III.수열

3.수학적 귀납법

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1 \ (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ a_n+n \ (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$ 를 만족시킨다. a_7의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

2 [*공통]모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=a_2=1$이고,

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, $a_{n+1}=\dfrac{S_n^2}{S_{n-1}}+(2n-1)S_n\ (n\ge 2)$를

만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 주어진 식으로부터
>
> $S_{n+1}=\dfrac{S_n^2}{S_{n-1}}+2nS_n\ (n\ge 2)$이다.
>
> 양변을 S_n으로 나누면
>
> $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}+2n$이다.
>
> $b_n=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$이라 하면
>
> $b_1=2$이고
>
> $b_n=b_{n-1}+2n\ (n\ge 2)$이다.
>
> 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면 $b_n=$ [(가)] $\times(n+1)\ (n\ge 1)$
> 이므로
>
> $S_n=$ (가) $\times\{(n-1)!\}^2\ (n\ge 1)$이다.
>
> 따라서 $a_1=1$이고, $n\ge 2$일 때 $a_n=S_n-S_{n-1}$
>
> = (나) $\times\{(n-2)!\}^2$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(6)$의 값은?[4점][2016(A) /수능 19]

① 110 ② 125 ③ 140
④ 155 ⑤ 170

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

3 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, $a_{n+1}=(n+1)S_n+n!\,(n\ge 1)$을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로 주어진 식에 의하여 $S_{n+1}=(n+2)S_n+n!\,(n\ge 1)$ 이다. 양변을 $(n+2)!$로 나누면 $\frac{S_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{S_n}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 이다. $b_n=\frac{S_n}{(n+1)!}$이라 하면 $b_1=\frac{1}{2}$이고 $b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면 $b_n=\frac{\boxed{(가)}}{n+1}$ 이므로 $S_n=[(가)]\times n!$ 이다. 그러므로 $a_n=[(나)]\times(n-1)!\,(n\ge 1)$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(7)+g(6)$의 값은?[4점]

① 44 ② 41 ③ 38
④ 35 ⑤ 32

[난이도 : ★☆☆] [2014 학년도 대수능]

4 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

a_9의 값을 구하시오. [3점]

(가) $a_1=a_2+3$ (나) $a_{n+1}=-2a_n\ \ (n\ge 1)$

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

5 [*공통]모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=10$ 이고 $(a_{n+1})^n=10(a_n)^{n+1}(n\ge 1)$을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면 $n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$ 이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면 $\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+(가)$ 이다. $b_n=\frac{\log a_n}{n}$이라 하면 $b_1=1$이고 $b_{n+1}=b_n+(가)$ 이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면 $b_n=(나)$ 이므로 $\log a_n=n\times(나)$ 이다. 그러므로 $a_n=10^{n\times(나)}$ 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$과 $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(10)}{f(4)}$의 값은? [4점]

① 38 ② 40 ③ 42
④ 44 ⑤ 46

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

6 [공통]자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가)세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표는 각각 $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-1,2)$이다. (나)선분 P_nP_{n+1}의 중점과 선분 $P_{n+2}P_{n+3}$의 중점은 같다.

예를 들어, 점 P_4의 좌표는 $(1,-2)$이다.

점 P_{25}의 좌표가 (a,b)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

7 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4$이고, $a_{n+1}=n\cdot 2^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}\,(n\geq 1)$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

[증명]
주어진 식에 의하여 $a_n=(n-1)\cdot 2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}\,(n\geq 2)$이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=[(A)]+\frac{a_n}{n}$ 이므로 $a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{n}+[(A)]$ 이다. $b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면 $b_{n+1}=b_n+\frac{[(A)]}{n+1}\,(n\geq 2)$이고 $b_2=3$이므로 $b_n=[(B)]\,(n\geq 2)$이다. 그러므로 $a_n=\begin{cases}4, & (n=1)\\ n\times[(B)], & (n\geq 2)\end{cases}$이다.

