I.순열과 조합
3.이항정리와 분할
중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]
1 자연수 11을 3 이상 7 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]
2 [*공통] $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ 의 전개식에서 x^4의 계수는? [3점]

① 108 ② 112 ③ 116
④ 120 ⑤ 124

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]
3 다항식 $(x+a)^6$의 전개식에서 x^4의 계수가 60일 때, 양수 a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]
4 다항식 $(x+a)^7$의 전개식에서 x^4의 계수가 280일 때, x^5의 계수는?(단, a는 상수이다.)[3점]

① 84 ② 91 ③ 98
④ 105 ⑤ 112

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]
5 다항식 $(x-a)^5$의 전개식에서 x의 계수와 상수항의 합이 0일 때, 양의 상수 a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]
6 자연수 11을 홀수인 자연수로 분할할 때, 자연수 3이 두 개 이상 포함되도록 분할하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]
7 다항식 $(1+2x)(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

[4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]
8 (공통)자연수 6을 짝수 개의 자연수로 분할하는 방법의 수?[3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

9 (공통) $\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

10 $\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 상수항이 54 일 때, 양수 a 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★☆☆] [2012년 6월 모의평가]

11 다항식 $(1+x)^5$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는?[2점][2012년 6월]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

12 다항식 $(x+a)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 x^4 의 계수가 같을 때, $60a$ 의 값을 구하시오.(단, a 는 양수이다.)[4점][2011년 9월 평가원]

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

13 $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 상수항을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

14 50 이하의 자연수 n 중에서 $\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k$ 의 값이 3 의 배수가 되도록 하는 n 의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

15 다항?? $(1-x)^4(2-x)^3$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

16 다항식 $(x-1)^n$ 의 전개식에서 x 의 계수가 -12 일 때, n 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

17 다항식 $(1+2x)^6(1-x)$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는?[3점]

① 40 ② 50 ③ 60
④ 70 ⑤ 80

[난이도 : ★★★] [2006년 09월 모의평가]

18 자연수 n에 대하여

$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}\right)$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

19 [공통]자연수 n에 대하여

$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\left({}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}\right)$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 모의평가]

20 다음은 두 자연수 m과 $n(m<n)$에 대하여

${}_mC_m+{}_{m+1}C_m+\cdots+{}_nC_m$의 값을 이항정리를 이용하여 구하는 과정이다.

x는 0이 아닌 실수라 하자. ${}_mC_m$은 다항식 $(1+x)^m$에서 x^m의 계수이다. ${}_{m+1}C_m$은 다항식 $(1+x)^{m+1}$에서 x^m의 계수이다. ${}_nC_m$은 다항식 $(1+x)^n$에서 x^m의 계수이다. 따라서 ${}_mC_m+{}_{m+1}C_m+\cdots+{}_nC_m$은 다항식㈎에서 x^m의 계수이다. 그러므로 ${}_mC_m+{}_{m+1}C_m+\cdots+{}_nC_m=$ ㈏이다.

위의 과정에서 ㈎와 ㈏에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[4점]

① $\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}$, ${}_{n+1}C_{m+1}$

② $\dfrac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}$, ${}_{n+1}C_m$

③ $(1+x)^{n+1}-(1+x)^m$, ${}_{n+1}C_m$

④ $\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$, ${}_{n+1}C_{m+1}$

⑤ $\dfrac{(1+x)^{n+1}-1}{x}$, ${}_{n+1}C_m$

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

21 $P(5,3)+S(5,3)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

22 자연수 5의 분할 중 3 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 분할의 수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

23 자연수 7을 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

24 $(x+2y)^4$의 전개식에서 x^2y^2의 계수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

25 $\left(\frac{x}{2}+\frac{a}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수가 15일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

