}=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(x^{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}=(x^{-\frac{7}{12}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{-\frac{7}{24}}$$

(2)

$$\sqrt[4]{xy^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{x^2y}\div\sqrt{xy}}$$

$$=(xy^3)^{\frac{1}{4}}\times\{(x^2y)^{\frac{1}{3}}\div(xy)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times(x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}\div x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times(x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times(x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{1}{12}}y^{-\frac{1}{12}}$$

$$=x^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}$$

$$=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$$

답 (1) $x^{-\frac{7}{24}}$ (2) $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

128-2 주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\sqrt{\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{8}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}}}=\left\{\frac{2^{\frac{1}{4}}}{(2^3)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\frac{(2^4)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$=\left(\frac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\frac{2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$=(2^{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\times(2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

$$=(2^{-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}\times(2^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{4}}$$

$$=2^{-\frac{5}{8}}\times 2^{\frac{5}{24}}=2^{-\frac{5}{8}+\frac{5}{24}}$$

$$=2^{-\frac{5}{12}}$$

$\therefore r=-\dfrac{5}{12}$

답 $-\dfrac{5}{12}$

129-1 (1) $x^{\frac{1}{3}}=X$, $y^{-\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $x=X^3$, $y^{-1}=Y^3$이므로

$$(x+y^{-1})\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}})$$

$$-(X^3+Y^3)\div(X+Y)$$

$$=(X+Y)(X^2-XY+Y^2)\div(X+Y)$$

$$=X^2-XY+Y^2$$

$$=(x^{\frac{1}{3}})^2-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+(y^{-\frac{1}{3}})^2$$

$$=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$$

(2) $x^{\frac{1}{3}}=X$, $x^{-\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $x^{\frac{2}{3}}=X^2$, $x^{-\frac{2}{3}}=Y^2$, $x^1=X^3$, $x^{-1}=Y^3$, $XY=x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}=1$이므로

(주어진 식)

$$=(X^2+Y^2+1)(X^2-Y^2)(X^3-Y^3)^{-1}$$

$$=\frac{(X^2+Y^2+XY)(X-Y)(X+Y)}{X^3-Y^3}$$

$$=\frac{(X^3-Y^3)(X+Y)}{X^3-Y^3}$$

$$=X+Y$$

$$=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$$

답 (1) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ (2) $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$

129-2 $x^{\frac{1}{4}}=X$, $y^{\frac{1}{4}}=Y$로 놓으면 $x^{\frac{1}{2}}=X^2$, $y^{\frac{1}{2}}=Y^2$

이므로

$$(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})$$
$$=(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$$
$$=X^4+X^2Y^2+Y^4$$
$$=(x^{\frac{1}{4}})^4+(x^{\frac{1}{4}})^2(y^{\frac{1}{4}})^2+(y^{\frac{1}{4}})^4$$
$$=x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$$

답 $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$

130-1 (1) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=5^2$, $x+2+x^{-1}=25$

$\therefore x+x^{-1}=23$

(2) $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=5$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=5^3$

$x^{\frac{3}{2}}+3xx^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}=125$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=125$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\cdot5=125$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=110$

답 (1) 23 (2) 110

다른 풀이 (1) $x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

$=5^2-2=23$

(2) $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=5^3-3\cdot5=110$

130-2 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=3^3$

$x^{\frac{3}{2}}+3xx^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}=27$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=27$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\cdot3=27$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=18$

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=3^2$ $\therefore x+2+x^{-1}=9$

$\therefore x+x^{-1}=7$

$x+x^{-1}=7$의 양변을 제곱하면

$(x+x^{-1})^2=7^2$ $\therefore x^2+2+x^{-2}=49$

$\therefore x^2+x^{-2}=47$

$$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}=\frac{18+2}{47+3}=\frac{2}{5}$$

답 $\frac{2}{5}$

다른 풀이 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$

$=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})$

$=3^3-3\cdot3=18$

또

$x+x^{-1}=(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$

$=3^2-2$

$=7$

이므로

$x^2+x^{-2}=(x+x^{-1})^2-2xx^{-1}$

$=7^2-2=47$

$$\therefore \frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}=\frac{18+2}{47+3}=\frac{2}{5}$$

131-1 세 수 $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[12]{11}$을 유리수 지수로 나타내면

$\sqrt[6]{3}=3^{\frac{1}{6}}$, $\sqrt[8]{5}=5^{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[12]{11}=11^{\frac{1}{12}}$

6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로

$3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{4}{24}}=(3^4)^{\frac{1}{24}}=81^{\frac{1}{24}}$

$5^{\frac{1}{8}}=5^{\frac{3}{24}}=(5^3)^{\frac{1}{24}}=125^{\frac{1}{24}}$

$11^{\frac{1}{12}}=11^{\frac{2}{24}}=(11^2)^{\frac{1}{24}}=121^{\frac{1}{24}}$

이때 $81<121<125$이므로

$81^{\frac{1}{24}}<121^{\frac{1}{24}}<125^{\frac{1}{24}}$

$\therefore \sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

답 $\sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

다른 풀이 1 $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[12]{11}$에서 6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로 주어진 세 수를 $\sqrt[24]{\blacksquare}$ 꼴로 변형하면

$\sqrt[6]{3}=\sqrt[24]{3^4}=\sqrt[24]{81}$

$\sqrt[8]{5}=\sqrt[24]{5^3}=\sqrt[24]{125}$

$\sqrt[12]{11}=\sqrt[24]{11^2}=\sqrt[24]{121}$

이때 $81<121<125$이므로

$\sqrt[24]{81}<\sqrt[24]{121}<\sqrt[24]{125}$

$\therefore \sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

다른 풀이 2 세 수 $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[8]{5}$, $\sqrt[12]{11}$을 각각 24제곱하면

$(\sqrt[6]{3})^{24}=\sqrt[6]{3^{24}}=3^4=81$

$(\sqrt[8]{5})^{24}=\sqrt[8]{5^{24}}=5^3=125$

$(\sqrt[12]{11})^{24}=\sqrt[12]{11^{24}}=11^2=121$

이때 $81<121<125$이므로

$\sqrt[6]{3}<\sqrt[12]{11}<\sqrt[8]{5}$

131-2 $A=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=3^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{6}}$

$B=\sqrt[3]{2\sqrt{7}}=2^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{1}{6}}$

$C=\sqrt[4]{3\sqrt[3]{5}}=3^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{12}}$

3, 4, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$A=3^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{4}{12}}\times 2^{\frac{2}{12}}$

$=(3^4\times 2^2)^{\frac{1}{12}}=324^{\frac{1}{12}}$

$B=2^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{4}{12}}\times 7^{\frac{2}{12}}$

$=(2^4\times 7^2)^{\frac{1}{12}}=784^{\frac{1}{12}}$

$C=3^{\frac{1}{4}}\times 5^{\frac{1}{12}}=3^{\frac{3}{12}}\times 5^{\frac{1}{12}}$

$=(3^3\times 5)^{\frac{1}{12}}=135^{\frac{1}{12}}$

이때 $135<324<784$이므로

$135^{\frac{1}{12}}<324^{\frac{1}{12}}<784^{\frac{1}{12}}$

$\therefore C<A<B$

답 $C<A<B$

다른 풀이 $A=\sqrt[3]{3\sqrt{2}}=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

$=\sqrt[3]{3}\times\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{2}$

$=\sqrt[6]{18}$

$B=\sqrt[3]{2\sqrt{7}}=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\sqrt{7}}$

$=\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{7}$

$=\sqrt[6]{28}$

$C=\sqrt[4]{3\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}}$

$=\sqrt[4]{3}\times\sqrt[12]{5}=\sqrt[12]{3^3}\times\sqrt[12]{5}$

$=\sqrt[12]{135}$

6, 12의 최소공배수가 12이므로 $\sqrt[6]{18}$, $\sqrt[6]{28}$을 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형하면

$\sqrt[6]{18}=\sqrt[12]{18^2}=\sqrt[12]{324}$

$\sqrt[6]{28}=\sqrt[12]{28^2}=\sqrt[12]{784}$

이때 $135<324<784$이므로

$\sqrt[12]{135}<\sqrt[12]{324}<\sqrt[12]{784}$

$\therefore C<A<B$

132-1 (1) $(2^x+2^{-x})^2=(2^x-2^{-x})^2+4\cdot 2^x\cdot 2^{-x}$

$=3^2+4\cdot 1=13$

그런데 $2^x+2^{-x}>0$이므로

$2^x+2^{-x}=\sqrt{13}$

(2) $2^{3x}+2^{-3x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3$

$=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})$

$=(\sqrt{13})^3-3\cdot 1\cdot\sqrt{13}$

$=10\sqrt{13}$

답 (1) $\sqrt{13}$ (2) $10\sqrt{13}$

132-2 $(a^{3x}-a^{-3x})(a^x-a^{-x})^{-1}$

$=\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$

$=\dfrac{(a^x)^3-(a^{-x})^3}{a^x-a^{-x}}$

$=\dfrac{(a^x-a^{-x})(a^{2x}+a^xa^{-x}+a^{-2x})}{a^x-a^{-x}}$

$=a^{2x}+1+a^{-2x}$

$=(\sqrt{2}+1)+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{2}+1+1+\sqrt{2}-1$

