Ⅲ.통계

2.통계적 추정

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 [*공통]어느 공장에서 생산하는 화장품 1 개의 내용량은 평균이 $201.5g$ 이고 표준편차가 $1.8g$ 내용량의 표본평균이 $200g$ 이상일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

2 정규분포 $N(0,\,4^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $N(3,\,2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 16 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $P(\overline{X} \ge 1) = P(\overline{Y} \le a)$ 를 만족시키는 상수 a의 값은? [3점]

① $\frac{19}{8}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{21}{8}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ $\frac{23}{8}$

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

3 어느 농가에서 생산하는 석류의 무게는 평균이 m, 표준편차가 40 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농가에서 생산하는 석류 중에서 임의 추출한 크기가 64 인 표본을 조사하였더니 석류 무게의 표본평균의 값이 $\overline{x}$ 이었다. 이 결과를 이용하여, 이 농가에서 생산하는 석류 무게의 평균 m에 대한 신뢰도 99% 의 신뢰구간을 구하면 $\overline{x} - c \le m \le \overline{x} + c$ 이다. c의 값은? (단, 무게의 단위는 g 이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $P(0 \le Z \le 2.58) = 0.495$ 로 계산한다.)[4 점]

① 25.8 ② 21.5 ③ 17.2
④ 12.9 ⑤ 8.6

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

4 모표준편차가 14 인 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\sigma(\overline{X}) = 2$ 일 때, n의 값은? [3점][2016(A) /수능 9]

① 9 ② 16 ③ 25
④ 36 ⑤ 49

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

5 정규분포 $N(50,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$, 정규분포 $N(75,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자.

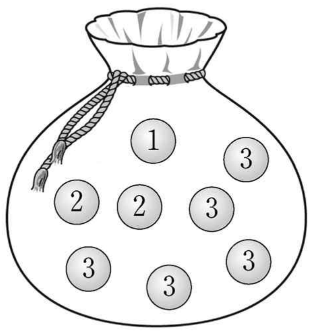
$P(\overline{X} \le 53) + P(\overline{Y} \le 69) = 1$일 때, $P(\overline{Y} \ge 71)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점][2016(B) /수능 18]

z	$P(0 \le Z \le$
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192
1.6	0.4452

① 0.8413 ② 0.8644 ③ 0.8849
④ 0.9192 ⑤ 0.9452

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

6 주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 2의 숫자가 적혀 있는 공 2개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $P(\overline{X}=2)$의 값은?[4점]



① $\frac{5}{32}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{13}{64}$ ⑤ $\frac{7}{32}$

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

7 어느 도시의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 n명을 임의 추출하여 조사한 결과 80%가 이 중앙공원을 이용한 경험이 있다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$이다. $b-a=0.098$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

8 어느 회사에서 생산된 모니터의 수명은 정규분포를 따른다고 한다.

이 회사에서 생산된 모니터 중 임의 추출한 100대의 수명의 표본평균이 $\overline{x}$, 표본표준편차가 500이었다. 이 결과를 이용하여 이 회사에서 생산된 모니터의 수명의 평균을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간이 $[\overline{x}-c,\ \overline{x}+c]$이다.

c의 값을 구하시오.(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다.)[3점][2013학년도 수능]

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

9 어느 회사에서 생산하는 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량은 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.

이 회사에서 생산한 음료수 16병을 임의추출하여 칼슘 함유량을 측정한 결과 표본평균이 12.34이었다. 이 회사에서 생산한 음료수 1병에 들어 있는 칼슘 함유량의 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $11.36 \le m \le a$일 때, $a+\sigma$의 값은?

(단, Z가 표준정규분포를 따를 때 $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이고, 칼슘함유량의 단위는 mg이다.)[3점]

① 14.32 ② 14.82 ③ 15.32
④ 15.82 ⑤ 16.32

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

10 어느 공장에서 생산되는 제품의 길이 X는 평균이 m이고, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다고 한다.

