I.순열과 조합

2.조합

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 서로 다른 공 4개를 남김없이 서로 다른 상자 4개에 나누어 넣으려고 할 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 넣는 경우의 수는? (단, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.) [4점]

① 220 ② 216 ③ 212
④ 208 ⑤ 204

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

2 방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z) 중에서 임의로 한 개를 선택한다. 선택한 순서쌍 (x, y, z)가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

3 ${}_4H_2$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

4 [*공통]다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c=7$
(나) $2^a\times 4^b$은 8의 배수이다.

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

5 세 정수 a, b, c에 대하여 $1\leq|a|\leq|b|\leq|c|\leq 5$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는?[4점][2016(B) /수능 14]

① 360 ② 320 ③ 280
④ 240 ⑤ 200

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

6 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?[4점][2016(A) /수능 17]

(가) a, b, c, d, e 중에서 0의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d+e=10$

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

7 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.[4점]

(가) $a\times b\times c$는 홀수이다. (나) $a\le b\le c\le 20$

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

8 연립방정식

$$\begin{cases} x+y+z+3w=14 \\ x+y+z+w=10 \end{cases}$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?[4점]

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

9 숫자 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 5개를 택할 때, 숫자 4가 한 개 이하가 되는 경우의 수는? [3점]

① 45 ② 42 ③ 39
④ 36 ⑤ 33

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

10 흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

① 295 ② 300 ③ 305
④ 310 ⑤ 315

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

11 같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?(단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)[3점]

① 330 ② 315 ③ 300
④ 285 ⑤ 270

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

12 1부와 2부로 나누어 진행하는 어느 음악회에서 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연할 때, 다음 두 조건에 따라 7팀의 공연 순서를 정하려고 한다.

(가) 1부에는 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연한다. (나) 2부에는 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연한다.

이 음악회의 공연 순서를 정하는 방법의 수는? [3점]

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

[난이도 : ★★★] [2009 학년도 대수능]

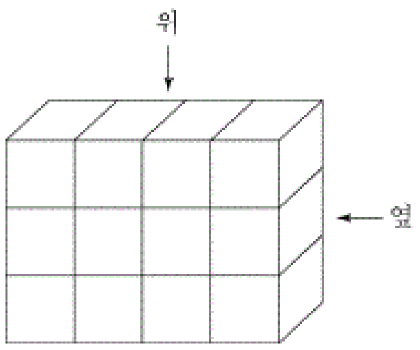
13 6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 임의로 2명씩 짝을 지어 3개의 조로 편성하려고 한다.

A와 B는 같은 조에 편성되고, C와 D는 서로 다른 조에 편성될 확률은? [4점]

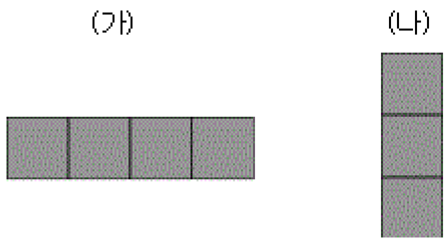
① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{15}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

14 [공통]다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 ㈎, 옆에서 본 모양이 ㈏와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는?[4점]



① 54 ② 48 ③ 42
④ 36 ⑤ 30

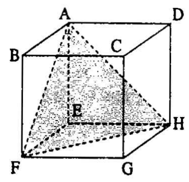
[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

15 [문과]1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는?[4점]

① 43 ② 41 ③ 39
④ 37 ⑤ 35

[난이도 : ★☆☆] [1997 학년도 대수능]

16 아래 정육면체에서 임의의 세 꼭짓점을 택하여 삼각형을 만들 때, 그림과 같은 정삼각형과 합동인 삼각형을 만들 수 있는 방법의 수는?



① 4 ② 6 ③ 8
④ 12 ⑤ 24

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

17 자연수 n에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.
> $c+d=2k$인 경우는 (1) 음이 아닌 정수 $k_1,\ k_2$에 대하여 $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우이거나 (2) 음이 아닌 정수 $k_3,\ k_4$에 대하여 $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우이다.
> (1) $c=2k_1,\ d=2k_2$인 경우 : $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$개수는 [(가)] 이다.
> (2) $c=2k_3+1,\ d=2k_4+1$인 경우 : $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$개수는 [(나)] 이다.
> (1), (2)에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의개수 a_n은 $a_n=$ [(가)] + [(나)] 이다. 자연수 m에 대하여
> $\sum_{n=1}^{m}$ [(나)] $={}_{m+3}C_4$
> 이므로
> $\sum_{n=1}^{8} a_n=$ [(다)] 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n),\ g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r이라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은? [4점]

① 893 ② 918 ③ 943
④ 968 ⑤ 993

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

18 (공통)어느 학교 동아리 회원은 1학년이 6명, 2학년이 4명이다. 이 동아리에서 7명을 뽑을 때, 1학년에서 4명, 2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

19 방정식 $x+y+z+5w=14$를 만족시키는 양의 정수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는? [4점]

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

20 사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

21 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

> (가) $a+b+c+3d=10$
> (나) $a+b+c\le 5$

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

22 다음 조건을 만족시키는 2이상의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $a+b+c+d=20$
> (나) a, b, c는 모두 d의 배수이다.

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

23 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, u의 모든 순서쌍 (x, y, z, u)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $x+y+z+u=6$ (나) $x \neq u$

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

24 네 개의 자연수 $1, 2, 4, 8$ 중에서 중복을 허락하여 세 수를 선택할 때, 세 수의 곱이 100 이하가 되도록 선택하는 경우의 수는? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

25 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

㈎ $a+b+c=6$ ㈏ 좌표평면에서 세 점 $(1, a)$, $(2, b)$, $(3, c)$가 직선 위에 있지 않다.

① 19 ② 20 ③ 21
④ 22 ⑤ 23

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

26 자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수가 28일 때, n의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

27 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

28 방정식 $x+y+z+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.[3점][2012년 6월]

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

29 A, B두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다.

A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오.(단, 가입 순서는 고려하지 않는다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

30 지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려한다.

㈎ 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다. ㈏요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하고, 남은 하루는 농구, 축구중 한 가지를 한다.

지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는?[3점]

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

31 1개의 본사와 5개의 지사로 이루어진 어느 회사의 본사로부터 각 지사까지의 거리가 표와 같다.

지사	가	나	다	라	마
거리(km)	50	50	100	150	200

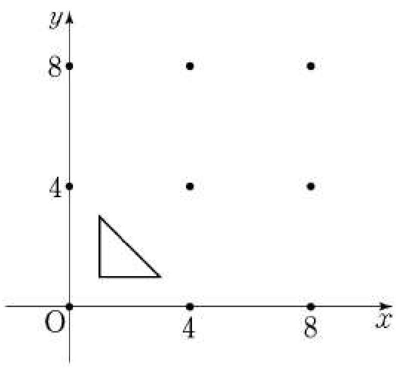
본사에서 각 지사에 A, B, C, D, E를 지사장으로 각각 발령할 때, A보다 B가 본사로부터 거리가 먼 지사의 지사장이 되도록 5명을 발령하는 경우의 수는?[4점]

① 50 ② 52 ③ 54 ④ 56 ⑤ 58

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

32 [공통]좌표평면 위에 9개의 점 $(i, j)\,(i=0, 4, 8,\ j=0, 4, 8)$이 있다.

이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(1, 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는?[4점]



① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

33 1부터 9까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다.

이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 $a, b, c\,(a<b<c)$가 다음 조건을 만족시킬 확률은?[3점]

(가) $a+b+c$는 홀수이다.
(나) $a\times b\times c$는 3의 배수이다.

① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{8}{21}$ ③ $\frac{17}{42}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{19}{42}$

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

34 어느 김밥 가게에서는 기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원으로 하고, 기본재료 외에 선택재료가 추가될 경우 다음 표에 따라 가격을 정한다.

예를 들어 맛살과 참치가 추가된 김밥의 가격은 1500원이다.

선택재료	가격(원)
햄	200
맛살	200
김치	200
불고기	300
치즈	300
참치	300

선택재료를 추가하였을 때, 가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류는 모두 몇 가지인가 ?(단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.)[4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

35 어느 동아리에 속한 여학생 수와 남학생 수가 같다.

이 동아리에서 3명의 대표를 선출하려고 한다. 남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수가 여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수의 10배일 때, 이 동아리에 속한 여학생 수는?[3점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

36 [공통]3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

37 2005학년도 대학수학능력시험에서 과학탐구 영역을 선택하는 학생은 물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 8개 과목 중에서 최대 4과목까지 응시할 수 있다. 단, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 4개 과목에서는 2과목까지만 선택할 수 있다. 어떤 학생이 과학탐구 영역에서 3개 과목을 선택하려고 할 때, 선택 가능한 모든 경우의 수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2018년 3월 학력평가]

38 ${}_7C_2$의 값은? [2점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

39 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 7개를 선택할 때, 짝수가 두 개가 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

40 다음은 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 세 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 5$)

> 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는 '(i) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우'에서
> '(ii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우'와
> '(iii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우'를 제외하면 된다.
> (i)의 경우 :
> n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_3$이다.
> (ii)의 경우 :
> 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.
> (iii)의 경우 :
> 연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는 (가)이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도 (가)이다.또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는 (나)이다.따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는$2\times$((가))+(나) 이다.
> (i), (ii), (iii)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는 (다)이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$이라 할 때, $\dfrac{p(18)\times q(17)}{r(16)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{15}{2}$ ② 9 ③ $\dfrac{21}{2}$

④ 12 ⑤ $\dfrac{27}{2}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

41 사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

42 전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 S_1, S_2, S_3이

$n(S_1)\geq 3$, $S_1\subset S_2\subset S_3$

을 만족시킨다. 다음은 집합 S_1, S_2, S_3의 모든 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수를 구하는 과정이다.