26 다음은 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}C_{k}\right)^2\right\}\geq 10\times{}_{2n}C_{n+1}$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는 (가)이다.
> $(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는
> $$\sum_{k=0}^{n}\left({}_{n}C_{k}\times{}_{n}C_{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left({}_{n}C_{k}\right)^2$$
> 이다. 그러므로
> $$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}C_{k}\right)^2\right\}$$
> $$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_{n}C_{k}\right)^2\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_{n}C_{n-k}\right)^2\right\}$$
> $$=\left\{\left({}_{n}C_{1}\right)^2+2\times\left({}_{n}C_{2}\right)^2+\cdots+n\times\left({}_{n}C_{n}\right)^2\right\}$$
> $$+\left\{\left({}_{n}C_{n-1}\right)^2+2\times\left({}_{n}C_{n-2}\right)^2+\cdots+n\times\left({}_{n}C_{0}\right)^2\right\}$$
> $$=(\text{나})\times\left\{\left({}_{n}C_{0}\right)^2+\left({}_{n}C_{1}\right)^2+\cdots+\left({}_{n}C_{n}\right)^2\right\}$$
> $$=(\text{나})\times[(\text{가})]$$
> 이다.
> 따라서 부등식 $\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_{n}C_{k}\right)^2\right\}\geq 10\times{}_{2n}C_{n+1}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 (다)이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(3)+g(3)+p$의 값은? [4점]

① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

27 (공통) $(x^2+2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

28 집합의 분할의 수 $S(4,3)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

29 원소의 개수가 8인 집합을 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

30 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

31 같은 종류의 접시 3개에 같은 종류의 쿠키 10개를 남김없이 나누어 담을 때, 빈 접시가 없도록 담는 모든 방법의 수는? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

32 다항식 $(1+3x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [3점]

① 180 ② 210 ③ 240
④ 270 ⑤ 300

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

33 다항식 $(x+2)^6$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

34 $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.[3점][2012년 7월]

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

35 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^3의 계수는?[3점]

① 1 ② 6 ③ 10
④ 15 ⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

36 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

37 $\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$의 전개식에서 상수항을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

38 $\sum_{k=0}^{5} {}_5C_k \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

39 [공통] $\left(x-\frac{3}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

40 $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ 의 전개식에서 어떤 자연수 n에 대하여 $\frac{1}{x^2}$ 의 항이 존재한다.

n이 최소일 때, $\frac{1}{x^2}$ 의 계수는?[4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

41 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$ 의 전개식에서 x^3 의 계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

42 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 x 의 계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

43 다음은 $\sum_{r=0}^{29}(-1)^r \cdot {}_{59}C_{2r}$ 의 값을 구하는 과정이다.

$\sum_{r=0}^{29}(-1)^r \cdot {}_{59}C_{2r} = {}_{59}C_0 - {}_{59}C_2 + {}_{59}C_4 - \cdots - {}_{59}C_{58}$ 이므로

$(1+x)^{59} = {}_{59}C_0 + {}_{59}C_1 x + {}_{59}C_2 x^2 + \cdots + {}_{59}C_{59} x^{59}$ 을 이용하면

$(1+i)^{59} = \sum_{r=0}^{29}(-1)^r {}_{59}C_{2r} + ($[(가)]$)\,i$ 이다.

한편, $(1+i)^{59} = \{(1+i)^2\}^{29} \times (1+i) =$ [(나)]$+2^{29}i$ 이므로

$\sum_{r=0}^{29}(-1)^r {}_{59}C_{2r}$ 의 값은 [(나)]이다.

(가), (나)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?(단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)[3점]

① $\sum_{r=0}^{29}(-1)^r \cdot {}_{59}C_{2r+1}$, 2^{29}

② $\sum_{r=0}^{29}(-1)^r \cdot {}_{59}C_{2r+1}$, -2^{29}

③ $\sum_{r=0}^{29}(-1)^{r+1} {}_{59}C_{2r+1}$, 2^{29}

④ $\sum_{r=0}^{29}(-1)^{r+1} \cdot {}_{59}C_{2r+1}$, -2^{29}

⑤ $\sum_{r=0}^{28}(-1)^{r+1} {}_{59}C_{2r+3}$, 2^{29}

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

44 $\log_2\left({}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 + \cdots + {}_{21}C_{10}\right)$ 의 값은?[3점]

① 2 ② 6 ③ 10
④ 14 ⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

45 $(3x+y)^6$ 의 전개식에서 x^2y^4 의 계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

46 $\log_2({}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+\cdots+{}_{100}C_{100})$의 값을 구하시오.[3점]