$P(m \le X \le a) = 0.3413$일 때, 이 공장에서 생산된 제품 중에서 임의추출한 제품 16개의 길이의 표본평균이 $a-2$이상일 확률을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?(단, a는 상수이고, 길이의 단위는 cm이다.)[4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668
③ 0.0919 ④ 0.1359
⑤ 0.1587

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

11 [공통]어느 공장에서 생산되는 탁구공을 일정한 높이에서 강철바닥에 떨어뜨렸을 때 탁구공이 튀어 오른 높이는 정규분포를 따른다고 한다.

이 공장에서 생산된 탁구공 중 임의추출한 100개에 대하여 튀어 오른 높이를 측정하였더니 평균이 245, 표준편차가 20이었다.

이 공장에서 생산되는 탁구공 전체의 튀어 오른 높이의 평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간에 속하는 정수의 개수는?

(단, 높이의 단위는 mm이고, Z가 표준정규분포를 따를 때 $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다.)[3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2002 학년도 대수능]

12 어떤 자동 판매기에서 판매되는 음료수의 용량은 모평균 $150ml$, 모표준편차 $5ml$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자동 판매기에서 100개를 임의로 추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, 확률 $P(149 \le \overline{X} \le 151)$의 값을 구하여라.

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.3413 ② 0.4772 ③ 0.8185
④ 0.9544 ⑤ 0.9976

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

13 어느 회사 직원들의 하루 여가 활동 시간은 모평균이 m, 모표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다.

이 회사 직원 중 n명을 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[38.08, 45.92]$일 때, n의 값은?(단, 시간의 단위는 분이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.)[3점]

① 25 ② 36 ③ 49
④ 64 ⑤ 81

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

14 어느 지역의 1인 가구의 월 식료품 구입비는 평균이 45만원, 표준편차가 8만 원인

정규분포를 따른다고 한다.

이 지역의 1인 가구 중에서 임의로 추출한 16가구의 월 식료품 구입비의 표본평균이 44만 원 이상이고 47만 원 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.6915
④ 0.8185 ⑤ 0.8413

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

15 어느 나라에서 작년에 운행된 택시의 연간 주행거리는 모평균이 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 16대를 임의 추출하여 구한 연간 주행거리의 표본평균이 $\overline{x}$이고, 이 결과를 이용하여 신뢰도 95%로 추정한 m에 대한 신뢰구간이 $[\overline{x}-c, \overline{x}+c]$이었다. 이 나라에서 작년에 운행된 택시 중에서 임의로 1대를 선택할 때, 이 택시의 연간 주행거리가 $m+c$이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?(단, 주행거리의 단위는 km이다.)[4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.49	0.1879
0.98	0.3365
1.47	0.4292
1.96	0.4750

① 0.6242 ② 0.6635 ③ 0.6879
④ 0.8365 ⑤ 0.9292

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

16 다음은 어느 모집단의 확률분포표이다.

X	-2	0	1	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{2}$	1

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차는?(단, a는 상수이다.)[4점]

① $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

17 어느 회사 직원들이 일주일 동안 운동하는 시간은 평균 65분, 표준편차 15분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사 직원 중 임의추출한 25명이 일주일동안 운동하는 시간의 평균이 68분 이상일 확률을 아래 표준정규분포를 이용하여 구한 것은?[3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3085 ⑤ 0.4332

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

18 어느 회사에서는 생산되는 제품을 1000개씩 상자에 넣어 판매한다.

이때, 상자에서 임의로 추출한 16개 제품의 무게의 표본평균이 12.7이상이면 그 상자를 정상 판매하고, 12.7미만이면 할인 판매한다.

A상자에 들어 있는 제품의 무게는 평균 16, 표준편차 6인 정규분포를 따르고, B상자에 있는 제품의 무게는 평균 10, 표준편차 6인 정규분포를 따른다고 할 때, A상자가 할인 판매될 확률이 p, B상자가 정상 판매될 확률이 q이다.

$p+q$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은 ?