> $n(S_1)=k\,(3\leq k\leq 10$, k는 자연수)인 집합 S_1의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_k$이다.
> 또한 $S_1\subset S_2\subset S_3$이므로 집합 S_1에 속하지 않는 원소는 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합에 속해야 한다.
> 그러므로 $n(S_1)=k$일 때 집합 S_1, S_2, S_3의 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 ${}_{10}C_k\times$(가)이다.
> 따라서 $n(S_1)\geq 3$, $S_1\subset S_2\subset S_3$을 만족시키는 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 이항정리에 의하여
> $\sum_{k=3}^{10}\left({}_{10}C_k\times(\text{가})\right)=4^{10}-(\text{나})\times 3^8$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a+f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

43 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

(가) $a+b+c+d=12$
(나) 좌표평면에서 두 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$는 서로 다른 점이며두 점 중 어떠한 점도 직선 $y=2x$ 위에 있지 않다.

① 125 ② 134 ③ 143
④ 152 ⑤ 161

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

44 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

(가) a, b, c, d 중에서 홀수의 개수는 2이다.
(나) $a+b+c+d=12$

① 108 ② 120 ③ 132
④ 144 ⑤ 156

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

45 다음 조건을 만족시키는 자연수 N의 개수를 구하시오. [4점]

(가) N은 10 이상 9999 이하의 홀수이다.
(나) N의 각 자리 수의 합은 7이다.

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

46 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

(가)세 수 a, b, c의 합은 짝수이다.
(나) $a \le b \le c \le 15$

① 320 ② 324 ③ 328
④ 332 ⑤ 336

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

47 서로 구별되지 않는 공 10개를 A, B, C 3명에게 남김없이 나누어 주려고 한다. A가 공을 3개만 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.(단, 1개의 공도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)[3점]

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

48 다음 조건을 만족시키는 네 자리 자연수의 개수는? [4점]

(가)각 자리의 수의 합은 14이다.
(나)각 자리의 수는 모두 홀수이다.

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

49 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 x, y, z라 하자. 방정식 $x+y+z=6$을 만족시키는 해의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 7 ② 10 ③ 13
④ 16 ⑤ 19

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

50 방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. [3점][2012년 7월]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

51 축구공, 농구공, 배구공 중에서 4개의 공을 선택하는 방법의 수를 구하시오.

(단, 각 종류의 공은 4개 이상씩 있고, 같은 종류의 공은 서로 구별하지 않는다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

52 4명의 학생에게 8자루의 연필 모두를 나누어 주는 방법 중에서 연필을 한 자루도 받지 못하는 학생이 생기는 경우의 수를 구하시오.(단, 연필은 서로 구별하지 않는다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

53 어느 동아리의 회원모집 공고를 보고 철수를 포함하여 10명이 지원하였다.

이 지원자들 중에서 철수를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수를 a, 철수를 포함하지 않고 4명을 뽑는 경우의 수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?[3점]

① ${}_{10}P_3$ ② ${}_{10}P_4$ ③ ${}_{10}C_4$
④ $2\times{}_9C_3$ ⑤ $2\times{}_9C_4$

[난이도 : ★☆☆] [2010년 3월 학력평가]

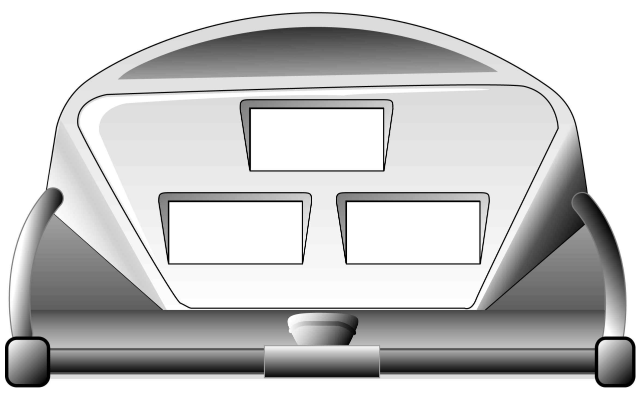
54 ${}_4C_2\times 3!$의 값은?[2점]

① 12 ② 24 ③ 36
④ 48 ⑤ 60

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

55 현재 사용하는 운동기구에는 그림과 같이 운동 관련 정보 안내 화면이 3개 있다. 한 화면이 최소 1가지, 최대 2가지의 정보를 동시에 보여줄 수 있다. 다섯 가지 정보인 속도, 거리, 시간, 심장 박동수, 칼로리 소모량을 동시에 모두 보여줄 수 있는 방법의 수는?

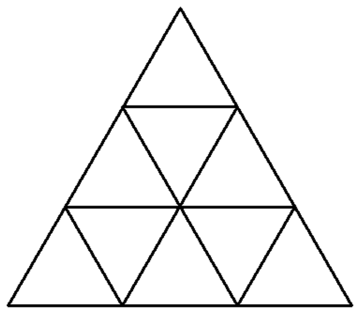
(단, 한 화면에서 두 정보의 위치는 고려하지 않는다.)[3점]



① 90 ② 91 ③ 92
④ 93 ⑤ 94

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

56 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 9개를 이어 붙여 만든 도형이 있다. 이 도형의 선들로 이루어지는 평행사변형의 개수를 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

57 어느 학교의 학급 대항 체육대회는 탁구, 농구, 배드민턴, 마라톤의 순서로 경기가 진행된다. 다음은 학급대표 선수를 네 경기에 배정하는 규칙이다.

[규칙 1]모든 선수들을 적어도 한 경기에 배정한다. [규칙 2]경기에 배정된 선수는 바로 다음 경기에는 배정될 수 없다. [규칙 3]탁구에 2명, 농구에 3명, 배드민턴에 2명, 마라톤에 3명을 배정한다.

학급대표 선수 A, B, C, D, E, F 6명을 이 규칙에 따라 네 경기에 배정하는 모든 경우의 수는?(단, 같은 경기에 배정되는 선수들의 순서는 고려하지 않는다.)[4점]

① 540 ② 570 ③ 600
④ 630 ⑤ 660

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 학력평가]

58 [공통]좌표평면 위의 점들의 집합 $A=\{(x, y)\,|\,|x|+|y|\le 2,\ x, y$는 정수$\}$의 원소에 대하여 옳은 내용만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. A의 원소의 개수는 13이다. ㄴ. A의 원소를 연결하여 만들 수 있는 직선의 개수는 28이다. ㄷ. A의 원소를 연결하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는 256이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

59 수진이가 10가지 종류의 놀이기구 중 서로 다른 놀이기구의 이용권을 8장 구입하여 3장, 3장, 2장으로 나눈 후, 수진, 현아, 원일 세 사람이 나누어 갖는 경우의 수를 x라 할 때, $\frac{x}{100}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

60 집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 $A \subset B$를 만족하는 순서쌍 (A, B)의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

61 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 m, n이라 하고 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하자. $\omega^m+\omega^n+1$이 실수가 될 확률이 $\dfrac{b}{a}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

62 A대학교에서는 수시 입학 전형을 위한 입학사정관을 선정하기 위하여 공모한 결과 남자 5명과 여자 3명이 응모하였다. 남녀 혼성으로 4명의 입학사정관을 선정하여 4가지 업무를 한 가지씩 4명에게 모두 배정하는 경우의 수는?[4점]

① 1080 ② 1200 ③ 1320
④ 1440 ⑤ 1560

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

63 다음은 10명의 학생을 두 팀으로 나누는 방법의 수를 구하는 과정이다.

> 10명 중에서 몇 명의 학생을 선택하여 한 팀을 만들면 나머지 학생들은 자연히 다른 팀이 된다.
> 먼저, 한 팀의 구성원이 결정되는 경우의 수를 나누어 생각하자.
> (i)한 팀의 구성원이 1명인 경우의 수는 ${}_{10}C_1$이다.
> (ii)한 팀의 구성원이 2명인 경우의 수는 ${}_{10}C_2$이다.
> …중략 …
> 그러므로 10명의 학생을 두 팀으로 나눈 방법의 수는 [㈎] $({}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9)$이다. 그리고
> ${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=$ [㈏]
> 이므로 10명의 학생을 두 팀으로 나누는 방법의 수는 [㈐]이다.

위에서 ㈎, ㈏, ㈐에 차례대로 알맞은 것은 ?

① $1,\ 2^{10},\ 2^{10}-2$
② $1,\ 2^9,\ 2^9-2$
③ $1,\ 2^9,\ 2^9-1$
④ $\dfrac{1}{2},\ 2^{10},\ 2^9$
⑤ $\dfrac{1}{2},\ 2^{10},\ 2^9-1$

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

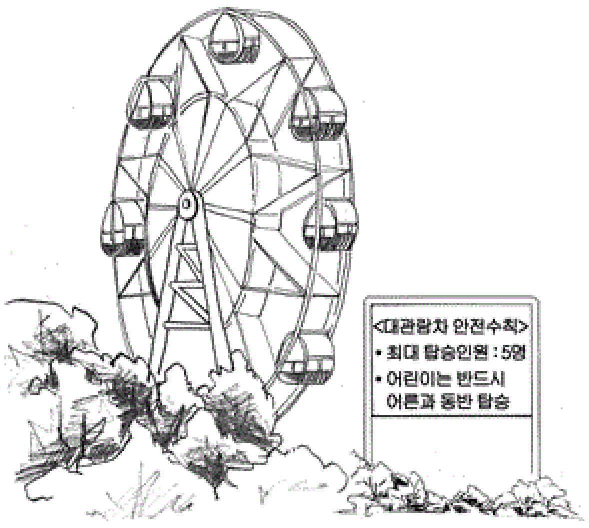
64 학생 5명이 1박 2일로 체험활동을 갔다. 5명의 학생들이 빈 방이 없도록 서로 다른 3개의 방에 투숙하는 방법의 수는?[3점]

① 90 ② 110 ③ 130
④ 150 ⑤ 170

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

65 놀이공원의 대관람차는 한 차량당 최대 탑승 인원이 5명이고, 안전을 위하여 어린이들은 반드시 어른을 한 명 이상 동반하여 탑승해야 한다.