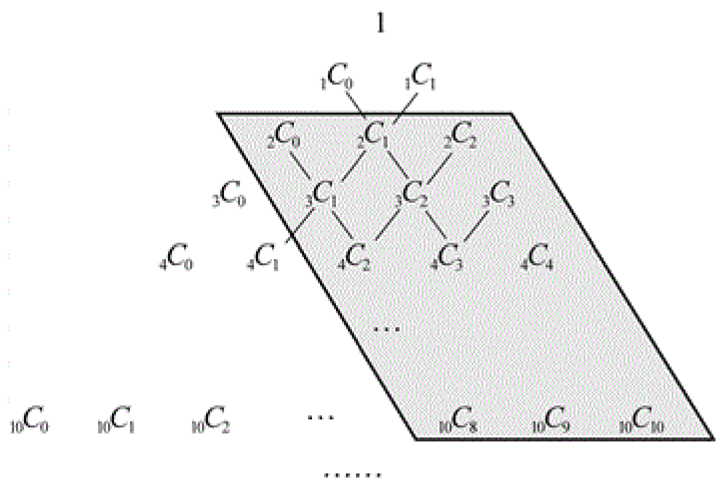
[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

47 동주는 5개의 서로 다른 알사탕과 5개의 똑같은 박하사탕을 가지고 있다.

이 중에서 5개를 택하여 진서에게 주는 방법의 수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

48 그림과 같은 수의 배열을 파스칼의 삼각형이라고 한다. 어두운 부분의 모든 수들의 합은?[3점]



① 224　② 226　③ 228
④ 230　⑤ 232

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

49 다항식 $(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)$를 전개했을 때, x^3의 계수를 구하여라.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

50 다음 중 $\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식에서 x^5의 계수와 같은 것은?[3점]

① $16\times{}_7C_2$　② $16\times{}_7C_3$　③ $8\times{}_7C_3$
④ $8\times{}_7C_2$　⑤ $4\times{}_7C_2$

정답 및 해설

3.이항정리와 분할

중단원 기출문제

1) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 자연수 분할의 수를 구할 수 있는가?

$11=7+4$

$=6+5$

$=5+3+3$

$=4+4+3$

이므로 구하는 방법의 수는 4이다.

2) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 이항정리를 이용하여 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ 의 전개식의 일반항은

${}_8C_r x^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_8C_r 2^r x^{8-2r}$ ($r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$)

이때, $8-2r=4$ 에서 $r=2$

따라서 x^4 의 계수는 ${}_8C_2 2^2=\frac{8\times7}{2\times1}\times4=112$

3) 답 : ②

[해설]

$(x+a)^6$ 의 전개식에서 일반항은 ${}_6C_r a^{6-r}x^r$ 이고,

x^4 의 계수가 60 이므로

$r=4$ 일 때, ${}_6C_4 a^2={}_6C_2 a^2=15a^2=60$ 이며 정리하면

$a^2=4$

$\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)

4) 답 : ①

[해설]

x^4 의 계수는 ${}_7C_4 a^3=280$, $a^3=8$

$\therefore\ a=2$

따라서 x^5 의 계수는 ${}_7C_5 a^2=21\times2^2=84$

5) 답 : ⑤

[해설]

$(x-a)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r x^r(-a)^{5-r}$ 이므로

x 의 계수는 $r=1$ 에서 ${}_5C_1(-a)^4=5a^4\cdots$①

상수항은 $r=0$ $-a^5$ ${}_5C_0(-a)^5=-a^5\cdots$②

$-a^5+5a^4=0$ (a $\because$ a는 양수)이므로

$a=5$

6) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 자연수의 분할을 알고 있는가의 문제이다.

11을 3이 2개 포함되도록 홀수인 자연수로 분할하는 경우의 수는 다음과 같이 2가지이다.

$11=3+3+1+1+1+1+1$

$=3+3+5$

11을 3이 3개 포함되도록 홀수인 자연수로분할하는 경우의 수는 다음과 같이 1가지이다.

$11=3+3+3+1+1$

따라서 11을 홀수인 자연수로 분할할 때 3이 두 개 이상 포함되도록 분할하는 방법의 수는 3가지이다.

7) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 이항정리를 다룰 수 있는지 묻는 문제이다.