(단, 무게의 단위는 g이다.)[4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.6	0.4452
1.8	0.4641
2.0	0.4772
2.2	0.4861

① 0.0367 ② 0.0498 ③ 0.0587
④ 0.0687 ⑤ 0.0776

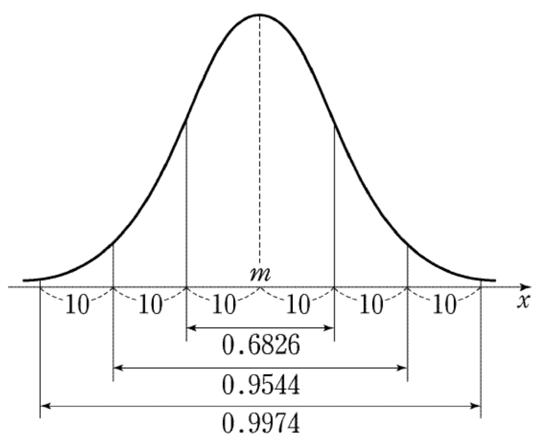
[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

19 [공통]어떤 모집단의 분포가 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따르고, 이 정규분포의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프와 구간별 확률은 아래와 같다.

확률밀도함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(100-x)$를 만족한다.

이 모집단에서 크기 25인 표본을 임의추출할 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.

$P(44 \le \overline{X} \le 48)$의 값은?[4점]



① 0.1359 ② 0.1574 ③ 0.1965
④ 0.2350 ⑤ 0.2718

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

20 어느 회사에서 생산된 야구공의 무게는 평균이 $144.9g$, 표준편차가 $6g$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 야구공 중 임의로 선택한 야구공 9개 무게의 표본평균 이 $141.7g$ 이상 $148.9g$ 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.6	0.4452
1.7	0.4554
1.8	0.4641
1.9	0.4713
2.0	0.4772

① 0.9165 ② 0.9224 ③ 0.9267
④ 0.9282 ⑤ 0.9413

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

21 어느 지역의 전체 고등학생 중 수학 영역에서 B형을 선택하는 학생의 비율을 알아보기 위해 이 지역의 고등학생 n명을 임의추출하여 조사한 결과 20%가 수학 영역에서 B형을 선택한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 지역의 전체 고등학생 중 수학 영역에서 B형을 선택하는 학생의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[0.144, 0.256]$ 이다. n의 값은?(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.)[3점]

① 196 ② 216 ③ 236
④ 256 ⑤ 276

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

22 주머니 속에 1의 숫자가 적혀 있는 공 1개, 3의 숫자가 적혀 있는 공 n개가 들어 있다.

이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다.

이와 같은 시행을 2번 반복하여 얻은 두 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자.

$P(\overline{X}=1) = \dfrac{1}{49}$ 일 때, $E(\overline{X}) = \dfrac{q}{p}$ 이다.

$p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

23 어느 회사에서 생산하는 비누의 무게는 평균이 $250\,\text{g}$, 표준편차가 $20\,\text{g}$인 정규분포를 따른다. 이 회사 비누 중에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 조사한 비누 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(242 \le \overline{X} \le 258) \le 0.9544$ 를 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 16 ② 25 ③ 36
④ 49 ⑤ 64

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

24 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정한 후 신뢰구간의 길이를 구하고자 한다.

아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 79.6%의 신뢰구간의 길이가 l이고, 모평균 m에 대한 신뢰도 $\alpha\%$의 신뢰구간의 길이는 $2l$이다. 이때, α의 값은?[4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.27	0.3980
1.69	0.4545
1.96	0.4750
2.54	0.4945
3.29	0.4995

① 87.3 ② 90.9 ③ 95.0
④ 98.9 ⑤ 99.9

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

25 [공통]어느 회사에서 생산되는 비누의 무게는 정규분포를 따르며, 무게가 $100g$ 미만인 것은 불량품으로 판정한다.