어른 3명과 어린이 5명이 비어있는 서로 다른 8대의 차량 중 두 대의 차량을 선택하여 탑승하는 방법의 수를 n이라고 할 때, $\frac{n}{10}$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

66 [공통]자연수 24의 양의 약수들 중 서로 다른 세 수를 택했을 때, 그 합이 3의 배수일 확률은?[4점]

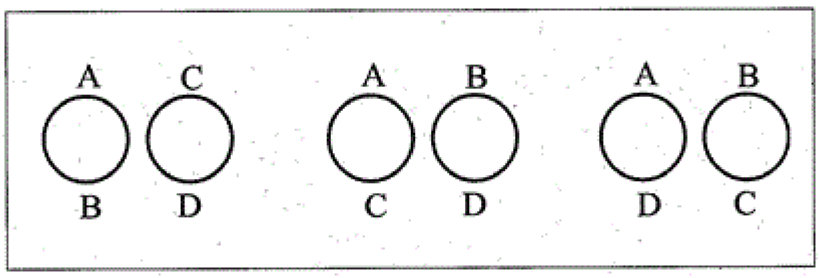
① $\frac{5}{14}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{9}{14}$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

67 [공통]n명의 사람을 r개의 조로 나누고, 각 조의 구성원들로 원순열을 만들 때 나올 수 있는 경우의 수를 $G(n, r)$로 정의하자.

(단, 각 조의 구성원은 적어도 2명 이상이다.)

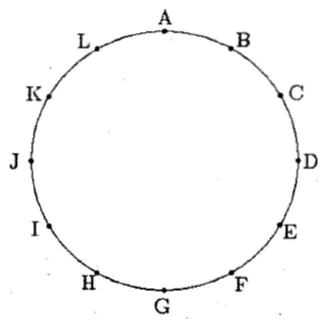
예를 들어 $G(4, 2)$은 4명을 2개의 조로 나누고 각 조의 구성원들로 원순열을 만드는 방법의 수로, 4명을 A, B, C, D라 할 때, 다음의 3가지이다.



이때, $G(6, 2)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

68 그림은 한 원 위에 A에서 L까지 2개의 점들이 같은 간격으로 놓여 있는 것을 나타낸 것이다.



이 중 세 점을 연결하여 만들 수 있는 이등변삼각형의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

69 [공통]어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는?[3점]

① 80 ② 144 ③ 216
④ 240 ⑤ 288

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

70 [공통]다음은 등식 ${}_nC_r + {}_nC_{r+1} = {}_{n+1}C_{r+1}$을 이용하여

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을

증명한 것이다.

> 2이상인 자연수 k에 대하여 $k^2 = $ [(가)]로 나타낼 수 있으므로
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
> $= {}_1C_1 + ({}_2C_1 + 2\cdot{}_2C_2) + ({}_3C_1 + 2\cdot{}_3C_2) + \cdots + ({}_nC_1 + 2\cdot$ [(나)]
> $= ({}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_3C_1) + 2({}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots +$ [(나)]
> $= {}_{n+1}C_2 + 2\cdot$ [(다)]
> $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① ${}_kC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_3$
② ${}_kC_1$ ${}_nC_2$, ${}_{n+1}C_3$
③ ${}_kC_1$, ${}_{n+1}C_2$, ${}_nC_3$
④ ${}_{k+1}C_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_3$
⑤ ${}_{k+1}C_1$, ${}_{n+1}C_2$, ${}_{n+1}C_3$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

71 남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다.

이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2개의 의자가 있고 모두 5줄로 되어 있다.

남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉을 때, 4명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오.[4점]

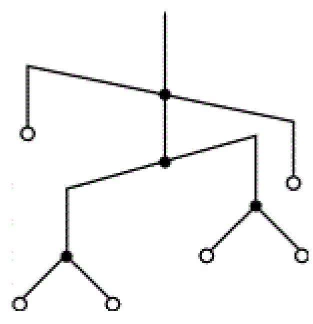
[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

72 좌우 대칭인 모양과 모양의 철사가 각각 두 개씩 있다.

그림과 같이 각 철사의 가운데를 서로 연결한 후, 여섯 군데의 고리에 서로 다른 6개의 인형 A, B, C, D, E, F를 매달아 회전모빌을 만들려고 한다.

이때 만들 수 있는 서로 다른 회전모빌의 개수를 구하시오.

(단, 그림의 ● 부분은 회전 가능하고, 모양의 두 철사는 합동이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

73 세 집합 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{4, 5, 6\}$, $C=\{7, 8, 9\}$가 있다. 각 집합에서 원소를 한 개씩 뽑았을 때, 나온 세 수의 곱이 3의 배수가 될 확률은?[4점]

① $\frac{11}{27}$ ② $\frac{13}{27}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{17}{27}$ ⑤ $\frac{19}{27}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 11월 학력평가]

74 $10<a<b<c<d<20$를 만족하는 자연수 a, b, c, d에 대하여 집합 S를 $S=\{a, b, c, d\}$로 나타낼 때, 집합 S의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

75 16명의 선수가 출전한 씨름대회에서 2명씩 8개의 조를 편성하여 조별로 한 번씩 경기를 하여 승부를 가린 후, 이긴 선수는 이긴 선수끼리 2명씩 4개조로 경기를 하여 8위 이상의 순위를 정하고, 진 선수는 진 선수끼리 2명씩 4개 조를 편성하여 9위 이하의 순위를 정한다. 이와 같은 방식으로 경기를 하여 1위부터 16위의 순위가 결정될 때까지 치러야 하는 총 경기 수를 구하시오.(단, 무승부는 없다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

76 [공통] 1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자.

예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고, 보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다.

다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_3={}_2C_1\times{}_{97}C_2$
ㄴ. $a_{10}=a_{90}$
ㄷ. $\sum_{k=2}^{98}a_k={}_{100}C_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

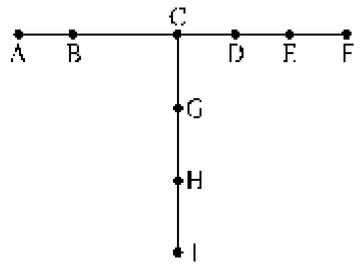
77 집합 $X=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$에서 원소가 3개인 모든 부분집합을 각각 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이라고 하자.

집합 $A_k(k=1, 2, 3, \cdots, n)$의 모든 원소들의 합을 S_k라고 할 때, $S_1+S_2+\cdots+S_n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

78 그림과 같이 점 C에서 만나는 두 선분 AF, CI위에 9개의 점이 있다.

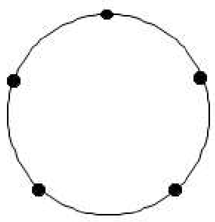
이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

79 아래 그림과 같이 원 위에 5개의 점이 있다.

이 점들 중, 두 점을 이어서 만들 수 있는 선분의 개수를 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

80 양의 정수 x, y에 대하여 부등식 $(x-2)^2+(y-3)^2<4$를 만족시키는 좌표평면 위의 점에서 임의로 세 점을 선택할 때, 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 11월 학력평가]

81 우리나라에서 7명의 외교관을 2명, 2명, 3명으로 나누어 A, B, C세 나라에 파견하기로 하였다.

파견 가능한 방법의 수는?[3점]

① 105 ② 210 ③ 420
④ 630 ⑤ 1260

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

82 [공통]다음은 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_nC_r\,(r \le n)$에 대한 어떤 성질을 설명하는 과정이다.

서로 다른 n개를 $1, 2, 3, \ldots n$이라 하자. (ⅰ) 1을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 [㈎]이다. 2를 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 [㈎]이다. 3을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 [㈎]이다. ... n을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 [㈎]이다. 이상을 모두 합하면 $n\times$[㈎]$\cdots$①이다. (ⅱ)그런데 위의 ①에 있는 조합의 수 중에는 $1, 2, \cdots, r$의 r개로 구성된 하나의 조합이 [㈏]번 반복되어 계산되었다. (중략) (ⅰ), (ⅱ)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_nC_r$는 ${}_nC_r=$[㈐]$\times{}_{n-1}C_{r-1}$

위의 과정에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[3점]

① ${}_{n-1}C_{r-1}$, r, $\dfrac{r}{n}$

② ${}_nC_{r-1}$, r, $\dfrac{n}{r}$

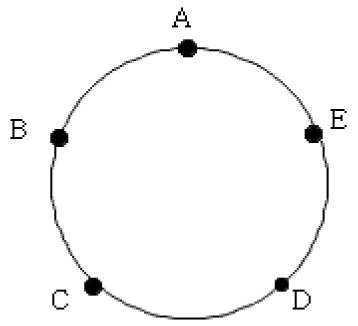
③ ${}_{n-1}C_{r-1}$, n, $\dfrac{r}{n}$

④ ${}_{n-1}C_{r-1}$, r, $\dfrac{n}{r}$

⑤ ${}_nC_{r-1}$, n, $\dfrac{r}{n}$

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

83 원 위에 5개의 점이 있다. 이 점들 중 세 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

84 부등식 $|x|+|y| \leq 2$를 만족하는 좌표평면 위의 임의의 점 (x, y) 중에서 세 점을 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하시오.(단, x, y는 정수)[3점]

정답 및 해설

2.조합

중단원 기출문제

1) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구할 수 있는가?

(ⅰ) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 3, 1, 0, 0인 경우

서로 다른 4개의 공을 3개, 1개로 나누는 경우의 수는

$_4C_3 \times {}_1C_1 = {}_4C_1 \times {}_1C_1 = 4\times1 = 4$

3, 1, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 3, 1, 0, 0인 경우의 수는

$4\times12=48$

(ⅱ) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 2, 1, 1, 0인 경우 서로 다른 4개의 공을 2개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

$_4C_2\times{}_2C_1\times{}_1C_1=6\times2\times1=12$

2, 1, 1, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 2, 1, 1, 0인 경우의 수는

$12\times12=144$

(ⅲ) 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1, 1, 1, 1인 경우 서로 다른 공 4개를 서로 다른 상자 4개에 넣은 공의 개수가 1, 1, 1, 1인 경우의 수는 $4\neq24$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $48+144+24=216$

2) 답 : 19

[해설]

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하고 확률을 구할 수 있는가?