$(1+2x)(1+x)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

1과 $(1+x)^5$ 의 계수 중 x^4 의 계수의 곱 ...①

$2x$ 와 $(1+x)^5$ 의 계수 중 x^3 의 계수의 곱 ...②

따라서 ①$=1\times{}_5C_4$, ②$=2\times{}_5C_3$ 이다

구하는 x^4 의 계수는 ①+②$=5+20=25$

8) 답 : ②

[해설]

$6=1+5=2+4=3+3$

$=1+1+1+3=1+1+2+2$

$=1+1+1+1+1+1$

이므로 구하고자 하는 방법의 수는 6

9) 답 : ④

[해설]

$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6=\sum_{r=0}^{6}{}_6C_r\cdot x^r\cdot\left(\frac{1}{3x}\right)^{6-r}$

$=\sum_{r=0}^{6}{}_6C_r\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{6-r}\cdot x^{2r-6}$

이때 전개식에서 x^2 의 계수는 $2r-6=2$, 즉 $r=4$ 일 때

${}_6C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^{6-4}=15\times\frac{1}{9}=\frac{5}{3}$ 이다.

10) 답 : 3

[해설]

[이항정리]

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}x^{4-2r}$

상수항은 $r=2$ 일 때 이므로

상수항은 ${}_4C_2\cdot a^2=54$

$a^2=9$

$\therefore\ a=3$ ($\because a>0$)

11) 답 : ④

정답 및 해설

[해설]
다항식 $(1+x)^5$의 전개식의 일반항은 이항정리에 의하여 ${}_5C_r x^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

x^2의 계수는 $r=2$일 때이므로 ${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$

[참고]다항식 $(1+x)^5$의 전개식에서 x^2의 계수는
${}_5C_2 1^3\times x^2=10x^2$

12) 답 : 30
[해설]
[출제 의도]이항계수를 구할 수 있는가?
x^3의 계수는 ${}_5C_3\times a^2=10a^2$이고,
x^4의 계수는 ${}_5C_4\times a=5a$이다.
따라서 $10a^2=5a$에서
$a=\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$
$\therefore\ 60a=30$

13) 답 : 20
[해설]
$\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^6$에서 일반항 ${}_6C_r\left(\frac{x}{2}\right)^r\left(\frac{2}{x}\right)^{6-r}={}_6C_r 2^{6-2r}x^{2r-6}$이
상수항일 때, $2r-6=0$즉, $r=3$
따라서 상수항은 ${}_6C_3 2^0 x^0=20$

14) 답 : 25
[해설]
$\sum_{k=1}^{n}{}_nC_k={}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^{n-1}$
$(\because\ 2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n)$
2^n-1이 3의 배수이므로
$n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots,\ 50$일 때이다.
$\therefore$ n의 개수는 25개이다.

15) 답 : 102
[해설]
$(1-x)^4(2-x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하면 다음과 같다.
i) $(1-x)^4$의 상수항과 $(2-x)^3$의 이차항의 곱
${}_4C_4(1)^4\times{}_3C_2(2)^1(-x)^2$
ii) $(1-x)^4$의 일차항과 $(2-x)^3$의 일차항의 곱
${}_4C_3(1)^3(-x)^1\times{}_3C_1(2)^2(-x)^1$
iii) $(1-x)^4$의 이차항과 $(2-x)^3$의 상수항의 곱
${}_4C_2(1)^2(-x)^2\times{}_3C_3(2)^3$
따라서, i)+ii)+iii)으로부터 x^2의 계수는 102이다.

16) 답 : 12
[해설]
$(x-1)^n=(-1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r(-1)^{n-r}x^r$
x의 계수는 $r=1$일 때이므로
${}_nC_1(-1)^{n-1}=-12,\ n\times(-1)^{n-1}=-12$
$\therefore\ n=12$

17) 답 : ⑤
[해설]
$(1+2x)^6=\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k(2x)^k$이므로
$(1+2x)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는 $k=4$일때이므로
${}_6\mathrm{C}_4\times2^4=240$
$(1+2x)^6$의 전개식에서 x^3의 계수는 $k=3$일 때이므로
${}_6\mathrm{C}_3\times2^3=160$
따라서 $(1+2x)^6(1-x)$의 전개식에서 x^4의 계수는 $240-160=80$
[정답]⑤