회사에서는 판매 촉진을 위해 비누를 4개씩 포장하여 만든 세트 상품을 판매하기로 하였다. 각 세트 상품은 그 안에 들어 있는 비누 무게의 평균이 $100g$ 미만인 경우에 불량품으로 판정된다고 할 때, 상품 1000세트 중 1세트의 비율로 불량품이 생긴다고 한다. 회사에서 생산된 비누 1개를 검사할 때, 불량품으로 판정될 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

(단, 포장지의 무게는 무시한다.)[4점]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477
2.5	0.494

① 0.001 ② 0.006 ③ 0.023
④ 0.067 ⑤ 0.159

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

26 아래와 같이 주어진 5개의 자료에서 크기가 2인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분산은?[3점]

1, 3, 5, 7, 9

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

27 어느 공장에서 생산되는 전지의 수명이 평균 200시간, 표준편차 5시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 전지 중에서 100개를 임의 추출한 표본의 평균 수명이 201시간 이상일 확률을 주어진 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.1990

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

28 정규분포 $N(m, 4)$를 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의 추출하여 조사한 결과 표본평균이 $\overline{X}$이었다. 모평균 m을 95%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간이 $9.608 \leq m \leq 10.392$일 때, $n+\overline{X}$의 값을 구하시오.(단, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

29 어느 음료회사에서 생산되는 캔 음료 한 개의 용량의 평균은 $355ml$, 표준편차는 $5ml$인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산된 캔 음료 중에서 임의로 100개를 추출할 때, 표본평균이 $354ml$ 이상이고 $355.5ml$ 이하일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은 ?

[표준정규분포표]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.192
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477

① 0.5328　② 0.7745　③ 0.8185
④ 0.8664　⑤ 0.9104

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

30 [공통] 1부터 6까지의 자연수에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4)로 나타낸다. 서로 다른 순서쌍을 모두 구하여 각각을 $A_1, A_2, \cdots, A_k$라 하자. 순서쌍 $A_i\,(i=1, 2, \cdots, k)$에 속한 모든 성분의 합을 s_i라 할 때, $\sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{k}$ 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

31 전국 연합학력평가 후 응시생 1600명을 임의로 추출하여 가채점 하였더니 수리영역 점수의 표준편차가 16점이었다. 수험생 전체 수리영역의 평균점수 m을 95%의 신뢰도로 추정한 신뢰구간이 $\alpha \leq m \leq \beta$일 때, $\beta - \alpha$의 값은? (단, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$)[4점]

① 0.784　② 1.568　③ 2.352
④ 3.136　⑤ 3.920

정답 및 해설

2.통계적 추정

중단원 기출문제

1) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

이 공장에서 생산한 화장품 중 임의추출한 9개의 화장품 내용량의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=201.5g$

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{1.8}{\sqrt{9}}=0.6g$

이때, $Z=\dfrac{\overline{X}-201.5}{0.6}$라 하면 확률변수 Z는 정규분포 $N(0,\,1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}[\text{구하는 값}] &= P(\overline{X}\geq 200)\\ &=P\left(Z\geq\frac{200-201.5}{0.6}\right)\\ &=P(X\geq -2.5)\\ &=P(-2.5\leq Z\leq 0)+P(Z\geq 0)\\ &=P(0\leq Z\leq 2.5)+P(Z\geq 0)\\ &=0.4938+0.5\ =0.9938\end{aligned}$$

2) 답 : ③

[해설]

확률변수 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N\left(0,\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{X}\ -0}{\dfrac{4}{3}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

또 확률변수 $\overline{Y}$ 는 정규분포 $N\left(3,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\dfrac{\overline{Y}\ -3}{\dfrac{1}{2}}$ 라 놓으면 확률변수 Z는 정규분포표 $N(0,\ 1)$를 따른다.

$P(\overline{X}\ \geq 1)=P(\overrightarrow{Y}\leq a)$에서

$$P\left(Z\geq 1-\frac{0}{\frac{4}{3}}\right)=P\left(Z\leq a-\frac{3}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$P\left(Z\geq\frac{3}{4}\right)=P(Z\leq 2(a-3))$$

$\dfrac{3}{4}+2(a-3)=0$에서 $a=\dfrac{21}{8}$

3) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] : 모평균을 추정할 수 있는가?