$=2\sqrt{2}+1$

답 $2\sqrt{2}+1$

133-1 $67^x=27$에서

$67=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}}$ …… ㉠

$603^y=81$에서

$603=81^{\frac{1}{y}}=(3^4)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{4}{y}}$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{67}{603}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\dfrac{1}{9}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$, $3^{-2}=3^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}$

$\therefore \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=-2$

답 -2

133-2 $8^x=9^y=6^z=k$로 놓으면 $k>0$이고, $xyz\neq 0$에서 $k\neq 1$이다. 한편

$8^x=k$에서 $2^{3x}=k$

$\therefore 2=k^{\frac{1}{3x}}$ …… ㉠

$9^y=k$에서 $3^{2y}=k$

$\therefore 3=k^{\frac{1}{2y}}$ …… ㉡

$6^z=k$에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡을 하면 $6=k^{\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}}$이므로 ㉢에 의하여

$k^{\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}}=k^{\frac{1}{z}}$

그런데 $k>0$이고 $k\neq 1$이므로

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{z}$

위의 식의 양변에 6을 곱하면

$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{6}{z}$ 답 풀이 참조

중단원 연습 문제 본책 380~383쪽

01 ⑤ 02 ② 03 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$ 04 ①

05 $\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{7}$ 06 31 07 -1

08 -5 09 $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$ 10 ④ 11 -1 12 ②

13 $4\cdot 9^x$ 14 $\sqrt{5}$ 15 $B<A<C$ 16 $\frac{10}{3}$

17 $\frac{1}{2}$ 18 ② 19 16 20 30 21 ④

22 ③ 23 ①

01 전략 a의 n제곱근은 $x^n=a$를 만족시키는 x이고, n제곱근 a는 $\sqrt[n]{a}$임을 이용하여 참, 거짓을 판별한다.

풀이 ① 27의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=27$이므로

$x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\frac{-3-3\sqrt{3}i}{2}$, $\frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$이다.

② 16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=16$이므로

$x^4-16=0$, $(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 16의 네제곱근은 -2, 2, $-2i$, $2i$이다.

③ 세제곱근 -64는 $\sqrt[3]{-64}$이고, 이것은 -64의 세제곱근 중 실수인 것이므로

$\sqrt[3]{-64}=-4$

④ 네제곱근 81은 $\sqrt[4]{81}$이고, 이것은 81의 네제곱근 중 양수인 것이므로

$\sqrt[4]{81}=3$

⑤ -0.008의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-0.008$이므로

$x^3+0.008=0$

$(x+0.2)(x^2-0.2x+0.04)=0$

$\therefore x=-0.2$ 또는 $x=0.1\pm\sqrt{0.03}i$

따라서 -0.008의 세제곱근 중 실수인 것은 -0.2뿐이다.

답 ⑤

02 전략 밑을 3으로 같게 한 후, 지수법칙을 이용한다.

풀이 $3^{\frac{2}{3}}\times9^{\frac{3}{2}}\div27^{\frac{8}{9}}=3^{\frac{2}{3}}\times(3^2)^{\frac{3}{2}}\div(3^3)^{\frac{8}{9}}$

$=3^{\frac{2}{3}}\times3^3\div3^{\frac{8}{3}}$

$=3^{\frac{2}{3}+3-\frac{8}{3}}=3$

답 ②

03 전략 $a^{\frac{1}{3}}=X$, $b^{\frac{1}{3}}=Y$로 치환한 후, $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y)$임을 이용한다.

풀이 $a^{\frac{1}{3}}=X$, $b^{\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $a^{\frac{2}{3}}=X^2$, $b^{\frac{2}{3}}=Y^2$이므로

$(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})$

$=(X^2-Y^2)\div(X+Y)$

$=(X+Y)(X-Y)\div(X+Y)$

$=X-Y=a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$

답 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$

04 전략 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하여 $x+x^{-1}=k$ 꼴로 변형한 후, $x+x^{-1}=k$의 양변을 제곱하여 x^2+x^{-2}의 값을 구한다.

풀이 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=3^2$, $x-2+x^{-1}=9$

$\therefore x+x^{-1}=11$

$x+x^{-1}=11$의 양변을 제곱하면

$(x+x^{-1})^2=11^2$, $x^2+2+x^{-2}=121$

$\therefore x^2+x^{-2}=119$

답 ①

05 해결과정 • 세 수 $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{30}$을 유리수 지수로 나타내면

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{7}=7^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{30}=30^{\frac{1}{6}}$ → 20% 배점

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}$

$7^{\frac{1}{3}}=7^{\frac{2}{6}}=(7^2)^{\frac{1}{6}}=49^{\frac{1}{6}}$ → 40% 배점

이때 $27<30<49$이므로

$27^{\frac{1}{6}}<30^{\frac{1}{6}}<49^{\frac{1}{6}}$ → 20% 배점

답구하기 • $\therefore \sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{7}$ → 20% 배점

답 $\sqrt{3}<\sqrt[6]{30}<\sqrt[3]{7}$

06 해결과정 • $\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$의 분모, 분자에 a^x을 곱하면

$$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^{3x}-a^{-3x})a^x}{(a^x-a^{-x})a^x}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$

$$=\frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}$$ → 50% 배점

$$=\frac{5^2-\frac{1}{5}}{5-1}$$

$$=\frac{31}{5}$$ → 30% 배점

답구하기 • 따라서 $\frac{n}{5}=\frac{31}{5}$이므로

$n=31$ → 20% 배점

답 31

07 전략 $a^x=k\ (a>0,\ x\neq 0)$일 때, $a=k^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $14^x=3$에서 $3^{\frac{1}{x}}=14$ …… ㉠

$42^y=27$, 즉 $42^y=3^3$에서 $3^{\frac{3}{y}}=42$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$3^{\frac{1}{x}}\div 3^{\frac{3}{y}}=\frac{1}{3}$, $3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}=3^{-1}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-1$

답 -1

08 해결과정 • -5^6의 세제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[3]{-5^6}=\sqrt[3]{(-5^2)^3}=-5^2=-25$

$\therefore a=-25$ → 40% 배점

$-a$, 즉 25의 네제곱근 중 양수인 것은

$\sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt{5}$ $\therefore b=\sqrt{5}$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore \frac{a}{b^2}=\frac{-25}{(\sqrt{5})^2}=-5$ → 20% 배점

답 -5

09 전략 거듭제곱근을 유리수 지수로 변형하고, 지수법칙을 이용한다.

풀이 $\sqrt[3]{a^5b^4}\div\sqrt{ab^3}\times\sqrt[6]{a^2b^5}$

$=(a^5b^4)^{\frac{1}{3}}\div(ab^3)^{\frac{1}{2}}\times(a^2b^5)^{\frac{1}{6}}$

$=a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{4}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{6}}$

$=a^{\frac{5}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}b^{\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

답 $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

다른 풀이 $\sqrt[3]{a^5b^4}\div\sqrt{ab^3}\times\sqrt[6]{a^2b^5}$

$=\sqrt[6]{(a^5b^4)^2}\div\sqrt[6]{(ab^3)^3}\times\sqrt[6]{a^2b^5}$

$=\sqrt[6]{a^{10}b^8\div a^3b^9\times a^2b^5}$

$=\sqrt[6]{a^{10-3+2}b^{8-9+5}}$

$=\sqrt[6]{a^9b^4}=a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}$

10 전략 현재 인구수를 P로 놓고 5년 후, 10년 후의 인구수를 각각 P로 나타낸다.

풀이 현재 인구수를 P라 하면 5년 후의 인구수는

$(1-0.02)^5P=0.98^5P$

10년 후의 인구수는

$(1-0.02)^{10}P=0.98^{10}P$

5년 후의 인구수가 10년 후의 인구수의 x배라 하면

$$x=\frac{0.98^5P}{0.98^{10}P}=0.98^{-5}$$

답 ④

11 해결과정 • 직선 $2^ax+4^{a-1}y+2=0$의 기울기는

$$-\frac{2^a}{4^{a-1}}=-\frac{2^a}{2^{2a-2}}=-2^{-a+2}$$ → 25% 배점

직선 $4^{2a}x-2^{2a+1}y-2=0$의 기울기는

$$\frac{4^{2a}}{2^{2a+1}}=\frac{2^{4a}}{2^{2a+1}}=2^{2a-1}$$ → 25% 배점

두 직선이 서로 수직이므로

$(-2^{-a+2})\cdot 2^{2a-1}=-1$, $-2^{a+1}=-1$

$\therefore 2^{a+1}=1$ → 30% 배점

답구하기 • 따라서 $a+1=0$이므로

$a=-1$ → 20% 배점

답 -1

12 전략 Q_A, Q_B에 각각 $t=20$, $w=8$을 대입한 후, 지수법칙을 이용하여 $\frac{Q_A}{Q_B}$의 값을 구한다.