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$$_3H_{10}={}_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\times11}{2\times1}=66$$

이 중에서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립하려면

x, y, z 중에서 오직 두 개만 서로 같아야 한다.

그런데 $x=y$를 만족시키는 순서쌍은 $(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, $\cdots$, $(5, 5, 0)$ 의 6개이므로

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$_3C_2\times6=3\times6=18$ 이다.

따라서 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$이 성립할 확률은

$\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$

이므로 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$이 성립할 확률은

$1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$ 이다.

따라서 $p+q=11+8=19$

3) 답 : 10

[해설]

$_4H_2={}_5C_2=10$

4) 답 : 32

[해설]

방정식 $a+b+c=7$을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$_3H_7={}_9C_7=36$

이때, 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 (a, b)는

$(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$뿐이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $36-4=32$

5) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|, |b|, |c|$의 순서쌍 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$의 개수는

5 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 a, b, c는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로

순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$의 개수의 2^3배와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned}[\text{구하는 값}] &= {}_5H_3\times2^3\\ &={}_{5+3-1}C_3\times8\\ &={}_7C_3\times8\\ &=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times8 =280\end{aligned}$$

6) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

0인 것 2개를 정하는 경우의 수는

$_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$ ... ㉠

$a=b=0$일 때 $c+d+e=10$을 만족시키는 자연수 c, d, e의 순서쌍 (c, d, e)의

개수는 $\begin{cases}c=c'+1\\d=d'+1\\e=e'+1\end{cases}$ (단, c', d', e'는 음이 아닌 정수) 라 하면

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=10$ 이며 정리하면

$c'+d'+e'=7$

을 만족시키는 순서쌍 (c', d', e')의 개수와 같으므로

$_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$ ... ㉡

㉠, ㉡에서 구하고자 하는 순서쌍의 개수는 $10\times36=360$

7) 답 : 220

[해설]

[해설] 조건을 만족하는 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $a\leq b\leq c\leq20$인 자연수 a, b, c의 곱 abc가 홀수이어야 하

므로
그 개수가 20이하의 홀수인 자연수들 10개 중
중복을 허락하여 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore\ {}_{10}H_3 = {}_{10+3-1}C_{3} = {}_{12}C_3 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$

8) 답 : ②

[해설]

$\begin{cases} x+y+z+3w=14 & \cdots ㉠ \\ x+y+z+w=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$라 하고 ㉠에서 ㉡을 빼면

$2w=4$, $\therefore\ w=2$, $\therefore\ x+y+z=8$

즉, 구하는 순서쌍의 개수는 $x+y+z=8$의 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍의 개수와 같다.
이는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 택하는 방법의 수와 같으므로

$\therefore\ {}_3H_8 = {}_{3+8-1}C_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$

9) 답 : ④

[해설]

ⅰ) 숫자 4가 한 개일 경우
1, 2, 3을 중복하여 4개를 뽑으면 되므로
1, 2, 3의 개수를 a, b, c라 하면 $a+b+c=4$
$\therefore\ {}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$
ⅱ) 숫자 4가 한 개도 없을 경우
1, 2, 3을 중복하여 5개를 뽑는 경우이므로
$a+b+c=5$
$\therefore\ {}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$
ⅰ), ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $21+15=36$

10) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?
3명의 학생이 흰색 탁구공을 각각 x, y, z개씩 받는다면

$x+y+z=8 (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$인 자연수$)$

$\therefore\ {}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_5 = 21\ \ ...\ ㉠$

주황색 탁구공을 각각 x', y', z'개씩 받는다면

$x'+y'+z'=7 (x' \geq 1, y' \geq 1, z' \geq 1$인 자연수$)$

$\therefore\ {}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = 15\ \ ...\ ㉡$

㉠, ㉡에서 $21 \times 15 = 315$

11) 답 : ⑤

[해설]

(ⅰ) 주스 4병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

(ⅱ) 생수 2병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$${}_{2+3-1}C_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

(ⅲ) 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 3이다.
따라서 구하는 경우의 수는 $15 \times 6 \times 3 = 270$

12) 답 : ④

[해설]

1부	2부
독 → 중 → 합	독 → 중 → 합 → 합

$2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 \times 2! = 12 \times 2 = 24$

13) 답 : ③

[해설]

6명을 2명씩 짝을 짓는 방법의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15$$

A와 B는 같은 조에 편성되고 C와 D는 다른 조에 편성되는 경우의 수는
$(A, B), (C, E), (D, F)$와 $(A, B), (C, F), (D, E)$ 인 2가지 밖에 없으므로

$$P = \frac{2}{15}$$

14) 답 : ④

[해설]

주어진 조건을 만족하려면 3개의 가로 행에는 각각 적어도 하나의 검은 색
유리상자가 들어가야 하고, 4개의 세로 열에도 각각 적어도 하나의 검은 상자가 들어가야 한다.
따라서 3개의 가로 행 중에서 2개의 검은 색 유리상자가 포함될 1개의 행을
택하는 방법의 수는 3가지이고, 이 행의 4개의 유리 상자 중에서 검은 색
유리상자로 바뀔 2개의 상자를 택하는 경우는 수는 ${}_4C_2 = 6$(가지)이다.
이제 위의 $3 \times 6 = 18$가지 경우의 수 중의 하나가 아래의 그림과 같다고 하자.

	a		c
	b		d

이제 a, b중에서 한 행을 택하고 c, d중에서 나머지 한 행을 택하는 방법의 수는
$2 \times 1 = 2$(가지)이다.
따라서 구하는 방법의 수는
$18 \times 2 = 36$

15) 답 : ⑤

[해설]

1부터 30까지의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 r ($r=0, 1, 2$)인 집합을
A_r라 하면

$A_0 = \{3, 9, 15, 21, 27\}$,

$A_1 = \{1, 7, 13, 19, 25\}$,

$A_2 = \{5, 11, 17, 23, 29\}$

이때, 두 수의 합이 3이 되는 경우는 다음과 같다.
ⅰ)(A_1의 원소)+(A_2의 원소)인 경우

${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$(가지)

ⅱ)(A_0의 원소)+(A_0의 원소)인 경우

$${}_5C_2 = \frac{5\times4}{2}=10\,(\text{가지})$$

이상에서 구하는 경우의 수는

$25+10=35$(가지)

16) 답 : ③

[해설]

정육면체의 꼭짓점이 8개이고, 각 꼭짓점마다 하나의 정삼각형을 만들 수 있으므로

8개의 정삼각형을 만들 수 있다.

17) 답 : ③

[해설]

$c=2k_1$, $d=2k_2$을 $2a+2b+c+d=2n$에 대입하면,

$2a+2b+2k_1+2k_2=2n$에서 $a+b+k_1+k_2=n$를 만족하는

음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_n$이다.

(가) ${}_4H_n$ 에서 $f(6)={}_4H_9={}_9C_3=84$ ⋯ ①

$c=2k_3+1$, $d=2k_4+1$을 $2a+2b+c+d=2n$에 대입하면,

$2a+2b+2k_3+2k_4=2n-2$에서

$a+b+k_3+k_4=n-1$를 만족하는

음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_{n-1}$이다.

(나) ${}_4H_{n-1}$ 에서 $g(5)={}_4H_4={}_7C_3=35$ ⋯ ②

$\sum_{n=1}^{m}(\text{나})=\sum_{n=1}^{m}{}_4H_{n-1}={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{m+2}C_3={}_{m+3}C_4$에서

$\sum_{n=1}^{m}(\text{가})=\sum_{n=1}^{m}{}_4H_n={}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{m+3}C_3={}_{m+4}C_4-1$임을

알 수 있다.

따라서,

$\sum_{n=1}^{8}a_n={}_{12}C_4-1+{}_{11}C_4=824$이다.

$r=824$ ⋯ ③

①, ②, ③에 의해 $f(6)+g(5)+r=943$

18) 답 : 60

[해설]

${}_6C_4\times{}_4C_3=15\times4=60$

[다른 풀이]

1학년 학생 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$

2학년 학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

1학년 4명과 2학년 학생 3명을 동시에 뽑아야 하므로 곱의 법칙에 의해 경우의 수는

$15\times4=60$가지이다.

19) 답 : ③

[해설]

1) $w=1$일 때

$x+y+z=9$ (x, y, z는 자연수)이므로

${}_3H_6={}_8C_6=28$

2) $w=2$일 때

$x+y+z=4$ (x, y, z는 자연수)이므로

${}_3H_1={}_3H_1=3$

1), 2)로부터 구하고자 하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 31

[다른 풀이]

$x=1+x'$, $y=1+y'$, $z=1+z'$,

$w=1+w'$이라고 하면

$x+y+z+5w=14$($x,\ y,\ z,\ w\ge1$인 정수)를

만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는

$x'+y'+z'+5w'=6$($x',\ y',\ z',\ w'\ge0$인 정수)를 만족하는

순서쌍 $(x',\ y',\ z',\ w')$의 개수와 같다.

이때 가능한 w'은 0과 1 뿐이다.

(ⅰ) $w'=0$이면 $x'+y'+z'=6$ ($x',\ y',\ z'\ge0$인 정수)이고

순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

(ⅱ) $w'=1$이면 $x'+y'+z'=1$ ($x',\ y',\ z'\ge0$인 정수)이고

순서쌍 $(x',\ y',\ z')$의 개수는 ${}_3H_1=3$

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)에서 얻은 모든 순서쌍의 개수는 $28+3=31$(개)이다.