$\overline{x}-2.58\times\dfrac{40}{\sqrt{64}}\leq m\leq\overline{x}+2.58\times\dfrac{40}{\sqrt{64}}$

$\overline{x}-12.9\leq m\leq\overline{x}+12.9$

따라서 $c=12.9$이다.

4) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 모표준편차를 이용하여 표본표준편차를 구할 수 있는가?

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{14}{\sqrt{n}}=2$

$\sqrt{n}=7$이므로

$n=49$

5) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정규분포 $N(50,\,8^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\,\left(\dfrac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$ 즉, $N(50,\,2^2)$을 따른다.

또, 정규분포 $N(75,\,\sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(75,\,\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$ 즉,

$N\left(75,\,\left(\dfrac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\leq 53)&=P\left(\frac{\overline{X}-50}{2}\leq\frac{53-50}{2}\right)\\ &=P(Z\leq 1.5)\\ &=0.5+P(0\leq Z\leq 1.5)\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\leq 69)&=P\left(\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}\leq\frac{53-50}{\frac{\sigma}{5}}\right)\\ &=P\left(Z\leq-\frac{30}{\sigma}\right)\\ &=0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{30}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

이다.

이때 $P(\overline{X}\leq 53)+P(\overline{Y}\leq 69)=1$이므로

$P(0\leq Z\leq 1.5)=P\left(0\leq Z\leq\dfrac{30}{\sigma}\right)$

즉, $1.5=\dfrac{30}{\sigma}$ 이어야 한다.

$\therefore\ \sigma=20$

$$\begin{aligned}[\text{구하는 값}] &= P(\overline{Y}\geq 71)\\ &=P\left(\frac{\overline{Y}-75}{4}\geq\frac{71-75}{4}\right)\\ &=P(Z\geq -1)\\ &=0.5+P(0\leq Z\leq 1)\\ &=0.5+0.3413\ =0.8413\end{aligned}$$

6) 답 : ⑤

[해설]

두 번의 시행에서 나온 수를 각각 x_1, x_2라 하고, $(x_1,\,x_2)$로 표기할 때,

$\overline{X}=2$인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ 세 가지 뿐이다.

$(x_1, x_2)=(1, 3)$일 확률은 $\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8}$,

$(x_1, x_2)=(2, 2)$일 확률은 $\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}$,

$(x_1, x_2)=(3, 1)$일 확률은 $\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}$이므로

$\therefore\ P(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$

7) 답 : 256

[해설]

[출제 의도] 표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있는가?

표본의 크기가 n일 때 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 표본비율은 $\hat{p}=0.8$이므로 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 모비율 p를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$\left[0.8-1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}},\quad 0.8+1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\right]$이다. 그러므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$에서

$\sqrt{n}=\frac{2\times1.96\times0.4}{0.098}=16 \qquad \therefore\ n=256$

8) 답 : 98

[해설]

모니터의 수명을 X라 하면

$n=100$, 표본표준편차 $s=500$

신뢰도 95%로 추정하면 $P(|Z|\le1.96)=0.95$이므로

$k=1.96$

신뢰구간은 구하면

$\left[\overline{x}-k\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+k\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

$\left[\overline{x}-1.96\frac{500}{\sqrt{100}},\ \overline{x}+1.96\frac{500}{\sqrt{100}}\right]$

$[\overline{x}-98,\ \overline{x}+98]$

$\therefore\ c=1.96\times50=98$

9) 답 : ③

[해설]

표본평균 $\overline{X}=12.34$, 모표준편차 σ, 표본의 크기 $n=16$이므로

모평균 m을 신뢰도 95%로 신뢰구간을 추정하면

$12.34-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le 12.34+1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$11.36\le m\le a$에서

$12.34-1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=11.36$

$1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=0.49\sigma=0.98$

$\therefore\ \sigma=2$

$\therefore\ a=12.34+1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{16}}=12.34+0.98=13.32$

$\therefore\ a+\sigma=13.32+2=15.32$

10) 답 : ①

[해설]

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$가 성립한다.