풀이 수온이 20°C이고 A 조개와 B 조개의 개체중량이 각각 8 g이므로

$$\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01\times 20^{1.25}\times 8^{0.25}}{0.05\times 20^{0.75}\times 8^{0.30}}$$
$$=\frac{20^{0.50}}{5\times 8^{0.05}}=\frac{(2^2\times 5)^{0.50}}{5\times (2^3)^{0.05}}$$
$$=\frac{2\times 5^{0.50}}{2^{0.15}\times 5}$$
$$=2^{0.85}\times 5^{-0.50}$$

따라서 $a=0.85$, $b=-0.50$이므로

$a+b=0.85+(-0.50)=0.35$

답 ②

13 전략 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 $(3^{x+y}+3^{x-y})^2-(3^{x+y}-3^{x-y})^2$

$=\{(3^{x+y}+3^{x-y})+(3^{x+y}-3^{x-y})\}$
$\times\{(3^{x+y}+3^{x-y})-(3^{x+y}-3^{x-y})\}$

$=(2\cdot 3^{x+y})(2\cdot 3^{x-y})$

$=4\cdot 3^{2x}=4\cdot 9^x$

답 $4\cdot 9^x$

다른 풀이 $3^{x+y}=A$, $3^{x-y}=B$로 놓으면

$(3^{x+y}+3^{x-y})^2-(3^{x+y}-3^{x-y})^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2$
$=(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)$
$=4AB=4\cdot 3^{x+y}\cdot 3^{x-y}$
$=4\cdot 3^{2x}=4\cdot 9^x$

14 전략 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$임을 이용하여 먼저 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2$의 값을 구한다.

풀이 $(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}+2=3+2=5$

이때 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}>0$이므로

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

답 $\sqrt{5}$

15 전략 3, 4의 최소공배수가 12이므로 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$임을 이용하여 세 수를 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형한다.

풀이 3, 4의 최소공배수가 12이므로 주어진 세 수를 $\sqrt[12]{\blacksquare}$ 꼴로 변형하면

$$A=\sqrt[3]{\frac{16}{81}}=\sqrt[12]{\left(\frac{16}{81}\right)^4}=\sqrt[12]{\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^4\right\}^4}=\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}$$

$$B=\sqrt[4]{\frac{64}{729}}=\sqrt[12]{\left(\frac{64}{729}\right)^3}=\sqrt[12]{\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^6\right\}^3}=\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}$$

$$C=\sqrt[3]{\frac{81}{256}}=\sqrt[12]{\left(\frac{81}{256}\right)^4}=\sqrt[12]{\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^4\right\}^4}=\sqrt[12]{\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}$$

$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{4}>1$이므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^{18}<\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$

$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}=\left(\frac{8}{9}\right)^{16}<1$이므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}<\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$

따라서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{18}<\left(\frac{2}{3}\right)^{16}<\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$이므로

$\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{18}}<\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^{16}}<\sqrt[12]{\left(\frac{3}{4}\right)^{16}}$

$\therefore B<A<C$

답 $B<A<C$

16 해결과정 • $\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}$의 분모, 분자에 2^a을 곱하면 ➔ 20% 배점

$\frac{(2^a+2^{-a})2^a}{(2^a-2^{-a})2^a}=-2$, $\frac{4^a+1}{4^a-1}=-2$

$4^a+1=-2\cdot 4^a+2$

$3\cdot 4^a=1$ $\therefore 4^a=\frac{1}{3}$ ➔ 50% 배점

답구하기 • $\therefore 4^a+4^{-a}=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$ ➔ 30% 배점

답 $\frac{10}{3}$

17 해결과정 • $a^x=16$에서

$a=16^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$b^y=16$에서 $b=16^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$c^z=16$에서 $c=16^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢ ➔ 30% 배점

㉠×㉡×㉢을 하면 $16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=abc$ ➔ 20% 배점

$abc=4$이므로

$16^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=4$, $4^{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=4$ ➔ 20% 배점

답구하기 • 따라서 $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ ➔ 30% 배점

답 $\frac{1}{2}$

18 전략 $a^x=k\ (a>0,\ x\neq0)$일 때, $a=k^{\frac{1}{x}}$임을 이용하여 밑을 통일한다.

풀이 $80^x=2$에서 $80=2^{\frac{1}{x}}$

$\left(\frac{1}{10}\right)^y=4$에서 $\frac{1}{10}=4^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{2}{y}}$

$a^z=8$에서 $a=8^{\frac{1}{z}}=2^{\frac{3}{z}}$

즉 $2^{\frac{1}{x}}2^{\frac{2}{y}}\div(2^{\frac{3}{z}})^{\frac{1}{3}}=80\cdot\frac{1}{10}\div a^{\frac{1}{3}}$에서

$2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=8\div a^{\frac{1}{3}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=1$이므로

$2=8\cdot a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}=4$

$\therefore a=4^3=64$

답 ②

Remark 지수법칙의 응용

$a>0$, $b>0$, $xy\neq0$일 때,

① $a^x=b^y$ ➡ $a=b^{\frac{y}{x}}$, $b=a^{\frac{x}{y}}$, $a^{\frac{1}{y}}=b^{\frac{1}{x}}$

② $a^x=b^y=k$ ➡ $a=k^{\frac{1}{x}}$, $b=k^{\frac{1}{y}}$

19 전략 a가 자연수 x의 n제곱근이면 $a^n=x$임을 이용한다.

풀이 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 자연수 x의 n제곱근이라 하면

$x=\{(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}\}^n=\{(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}\}^n=3^{\frac{5}{6}n}$

이때 x는 자연수이므로 n은 6의 배수이어야 한다.

$2\le n\le100$이므로 n은 6, 12, 18, …, 96의 16개이다.

답 16

20 전략 먼저 지수법칙을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

풀이 $a^6=7$에서 $a=7^{\frac{1}{6}}$

$b^5=3$에서 $b=3^{\frac{1}{5}}$

$c^2=13$에서 $c=13^{\frac{1}{2}}$

$\therefore (abc)^n=(7^{\frac{1}{6}}\cdot3^{\frac{1}{5}}\cdot13^{\frac{1}{2}})^n$

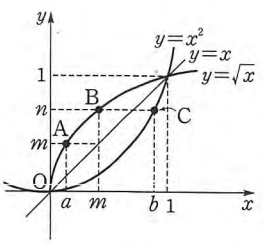
$=7^{\frac{n}{6}}\cdot3^{\frac{n}{5}}\cdot13^{\frac{n}{2}}$ …… ㉠

㉠이 자연수가 되려면 n은 6, 5, 2의 공배수이어야 하므로 구하는 n의 최솟값은 6, 5, 2의 최소공배수인 30이다.

답 30

21 전략 x좌표가 a인 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점과 x좌표가 b인 곡선 $y=x^2$ 위의 점을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서



점 $A(a,\ m)$이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$m=\sqrt{a}$

점 $B(\sqrt{a},\ n)$이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점이므로

$n=\sqrt{\sqrt{a}}$

점 $C(b,\ \sqrt{\sqrt{a}})$가 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로

$\sqrt{\sqrt{a}}=b^2$

이때 $b>0$이므로

$b=\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}=\{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{8}}$

답 ④

22 전략 $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$임을 이용한다.

풀이 $4^a+4^b+4^c$

$=(2^a)^2+(2^b)^2+(2^c)^2$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-2(2^a\cdot2^b+2^b\cdot2^c+2^c\cdot2^a)$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-(2^{a+b+1}+2^{b+c+1}+2^{c+a+1})$

이때 $a+b+c=-1$에서

$a+b+1=-c$, $b+c+1=-a$, $c+a+1=-b$

이므로

$4^a+4^b+4^c$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-(2^{-c}+2^{-a}+2^{-b})$

$=13^2-11=169-11$

$=158$

답 ③

23 전략 두 양수 P, Q에 대하여 $\frac{P}{Q}>1$이면 $P>Q$, $\frac{P}{Q}<1$이면 $P<Q$임을 이용한다.

풀이 m, n이 자연수이므로

$1<m^{n-5}$에서 $n-5>0$

$1<n^{m-8}$에서 $m-8>0$

$1<m^{n-5}<n^{m-8}$에서

$1<(m^{n-5})^{\frac{1}{(n-5)(m-8)}}<(n^{m-8})^{\frac{1}{(n-5)(m-8)}}$이므로

$1<m^{\frac{1}{m-8}}<n^{\frac{1}{n-5}}$

또 $m^{n-5}<n^{m-8}$에서 $\quad\dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1$

(i) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{-\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}=m^{\frac{2}{m-8}}$

$=(m^{\frac{1}{m-8}})^2>1\ (\because m^{\frac{1}{m-8}}>1)$

$\therefore A>B$

(ii) $\dfrac{A}{C}=\dfrac{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{-\frac{1}{n-5}}}=n^{\frac{2}{n-5}}$

$=(n^{\frac{1}{n-5}})^2>1\ (\because n^{\frac{1}{n-5}}>1)$

$\therefore A>C$

(iii) $\dfrac{B}{C}=\dfrac{m^{-\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{-\frac{1}{n-5}}}$

$=m^{-\frac{2}{m-8}}\cdot n^{\frac{2}{n-5}}$

$=\{m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}\}^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}}$

$=\left(\dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}\right)^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}}>1\left(\because \dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1\right)$

$\therefore B>C$

이상에서 $\quad A>B>C$

답 ①

다른 풀이 m, n이 자연수이므로 부등식

$1<m^{n-5}<n^{m-8}$에서

$n-5>0,\ m-8>0$

또 $m^{n-5}<n^{m-8}$에서 $\quad\dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1$

$(n-5)(m-8)=k$로 놓으면 $k>0$이므로

$A^k=m^{n-5}\cdot n^{m-8}$

$B^k=m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}$

$C^k=m^{n-5}\cdot n^{-(m-8)}$

(i) $\dfrac{A^k}{B^k}=\dfrac{m^{n-5}\cdot n^{m-8}}{m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}}$

$=m^{2(n-5)}$

$=(m^{n-5})^2>1\ (\because m^{n-5}>1)$

따라서 $A^k>B^k$이므로 $\quad A>B$

(ii) $\dfrac{B^k}{C^k}=\dfrac{m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}}{m^{n-5}\cdot n^{-(m-8)}}$

$=\dfrac{n^{2(m-8)}}{m^{2(n-5)}}=\left(\dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}\right)^2>1\left(\because \dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1\right)$

따라서 $B^k>C^k$이므로 $\quad B>C$

(i), (ii)에서 $\quad A>B>C$

Remark 두 실수 또는 두 식의 대소 비교

두 실수 또는 두 식 A, B의 대소를 비교할 때에는 다음과 같은 방법을 이용한다.