20) 답 : 36

[해설]

선택되는 8개 중에

사과의 개수를 x, 감의 개수를 y, 배의 개수를 z, 귤의 개수를 w라 하면

$x+y+z+w=8$ $(x\le1,\ y\ge1,\ z\ge1,\ w\ge1)$

ⅰ) $x=0$ 일 때

$y+z+w=8$ $(y\ge1,\ z\ge1,\ w\ge1)$이고

$y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면

$y'+z'+w'=5$ $(y'\ge0,\ z'\ge0,\ w'\ge0)$이므로

구하는 경우의 수는 ${}_3H_5={}_7C_5=21$

ⅱ) $x=1$일 때

$y+z+w=7$ $(y\ge1,\ z\ge1,\ w\ge1)$이고

$y=y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$이라 하면

$y'+z'+w'=4$ $(y'\ge0,\ z'\ge0,\ w'\ge0)$이므로

구하는 경우의 수는 ${}_3H_4={}_6C_4=15$

ⅰ), ⅱ)에서 36가지이다.

21) 답 : ①

[해설]

1) $d=0$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c=10$

(나)조건의 $a+b+c\le5$에 모순

2) $d=1$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c=7$

(나)조건의 $a+b+c\le5$에 모순

3) $d=2$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c=4$ ∴ ${}_3H_4=15$

4) $d=3$일 때,

(가)조건으로부터 $a+b+c=1$ ∴ ${}_3H_1=3$

1), 2), 3), 4)로부터 구하고자 하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $15+3=18$

22) 답 : 32

[해설]

① $d=2$일 때,

$a=2p,\ b=2q,\ c=2r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$2p+2q+2r=18$

$\Rightarrow p+q+r=9$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와 같으므로 ${}_3H_{9-3}={}_8C_6={}_8C_2=28$가지이다.

② $d=3$일 때,

$a=3p,\ b=3q,\ c=3r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$3p+3q+3r=17$을 만족시키는 자연수 $p,\ q,\ r$은 존재하지 않는다.

③ $d=4$일 때,

$a=4p,\ b=4q,\ c=4r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$4p+4q+4r=16$

$\Rightarrow p+q+r=4$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수와 같으므로 ${}_3H_{4-3}={}_3C_1=3$가지이다.

④ $d=5$일 때,

$a=5p,\ b=5q,\ c=5r$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)로 놓으면

$5p+5q+5r=15$

$\Rightarrow p+q+r=3$(단, $p,\ q,\ r$은 자연수)를 만족시키는 순서쌍 $(p,\ q,\ r)$은 $(1,\ 1,\ 1)$밖에 없으므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1가지이다.

⑤ $d\geq 6$이면 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$은 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $28+3+1=32$가지이다.

23) 답 : 68

[해설]

$x+y+z+u=6$인 경우의 수에서 $x=u$인 경우의 수를 빼면 된다.

$x+y+z+u=6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_4H_6=\ {}_{4+6-1}C_6=\ {}_9C_6=84$이고

① $x=u=0$ 일 때

$y+z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_2H_6=\ {}_7C_6=7$ 가지

② $x=u=1$

$y+z=4$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_2H_4=\ {}_5C_4=5$ 가지

③ $x=u=2$

$y+z=2$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

${}_2H_2=\ {}_3C_2=3$ 가지

④ $x=u=3$

$y+z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수해 개수는

$y=0,\ z=0$ 인 1 가지

따라서 구하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는

$84-(7+5+3+1)=68$ 가지이다.

24) 답 : ③

[해설]

네 개의 자연수 중에서 중복을 허락하여

세 수를 선택하는 경우의 수는

${}_{4+3-1}C_3={}_6C_3$

$=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20\cdots$ ㉠

이때, 네 개의 자연수 $1,\ 2,\ 4,\ 8$은 각각 $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3$으로 나타낼 수 있고,

$2^6=64,\ 2^7=128$이므로 ㉠ 중에서

$\begin{cases}2^3,\ 2^3,\ 2^3\\2^3,\ 2^3,\ 2^2\\2^3,\ 2^3,\ 2\\2^3,\ 2^2,\ 2^2\end{cases}$ 인 경우는 제외해야 하므로 구하고자 하는 경우의 수는

$20-4=16$

25) 답 : ⑤

[해설]

[중복조합]

$a+b+c=6$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_3H_6={}_8C_6=28$개 이다.

(나) 조건에서 $(1,\ a),\ (2,\ b),\ (3,\ c)$는 한 직선 위에 있지 않으므로

$b-a\neq c-b$

즉, $2b\neq a+c$이다

$2b=a+c$를 만족하는 다음 5가지를 제외한다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 구하면

$(1,\ 2,\ 3),\ (3,\ 2,\ 1),\ (0,\ 2,\ 4),\ (4,\ 2,\ 0),\ (2,\ 2,\ 2)$ 이다.

따라서 만족하는 개수는 $28-5=23$(개)

26) 답 : 9

[해설]

자연수 n에 대하여 $abc=2^n$을 만족시키는

1보다 큰 자연수 $a,\ b,\ c$는 2^p(단, p는 자연수)꼴이므로

$a=2^x,\ b=2^y,\ c=2^z$이라 하면 $2^{x+y+z}=2^n$ 이고

$x+y+z=n$ 을 만족시키는

자연수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$ 개수가 28일 때이다.

즉, ${}_3H_{n-3}={}_{n-1}C_{n-3}={}_{n-1}C_2=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=28$

을 만족시키는 자연수 n의 값은 9이다.

[MIM edu:자세한 풀이]

$a,\ b,\ c$가 자연수이기 때문에, $a,\ b,\ c$는 모두 2^n의 약수이다. 즉,

$a=2^p,\ b=2^q,\ c=2^r$의 형태로 나타낼 수 있다.

$abc=2^{p+q+r}=2^n$에서 $p+q+r=n$이다.

$p,\ q,\ r$의 범위를 생각하면 $p\geq1,\ q\geq1,\ r\geq1$이다.]

$\begin{cases}p=p'+1\\q=q'+1\\r=r'+1\end{cases}$ 로 치환한다. 단, $p'\geq0,\ q'\geq0,\ r'\geq0$이다.

따라서, $p'+q'+r'=n-3$이 성립한다.

$p',\ q',\ r'$은 각각 음이 아닌 정수이므로,

이 방정식을 만족하는 순서쌍 $(p',\ q',\ r')$의 개수는

${}_3H_{n-3} = {}_{n-1}C_{n-3} = {}_{n-1}C_2 = 28$에서 $n=9$

27) 답 : ②

[해설]

서로 다른 3종류에서 중복을 허락하여 m가지를
선택하는 경우의 수가 36가지이므로

$${}_3H_m = {}_{m+2}C_m = {}_{m+2}C_2 = \frac{(m+2)(m+1)}{2} = 36$$

$\therefore\ m=7$

고구마 피자, 새우피자, 불고기 피자를 적어도 하나씩 포함하여
7개를 선택하는 경우의 수는
$x+y+z=7$(x, y, z는 자연수)
의 해의 순서쌍과 같으므로
${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$

28) 답 : 35

[해설]

순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 x, y, z, w의 4개 중에서 중복을 허락하여
4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$${}_4H_4 = {}_{4+4-1}C_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35\text{(개)}$$

29) 답 : 30

[해설]

A, B두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하는 전체경우의 수는
${}_4C_2 \cdot {}_4C_2 = 36$
공통으로 가입하는 동아리가 2개인 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$이다.

$\therefore\ 36-6=30$(가지)

30) 답 : ④

[해설]

5일 중 3일을 선택하여 요가를 하는 방법의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2} = 10$$

나머지 2일 중 하루를 수영, 줄넘기 중 한가지를 하고 남은 하루는 농구, 축구 중 한가지를 하는 방법의 수는
$2\times2\times2=8$
따라서 구하고자 하는 방법의 수는
$10\times8=80$

31) 답 : ③

[해설]

ⅰ) A, B를 먼저 발령하면 $9(={}_5C_2-1)$이다.
가, 나, 다, 라, 마 중에서 2개를 선택하면
A, B의 발령지가 자동으로 결정된다.(단, 가, 나를 동시에 선택하는 가짓수는 제외)
ⅱ)나머지 C, D, E를 발령하면 $3!$가지이다.
ⅰ), ⅱ)로부터 $\therefore\ 9\times3\neq54$

32) 답 : ②

[해설]

세 점 $(1,1), (3,1), (1,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하려면 원점을 포함하고, x축에서 $4, 8$중 하나와 y축에서 $4, 8$중 하나, 그리고 $(4,4), (8,4), (4,8), (8,8)$중 하나를 선택하면 되는데, 이때 $(0,0), (4,4), (0,8), (8,0)$은 삼각형이 되므로 한 가지를 빼주면 된다.

$\therefore\ {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1 - 1 = 15$

33) 답 : ①

[해설]

$a<b<c$로 순서가 정해져 있기 때문에, 주머니에서 임의로 3개의 공을
동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_3$이다.
㈎ $a+b+c$가 홀수이려면, {짝, 짝, 홀} 또는 {홀, 홀, 홀}
㈏ $a\times b\times c$가 3의 배수이려면, 적어도 하나는 3의 배수이어야 한다.
이 두 조건을 모두 만족시키기 위해 다음과 같이 생각한다.
ⅰ){짝, 짝, 홀}의 경우
6이 포함된 경우 홀수는 아무 수나 가능
$\therefore\ (2,6), (4,6), (6,8)$에 들어갈 홀수는 5가지
$\therefore\ 3\times5=15$
6이 포함되지 않은 경우 홀수는 3이나 9만 가능
$(2,4), (2,8), (4,8)$에 들어갈 홀수는 3 또는 9
$\therefore\ 3\times2=6$
ⅱ){홀, 홀, 홀}의 경우
3이 포함되는 경우 나머지 두 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_4C_2$
9가 포함되는 경우 나머지 두 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_4C_2$
3, 9가 동시에 포함되는 경우 나머지 한 개의 공을 꺼내는 가짓수는 ${}_3C_1$

$\therefore\ {}_4C_2 + {}_4C_2 - {}_3C_1 = 9$

따라서, ⅰ)과 ⅱ)의 가짓수를 모두 더하면 $15+6+9=30$이므로

$$\text{전체확률} = \frac{30}{{}_9C_3} = \frac{5}{14}$$

34) 답 : ④

[해설]

기본재료만 포함된 김밥의 가격이 1000원이므로
차액만큼의 선택재료가 추가되면 된다.
ⅰ)가격이 1500원일 때,
200원 짜리와 300원 짜리 재료를 각각 하나씩 선택하면 되므로
${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$
ⅱ)가격이 2000원일 때,
200원 짜리와 300원 짜리 재료를 각각 두 개씩 선택하면 되므로
${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$
따라서, $9+9=18$이다.