18) 답 : 682
[해설]
${}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\dots+{}_{2k}C_{2k}={}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\dots+{}_{2k}C_{2k-1}$
$=\frac{2^{2k}}{2}=2^{2k-1}=2\cdot4^{k-1}$
$\therefore\ f(5)=\sum_{k=1}^{5}2\cdot4^{k-1}=\frac{2(4^5-1)}{4-1}=2\cdot\frac{1023}{3}=2\cdot341=682$
[정답] 682

19) 답 : 682
[해설]
${}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\cdots+{}_{2k}C_{2k}={}_{2k}C_1+{}_{2k}C_3+{}_{2k}C_5+\cdots+{}_{2k}C_{2k-1}$
$\frac{2^{2k}}{2}=2^{2k-1}=2\cdot4^{k-1}$
$\therefore$
$f(5)=\sum_{k=1}^{5}2\cdot4^{k-1}=\frac{2(4^5-1)}{4-1}=2\cdot\frac{1023}{3}=2\cdot341=682$
[정답] 682

20) 답 : ①
[해설]
$$(1+x)^m+(1+x)^{m+1}+(1+x)^{m+2}+\cdots+(1+x)^n$$
$$=\frac{(1+x)^m\{(1+x)^{n-m+1}-1\}}{(1+x)-1}$$
$$=\frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}$$
의 전개식에서 x^m의 계수이다.
$\therefore\ {}_mC_m+{}_{m+1}C_m+\cdots+{}_nC_m={}_{n+1}C_{m+1}$
$\because\ \frac{(1+x)^{n+1}-(1+x)^m}{x}=\frac{(1+x)^{n+1}}{x}-\frac{(1+x)^m}{x}$이므로
$\frac{(1+x)^m}{x}$은 x^{m-1}차식이므로 x^m의 계수는 존재하지않고
$\frac{(1+x)^{n+1}}{x}$은 $(1+x)^{n+1}$의 전개식의 x^{m+1}의 계수가 x^m의 계수이다.

21) 답 : 27

[해설]
[출제 의도] 자연수의 분할의 수와 집합의 분할의 수를 구한다.
$5=1+1+3=1+2+2$
이므로 $P(5,\,3)=2$이다.
한편, 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 서로 다른 3개의 부분집합으로
분할할 때, 부분집합의 원소의 개수는 각각 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이다.
(ⅰ)부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 3인 경우 5개의 원소 중 3개를
선택하여 원소의 개수가 3인 부분집합을 만들고,
나머지 2개의 원소로 각각 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들면 되므로

구하는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(ⅱ)부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 2, 2인 경우 5개의 원소 중 1개를
선택하여 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들고, 나머지 4개의 원소 중 2개의
원소를 선택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들면 나머지 2개의 원소로
이루어진 부분집합이 정해진다.
이때 각 경우가 2가지씩 중복되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2}=5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1\times\frac{1}{2}=15$$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $S(5,\,3)=10+15=25$
따라서
$P(5,\,3)+S(5,\,3)=2+25=27$

22) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 자연수의 분할 이해하기
$5=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1$
$=1+1+1+1+1$
따라서 구하는 분할의 수는 5

23) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 자연수의 분할 이해하기
$7=1+1+5=1+2+4=1+3+3=2+2+3$
이므로 자연수 7을 세 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 4

24) 답 : 24
[해설]
[출제 의도] 이항정리 이해하기
$(x+2y)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_r x^r(2y)^{4-r}={}_4C_r 2^{4-r}x^ry^{4-r}$이고
x^2y^2인 항은 $r=2$인 경우이다.
따라서 x^2y^2의 계수는 ${}_4C_2\times2^2=24$

25) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 이항정리 이해하기
$\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{a}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r\left(\dfrac{x}{2}\right)^r\left(\dfrac{a}{x}\right)^{6-r}$

$={}_6C_r\left(\dfrac{1}{2}\right)^r a^{6-r}x^{2r-6}$

$x^{2r-6}=x^2$에서 $r=4$이므로 x^2의 계수는

${}_6C_4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times a^2=\dfrac{15}{16}\times a^2=15$

따라서 $a=4$

26) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 이항정리를 이용하여 부등식의 해결 과정을 완성한다.
$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는 ${}_{2n}C_n$이다.
$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\times{}_nC_{n-k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2$이므로

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left({}_nC_k\right)^2={}_{2n}C_n$이 성립한다.