따라서

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A)=\frac{3}{8}$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{3}{8}+P(B)-\frac{3}{8}P(B)=\frac{1}{2}$

$\frac{5}{8}P(B)=\frac{1}{8}$

$\therefore\ P(B)=\frac{1}{5}$

한편 두 사건 A, B가 서로 독립이면

A, B^c도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^c)=P(A)\cdot P(B^c)$

$=P(A)\cdot(1-P(B))$

$=\frac{3}{8}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}$

11) 답 : ③

[해설]

신뢰도 95%이므로

신뢰구간은 $\overline{X}-k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{X}+k\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$에서

$\overline{X}=245,\ n=100,\ \sigma=20,\ k=1.96$을 대입하면

신뢰구간은

$245-1.96\cdot\frac{20}{1}0\le m\le 245+1.96\cdot\frac{20}{10}$이 된다.

$\therefore$ 만족하는 정수는 7개이다.

12) 답 : ③

[해설]

음료수의 용량을 X라고 하면

정규분포인 모집단 $X: N(150, 5^2)$에서 표본의 크기가 $n=100$을 임의추출한

표본평균이 $\overline{X}$인 표본집단은 $\overline{X}: N\left(150, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$인 정규분포이므로

[구하는 값] $=P(149\le\overline{X}\le151)$

$=2\times P(0\le Z\le2)$

$=2\times0.4772=0.9544$

13) 답 : ①

[해설]

주어진 조건에 의해 신뢰구간의 길이를 구해 보면

$l=2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=45.92-38.08$

$=7.84=4\times1.96$

$\therefore\ \sqrt{n}=5$

$\therefore\ n=25$

14) 답 : ②

[해설]

임의로 추출한 16가구의 월 식료품 구입비의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(45,\ 2^2)$을 따르므로

[구하는 값] $= P(44 \le \overline{X} \le 47)$

$= P(44 \le \overline{X} \le 45) + P(45 \le \overline{X} \le 47)$

$= P(-0.5 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.1915 + 0.3413$

$= 0.5328$

15) 답 : ③

[해설]

모표준편차를 σ라 할 때 $2 \times 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{16}} = 2c$

$\therefore\ c = 0.49\sigma$ 이다.

$P(x \le m+c) = P\left(z \le \dfrac{c}{\sigma}\right) = P(z \le 0.49)$ 이므로

$\therefore\ 0.5 + .1879 = 0.6879$ 이다.

16) 답 : ①

[해설]

확률분포에서 확률의 총합은 1이므로 $\dfrac{1}{4} + a + \dfrac{1}{2} = 1$

$\therefore\ a = \dfrac{1}{4}$

확률변수 X에 대하여 평균 $E(X)$, 분산 $V(X)$은 다음과 같다.

$E(X) = (-2) \times \dfrac{1}{4} + 0 \times \dfrac{1}{4} + 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$

$V(X) = (-2)^2 \times \dfrac{1}{4} + 0 \times \dfrac{1}{4} + 1^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

표본평균 $\overline{X}$의 분산 $V(\overline{X}) = \dfrac{V(X)}{16} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{32}$

따라서 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차 $\sigma(\overline{X}) = \sqrt{V(\overline{X})} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$

17) 답 : ③

[해설]

운동시간을 X라고 하면 X는 $N(65,\ 15^2)$인 정규분포를 따른다.