(1) 차 $A-B$를 조사한다.

① $A-B>0 \iff A>B$

② $A-B=0 \iff A=B$

③ $A-B<0 \iff A<B$

(2) $A>0$, $B>0$일 때, 제곱의 차 A^2-B^2을 조사한다.

① $A^2-B^2>0 \iff A^2>B^2 \iff A>B$

② $A^2-B^2=0 \iff A^2=B^2 \iff A=B$

③ $A^2-B^2<0 \iff A^2<B^2 \iff A<B$

(3) $A>0$, $B>0$일 때, 비 $\dfrac{A}{B}$를 조사한다.

① $\dfrac{A}{B}>1 \iff A>B$

② $\dfrac{A}{B}=1 \iff A=B$

③ $\dfrac{A}{B}<1 \iff A<B$

15 로그

유제

본책 387~411쪽

134-1 (1) $\log_2 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}=x$에서 $2^x=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{8}}$

$2^x=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}}$, $2^x=2^{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}}$

$2^x=2^{-\frac{7}{6}}$ $\therefore x=-\frac{7}{6}$

(2) $\log_x 27=-\frac{3}{2}$에서 $x^{-\frac{3}{2}}=27$

$\therefore x=(27)^{-\frac{2}{3}}=(3^3)^{-\frac{2}{3}}=3^{-2}=\frac{1}{9}$

(3) $\log_8(\log_{81}x)=-1$에서 $8^{-1}=\log_{81}x$

즉 $\log_{81}x=\frac{1}{8}$이므로 $81^{\frac{1}{8}}=x$

$\therefore x=(3^4)^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

답 (1) $-\frac{7}{6}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\sqrt{3}$

134-2 $x=\log_5 27$에서 $5^x=27$

$\therefore 5^{\frac{x}{3}}=27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$ 답 3

135-1 $x^2-2x-5=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-5$

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=2^2-(-5)=9$

따라서 $\log_2\{\log_3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\}=\log_2(\log_3 9)$이므로 $\log_2(\log_3 9)=k$로 놓으면

$2^k=\log_3 9$, $3^{2^k}=9$

$3^{2^k}=3^2$, $2^k=2$

$\therefore k=1$ 답 1

135-2 $x=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

즉 $x-2=-\sqrt{3}$이므로 양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=3$ $\therefore x^2-4x+1=0$

$\therefore \log_2(x^2-4x+5)=\log_2(x^2-4x+1+4)$

$=\log_2 4$

$\log_2 4=k$로 놓으면 $2^k=4$

$2^k=2^2$ $\therefore k=2$

답 2

136-1 (1) 밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq 1$이므로

$3<x<4$ 또는 $x>4$ …… ㉠

진수의 조건에서 $5-x>0$이므로

$x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<4$ 또는 $4<x<5$

(2) 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1\neq 1$이므로

$-1<x<0$ 또는 $x>0$ …… ㉠

진수의 조건에서 $-x^2+3x>0$이므로

$x^2-3x<0$, $x(x-3)<0$

$\therefore 0<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<3$

답 (1) $3<x<4$ 또는 $4<x<5$ (2) $0<x<3$

136-2 $\log_x x^2$이 정의되려면 밑의 조건에서 $x>0$, $x\neq 1$이므로

$0<x<1$ 또는 $x>1$ …… ㉠

진수의 조건에서 $x^2>0$이므로

$x\neq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $x>1$

$\log_{4-x}|4-x|$가 정의되려면 밑의 조건에서

$4-x>0$, $4-x\neq 1$이므로 $x<4$, $x\neq 3$

$\therefore x<3$ 또는 $3<x<4$ …… ㉢

진수의 조건에서 $|4-x|>0$이므로

$x\neq 4$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면

$x<3$ 또는 $3<x<4$

따라서 $\log_x x^2$과 $\log_{4-x}|4-x|$가 모두 정의되도록 하는 실수 x의 값의 범위는

$0<x<1$ 또는 $1<x<3$ 또는 $3<x<4$

답 ④

136-3 밑의 조건에서 $a-3>0$, $a-3\neq 1$이므로

$a>3$, $a\neq 4$

$\therefore 3<a<4$ 또는 $a>4$ …… ㉠

진수의 조건에서 $x^2+ax+2a>0$

임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하므로

방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4\cdot 2a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<a<4$ 또는 $4<a<8$

따라서 $\log_{a-3}(x^2+ax+2a)$가 정의되도록 하는 정수 a는 5, 6, 7의 3개이다. 답 3

Remark 이차부등식이 항상 성립할 조건

실수 a, b, c에 대하여 $a\neq 0$, $D=b^2-4ac$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 부등식 $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건은

$a>0$, $D<0$

137-1 $\log_2 6=\log_2(2\cdot 3)=\log_2 2+\log_2 3$

$=1+\log_2 3$

즉 $1+\log_2 3=a$이므로 $\log_2 3=a-1$

$\therefore \log_2 108=\log_2(2^2\cdot 3^3)$

$=2\log_2 2+3\log_2 3$

$=2+3(a-1)$

$=3a-1$ 답 $3a-1$

137-2 $\log_{10}0.63-\log_{10}1.4$

$=\log_{10}\frac{0.63}{1.4}=\log_{10}\frac{63}{140}$

$-\log_{10}\frac{3^2\cdot 7}{2^2\cdot 5\cdot 7}-\log_{10}\frac{3^2}{2^2\cdot 5}$

$=2\log_{10}3-(2\log_{10}2+\log_{10}5)$

$=2\log_{10}3-2\log_{10}2-\log_{10}\frac{10}{2}$

$=2\log_{10}3-2\log_{10}2-(\log_{10}10-\log_{10}2)$

$=2\log_{10}3-2\log_{10}2-1+\log_{10}2$

$=2\log_{10}3-\log_{10}2-1$

$=2q-p-1$ 답 $2q-p-1$

138-1 (1) $\log_{10}13+\frac{1}{2}\log_{10}11+\log_{10}\frac{4}{7}-\log_{10}\frac{13}{35}$

$+\frac{1}{2}\log_{10}\frac{25}{11}$

$=\log_{10}13+\log_{10}11^{\frac{1}{2}}+\log_{10}\frac{4}{7}-\log_{10}\frac{13}{35}$

$+\log_{10}\left(\frac{25}{11}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\log_{10}13+\log_{10}\sqrt{11}+\log_{10}\frac{4}{7}-\log_{10}\frac{13}{35}$

$+\log_{10}\sqrt{\frac{25}{11}}$

$=\log_{10}\left(13\cdot\sqrt{11}\cdot\frac{4}{7}\div\frac{13}{35}\cdot\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{11}}\right)$

$=\log_{10}\left(13\cdot\sqrt{11}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{35}{13}\cdot\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$

$=\log_{10}100$

$=\log_{10}10^2$

$=2$

(2) $\frac{\log_5\sqrt{2}+\log_5 3-\log_5\sqrt{10}}{\log_5 1.8}$

$=\frac{\log_5\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{10}}}{\log_5\frac{18}{10}}=\frac{\log_5\frac{3}{\sqrt{5}}}{\log_5\frac{9}{5}}$

$=\frac{\log_5\frac{3}{\sqrt{5}}}{\log_5\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\log_5\frac{3}{\sqrt{5}}}{2\log_5\frac{3}{\sqrt{5}}}$

$=\frac{1}{2}$

(3) $(2\log_{12}2)^2+(\log_{12}3)^2+\log_{12}4\cdot\log_{12}9$

$=(2\log_{12}2)^2+(\log_{12}3)^2+\log_{12}2^2\cdot\log_{12}3^2$

$=(2\log_{12}2)^2+(\log_{12}3)^2+2\cdot 2\log_{12}2\cdot\log_{12}3$

$=(2\log_{12}2+\log_{12}3)^2$

$=\{\log_{12}(2^2\cdot 3)\}^2$

$=(\log_{12}12)^2=1^2$

$=1$ 답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

139-1 (1) $\frac{\log_2 3\cdot\log_3 6\cdot\log_5 8}{\log_5 3+\log_5 2}$

$=\frac{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 3}\cdot\log_5 2^3}{\log_5 6}$

$=\frac{\frac{\log_5 3}{\log_5 2}\cdot\frac{\log_5 6}{\log_5 3}\cdot 3\log_5 2}{\log_5 6}$