그러므로

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_nC_k\right)^2\right\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_nC_k\right)^2\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_nC_{n-k}\right)^2\right\}\\
&=\left\{\left({}_nC_1\right)^2+2\times\left({}_nC_2\right)^2+\cdots+n\times\left({}_nC_n\right)^2\right\}\\
&\quad+\left\{\left({}_nC_{n-1}\right)^2+2\times\left({}_nC_{n-2}\right)^2+\cdots+n\times\left({}_nC_0\right)^2\right\}\\
&=\left\{\left({}_nC_1\right)^2+2\times\left({}_nC_2\right)^2+\cdots+n\times\left({}_nC_n\right)^2\right\}\\
&\quad+\left\{n\times\left({}_nC_0\right)^2+(n-1)\times\left({}_nC_1\right)^2+\cdots+\left({}_nC_{n-1}\right)^2\right\}\\
&=n\times\left({}_nC_0\right)^2+n\times\left({}_nC_1\right)^2+\cdots+n\times\left({}_nC_n\right)^2\\
&=n\times\left\{\left({}_nC_0\right)^2+\left({}_nC_1\right)^2+\cdots+\left({}_nC_n\right)^2\right\}\\
&=n\times\left[{}_{2n}C_n\right]
\end{aligned}$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_nC_k\right)^2\right\}\ge10\times{}_{2n}C_{n+1}\\
&n\times{}_{2n}C_n\ge10\times{}_{2n}C_n+1\\
&n\times\frac{(2n)!}{n!\times n!}\ge10\times\frac{(2n)!}{(n+1)!\times(n-1)!}\\
&n\times\frac{1}{n}\ge10\times\frac{1}{n+1}\\
&n+1\ge10\\
&n\ge9
\end{aligned}$$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 9이다.
$f(n)={}_{2n}C_n$, $g(n)=n$, $p=9$이므로
$f(3)+g(3)+p={}_6C_3+3+9=20+3+9=32$

27) 답 : 40
[해설]
[출제 의도] 이항정리 이해하기

$$(x^2+2)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r(x^2)^{5-r}2^r=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r2^rx^{10-2r}$$

에서 $10-2r=6$, $r=2$

따라서 x^6의 계수는 $_5C_2 \times 2^2 = 40$

28) 답 : .6

[해설]

[출제 의도] 집합의 분할 이해하기

$S(4,3)$은 원소의 개수가 4인 집합을 집합의 원소가 각각 2개, 1개, 1개인 부분집합으로 분할하는 방법의 수와 같다.

$_4C_2 \times _2C_1 \times _1C_1 \times \frac{1}{2!} = 6$

29) 답 : 127

[해설]

[출제 의도] 집합의 분할을 이해하고 분할하는 방법의 수를 구한다.

원소의 개수가 8인 집합 A를 공집합이 아닌 2개의 서로소인 부분집합으로

분할하는 방법의 수는 원소의 개수가 1인 집합과 7인 집합, 원소의 개수가 2인 집합과 6인 집합,

원소의 개수가 3인 집합과 5인 집합, 원소의 개수가 4인 두 개의 집합으로 분할하는

경우의 수를 모두 더한 값과 같다.

ⅰ)원소의 개수가 1인 집합과 원소의 개수가 7인 집합으로 분할하는 방법의 수

집합 A에서 원소가 1개인 집합을 선택하는 방법의 수와 같으므로 $_8C_1 = 8$

ⅱ)원소의 개수가 2인 집합과 원소의 개수가 6인 집합으로 분할하는 방법의 수

집합 A에서 원소가 2개인 집합을 선택하는 방법의 수와 같으므로 $_8C_2 = 28$

ⅲ)원소의 개수가 3인 집합과 원소의 개수가 5인 집합으로 분할하는 방법의 수

집합 A에서 원소가 3개인 집합을 선택하는 방법의 수와 같으므로 $_8C_3 = 56$

ⅳ) 원소의 개수가 4인 두 개의 집합으로 분할하는 방법의 수8개의 원소 중 4개를 택하여

하나의 집합을 만들고, 남은 4개의 원소로 다른 한 집합을 만들면 중복되는 경우가

$2!$개씩 나타나므로 그 경우의 수는 $_8C_4 \times \frac{1}{2!} = 35$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)로부터 구하는 방법의 수는