표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{X}$의 정규분포를 $N(65,\ 3^2)$이므로

$P(\overline{X} \ge 68) = P(Z \ge 1) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1)$

$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

18) 답 : ②

[해설]

A상자는 정규분포 $N(16,\ 6^2)$을 따르고 표본의 크기 16인 표본평균의 분포는 $N\left(16,\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right)$이므로 A상자가 할인이 되려면

$P(\overline{X} < 12.7) = P\left(\dfrac{\overline{X}-16}{\frac{3}{2}} < \dfrac{12.7-16}{\frac{3}{2}}\right)$

$P(\overline{z} < -2.2) = 0.5 - P(0 \le z \le 2.2) = 0.5 - 0.4861 = 0.0139$

같은 방법으로 B상자에서 표본의 크기가 16인 표본평균의 분포는 $N\left(10,\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$P(\overline{X} \ge 12.7) = P\left(\dfrac{\overline{X}-10}{\frac{3}{2}} \ge \dfrac{12.7-10}{\frac{3}{2}}\right)$

$P(\overline{z} \ge 1.8) = 0.5 - P(0 \le z \le 1.8) = 0.0359$

$\therefore\ p + q = 0.0498$

19) 답 : ②

[해설]

$f(x) = f(100-x)$는 확률밀도함수 $f(x)$가 $x = 50$에 대하여 대칭임을 뜻한다.

따라서 확률변수 X의 평균 $m = 50$임을 알 수 있다.

모집단이 정규분포 $N(50,\ 10^2)$을 이루므로

크기 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 분포는 정규분포 $N(50,\ 2^2)$을 따른다.

$P(44 \le \overline{X} \le 48) = P(m-3\sigma \le \overline{X} \le m-\sigma)$

$= P(m-3\sigma \le \overline{X} \le m) - P(m-\sigma \le \overline{X} \le m)$

$= \dfrac{1}{2}(0.9974 - 0.6826)$

$= 0.1574$

20) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 정규분포를 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\overline{X}$ 라 하면,

$\overline{X}$ 는 정규분포 $N(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

[구하는 값] $= P(141.7 \le \overline{X} \le 148.9)$

$= P\left(\dfrac{141.7-144.9}{2} \le Z \le \dfrac{148.9-144.9}{2}\right)$

$= P(-1.6 \le Z \le 2)$

$= P(0 \le Z \le 1.6) + P(0 \le Z \le 2)$

$= 0.9224$

21) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 표본의 크기를 추측한다.

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[0.2 - 1.96 \times \dfrac{\sqrt{0.2 \times 0.8}}{\sqrt{n}},\ 0.2 + 1.96 \times \dfrac{\sqrt{0.2 \times 0.8}}{\sqrt{n}}\right]$

$2 \times 1.96 \times \dfrac{\sqrt{0.2 \times 0.8}}{\sqrt{n}} = 0.112$ 이므로 $n = 196$

22) 답 : 26

[해설]

[출제 의도] 표본평균의 확률분포를 이해하여 기댓값을 구한다.

$P(\overline{X} = 1) = \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{1}{49}$ 에서 $n = 6$

$E(\overline{X})$는 모평균과 같으므로

$E(\overline{X}) = \dfrac{1+3n}{7} = \dfrac{19}{7}$ 이므로 $p + q = 26$

23) 답 : ②

[해설]

비누의 무게 X가 정규분포 $N(250,\ 20^2)$을 따르므로

크기 n인 표본평균의 분포는 정규분포 $N\left(250, \frac{20^2}{n}\right)$을 따른다.

따라서

$P(242 \le \overline{X} \le 258) = P\left(\frac{242-250}{20}\sqrt{n} \le Z \le \frac{258-250}{20}\sqrt{n}\right)$에서

$\frac{8}{20}\sqrt{n} \le 2$ ∴ $n \le 25$이므로 최댓값은 25이다.

24) 답 : ④

[해설]

$P(-z \le Z \le z) = 0.796$인 z의 값은 1.27이므로

$l = 2 \times 1.27 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서, 신뢰구간의 길이가 $2l$이면

$2l = 2 \times 2.54 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$P(-2.54 \le Z \le 2.54) = 2P(0 \le Z \le 2.54)$

$= 2 \times 0.4945 = 0.989$

25) 답 : ④

[해설]

비누 1개의 무게에 대한 확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다고 하자.