35) 답 : ②

[해설]

남학생, 여학생의 수를 각각 n(명)이라고 하면

$${}_{2n}C_3 = 10 \times {}_nC_3$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3!} = 10 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$2\times(2n-1)\times2 = 10\times(n-2)$$

$\therefore\ n=8$

36) 답 : 126

[해설]

[출제 의도]방정식과 부등식

각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택해야 하므로

3개의 회사 중 어느 한 회사에는 2개의 입사원서를 내게 된다.

따라서, 다음의 세 경우로 나누어 확률을 구하면

(ⅰ)증권 회사에 2개, 통신 회사에 1개, 건설 회사에 1개의 원서를 내는 경우

$_3C_2 \times {_3C_1} \times {_4C_1} = 3\times3\times4 = 36$

(ⅱ)증권 회사에 1개, 통신 회사에 2개, 건설 회사에 1개의 원서를 내는 경우

$_3C_1 \times {_3C_2} \times {_4C_1} = 3\times3\times4 = 36$

(ⅲ)증권 회사에 1개, 통신 회사에 1개, 건설 회사에 2개의 원서를 내는 경우

$_3C_1 \times {_3C_1} \times {_4C_2} = 3\times3\times6 = 54$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$36+36+54=126$ (가지)

37) 답 : 52

[해설]

ⅰ)물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ에서 3개 과목을 모두 선택하는 경우:

$_4C_3 = 4$

ⅱ)물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ중 2개 과목과 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중 1개 과목을 선택하는 경우:

$_4C_2 \times {_4C_1} = 24$

ⅲ)물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ중 1개 과목과 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중 2개 과목을 선택하는 경우:

$_4C_1 \times {_4C_2} = 24$

그러므로 총 경우의 수는

$\therefore\ 4+24+24=52$(가지)

38) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 조합의 수를 계산한다.

$_7C_2 = \dfrac{7\times6}{2} = 21$

39) 답 : 63

[해설]

[출제 의도] 중복조합 이해하기

두 수 2, 4에서 중복을 허락하여 두 개를 선택하는 경우의 수는

$_2H_2 = {_3C_2} = 3$

세 수 1, 3, 5에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 경우의 수는

$_3H_5 = {_7C_5} = 21$

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times21=63$

40) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 순열과 조합 추론하기

n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는 '(ⅰ) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우' 에서 '(ⅱ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우' 와 '(ⅲ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우' 를 제외하면 된다.

(ⅰ)의 경우 :

n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 $_nC_3$이다.

(ⅱ)의 경우 :

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.

(ⅲ)의 경우 :

연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우는 2는 반드시 포함되어야 하고 3은 포함되지 않아야 하므로 경우의 수는 $n-3$이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도 $n-3$이다.

또한 연속되는 두 수가 k, $k+1$($k=2$, 3, $\cdots$, $n-2$)라 하면 이 경우의 수는 $(n-3)$이고, 각각의 경우에 k, $k+1$과 연속되지 않는 수가 적혀 있는 하나의 공을 더 선택하는 경우의 수는 $(n-4)$이므로 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는 $(n-3)(n-4)$이다.

따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는 $2\times(n-3)+(n-3)(n-4)$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - (n-2) - \{2(n-3)+(n-3)(n-4)\}$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$$ 이다.

$\therefore\ p(n)=n-3$, $q(n)=(n-3)(n-4)$, $r(n)=\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$

따라서 $\dfrac{p(18)\times q(17)}{r(16)} = \dfrac{15\times(14\times13)}{\dfrac{14\times13\times12}{6}} = \dfrac{15}{2}$

41) 답 : 51

[해설]

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하자.

(ⅰ) $(x, y, z) = (0, 2, 2)$인 경우:

배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 $_2H_2$, $_2H_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$_2H_2 \times {_2H_2} - 2 = {_3C_2} \times {_3C_2} - 2 = 3\times3-2 = 7$

$(x, y, z) = (2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ⅱ) $(x, y, z) = (1, 1, 2)$인 경우:

사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 $_2H_1$, $_2H_1$, $_2H_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$_2H_1 \times {_2H_1} \times {_2H_2} - 2 = {_2C_1} \times {_2C_1} \times {_3C_2} - 2 = 2\times2\times3-2$

$=10$

$(x, y, z) = (1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.
위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$3\times7+3\times10=51$
[다른 풀이]
6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 x, y, z라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.
이때 과일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고,
학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.
(ⅰ) $(x, y, z) = (0, 2, 2)$인 경우:
학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면 $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$이므로
구하는 경우의 수는 7이다.
이때 $(x, y, z) = (2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.
(ⅱ) $(x, y, z) = (1, 1, 2)$인 경우:
학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면
$(0, 0, 1)$, $(0, 0, 2)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$이므로
구하는 경우의 수는 10이다.
이때 $(x, y, z) = (1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$인 경우의 수도 모두 10이다.
위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는
$3\times7+3\times10=51$

42) 답 : 93
[해설]
[출제 의도] 이항정리를 활용하여 경우의 수 추론하기
$n(S_1)=k$ ($3\le k\le 10$, k는 자연수)인 집합 S_1의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로
${}_{10}C_k$이다.
또한 $S_1\subset S_2\subset S_3$이므로
집합 S_1에 속하지 않는 원소는 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합에 속해야 한다.
집합 S_1에 속하지 않는 $(10-k)$개의 원소가 세 집합 S_2-S_1, S_3-S_2, $U-S_3$ 중 어느 한 집합의 원소가 되도록 정하는 경우의 수는 서로 다른 세 개에서 중복을 허락하여 $(10-k)$개를 선택하는 중복순열의 수 ${}_3\prod_{10-k}=3^{10-k}$과 같다.
그러므로 $n(S_1)=k$일 때 집합 S_1, S_2, S_3의 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 ${}_{10}C_k\times3^{10-k}$이다.
따라서 $n(S_1)\ge3$, $S_1\subset S_2\subset S_3$을 만족시키는
순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 이항정리에 의하여

$$\sum_{k=3}^{10}\left({}_{10}C_k\times3^{10-k}\right)=\sum_{k=3}^{10}{}_{10}C_k\times1^k\times3^{10-k}$$
$$=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\times1^k\times3^{10-k}-\sum_{k=0}^{2}{}_{10}C_k\times1^k\times3^{10-k}$$
$$=(1+3)^{10}-\left(3^{10}+10\times3^9+45\times3^8\right)$$
$$=4^{10}-84\times3^8$$

따라서 $f(k)=3^{10-k}$이고 $a=84$이므로
$a+f(8)=84+9=93$

$$\sum_{k=0}^{10}{}_{10}C_k\times1^k\times3^{10-k}$$
$$={}_{10}C_0\times1^0\times3^{10}+{}_{10}C_1\times1^1\times3^9+\cdots+{}_{10}C_{10}\times1^{10}\times3^0$$
$$=(1+3)^{10}$$

43) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 중복조합을 활용하여 경우의 수 추론하기
조건에 맞는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하려면(가)를 만족시키는 경우에서
두 점 (a, b), (c, d)가 서로 같은 경우와
점 (a, b) 또는 점 (c, d)가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우를 제외하면 된다.
$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$이라 하면
$a+b+c+d=12$를 만족시키는 자연수 해의 개수는
$a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_4H_8={}_{11}C_3=165$
(ⅰ) 두 점 (a, b), (c, d)가 같은 경우 $a=c$, $b=d$이므로
$a+b=6$이고순서쌍의 개수는 ${}_2H_4=5$즉, 순서쌍은
$(1, 5, 1, 5)$, $(2, 4, 2, 4)$, $(3, 3, 3, 3)$, $(4, 2, 4, 2)$, $(5, 1, 5, 1)$의 5가지이다.
(ⅱ) 점 (a, b)가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우 $b=2a$이므로
$3a+c+d=12$ $a=1$인 경우 $c+d=9$의 자연수 해의 개수는
${}_2H_7=8$ $a=2$인 경우 $c+d=6$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_4=5$
$a=3$인 경우 $c+d=3$의 자연수 해의 개수는 ${}_2H_1=2$따라서 점 (a, b)가 직선 $y=2x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수
$8+5+2=15$에서 (ⅰ)과 중복되는 순서쌍 $(2, 4, 2, 4)$를 제외한 순서쌍의 개수는 14이다.
(ⅲ) 점 (c, d)가 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우 (ⅱ)와 같이 순서쌍의 개수는 14이다.
(ⅳ) 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=2x$ 위에 있는 경우 $3a+3c=12$이므로 $a+c=4$ 따라서 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=2x$ 위에 있을 때의 순서쌍의 개수 ${}_2H_2=3$에서 (ⅰ)과 중복되는 순서쌍 $(2, 4, 2, 4)$를 제외한 순서쌍의 개수는 2이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는
$165-5-(14+14-2)=134$

44) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 중복조합을 활용하여 추론하기
네 자연수 a, b, c, d 중 홀수가 2개인 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

a, b, c, d 중 두 홀수를 $2x+1, 2y+1$,
두 짝수를 $2z+2, 2w+2$라 하자. (단, x, y, z, w는 음이 아닌 정수)
$(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=12$
$x+y+z+w=3$
${}_4H_3={}_6C_3=20$
따라서 $6\times20=120$

정답 및 해설

45) 답 : 49

[해설]

[출제 의도] 중복조합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.