위의 (A), (B)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(4)+g(7)$의 값은?[4점]

① 90　② 95　③ 100
④ 105　⑤ 110

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

8 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$을 만족시킬 때, a_4의 값은?[3점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

9 [공통]첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$nS_{n+1}=(n+2)S_n+(n+1)^3\,(n\geq 1)$이 성립한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

자연수 n에 대하여 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$이므로 $na_{n+1}=2S_n+(n+1)^3\cdots$ ① 이다. 2이상의 자연수 n에 대하여 $(n-1)a_n=2S_{n-1}+n^3\cdots$ ② 이고, ①에서 ②을 뺀 식으로부터 $na_{n+1}=(n+1)a_n+[(A)]$를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{[(A)]}{n(n+1)}$ 이다. $b_n=\frac{a_n}{n}$이라 하면, $b_{n+1}=b_n+3+[(B)]\,(n\geq 2)$이므로 $b_n=b_2+[(C)]\,(n\geq 3)$이다. ⋮

위의 (A), (B), (C)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $\frac{f(3)}{g(3)h(6)}$의 값은?[4점]

① 30　② 36　③ 42
④ 48　⑤ 54

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

10 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$\sum_{k=0}^{n} \frac{{}_{n}C_{k}}{{}_{n+4}C_{k}} = \frac{n+5}{5}$ 가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때, (좌변) $= \frac{{}_{1}C_{0}}{{}_{5}C_{0}} + \frac{{}_{1}C_{1}}{{}_{5}C_{1}} = \frac{6}{5}$, (우변) $= \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$ 이므로
> 주어진 등식은 성립한다.
>
> (2) $n=m$일 때, 등식 $\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}C_{k}}{{}_{m+4}C_{k}} = \frac{m+5}{5}$ 가 성립한다고 가정하자.
>
> $n=m+1$일 때, $\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}C_{k}}{{}_{m+5}C_{k}} = [(가)] + \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}$ 이다.
>
> 자연수 l에 대하여 ${}_{l+1}C_{k+1} = [(나)] \cdot {}_{l}C_{k}\,(0 \le k \le l)$이므로
>
> $\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}} = [(다)] \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}C_{k}}{{}_{m+4}C_{k}}$ 이다.
>
> 따라서
>
> $\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}C_{k}}{{}_{m+5}C_{k}} = [(가)] + [(다)] \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}C_{k}}{{}_{m+4}C_{k}} = \frac{m+6}{5}$ 이다.
>
> 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $1,\ \frac{l+2}{k+2},\ \frac{m+1}{m+4}$

② $1,\ \frac{l+1}{k+1},\ \frac{m+1}{m+5}$

③ $1,\ \frac{l+1}{k+1},\ \frac{m+1}{m+4}$

④ $m+1,\ \frac{l+1}{k+1},\ \frac{m+1}{m+5}$

⑤ $m+1,\ \frac{l+2}{k+2},\ \frac{m+1}{m+4}$

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

11 [공통]수열 $\{a_n\}$이

$a_1 = \frac{1}{2}$, $(n+1)(n+2)a_{n+1} = n^2 a_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, 다음은

모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{n}{n+1} \cdots (*)$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때, (좌변) $= \frac{1}{2}$, (우변) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로
> (*)이 성립한다.
>
> (2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
>
> $\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$ 이다.
>
> $n=m+1$일 때, (*)이 성립함을 보이자.
>
> $\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + a_{m+1}$
>
> $= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + [(가)]\,a_m$
>
> $= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1}$
>
> $= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + [(나)] + \frac{m^2}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m+1)} \cdots \frac{1^2}{2 \cdot 3} a$
>
> $= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} - \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} - [(다)]$
>
> $= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k^2} - \frac{m+1}{m+2}$
>
> 그러므로 $n=m+1$일 때도(*)이 성립한다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여(*)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{m}{(m+1)(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)^2(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

② $\frac{m}{(m+1)(m+2)},\ \frac{m}{(m+1)^2(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)(m+2)}$

③ $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)^2(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

④ $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)^2(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)(m+2)}$

⑤ $\frac{m^2}{(m+1)(m+2)},\ \frac{m}{(m+1)^2(m+2)},\ \frac{1}{(m+1)(m+2)^2}$

[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

12 [공통]자연수 $n(n \geq 2)$으로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수를 모두 더한 값을 a_n이라 하자.

예를 들어 4로 나누었을 때, 몫과 나머지가 같아지는 자연수는 $5,\ 10,\ 15$이므로

$a_4 = 5+10+15 = 30$이다.