$=\frac{3\log_5 6}{\log_5 6}$

$=3$

(2) $\log_2 10\cdot\log_5 10-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=\log_2(5\times 2)\cdot\log_5(5\times 2)-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=(\log_2 5+\log_2 2)(\log_5 5+\log_5 2)-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=(\log_2 5+1)(1+\log_5 2)-(\log_2 5+\log_5 2)$

$=\log_2 5+\log_2 5\cdot\log_5 2+1+\log_5 2-\log_2 5-\log_5 2$

$=\log_2 5+1+1+\log_5 2-\log_2 5-\log_5 2$
$=2$

답 (1) 3 (2) 2

140-1 $a=\log_3 6=\log_3(2\cdot 3)$
$=\log_3 2+\log_3 3$
$=\log_3 2+1$
이므로 $\log_3 2=a-1$

$\therefore \log_2 36=\dfrac{\log_3 36}{\log_3 2}=\dfrac{\log_3(2^2\cdot 3^2)}{\log_3 2}$
$=\dfrac{2\log_3 2+2}{\log_3 2}=\dfrac{2(a-1)+2}{a-1}$
$=\dfrac{2a}{a-1}$

답 $\dfrac{2a}{a-1}$

다른 풀이 $\log_2 36=\dfrac{\log_3 36}{\log_3 2}=\dfrac{\log_3 6^2}{\log_3 \frac{6}{3}}$
$=\dfrac{2\log_3 6}{\log_3 6-\log_3 3}$
$=\dfrac{2a}{a-1}$

140-2 $a^x=2$, $a^y=3$, $a^z=10$에서 $a\neq 1$이므로
$x=\log_a 2$, $y=\log_a 3$, $z=\log_a 10$

$\therefore \log_{0.18}\sqrt{45}=\dfrac{\log_a\sqrt{45}}{\log_a 0.18}$
$=\dfrac{\frac{1}{2}\log_a 45}{\log_a \frac{18}{100}}$
$=\dfrac{\frac{1}{2}\log_a(3^2\cdot 5)}{\log_a 18-\log_a 100}$
$=\dfrac{\frac{1}{2}\log_a\left(3^2\cdot\frac{10}{2}\right)}{\log_a(2\cdot 3^2)-\log_a 10^2}$
$=\dfrac{\frac{1}{2}(\log_a 3^2+\log_a 10-\log_a 2)}{\log_a 2+\log_a 3^2-\log_a 10^2}$
$=\dfrac{\frac{1}{2}(2\log_a 3+\log_a 10-\log_a 2)}{\log_a 2+2\log_a 3-2\log_a 10}$
$=\dfrac{\frac{1}{2}(2y+z-x)}{x+2y-2z}$
$=\dfrac{-x+2y+z}{2(x+2y-2z)}$

답 $\dfrac{-x+2y+z}{2(x+2y-2z)}$

141-1 $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$이므로 주어진 등식에서
$\dfrac{1}{\log_b a}+\log_b a=\dfrac{10}{3}$
위의 등식의 양변에 $3\log_b a$를 곱하여 정리하면
$3(\log_b a)^2-10\log_b a+3=0$
$(3\log_b a-1)(\log_b a-3)=0$
$\therefore \log_b a=\dfrac{1}{3}$ 또는 $\log_b a=3$
그런데 $\log_b a>1$이므로 $\log_b a=3$
로그의 정의에 의하여 $a=b^3$
$\therefore \dfrac{a+b^6}{a^2+b^3}=\dfrac{b^3+b^6}{b^6+b^3}=1$

답 1

141-2 $\log_a c : \log_b c=2:1$에서
$\log_a c=2\log_b c$, $\dfrac{1}{\log_c a}=\dfrac{2}{\log_c b}$
$2\log_c a=\log_c b$, $\log_c a^2=\log_c b$
$\therefore a^2=b$
$\therefore \log_a b+\log_b a=\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b}$
$=\log_a a^2+\dfrac{1}{\log_a a^2}$
$=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$

답 $\dfrac{5}{2}$

141-3 $\log_a x=6$, $\log_b x=3$, $\log_c x=4$에서 $x\neq 1$이므로
$\log_{abc} x=\dfrac{1}{\log_x abc}$
$=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}$
$=\dfrac{1}{\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_b x}+\frac{1}{\log_c x}}$
$=\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$

답 $\dfrac{4}{3}$

142-1 $42^x=243$에서

$x=\log_{42}243=\log_{42}3^5=5\log_{42}3$

$\therefore \frac{5}{x}=\frac{1}{\log_{42}3}=\log_3 42$

$14^y=9$에서

$y=\log_{14}9=\log_{14}3^2=2\log_{14}3$

$\therefore \frac{2}{y}=\frac{1}{\log_{14}3}=\log_3 14$

$\therefore \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=\log_3 42-\log_3 14$

$=\log_3\frac{42}{14}$

$=\log_3 3=1$

답 1

다른 풀이 $42^x=243$, 즉 $42^x=3^5$에서

$3^{\frac{5}{x}}=42$ …… ㉠

$14^y=9$, 즉 $14^y=3^2$에서

$3^{\frac{2}{y}}=14$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면 $3^{\frac{5}{x}}\div 3^{\frac{2}{y}}=3$

$3^{\frac{5}{x}-\frac{2}{y}}=3^1$ $\therefore \frac{5}{x}-\frac{2}{y}=1$

142-2 $4^x=9^y=12$의 각 변에 밑이 12인 로그를 취하면

$\log_{12}4^x=\log_{12}9^y=\log_{12}12$

$x\log_{12}4=y\log_{12}9=1$

$\therefore \frac{1}{x}=\log_{12}4,\ \frac{1}{y}=\log_{12}9$

$\therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2\log_{12}4+\log_{12}9$

$=\log_{12}(4^2\cdot 9)=\log_{12}(4^2\cdot 3^2)$

$=\log_{12}(4\cdot 3)^2=\log_{12}12^2$

$=2\log_{12}12=2$

답 2

다른 풀이 $4^x=12$에서 $12^{\frac{1}{x}}=4$

$12^{\frac{2}{x}}=4^2$, $12^{\frac{2}{x}}=16$ …… ㉠

$9^y=12$에서 $12^{\frac{1}{y}}=9$ …… ㉡

㉠×㉡을 하면 $12^{\frac{2}{x}}\cdot 12^{\frac{1}{y}}=144$

$12^{\frac{2}{x}+\frac{1}{y}}=12^2$ $\therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2$

143-1 (1) $\left(\log_{25}\frac{1}{3}+\log_5 9\right)\left(\log_{\sqrt{3}}5+\log_{27}\frac{1}{5}\right)$

$=(\log_{5^2}3^{-1}+\log_5 3^2)(\log_{3^{\frac{1}{2}}}5+\log_{3^3}5^{-1})$

$=\left(-\frac{1}{2}\log_5 3+2\log_5 3\right)$

$\times\left(2\log_3 5-\frac{1}{3}\log_3 5\right)$

$=\frac{3}{2}\log_5 3\cdot\frac{5}{3}\log_3 5$

$=\frac{5}{2}\log_5 3\cdot\log_3 5=\frac{5}{2}$

(2) $\frac{3}{2}\log_8 9=\frac{3}{2}\log_{2^3}3^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\log_2 3$

$=\log_2 3$

이므로

$2^{\frac{3}{2}\log_8 9}=2^{\log_2 3}=3^{\log_2 2}=3$

답 (1) $\frac{5}{2}$ (2) 3

143-2 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=5$

$\therefore k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$

$=\sqrt{15}$

$\therefore \frac{1}{\log_{3\alpha}k}+\frac{1}{\log_{\beta}k}=\log_k 3\alpha+\log_k\beta$

$=\log_k 3\alpha\beta$

$=\log_{\sqrt{15}}15$

$=\log_{15^{\frac{1}{2}}}15$

$=2\log_{15}15$

$=2$

답 2

144-1 $\log A=0.6$이므로

$\log A^4=4\log A=4\times 0.6=2.4$

$\log A^{-3}=-3\log A=(-3)\times 0.6=-1.8$

$=-2+(1-0.8)=-2+0.2$

따라서 $\alpha=0.4$, $\beta=0.2$이므로

$\alpha=k\beta$에서 $0.4=k\times 0.2$

$\therefore k=2$

답 2

144-2 $\log A=n_1+\alpha$ (n_1은 정수, $0<\alpha<1$)에서

$\log\frac{1}{A}=\log A^{-1}=-\log A$

$=-n_1-\alpha$

$=(-n_1-1)+(1-\alpha)$

이때 $0<\alpha<1$이므로

$-1<-\alpha<0 \quad \therefore 0<1-\alpha<1$

$\therefore \beta=1-\alpha$ 답 $\beta=1-\alpha$

145-1 $\log A$의 정수 부분을 n이라 하면

$n\le\log A<n+1$

$\therefore 10^n\le A<10^{n+1}$

따라서 자연수 A의 개수는

$10^{n+1}-10^n=10^n(10-1)=9\cdot10^n$ 답 $9\cdot10^n$

145-2 (1) $\log 3^n$의 정수 부분이 9이므로

$9\le\log 3^n<10, \quad 9\le n\log 3<10$

$\therefore \frac{9}{\log 3}\le n<\frac{10}{\log 3}$

$\log 3=0.4771$이므로

$\frac{9}{0.4771}\le n\le\frac{10}{0.4771}$

$18.\times\times\times\le n<20.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 값은 19, 20이다.