조건 (가)와 (나)를 만족시키는 자연수 N을

$N=10^3a+10^2b+10c+d$로 놓으면

$a+b+c+d=7$이고 a, b, c는 0 또는 자연수이고,

d는 홀수이므로 d는 1, 3, 5 중 하나이다.

ⅰ) $d=1$인 경우

$a+b+c=6$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의

개수는 ${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

ⅱ) $d=3$인 경우

$a+b+c=4$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의

개수는 ${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

ⅲ) $d=5$인 경우

$a+b+c=2$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의

개수는 ${}_3H_2={}_4C_2=6$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)으로부터 구하는 자연수 N의 개수는

$28+15+6=49$

46) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 중복조합 이해하기

(ⅰ) a, b, c가 모두 짝수인 경우

${}_7H_3={}_9C_3=84$

(ⅱ) a, b, c 중 1개만 짝수인 경우

짝수 1개를 선택하는 경우의 수는 7

홀수 8개 중 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_8H_2$

선택한 세 수를 크기순으로 나열하는 경우의 수는 1이므로

$7\times{}_8H_2\times1=252$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 336

47) 답 : 8

[해설]

[출제 의도] 조합을 이해하여 경우의 수를 구한다.

A가 세 개의 공을 받으므로 남는 공의 수는 7이다.

7개의 공을 두 사람에게 나누어 주는 경우의 수이므로

${}_{2+7-1}C_7={}_8C_7=8$

48) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 중복조합의 성질을 이해하여 경우의 수를 구한다.

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 x, y, z, w

라 하면 $x+y+z+w=14$

x, y, z, w가 모두 홀수이므로

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$

(단, a, b, c, d는 0이상 4이하의 정수)

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$a+b+c+d=5$

a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다.

이때 a, b, c, d는 4이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.

${}_4H_5-4={}_{4+5-1}C_5-4={}_8C_5-4=\dfrac{8!}{5!3!}-4=52$

49) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 중복조합 이해하기

$x\ge1, y\ge1, z\ge1$이고 $x+y+z=6$이므로

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$로 치환하면

$X+Y+Z=3$인 음이 아닌 정수해 $(X,\ Y,\ Z)$의 개수와 일치하므로

${}_3H_3={}_5C_3=10$

50) 답 : 36

[해설]

[출제 의도] 중복조합의 성질 이해하기

$x=2l, y=2m, z=2n$ (단, l, m, n은 자연수)라 하면,

$l+m+n=10$이 된다.

${}_{3+7-1}C_7={}_9C_7=36$

51) 답 : 15

[해설]

${}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2}=15$

52) 답 : 130

[해설]

${}_4H_8-{}_4H_4={}_{11}C_3-{}_7C_3=165-35=130$

53) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]조합의 성질을 이용하여 경우의 수를 구할 수가 있는가를 묻는 문제이다.

철수를 포함하여 4명을 뽑는 경우의 수 $a={}_9C_3$

철수를 포함하지 않고 4명을 뽑는 경우의 수 $b={}_9C_4$

$\therefore\ a+b={}_9C-3+{}_9C-4={}_{10}C_4$

[다른 풀이]

10명 중 4명을 뽑을 때, 철수를 포함할 수도 있고 철수를 포함하지 않을 수도 있다.

$\therefore\ {}_{10}C_4$

54) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]조합의 수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

${}_4C_2\times3\neq\dfrac{{}_4P_2}{2!}\times3\neq6\times6=36$

55) 답 : ①

[해설]

3개의 화면 중 2개의 화면은 2개의 정보를,

1개의 화면은 1개의 정보를 보여주어야 하므로,

5가지 정보를 2개, 2개, 1개로 나누는 방법의 수는

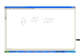
${}_5C_2\times{}_3C_2\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}=15$ (가지)이고,

이것을 화면에 보여주는 경우의 수는 6(가지)이다.

$\therefore\ 15\times 6=90$ (가지)

56) 답 : 15

[해설]

유형: 9개

유형: 6개

따라서, 총 15개다.

57) 답 : ⑤

[해설]

6명을 배정하는 모든 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_3\times{}_3C_2\times{}_4C_3=720$

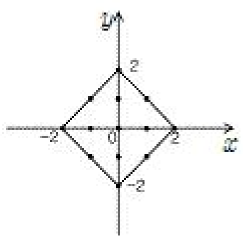
배정되지 않는 선수가 있는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_3\times{}_2C_2\times{}_3C_3=60$

$\therefore\ 720-60=660$

58) 답 : ④

[해설]



ㄱ. 그림에서 점의 개수는 13개다.(참)

ㄴ. 직선의 개수는 13개의 점에서 두 점을 택하는 경우의 수이다.

일직선위에 있는 경우의 수는 중복되므로

${}_{13}C_2-\left(2\times{}_5C_2+10\times{}_3C_2\right)+12=40$이다.(거짓)

ㄷ. 13개의 점에서 세 점을 택하고 일직선 위에 있는 경우의 수는 제외한다.

${}_{13}C_3-\left(2\times{}_5C_3+10\times{}_3C_3\right)=256$이다.(참)

59) 답 : 756

[해설]

[출제 의도]경우의 수를 이용한 수학외적 문제 해결하기

10가지 중 8장의 표를 사는 경우: ${}_{10}C_8$

8장을 3장, 3장, 2장으로 나누어 갖는 경우

: ${}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\times 3!$

$\therefore\ x={}_{10}C_8\times{}_8C_3\times{}_5C_3\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}\times 3\neq 75600$

$\therefore\ \frac{x}{100}=756$

60) 답 : 211

[해설]

[출제 의도]조합을 이용하여 경우의 수 구하기

[해설] $n(B)=k$일 때, $A\subset B$를 만족하는 집합 B의 개수는 ${}_5C_k$ 이고

집합 A의 개수는 2^k-1개이므로 순서쌍 $(A,\,B)$의 개수는

$\sum_{k=1}^{5}{}_5C_k\left(2^k-1\right)$이다.

$\sum_{k=1}^{5}{}_5C_k\left(2^k-1\right)=\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\left(2^k-1\right)$

$\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k2^k-\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k=(2+1)^5-2^5=211$

61) 답 : 10

[해설]

주사위를 두 번 던질 때, 나온 눈의 순서쌍을 $(m,\,n)$이라 하자.

순서쌍 $(m,\,n)$의 개수는 36이다.

$\omega^m+\omega^n+1$이 실수가 되기 위해서는 $\omega^m+\omega^n$이 실수이어야 한다.

$\omega^m+\omega^n$이 실수가 되기 위해서는 $m+n$이 3의 배수가 되어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍은

$(1,\,2),\ (1,\,5),\ (2,\,1),\ (2,\,4),\ (3,\,3),\ (3,\,6),$

$(4,\,2),\ (4,\,5),\ (5,\,1),\ (5,\,4),\ (6,\,3),\ (6,\,6)$

이고, 순서쌍의 개수는 모두 12개이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$이다.

$a=3,\,b=1$이므로 $a^2+b^2=10$이다.

62) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]순열과 조합의 경우의 수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

남자 3명, 여자 1명인 경우: ${}_5C_3\cdot{}_3C_1\cdot 4\neq 720$

남자 2명, 여자 2명인 경우: ${}_5C_2\cdot{}_3C_2\cdot 4\neq 720$

남자 1명, 여자 3명인 경우: ${}_5C_1\cdot{}_3C_3\cdot 4\neq 120$

따라서, 구하는 경우의 수는 1560(가지)이다.

63) 답 : ⑤

[해설]

한 팀의 구성원이 결정되어 팀에 1명부터 9명까지 구성되는 모든 경우의 수는

${}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_r+\cdots+{}_{10}C_9$이다.

10명의 학생을 두 팀으로 나누는 방법의 수는 한 팀의 구성원이 결정되어 나머지 9명이 구성되는 경우와 한 팀의 구성원이 9명이 되어

나머지 한 명이 구성되는 경우의 수와 같으므로

$\frac{1}{2}\left({}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_9\right)$

${}_{10}C_0+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_r+\cdots+{}_{10}C_9+{}_{10}C_{10}=2^{10}$

$\frac{1}{2}\left({}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\cdots+{}_{10}C_r+\cdots+{}_{10}C_9\right)=\frac{1}{2}\left(2^{10}-2\right)=2^9-1$

64) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]분할과 분재를 이해하고 이를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ⅰ) 1명, 1명, 3명으로 분할한 후 분배하는 경우의 수

${}_5C_1\times{}_4C_1\times\frac{1}{2}\times 3\neq 60$

ⅱ) 2명, 2명, 1명으로 분할한 후 분배하는 경우의 수

$_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2} \times 3 \neq 90$

$\therefore\ 60+90=150$

65) 답 : 420

[해설]

[출제 의도]조합을 이용하여 수학외적문제 해결하기

8대 중에서 2대를 선택하는 방법의 수는 $_8C_2$

어른을 두 팀으로 나누는 방법의 수는

$_3C_1 \times {}_2C_2 = 3$

어린이를 두 팀으로 나누는 방법의 수는

$_5C_2 \times {}_3C_3 + {}_5C_3 \times {}_2C_2 + {}_5C_4 \times {}_1C_1 = 25$

두 개의 팀이 두 대의 차량에 나누어 탑승하는 방법의 수는 $2!$

$n = {}_8C_2 \times 3 \times 25 \times 2 \neq 4200$

$\therefore\ \frac{n}{10} = 420$

66) 답 : ①

[해설]

자연수 24의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24이다.

이 약수들을 분류하여 다음과 같이

$A_0 = \{3, 6, 12, 24\}$, $A_1 = \{1, 4\}$, $A_2 = \{2, 8\}$라 하자.