$a_n > 500$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009 학년도 대수능]

13 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\left(1^2+1\right)\cdot 1! + \left(2^2+1\right)\cdot 2! + \cdots + \left(n^2+1\right)\cdot n \neq n\cdot(n+1)!$이

성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때, (좌변) $=2$, (우변) $=2$이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (2) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면
> $\left(1^2+1\right)\cdot 1! + \left(2^2+1\right)\cdot 2! + \cdots + \left(k^2+1\right)\cdot k \neq k\cdot(k+1)!$이다.
> $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
> $\left(1^2+1\right)\cdot 1! + \left(2^2+1\right)\cdot 2! + \cdots + \left(k^2+1\right)\cdot k! + \left\{(k+1)^2+1\right\}\cdot (k$
> $=$[(가)] $+ \left\{(k+1)^2+1\right\}\cdot (k+1)!$
> $= ($[(나)]
> $= (k+1)\cdot$ [(다)]
> 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?[3점]

① $k\cdot(k+1)!,\ k^2+2k+1,\ (k+1)!$
② $k\cdot(k+1)!,\ k^2+3k+2,\ (k+2)!$
③ $k\cdot(k+1)!,\ k^2+3k+2,\ (k+1)!$
④ $(k+1)\cdot(k+1)!,\ k^2+3k+2,\ (k+2)!$
⑤ $(k+1)\cdot(k+1)!,\ k^2+2k+1,\ (k+1)!$

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

14 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} = 2a_n + 2$일 때, a_{10}의 값은?[3점]

① 1022　② 1024　③ 2021
④ 2046　⑤ 2082

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

15 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n(5n+3)}{4}$ 이 성립함을

수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때, (좌변) $=2$, (우변) $=2$이므로
> 주어진 등식은 성립한다.
> (2) $n=m$일 때 성립한다고 가정하면
> $$\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$
> $$=\frac{m(5m+3)}{4}$$ 이다.
> $n=m+1$일 때 성립함을 보이자.
> $$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$
> $$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\{[\text{(가)}]$$
> $$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{[\text{(나)}]}\right)$$
> $$+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{[\text{(가)}]}{m+1}$$
> $$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}([\text{(다)}]$$
> $$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$
> 그러므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $5m-3$, m, $5k+2$
② $5m-3$, $m+1$, $5k+2$
③ $5m+2$, m , $5k-3$
④ $5m+2$, m , $5k+2$
⑤ $5m+2$, $m+1$, $5k-3$

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

16 [문과] $p\geq 2$인 자연수 p에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1=0$
> (나) $a_{k+1}=a_k+1(1)$
> (다) $a_{k+p}=a_k(k=1, 2, 3, \cdots)$

[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_{2k}=2a_k$
ㄴ. $a_1+a_2+\cdots+a_p=\frac{p(p-1)}{2}$
ㄷ. $a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

17 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$이 성립함을

수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$이라 할 때, $a_n>1$임을 보이면 된다.
>
> (1) $n=1$일 때 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$이다.
>
> (2) $n=k$일 때 $a_k>1$이라고 가정하면
>
> $n=k+1$일 때 $a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$
>
> $=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-$ [(가)]
>
> 한편, $(3k+2)(3k+4)$ [(나)] $(3k+3)^2$ 이므로
>
> $\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>$ [(다)]
>
> 그런데 $a_k>1$이므로
>
> $a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\text{[(다)]}\right)-\text{[(가)]}>1$
>
> 그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{1}{k+1}$, $>$, $\frac{2}{3k+3}$

② $\frac{1}{k+1}$, $<$, $\frac{2}{3k+3}$

③ $\frac{1}{k+1}$, $<$, $\frac{4}{3k+3}$

④ $\frac{2}{k+1}$, $>$, $\frac{4}{3k+3}$

⑤ $\frac{2}{k+1}$, $<$, $\frac{1}{k+1}$

[난이도 : ★☆☆] [2001 학년도 대수능]

18 [공통]어떤 원자의 에너지는 주양자수 n에 의해서 결정된다.

주양자수가 n인 에너지 상태에는 $2n^2$개의 서로 다른 궤도가 존재한다. 주양자수가 $n=1, 2, 3, \cdots, 9$인 에너지 상태에 있는 모든 궤도의 수는?(단, 주양자수에 다른 에너지 상태에 있는 궤도들은 서로 다르다.)[2점]

① 770 ② 570 ③ 408
④ 350 ⑤ 182

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

19 [공통]수열 $\{a_n\}$은 처음 6개 항 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$이 서로 다르고 $a_{n+6}=a_n (n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킨다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{b_n\}$중 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$의 값이 모두 나타나는 것은?