(2) $\log 5^n$의 정수 부분이 50이므로

$50\le\log 5^n<51, \quad 50\le n\log 5<51$

$\therefore \frac{50}{\log 5}\le n<\frac{51}{\log 5}$

$\log 2=0.3010$이므로

$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-\log 2=1-0.3010=0.6990$

즉 $\frac{50}{0.6990}\le n<\frac{51}{0.6990}$이므로

$71.\times\times\times\le n<72.\times\times\times$

따라서 자연수 n의 값은 72이다.

답 (1) 19, 20 (2) 72

146-1 (1) $\log 5^{30}=30\log\frac{10}{2}=30(1-\log 2)$

$=30(1-0.3010)$

$=20.97$

따라서 $\log 5^{30}$의 정수 부분이 20이므로 5^{30}은 21자리의 정수이다.

(2) $\log(2^{40}\times3^{20})=\log 2^{40}+\log 3^{20}$

$=40\log 2+20\log 3$

$=40\times0.3010+20\times0.4771$

$=12.04+9.542$

$=21.582$

따라서 $\log(2^{40}\times3^{20})$의 정수 부분이 21이므로 $2^{40}\times3^{20}$은 22자리의 정수이다.

(3) $\log\frac{1}{3^{50}}=\log 3^{-50}$

$=-50\log 3$

$=-50\times0.4771$

$=-23.855$

$=-24+0.145$

따라서 $\log\frac{1}{3^{50}}$의 정수 부분이 -24이므로 $\frac{1}{3^{50}}$은 소수점 아래 24째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

(4) $\log(\cos 45°)^{20}=\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20}$

$=\log(2^{-\frac{1}{2}})^{20}$

$=-10\log 2$

$=-10\times0.3010$

$=-3.01$

$=-4+0.99$

따라서 $\log(\cos 45°)^{20}$의 정수 부분이 -4이므로 $(\cos 45°)^{20}$은 소수점 아래 넷째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

답 풀이 참조

146-2 23^{100}이 137자리의 정수이므로 $\log 23^{100}$의 정수 부분은 136이다. 즉 $136\le\log 23^{100}<137$이므로

$136\le100\log 23<137$

$\therefore 1.36\le\log 23<1.37$ ····· ㉠

이때 $\log 23^{20}=20\log 23$이므로 ㉠에서

$20\times1.36\le20\log 23<20\times1.37$

$\therefore 27.2\le\log 23^{20}<27.4$

따라서 $\log 23^{20}$의 정수 부분이 27이므로 23^{20}은 28자리의 정수이다. 답 28자리

147-1 $\log(27^{40}\div5^{80})$

$=40\log 3^3-80\log\frac{10}{2}$

$=120\log 3-80(1-\log 2)$

$=120\times0.4771-80(1-0.3010)$

$=57.252-55.92=1.332$

$\log(27^{40}\div5^{80})$의 정수 부분이 1이므로 $27^{40}\div5^{80}$은 두 자리의 정수이다.

$\therefore n=2$

또 $\log(27^{40}\div5^{80})$의 소수 부분이 0.332이므로

$0.3010<0.332<0.4771$

$\log 2<0.332<\log 3$

$1+\log 2<1+0.332<1+\log 3$

$\log 20<1.332<\log 30$

$\therefore \log 20<\log(27^{40}\div5^{80})<\log 30$

따라서 $20<27^{40}\div5^{80}<30$이므로 $27^{40}\div5^{80}$의 최고 자리의 숫자는 2이다.

$\therefore a=2$

$\therefore n+a=4$

답 4

148-1 $\log x$의 소수 부분과 $\log\frac{1}{x}$의 소수 부분이 같으므로

$$\log x-\log\frac{1}{x}=\log x-\log x^{-1}$$
$$=2\log x$$
$$=(\text{정수})$$

x의 정수 부분이 두 자리이면 $\log x$의 정수 부분이 1이므로

$1\le\log x<2$

$\therefore 2\le2\log x<4$

$2\log x$가 정수이므로

$2\log x=2$ 또는 $2\log x=3$

$\log x=1$ 또는 $\log x=\frac{3}{2}$

$\therefore x=10$ 또는 $x=10\sqrt{10}$

답 10 또는 $10\sqrt{10}$

148-2 $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\log x+\log x^2=\log x+2\log x$$
$$=3\log x$$
$$=(\text{정수})$$

$\log x$의 정수 부분이 1이므로

$1\le\log x<2$

$\therefore 3\le3\log x<6$

$3\log x$가 정수이므로

$3\log x=3$ 또는 $3\log x=4$ 또는 $3\log x=5$

그런데 $3\log x=3$, 즉 $\log x=1$이면 $\log x$와 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이라는 조건에 모순이므로

$3\log x=4$ 또는 $3\log x=5$

$\log x=\frac{4}{3}$ 또는 $\log x=\frac{5}{3}$

$\therefore x=10\sqrt[3]{10}$ 또는 $x=10\sqrt[3]{100}$

답 $10\sqrt[3]{10}$ 또는 $10\sqrt[3]{100}$

다른 풀이 $\log x$의 소수 부분을 α $(0<\alpha<1)$라 하면

$\log x=1+\alpha$

$\therefore \log x^2=2\log x=2+2\alpha$

(i) $0<\alpha<\frac{1}{2}$일 때,

$0<2\alpha<1$이므로 $\log x^2$의 소수 부분은 2α이다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\alpha+2\alpha=1$, $3\alpha=1$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\log x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$이므로

$x=10\sqrt[3]{10}$

(ii) $\frac{1}{2}\le\alpha<1$일 때,

$0\le2\alpha-1<1$이므로 $\log x^2$의 소수 부분은 $2\alpha-1$이다.

$\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\alpha+(2\alpha-1)=1$, $3\alpha=2$

$\therefore \alpha=\frac{2}{3}$

따라서 $\log x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$이므로

$x=10\sqrt[3]{100}$

(i), (ii)에서

$x=10\sqrt[3]{10}$ 또는 $x=10\sqrt[3]{100}$

Remark

$\log A$, $\log B$의 소수 부분의 합이 1이면

$\log A+\log B=(\text{정수})$이다.

그러나 그 역은 성립하지 않는다.

예를 들어 $A=10^m$, $B=10^n$ (m, n은 정수)이면

$\log A=m$, $\log B=n$이므로 $\log A+\log B$는 정수이지만 $\log A$의 소수 부분과 $\log B$의 소수 부분의 합은 0이다.

중단원 연습 문제 본책 412~416쪽

01 ②	02 $-12<k<0$	03 2	04 20
05 ⑤	06 ①	07 9	08 $1000\sqrt[3]{10}$
09 15	10 5	11 ⑤	12 $\log 51-2$
13 $\frac{11}{9}$	14 1	15 ③	16 1
17 100	18 2	19 ④	20 ⑤ 21 25
22 ④	23 7	24 ①	

01 전략 로그의 정의를 이용하여 주어진 등식을 $a^x=N$ 꼴로 변형한다.

풀이 $\log_{\sqrt{3}}a=4$에서

$(\sqrt{3})^4=a \quad \therefore a=9$

$\log_{\frac{1}{8}}2=b$에서

$\left(\frac{1}{8}\right)^b=2, \quad 2^{-3b}=2, \quad -3b=1$

$\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-3$ 답 ②

다른 풀이 로그의 성질을 이용하여 b의 값을 구하면

$b=\log_{\frac{1}{8}}2=\log_{2^{-3}}2=-\frac{1}{3}$

02 전략 $\log_a N$이 정의되려면 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$이어야 함을 이용한다.

풀이 진수의 조건에서 $x^2-kx-3k>0$

임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하므로 방정식 $x^2-kx-3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot(-3k)<0$

$k^2+12k<0, \quad k(k+12)<0$

$\therefore -12<k<0$

답 $-12<k<0$

03 전략 로그의 정의를 이용하여 x, y를 각각 로그를 이용하여 나타낸다.

풀이 $2^x=3$, $3^y=4$에서

$x=\log_2 3$, $y=\log_3 4$

$\therefore xy=\log_2 3\cdot\log_3 4$

$=\log_2 3\cdot\frac{\log_2 2^2}{\log_2 3}$

$=2\log_2 2=2$ 답 2

04 해결과정 • $\log_a d=12$에서

$\log_d a=\frac{1}{12}$ ····· ㉠

$\log_b d=30$에서 $\log_d b=\frac{1}{30}$ ····· ㉡

→ 30% 배점

$\log_{abc} d=6$에서 $\log_d abc=\frac{1}{6}$

$\therefore \log_d a+\log_d b+\log_d c=\frac{1}{6}$ ····· ㉢

→ 20% 배점

㉠, ㉡을 ㉢에 대입하면

$\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\log_d c=\frac{1}{6}$

$\therefore \log_d c=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{30}=\frac{1}{20}$ → 30% 배점

답구하기 • $\therefore \log_c d=20$ → 20% 배점

답 20

05 전략 로그의 여러 가지 성질을 이용하여 보기의 식을 변형해 본다.