세 수의 합이 3의 배수인 경우는

ⅰ) A_0에서 세 개를 택하는 경우 $_4C_3 = 4$

ⅱ) A_0, A_1, A_2에서 각각 한 개씩 택하는 경우

$_4C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 = 16$이다.

전체 경우의 수 $_8C_3 = 56$이다.

따라서 구하고자 하는 확률값은 $\frac{4+16}{56} = \frac{5}{14}$이다.

67) 답 : 130

[해설]

6명을 2개조로 나누는 방법은 구성원이 2명이상 이므로

2명과 4명, 3명과 3명으로 나누는 2가지가 있다.

ⅰ) 2명과 4명의 경우

$_6C_2 \times (2-1)! \times (4-1) \neq 90$가지

ⅱ) 3명과 3명의 경우

$_6C_3 \times \frac{1}{2!} \times (3-1)! \times (3-1) \neq 40$가지

따라서 $90+40=130$가지이다.

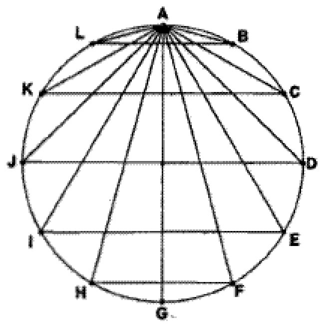
68) 답 : 52

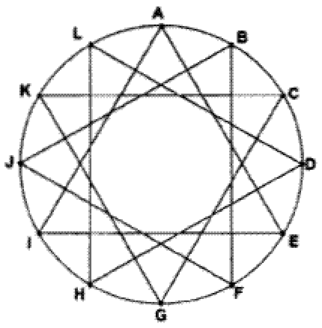
[해설]

[출제 의도]조합의 수 구하기

지름 AG를 대칭축으로 하여 이등변 삼각형을 찾아보면

$5 \times 12 = 60$(개)가 있다.





12개 정삼각형 중에서 중복해서 센 것이 8개가 있으므로

이등변삼각형의 개수는 $60-8=52$(개)

69) 답 : ③

[해설]

12명을 4명씩 A, B, C의 세 조로 나눈다고 하자.

각 지역에서 선발된 3명을 세 조에 한 명씩 배치하는

경우의 수는 각각 $3 \neq 6$이므로

4지역의 12명을 모두 배치하는 경우의 수는 6^4이다.

그런데, 세 조 A, B, C는 서로 구별되지 않으므로 구하는 경우의 수는

$\frac{6^4}{3!} = 6^3 = 216$

70) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]조합을 이용하여 등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$k^2 = [{}_kC_1] + 2 \cdot {}_kC_2$로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} &1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \\ &= {}_1C_1 + ({}_2C_1 + 2 \cdot {}_2C_2) + \cdots + ({}_nC_1 + 2 \cdot [{}_nC_2]) \\ &= ({}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + \cdots + {}_nC_1) + 2({}_2C_2 + {}_3C_2 + \cdots + [{}_nC_2]) \\ &= {}_{n+1}C_2 + 2 \cdot [{}_{n+1}C_3] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

71) 답 : 160

[해설]

놀이 기구의 좌석을 다음과 같이 나타내면

A						
B						

(ⅰ) A행의 좌석에서 2개를 택하여 남학생 두 명을 앉히는 방법의 수는

$_5P_2 = 5 \times 4 = 20$(가지)

각각의 옆자리에는 여학생을 앉히는 방법의 수는 2(가지)이므로

구하는 방법의 수는 $20 \times 2 = 40$(가지)

마찬가지로, A행의 두 좌석에 여학생을 앉히는 방법을 생각하면

구하는 경우의 수는 $20 \times 2 = 40$(가지)

(ii)남학생 1명과 여학생 1명을 택하여 A행의 두 좌석에서 앉히면 그 옆자리에 앉는 사람은 주어진 조건에 의해 자동으로 결정되므로

구하는 경우의 수는 ${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_5P_2 = 2\times2\times20 = 80$(가지)

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$40+40+80=160$(가지)

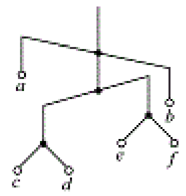
72) 답 : 45

[해설]

[출제 의도]분할과 분배에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

a와 b의 위치에 6개의 인형 중 2개를 매다는 방법의 수는

${}_6C_2 = \frac{6\times5}{2} = 15$(가지)



나머지 4개의 인형을 2개씩 두 묶음으로 나누어 c, d와 e, f에 매다는 방법의 수는

${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2} = \frac{4\times3}{2} \times \frac{1}{2} = 3$(가지)

따라서 구하는 모든 경우의 수는 $15\times3=45$(가지)

73) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]확률의 곱의 법칙과 합의 법칙을 이용하여 확률 구하기

[해설]전체 경우의 수는 $3\times3\times3=27$이고

각 집합에서 뽑은 세 수 중 3의 배수가

(i) 1개인 경우: ${}_3C_1 \times 2\times2 = 12$(가지)

(ii) 2개인 경우: ${}_3C_2 \times 2\times1 = 6$(가지)

(iii) 3개인 경우: $1\times1\times1=1$(가지)

따라서 구하는 확률 $= \frac{12+6+1}{27} = \frac{19}{27}$

74) 답 : 126

[해설]

[출제 의도]조합의 뜻을 알고 조합의 수를 구하기

[해설]집합 S의 개수는

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19의 9개의 수 중에서 4개의 수를 택하는 조합의 수와 같으므로 ∴ ${}_9C_4 = 126$

75) 답 : 32

[해설]

[출제 의도] 경우의 수를 이용하여 실생활 문제를

해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

8개 조 8경기에서 이긴 선수 8명은 4개 조로 나누어 4경기를 치른다.

이때 이긴 선수 4명은 준결승전 2경기, 결승전 1경기, 3, 4위전 1경기 등

모두 4경기를 하여 1위부터 4위까지 순위를 결정한다.

첫 경기에서 이기고 둘째 경기에서 진 선수 4명도 위와 같이 4경기를

치러 5위부터 8위까지 순위를 결정할 수 있다.

처음 8개조 8경기에서 진 선수 8명도 마찬가지 방법으로 9위부터 16위까지

순위를 정할 수 있다.

따라서 1위부터 16위까지 순위를 모두 정하기 위해서는

32경기를 치러야 한다.

76) 답 : ③

[해설]

순열과 조합

ㄱ.(참) a_3은 선택된 4개의 수 중에서 3보다 작은 수가 한 개이고, 3보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로

$a_3 = {}_2C_1 \times {}_{97}C_2$

ㄴ.(거짓) $a_{10} = {}_9C_1 \times {}_{90}C_2,\ a_{90} = {}_{89}C_1 \times {}_{10}C_2$이므로

$a_{10} \neq a_{90}$

ㄷ.(참) $\sum_{k=2}^{98} a_k = a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{98}$은 1부터 100까지의 자연수 중에서

4개의 수를 뽑는 모든 경우의 수의 합이므로

결국 ${}_{100}C_4$와 같게 된다.

77) 답 : 105

[해설]

[출제 의도]경우의 수를 이용하여 집합의 원소의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

-2를 포함하는 원소가 세 개인 부분집합의 개수는 ${}_6C_2=15$이므로

-2는 15번 더해진다.

다른 6개의 원소에 대해서도 같은 방법으로 생각하면

모두 15번 더해지므로 구하는 합은

$S_1+S_2+\cdots+S_{10} = 15(-2-1+1+2+3+4) = 105$

78) 답 : 60

[해설]

[출제 의도]주어진 조건을 만족하는 조합의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

${}_9C_3 - {}_6C_3 - {}_4C_3 = 60$

79) 답 : 10

[해설]

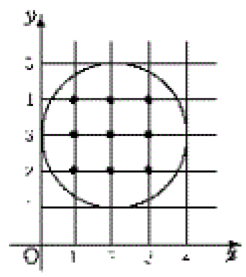
두 점은 하나의 선분을 결정하므로 만들 수 있는 선분의 수는 각각의 점에서 다른 네 점을 연결하면 만들어진다.

그런데 각각의 선분은 두 번 계산이 되므로 $\frac{5\times4}{2} = 10$이다.

80) 답 : 76

[해설]

[출제 의도]조합의 뜻을 알고 조합의 수를 구하기



원의 내부에 있는 9개의 점 중에서 3개의 점을 꼭짓점으로 하는

삼각형의 개수를 구한다.

$\therefore \ {}_9C_3 - 8 = 76$

[정답]76

81) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 조합의 수 구하기

[해설] 7명을 2, 2, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 105$ 이다.

$\therefore$ A, B, C세 나라에 파견하는 경우의 수는 $105 \times 6 = 630$

[정답]④

82) 답 : ④

[해설]

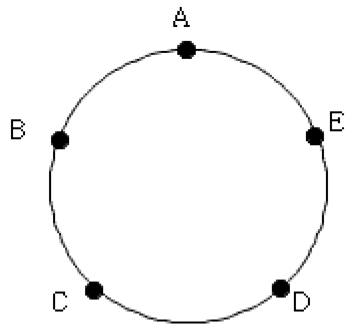
[출제 의도]조합에 대한 어떤 성질을 유도할 수 있는가를 묻는 문제이다.

㈎: ${}_{n-1}C_{r-1}$, ㈏: r , ㈐: $\frac{n}{r}$

83) 답 : 10

[해설]

【출제 의도】경우의 수 구하기



$(A, B, C), (A, B, D), (A, B, E), (A, C, D), (A, C, E), (A, D, E), (B, C, D), (B, C, E), (B, D, E), (C, D, E)$

그러므로 10가지이다.

84) 답 : 256

[해설]

[출제 의도]조합의 뜻을 알고 조합의 수를 구하기

${}_{13}C_3 - ({}_5C_3 \cdot 2 + {}_3C_3 \cdot 10) = 256$

[정답]256