비누를 4개씩 묶은 제품의 무게의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따른다. 따라서 $P(\overline{X} < 100) = 0.001$이므로

$P(\overline{X} < 100) = P\left(Z < \frac{100-m}{\frac{\sigma}{2}}\right) = P\left(Z < \frac{2(100-m)}{\sigma}\right)$

$= 0.5 - P\left(0 < Z \le \frac{2(100-m)}{\sigma}\right) = 0.001$이다.

따라서 $P\left(0 < Z < -\frac{2(100-m)}{\sigma}\right) = 0.499$이므로

$-\frac{2(100-m)}{\sigma} = 3$이다.

즉, $\frac{100-m}{\sigma} = -1.5$이다.

그러므로 비누 1개를 검사했을 때 불량품으로 판정될 확률은 다음과 같다.

$P(X < 100) = P\left(Z \le \frac{100-m}{\sigma}\right) = P(Z < -1.5)$

$= 0.5 - P(0 < Z < 1.5) = 0.5 - 0.433 = 0.067$

따라서 구하는 확률은 0.067이다.

26) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]모집단의 분산을 이용하여 표본평균의 분산을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$E(X) = \frac{1+3+5+7+9}{5} = 5$

$V(X) = \frac{16+4+0+4+16}{5} = 8$

$V(\overline{X}) = \frac{8}{2} = 4$

27) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]정규분포에서 확률 계산하기

확률변수 X는 정규분포 $N(200, 5^2)$을 따르고 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(200, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다. $P(\overline{X} \ge 201) = P(Z \ge 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

28) 답 : 110

[해설]

[출제 의도]정규분포를 이용하여 모평균 추정하기

[해설] 95% 신뢰도로 모평균을 추정하면 신뢰구간은

$\overline{X} - \frac{1.962}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + \frac{1.962}{\sqrt{n}}$ 이므로

신뢰구간의 길이는

$2 \times \frac{1.962}{\sqrt{n}} = 10.392 - 9.608 = 0.784$

∴ $n = 100$

$\overline{X} - \frac{1.962}{\sqrt{n}} + \overline{X} + \frac{1.962}{\sqrt{n}} = 20$

∴ $\overline{X} = 10$ ∴ $n + \overline{X} = 110$

29) 답 : ③

[해설]

$E(\overline{X}) = m = 355,\ \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{100}} = 0.5$

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(355, 0.5^2)$을 따른다.

따라서, $Z = \frac{\overline{X} - 355}{0.5}$ 이므로

$P(354 \le \overline{X} \le 355.5) = P(-2 \le Z \le 1)$

$= P(0 \le Z \le 2) + P(0 \le Z \le 1) = 0.8185$

30) 답 : 14

[해설]

[출제 의도]표본공간에서 표본의 크기와 표본평균과의 관계를 이해하고

있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{s_1}{4} = X_1, \frac{s_2}{4} = X_2, \cdots, \frac{s_k}{4} = X_k$라 하면 $X_1, X_2, \cdots, X_k$는 주어진 문제에서

모집단이 $1, 2, \cdots, 6$일 때, 크기가 4인 표본집단의 평균들이다.

여기에서 표본평균의 평균 $\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{k}$는 모집단의 평균과 같으므로

$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{k} = \frac{7}{2}$이다.

$\sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{k} = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_k}{k}$

$= 4\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{k}\right) = 4 \times \frac{7}{2} = 14$

31) 답 : ②

[해설]
[출제 의도]모평균의 신뢰구간을 추정할 수 있는가를 묻는 문제이다.
구하는 모평균 m의 신뢰구간은

$$\overline{X}-1.96\cdot\frac{16}{\sqrt{1600}}\le m\le\overline{X}+1.96\cdot\frac{16}{\sqrt{1600}}$$

$$\therefore\ \beta-\alpha=2\times\frac{1.9616}{\sqrt{1600}}=1.568$$