$8+28+56+35 = 127$

[다른 풀이]

원소의 개수가 8인 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$

집합 A의 부분집합 중 공집합 또는 전체집합이 아닌 부분집합의 개수는

$2^8 - 2 = 254$

따라서 두 개의 부분집합으로 분할하는 방법의 수는

$\frac{254}{2} = 127$

[참고]

일반적으로 원소의 개수가 n(n은 자연수)인 집합을 공집합이 아닌 2개의

서로소인 부분집합으로 분할하는 방법의 수는 $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$

30) 답 : 80

[해설]

[출제 의도] 이항정리의 뜻 이해하기

다항식 $(2x+1)^5$의 전개식의 일반항 $_5C_r(2x)^{5-r} = {}_5C_r 2^{5-r}x^{5-r}$

$5-r=3$ ∴ $r=2$

따라서 x^3의 계수는 $_5C_2 \times 2^3 = 80$

31) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 자연수의 분할을 활용하여 문제 해결하기

같은 종류의 접시 3개에 같은 종류의 쿠키 10개를 남김없이 나누어 담는

방법의 수는 10을 3개의 자연수로 분할하는 방법의 수 $P(10,3)$과 같다.

10을 3개의 자연수로 분할하는 방법은

$10 = 8+1+1 = 7+2+1 = 6+3+1 = 6+2+2$

$= 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3$

따라서 구하는 방법의 수는 8

32) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 이항정리 이해하기

다항식 $(1+3x)^5$의 전개식의 일반항은 $_5C_r\ 1^{5-r}(3x)^r$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

따라서 $r=3$일 때 x^3의 계수는 270

33) 답 : 160

[해설]

[출제 의도] 이항정리 이해하기

$(x+2)^6$의 전개식에서 x^3의 계수는

$_6C_3 \cdot\ 2^3 = 160$

34) 답 : 60

[해설]

[출제 의도] 이항계수 계산하기

$_6C_{\{r\}}x^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r 2^r x^{6-2r}$에서 x^2의 계수를 구하려면

$6-2r=2$ ∴ $r=2$

x^2의 계수는 $_6C_2 2^2 = 60$

35) 답 : ⑤

[해설]

$_6C_r(x^2)^{6-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_6C_r x^{12-3r}$

$12-3r=3,\ r=3$

따라서 x^3의 계수는 $_6C_3 = 20$

36) 답 : 120

[해설]

$_{10}C_3 = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

37) 답 : 32

[해설]

$${}_4C_1x^3 \times \frac{1}{x^3} + {}_8C_2x^6 \times \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 = {}_4C_1 + {}_8C_2 = 32$$

38) 답 : 32

[해설]

$$\sum_{k=0}^{5} {}_5C_k\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k} = \left(\frac{3}{8}+\frac{13}{8}\right)^5 = 2^5 = 32$$

39) 답 : 135

[해설]

${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}_6C_r(-3)^rx^{6-2r}$ 이므로

x^2의 계수는 ${}_6C_2(-3)^2 = 135$이다.

40) 답 : ②

[해설]

$\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$의 일반항은 ${}_nC_r(x^2)^{n-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r = {}_nC_rx^{2n-5r}$

$\frac{1}{x^2}$항이 존재하기 위해서는 $2n-5r=-2$인 n, r이 존재하여야 한다.

즉, $2n+2=5r$이다.

이때, n이 최소가 되는 경우는 $n=4, r=2$일 때이다.

따라서 계수는 ${}_4C_2=6$이다.