풀이 ㄱ. $\log_3 3\sqrt{3}=\log_3(\sqrt{3})^3=3\log_3\sqrt{3}$

ㄴ. $\sqrt{2}\log_2\sqrt{2}=\sqrt{2}\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}2=\frac{1}{\sqrt{2}}\log_{2^{\frac{1}{2}}}2=\frac{2}{\sqrt{2}}\log_2 2=\sqrt{2}$

$\therefore \sqrt{2}\log_2\sqrt{2}\neq\frac{1}{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}2$

ㄷ. $\left(\frac{4}{3}\right)^3\log\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot4\log\frac{4}{3}$

$=\frac{4^4}{3^3}\log\frac{4}{3}$

$\left(\frac{4}{3}\right)^4\log\left(\frac{4}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^4\cdot3\log\frac{4}{3}$

$=\frac{4^4}{3^3}\log\frac{4}{3}$

$\therefore \left(\frac{4}{3}\right)^3\log\left(\frac{4}{3}\right)^4=\left(\frac{4}{3}\right)^4\log\left(\frac{4}{3}\right)^3$

ㄹ. $125^{\log_5(\log_5 3)}=5^{3\log_5(\log_5 3)}=5^{\log_5(\log_5 3)^3}$

$=\{(\log_5 3)^3\}^{\log_5 5}=(\log_5 3)^3$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다. 답 ⑤

06 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=3$

$\therefore \log_{81}\left(\alpha+\frac{\alpha}{\beta}\right)+\log_{81}\left(\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$=\log_{81}\left(\alpha+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{\beta}{\alpha}\right)$

$=\log_{81}(\alpha\beta+\beta+\alpha+1)$

$=\log_{81}(3+5+1)$

$=\log_{81}9=\log_{9^2}9=\frac{1}{2}$ 답 ①

07 문제이해 • $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$

$=20\log\frac{7}{9}=20\log\frac{7}{3^2}$

$=20(\log 7-\log 3^2)$

$=20(\log 7-2\log 3)$

$=20(0.8451-2\times0.4771)$

$=-2.182$

$=-2-0.182$

$=-2-1+(1-0.182)$

$=-3+0.818$ → 30% 배점

해결과정 • 따라서 $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$의 정수 부분이 -3이므로 $\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore a=3$ → 20% 배점

한편 $\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$의 소수 부분이 0.818이고

$\log 6=\log(2\times3)=\log2+\log3$

$=0.3010+0.4771=0.7781$

$\log 7=0.8451$

이므로

$\log 6<0.818<\log 7$

$-3+\log 6<-3+0.818<-3+\log 7$

$\log(6\times10^{-3})<\log\left(\frac{7}{9}\right)^{20}<\log(7\times10^{-3})$

$\therefore 6\times10^{-3}<\left(\frac{7}{9}\right)^{20}<7\times10^{-3}$

따라서 $\left(\frac{7}{9}\right)^{20}$은 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자 6이 나타난다.

$\therefore b=6$ → 40% 배점

답구하기 • $\therefore a+b=3+6=9$ → 10% 배점

답 9

08 전략 $\log x=3+\alpha\ (0\le\alpha<1)$임을 이용하여 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분을 구한다.

풀이 $\log x=3+\alpha$이므로

$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x=\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$

이때 $0\le\alpha<1$에서 $\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}<1$이므로 $\log\sqrt{x}$의 소수 부분은 $\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$이다.

$\therefore \beta=\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}$

$\alpha+\beta=1$이므로 $\alpha+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=1$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$

따라서 $\log x=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$이므로

$x=10^{\frac{10}{3}}=1000\sqrt[3]{10}$ 답 $1000\sqrt[3]{10}$

다른 풀이 $\alpha+\beta=1$이므로

$\log x+\log\sqrt{x}=\log x+\frac{1}{2}\log x$

$=\frac{3}{2}\log x=$(정수)

$\log x$의 정수 부분이 3이므로

$3\le\log x<4$ $\therefore \frac{9}{2}\le\frac{3}{2}\log x<6$

$\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로

$\frac{3}{2}\log x=5,\quad \log x=\frac{10}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{10}{3}}=1000\sqrt[3]{10}$

09 전략 주어진 등식을 $a^x=N$ 꼴로 나타낸다.

풀이 $a=\log_2(2+\sqrt{3})$에서 $2^a=2+\sqrt{3}$

$\therefore 4^a+\frac{4}{2^a}=(2^a)^2+\frac{4}{2^a}=(2+\sqrt{3})^2+\frac{4}{2+\sqrt{3}}$

$=7+4\sqrt{3}+4(2-\sqrt{3})$

$=7+4\sqrt{3}+8-4\sqrt{3}=15$

답 15

10 문제이해 • (밑)>0, (밑)$\ne1$, (진수)>0이어야 한다. → 20% 배점

해결과정 • 밑의 조건에서 $a>0,\ a\ne1$이므로

$0<a<1$ 또는 $a>1$ …… ㉠ → 20% 배점

진수의 조건에서 $ax^2-ax+1>0$

㉠에서 $a>0$이므로 임의의 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하려면 방정식 $ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(-a)^2-4a<0$

$a^2-4a<0$, $a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ …… ㉡ → 30% 배점

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<a<1$ 또는 $1<a<4$ → 10% 배점

답구하기 • 따라서 $\log_a(ax^2-ax+1)$이 정의되도록 하는 정수 a는 2, 3이므로 구하는 합은

$2+3=5$ → 20% 배점

답 5

11 전략 주어진 조건에서 로그의 성질을 이용하여 xy의 값을 구한다.

풀이 $\log_3 x+\log_3 y=1$에서

$\log_3 xy=1$ $\therefore xy=3$

$\therefore \dfrac{2^{(x+y)^2}}{2^{(x-y)^2}}=2^{(x+y)^2-(x-y)^2}=2^{4xy}=2^{4\cdot 3}$

$=2^{12}=4096$

답 ⑤

12 전략 로그의 성질을 이용하여 주어진 합을 진수의 곱으로 변형한다.

풀이 $\displaystyle\sum_{k=2}^{50}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=2}^{50}\log\frac{k^2-1}{k^2}$

$\displaystyle=\sum_{k=2}^{50}\log\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right)$

$\displaystyle=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)+\cdots$

$\displaystyle+\log\left(\frac{49}{50}\cdot\frac{51}{50}\right)$

$\displaystyle=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{49}{50}\cdot\frac{51}{50}\right)\right\}$

$\displaystyle=\log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{51}{50}\right)=\log\frac{51}{100}$

$=\log 51-2$

답 $\log 51-2$

13 문제이해 • 이차방정식 $x^2-x\log_3 11+k=0$의 두 근이 n, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$n+\alpha=\log_3 11$ → 30% 배점

해결과정 • $3^2=9$, $3^3=27$이므로

$\log_3 3^2<\log_3 11<\log_3 3^3$

$2<\log_3 11<3$ → 20% 배점

이때 n은 정수이고 $0\le\alpha<1$이므로

$n=2$, $\alpha=\log_3 11-2=\log_3\dfrac{11}{9}$ → 20% 배점

답구하기 • $\therefore 3^{\alpha}=3^{\log_3\frac{11}{9}}=\left(\dfrac{11}{9}\right)^{\log_3 3}$

$=\dfrac{11}{9}$ → 30% 배점

답 $\dfrac{11}{9}$

14 문제이해 • $\log_b a^4=4\log_b a=\dfrac{4}{\log_a b}$ → 30% 배점

해결과정 • $\log_a b=\log_b a^4$에서

$\log_a b=\dfrac{4}{\log_a b}$, $(\log_a b)^2=4$

$\therefore \log_a b=-2$ 또는 $\log_a b=2$ → 20% 배점

답구하기 • 이때 $\log_a b=-2$이면 $b=a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$이므로 $a>1$, $b>1$에 모순이다. → 20% 배점

따라서 $\log_a b=2$이므로 $b=a^2$

$\therefore \dfrac{b}{a^2}=\dfrac{a^2}{a^2}=1$ → 30% 배점

답 1

15 전략 $0<\log 5<1$임을 이용하여 n과 α의 값을 구한다.