① $b_n=a_{2n+1}$ ② $b_n=a_{3n+1}$
③ $b_n=a_{4n+1}$ ④ $b_n=a_{5n+1}$
⑤ $b_n=a_{6n+1}$

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

20 [공통]수열 $\{a_n\}$이

$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n (n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킨다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [1998 학년도 대수능]

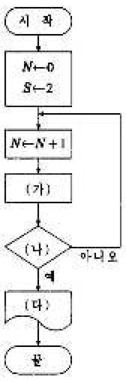
21 [공통]2525년 여름쯤 2526년 1월의 계획을 세우려고 하는데,
그해(2525년) 1월부터 12월까지의 달력은 있으나
새해(2526년) 1월의 달력이 없다. 이때 2526년 1월의 달력과
요일 및 날짜가 같게 구성된 달을 2525년의 달력 중에서 찾으면?

① 3월　② 5월　③ 7월
④ 8월　⑤ 없다

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

22 [공통]아래 순서도는 부등식 $2^{n+1} < 9n^4$이 성립하지 않는 가장 작은 자연수 n를 찾기 위해 작성하였다.

아래 순서도에 서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?



① $S \leftarrow S+2$, $S \geq 9N^4$, $N+1$을 인쇄
② $S \leftarrow S \times 2$, $S < 9N^4$, N을 인쇄
③ $S \leftarrow S \times 2$, $S < 9N^4$, $N+1$을 인쇄
④ $S \leftarrow S \times 2$, $S \geq 9N^4$, N을 인쇄
⑤ $S \leftarrow S \times 2$, $S \geq 9N^4$, $N+1$을 인쇄

[난이도 : ★★★] [1998 학년도 대수능]

23 [공통]어느 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a, b, c로 바뀐다.

이때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

규칙1:에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 c상태로 올라간다. 규칙2:에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로 나머지는 a상태로 내려간다.

에서 전자는 a상태에 있다.

에너지가 증가하여가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다.

이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경 로는 $a \to b$와 $a \to c$의 2가지이다.

다시 에너지가 감소하여 이 되면, 이때까지의 가능한 변화 경로는 $a \to b \to a$, $a \to c \to b$, $a \to c \to a$의 3가지이다.

이와 같이 에너지의 증가와 감소가 교대로 계속될 때부터까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는 ?

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

24 [공통]다음은 제품 p_n 을 만드는 방법과 소요시간에 대한 설명이다.

(단, $n=2^k$, $k=0, 1, 2, 3, \cdots$)

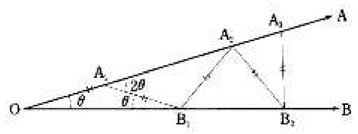
> (가) 제품 p_1 을 하나 만드는 데 걸리는 시간은 1 이다.
> (나) 제품 p_1 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_2 가 한 개 만들어진다.
> (다) 제품 p_n 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_{2n} 이 한 개 만들어진다.
> 이때, 제품 p_n 을 두 개 연결하는데 걸리는 시간은 $2n$ 이다.

이때, 제품 p_{16} 을 한 개 만드는데 걸리는 시간은?

① 32 ② 64 ③ 80
④ 96 ⑤ 112

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

25 아래 그림과 같이 반직선 OA 위에 $A_1, A_2, \cdots$ 와 반직선 OB 위에 $B_1, B_2, \cdots$ 를 $\overline{OA_1}=\overline{A_1B_1}=\overline{B_1A_2}=\cdots$ 이 되도록 정한다. 이런 방법으로 하면 네 개의 이등변삼각형 $\triangle OA_1B_1$, $\triangle A_1B_1A_2$, $\triangle B_1A_2B_2$, $\triangle A_2B_2A_3$ 을 만들 수 있고, 다섯 번째 이등변 삼각형은 만들 수 없다. $\angle AOB$의 크기를 θ 라 할 때, θ 의 범위는?