41) 답 : 672

[해설]

[출제 의도]이항계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^7$의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r(2x)^r\left(-\frac{1}{x}\right)^{7-r} = {}_7C_r \times 2^r \times (-1)^{7-r} \times x^{2r-7}$$

이므로 $2r-7=3$에서 $r=5$

따라서 x^3의 계수는 ${}_7C_5 \times 2^5 \times (-1)^2 = 672$

42) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]이항정리를 이용하여 다항식 계수 구하기

[해설] $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^5 = \sum_{k=0}^{5} {}_5C_k(x^2)^k\left(\frac{1}{x}\right)^{5-k}$

$\sum_{k=0}^{5} {}_5C_kx^{3k-5}$ 이므로

$k=2$일 때, x의 계수는 ${}_5C_2=10$

43) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]이항정리를 이용한 식의 값 추론하기

[해설] $(1+x)^{59} = {}_{59}C_0 + {}_{59}C_1x + \cdots + {}_{59}C_{59}x^{59}$이고, 양변에 x대신 i를 대입하면,

$(1+i)^{59}$

$= ({}_{59}C_0 - {}_{59}C_2 + {}_{59}C_4 - \cdots - {}_{59}C_{58}) + ({}_{59}C_1 - {}_{59}C_3 + {}_{59}C_5 - \cdots - {}_{59}C_{59})i$

$= \sum_{r=0}^{29}(-1)^r{}_{59}C_{2r} + \sum_{r=0}^{29}(-1)^r{}_{59}C_{2r+1}\, i$

한편, $(1+i)^{59} = \{(1+i)^2\}^{29} \times (1+i) = (2i)^{29}(1+i) = -2^{29}+2^29i$

$\therefore$ ㈎ $\sum_{r=0}^{29}(-1)^r{}_{59}C_{2r+1}$, ㈏ -2^{29}

44) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]이항정리에 대한 성질을 이용하여 로그값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$${}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 + \cdots + {}_{21}C_{10} = \frac{2^{21}}{2} = 2^{20}$$

$\therefore \log_2({}_{21}C_0 + {}_{21}C_1 + \cdots + {}_{21}C_{10}) = \log_2 2^{20} = 20$

45) 답 : 135

[해설]

$$(3x+y)^6 = \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r(3x)^ry^{6-r}$$

$$= \sum_{r=0}^{6} {}_6C_r \cdot 3^r \cdot x^ry^{6-r}$$

따라서 x^2y^4은 $r=2$일 때이므로 구하는 계수는

${}_6C_2 \cdot 3^2 = 15 \cdot 9 = 135$이다.

46) 답 : 100

[해설]

[출제 의도]이항정리를 이용하여 이항계수의 합 구하기

[해설] ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$이므로

${}_{100}C_0 + {}_{100}C_1 + {}_{100}C_2 + \cdots + {}_{100}C_{100} = 2^{100}$이다.

$\therefore \log_2({}_{100}C_0 + {}_{100}C_1 + {}_{100}C_2 + \cdots + {}_{100}C_{100}) = 100$

47) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]이항계수의 성질을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

동주는 알사탕 k($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$)개와 박하사탕 $5-k$개를 진서에게 주면 된다.

그런데 동주가 알사탕 k개를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_k$이고,

박하사탕 $5-k$개를 택하는 방법의 수는 1이므로

구하는 방법의 수는 ${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 = 32$ (가지)

48) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]조합의 수 성질을 이용하여 문제 해결하기

어두운 부분의 합은

$$\sum_{n=2}^{10}({}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n)$$

$$=\sum_{n=2}^{10}\left({}_nC_2+{}_nC_1+1\right)$$
$$=\sum_{n=2}^{10}\left\{\frac{n(n-1)}{2}+n+1\right\}$$
$$=\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right)$$
$$=228$$

(별해) ${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_8={}_{11}C_8$

${}_1C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9$ 이므로

${}_2C_1+{}_3C_2+\cdots+{}_{10}C_9={}_{11}C_9-{}_1C_0$

$1+{}_1C_1+{}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0={}_{11}C_{10}$ 이므로

${}_2C_2+{}_3C_3+\cdots+{}_{10}C_0={}_{11}C_{10}-1-{}_1C_1$

따라서 어두운 부분의 합은 228

49) 답 : 8

[해설]

$(x-1)(x+2)(x+3)(x+4)$

$=x^4+(-1+2+3+4)x^3+\cdots$

그러므로 x^3의 계수는 8이다.

50) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]이항정리의 일반항을 알고 이를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

전개식의 일반항은

${}_7C_r(2x^2)^{7-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_7C_r\cdot 2^{7-r}\cdot x^{14-3r}$

이때, $14-3r=5$에서 $r=3$이므로

x^5의 계수는 $16\times{}_7C_3$이다.