풀이 $\log 50=\log(10\cdot 5)=\log 10+\log 5$

$=1+\log 5$

$1<5<10$에서 $\log 1<\log 5<\log 10$, 즉

$0<\log 5<1$이므로

$n=1$, $\alpha=\log 5$

$\therefore \dfrac{10^n+10^{\alpha}}{10^n-10^{\alpha}}=\dfrac{10^1+10^{\log 5}}{10^1-10^{\log 5}}=\dfrac{10+5}{10-5}=\dfrac{15}{5}=3$

답 ③

Remark

50은 두 자리의 정수이므로 $n=1$

따라서 $\log 50=1+\alpha$ $(0\le\alpha<1)$이므로

$\alpha=\log 50-1=\log 50-\log 10=\log\dfrac{50}{10}=\log 5$

16 문제이해 • $1<x<10$이므로

$\log 1<\log x<\log 10$

$\therefore 0<\log x<1$

따라서 $n=0$이므로 $a=\log x$ → 30% 배점

해결과정 • $\log x+2a^2=1$에서

$a+2a^2=1$, $2a^2+a-1=0$,

$(a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$) → 40% 배점

답구하기 • $\therefore \log x^2=2\log x=2a=2\cdot\frac{1}{2}=1$

→ 30% 배점

답 1

17 해결과정 • 2, 3, …, 9는 한 자리의 정수이므로

$f(2)=f(3)=\cdots=f(9)=0$ → 25% 배점

10, 11, …, 99는 두 자리의 정수이므로

$f(10)=f(11)=\cdots=f(99)=1$ → 25% 배점

100, 101, 102, 103, 104는 세 자리의 정수이므로

$f(100)=f(101)=f(102)=f(103)=f(104)$

$=2$ → 25% 배점

답구하기 • $\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(104)$

$=\underbrace{0+\cdots+0}_{8개}+\underbrace{1+\cdots+1}_{90개}+\underbrace{2+\cdots+2}_{5개}$

$=0\times 8+1\times 90+2\times 5$

$=100$ → 25% 배점

답 100

다른 풀이 (i) $1\le x<10$일 때,

$\log 1\le\log x<\log 10$에서

$0\le\log x<1$ $\therefore f(x)=0$

(ii) $10\le x<100$일 때,

$\log 10\le\log x<\log 100$에서

$1\le\log x<2$ $\therefore f(x)=1$

(iii) $100\le x<1000$일 때,

$\log 100\le\log x<\log 1000$에서

$2\le\log x<3$ $\therefore f(x)=2$

이상에서

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(104)$

$=\underbrace{0+\cdots+0}_{8개}+\underbrace{1+\cdots+1}_{90개}+\underbrace{2+\cdots+2}_{5개}$

$=0\times 8+1\times 90+2\times 5=100$

18 전략 $\log x^{100}$의 정수 부분을 이용하여 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분을 구한다.

풀이 x^{100}이 170자리의 정수이면 $\log x^{100}$의 정수 부분은 169이므로

$169\le\log x^{100}<170$, $169\le 100\log x<170$

$1.69\le\log x<1.7$

$-1.7<-\log x\le -1.69$

$\therefore -2+0.3<\log\frac{1}{x}\le -2+0.31$

따라서 $\log\frac{1}{x}$의 정수 부분이 -2이므로 $\frac{1}{x}$은 소수점 아래 둘째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore n=2$ 답 2

19 전략 $\log x^2-\log\sqrt{x}=$(정수)임을 이용한다.

풀이 $\alpha=\beta$이므로

$\log x^2-\log\sqrt{x}=2\log x-\frac{1}{2}\log x$

$=\frac{3}{2}\log x=$(정수)

$100<x<1000$에서

$\log 100<\log x<\log 1000$

$2<\log x<3$

$\therefore 3<\frac{3}{2}\log x<\frac{9}{2}$

이때 $\frac{3}{2}\log x$가 정수이므로 $\frac{3}{2}\log x=4$

$\log x=\frac{8}{3}$, $x=10^{\frac{8}{3}}$

$\therefore x^3=(10^{\frac{8}{3}})^3=10^8$ 답 ④

20 전략 A가 매일 r %씩 감소하면 n일 후에는 $A\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$이 된다.

풀이 다이어트 시작일로부터 n일 후에 갑과 을의 체중이 같아진다고 하면

$75(1-0.003)^n=80(1-0.005)^n$

$15\times 0.997^n=16\times 0.995^n$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 15+n\log 0.997=\log 16+n\log 0.995$

$n(\log 0.997-\log 0.995)=\log 16-\log 15$

$n(-1+\log 9.97+1-\log 9.95)$

$=5\log 2-\log 3-1$

$n(0.999-0.998)=5\times 0.301-0.477-1$

$0.001n=0.028$

$\therefore n=28$

따라서 다이어트 시작일로부터 28일 후에 갑과 을의 체중이 같아진다.

답 ⑤

21 전략 $\log_2 n-\log_2 k=\log_2 \frac{n}{k}$이 정수임을 이용한다.

풀이 주어진 집합을 A라 하면

$$\log_2 n-\log_2 k=\log_2 \frac{n}{k}=(\text{정수})$$

이므로 $\frac{n}{k}=2^m$ (m은 정수) 꼴이어야 한다.

(i) $1\le n\le 50$일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로

$n\in A$

$k=2n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=2^{-1}$이므로

$2n\in A$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 2 이상이다.

(ii) $n>50$인 짝수일 때,

$k=n$이면 $\frac{n}{k}=\frac{n}{n}=1=2^0$이므로

$n\in A$

$k=\frac{n}{2}$이면 $\frac{n}{\frac{n}{2}}=\frac{2n}{n}=2$이므로

$\frac{n}{2}\in A$

따라서 집합 A의 원소의 개수는 2 이상이다.

(iii) $n>50$인 홀수일 때,

$\frac{n}{k}=2^m$에서 $k=\frac{n}{2^m}$을 만족시키는 정수 m은 0뿐이므로 집합 A의 원소의 개수는 1이다.

이상에서 구하는 자연수 n은 51, 53, 55, …, 99의 25개이다.

답 25

22 전략 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$임을 이용한다.

풀이 $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$이므로 $\log_a b=\log_b a$에서

$$\log_a b=\frac{1}{\log_a b},\quad (\log_a b)^2=1$$

$\therefore \log_a b=\pm 1$

(i) $\log_a b=1$일 때,

$b=a$이므로 a, b가 서로 다른 두 양수라는 조건에 모순이다.

(ii) $\log_a b=-1$일 때,

$b=a^{-1}$, 즉 $b=\frac{1}{a}$이므로 $ab=1$

(i), (ii)에서 $ab=1$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$ab+4a+9b\ge 1+2\sqrt{4a\cdot 9b}=1+2\cdot 6=13$$

(단, 등호는 $4a=9b$일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

답 ④

Remark 산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때,

$a+b\ge 2\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

23 전략 주어진 조건으로부터 함수 $f(x)$, $g(x)$의 의미를 알아낸다.

풀이 조건 (다)에서 $10^{f(x)+g(x)}=10x$의 양변에 상용로그를 취하면

$$f(x)+g(x)=\log 10x$$
$$=1+\log x$$
$$\therefore \log x=\{f(x)-1\}+g(x)$$

이때 조건 (가), (나)에서 $f(x)$는 정수이고 $0\le g(x)<1$이므로 $f(x)-1$은 $\log x$의 정수 부분이고 $g(x)$는 $\log x$의 소수 부분이다.

(i) 2012는 네 자리의 정수이므로 $\log 2012$의 정수 부분은 3이다. 즉

$f(2012)-1=3$

$\therefore f(2012)=4$

(ii) $\log\frac{1}{2012}=-\log 2012=-3.\times\times\times$이므로

$\log\frac{1}{2012}$의 정수 부분은 -4이다. 즉

$f\left(\frac{1}{2012}\right)-1=-4$

$\therefore f\left(\frac{1}{2012}\right)=-3$

(iii) 2020과 202는 숫자의 배열이 같으므로 $\log 2020$의 소수 부분과 $\log 202$의 소수 부분이 같다.

$\therefore g(2020)-g(202)=0$

따라서 구하는 값은

$$f(2012)+g(2020)-f\left(\frac{1}{2012}\right)-g(202)$$
$$=4-(-3)=7$$

답 7

24 전략 주어진 조건을 식에 대입하여 k의 값을 먼저 구한다.

풀이 초기 온도가 20°C인 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도가 365°C이므로

$$365=20+k\log\left(8\cdot\frac{9}{8}+1\right)$$
$$\therefore k=345$$

또 화재가 발생한 지 a분 후의 온도가 710°C이므로

$$710=20+345\log(8a+1)$$
$$345\log(8a+1)=690$$
$$\log(8a+1)=2,\quad 8a+1=100$$
$$\therefore a=\frac{99}{8}$$

답 ①

MEMO



사전식
개념 기본서

개념SSEN

개념으로 수학 잡는,
개념쎈 수학만의 사전식 구성

- **개념 익힘 학습**
  수학의 기본 개념과 원리를 세밀하게 분류한 후
  사전식으로 구성하여 개념 단위로
  체계적인 완전 학습을 할 수 있습니다.

- **개념 특강 학습**
  실전 대비에 필요한 심화 개념과 문제를 해결할 수 있는
  최적의 방법을 특강으로 구성하여
  효과적으로 실전에 대비할 수 있습니다.

- **문제 해결 학습**
  개념 이해와 활용을 위해 꼭 익혀야 할 유형을 엄선하여,
  문제 해결의 방향을 익히고 실전 감각을 키울 수 있습니다.

- **마무리 완전 학습**
  중단원별 학습을 마무리하는 3단계 문제 구성을 통해
  유형별 실전 대비까지 완성할 수 있습니다.

수학의 쎈 힘을 키우는 사전식 개념 기본서

개념SSEN 수학 시리즈

*수학 Ⅰ | *수학 Ⅱ | *확률과 통계 | *미적분 Ⅰ

수학 Ⅰ | 미적분과 통계 기본

수학 Ⅱ | 적분과 통계 | 기하와 벡터

*은 새 교육과정에 따른 도서입니다.

나를 바꾸는 힘 신사고® | SINSAGO |

수학의 **쎈** 힘을 키우는 사전식 **개념 기본서**

개념 SSEN

수학 Ⅱ

SINSAGO WINDOW	Internet | www.sinsago.co.kr
mail | 우137-828. 서울시 서초구 동작대로 212 (방배동 764-30)	
tel | 1661-5590	fax | 02-3481-5762