① $\frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{7}\le\theta<\frac{\pi}{5}$
③ $\frac{\pi}{10}\le\theta<\frac{\pi}{8}$ ④ $\frac{\pi}{14}\le\theta<\frac{\pi}{12}$
⑤ $\frac{\pi}{17}\le\theta<\frac{\pi}{15}$

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

26 첫째항이 a 인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+(-1)^n\times 2, & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ a_n+1, & (n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=43$ 일 때, a 의 값은? [4점]

① 35 ② 36 ③ 37
④ 38 ⑤ 39

[난이도 : ★★★] [2015년 06월 모의평가]

27 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1}=(2^n-1)(S_n+1)(n\ge1)\ \cdots\cdots\ (*)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

> 식 (*)의 양변에 S_n 을 더하여 정리하면
> $S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$
> 이다. $b_n=\log_2(S_n+1)$ 이라 하면 $b_1=1$ 이고
> $b_{n+1}=(\text{가})+b_n$
> 이다. 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구하면
> $b_n=\frac{n^2-n+2}{2}\ (n\ge1)$
> 이므로
> $S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\ (n\ge1)$
> 이다. 그러므로 $a_1=1$ 이고 $n\ge2$ 일 때,
> $a_n=S_n-S_{n-1}$
> $=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{(\text{나})}$
> 이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $f(12)-g(5)$ 의 값은? [4점][2015년 6월 평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

28 (공통)모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고

$$(a_{n+1})^{n+1}=\frac{a_1+(a_2)^2+(a_3)^3+\cdots+(a_n)^n}{n}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> $b_n=(a_n)^n$이라 하면 $b_1=10$이고 주어진 식으로부터
> $b_{n+1}=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\ (n\geq 1)$
> 이다. $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$라 하면
> $S_{n+1}=$ [(가)] $\times S_n$
> 이다.
> $S_1=10$,
> $S_n=S_1\times\dfrac{S_2}{S_1}\times\dfrac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\ (n\geq 2)$
> 0를 이용하여 S_n을 구하면
> $S_n=$ [(나)]$(n\geq 1)$
> 이다.
> ⋮

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5)\times g(6)$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80
④ 84 ⑤ 88

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

29 (공통)첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}S_k\,(n\geq 1)\cdots\cdots(\cdot)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식 $(\cdot)$에 의하여
> $\dfrac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\,(n\geq 2)$...㉠
> 이다. $(\cdot)$에서 ㉠을 빼서 정리하면
> $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{(가)}{n}\,(n\geq 2)$
> 이다. ㉠으로부터 $S_2=2$이고,
> $S_n=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\times\dfrac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{S_3}{S_2}\times S_2\,(n\geq 3)$
> 이므로
> $S_n=n!\times(나)\,(n\geq 3)$
> 이다. 그러므로 a_n은
> $a_n=\begin{cases}1, & (n=1,\ 2)\\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)!, & (n\geq 3)\end{cases}$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(4)\times g(20)$의 값은? [4점]

① 225 ② 250 ③ 275
④ 300 ⑤ 325

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

30 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고,

$$2a_{n+1}=3a_n-\frac{6n+2}{(n+1)!}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$2a_{n+1}=3a_n-\frac{6(n+1)-4}{(n+1)!}$$

이다.

$$2a_{n+1}-\frac{4}{(n+1)!}=3a_n-3\times[(가)]$$

이므로, $b_n=a_n-$[(가)]라 하면

$$2b_{n+1}=3b_n$$

이다. $b_{n+1}=\frac{3}{2}b_n$이고 $b_1=1$이므로

$b_n=$[(나)]

이다. 그러므로 $a_n=$[(가)]+[(나)]이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(3)\times g(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

31 자연수 n에 대하여 순서쌍 $(x_n,\ y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$
(나) n이 홀수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1})=\left(x_n,\ (y_n-3)^2\right)$이고,
n이 짝수이면 $(x_{n+1},\ y_{n+1})=\left((x_n-3)^2,\ y_n\right)$이다.

순서쌍 $(x_{2015},\ y_{2015})$에서 $x_{2015}+y_{2015}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 모의평가]

32 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=2$이고,

$$a_{n+3}-a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면
$b_1=b_2=1,\ b_{n+2}=b_n+1\ (n\geq 1)$이므로
두 수열 $\{b_{2n-1}\},\ \{b_{2n}\}$은 모두 첫째항이 1이고,
공차가 1인 등차수열이다.
즉, $b_{2n-1}=b_{2n}=$[(가)]$(n\geq 1)$이다.
그러므로 $n\geq 2$일 때, a_n은 다음과 같다.
(i) n이 홀수일 때, $n=2m-1$이라 하면

$$a_{2m-1}=a_1+\sum_{k=1}^{2(m-1)}b_k$$

$$a_1+\sum_{k=1}^{m-1}\left(b_{2k-1}+b_{2k}\right)$$

$$m^2-m$$

(ii) n이 짝수일 때, $n=2m$이라 하면

$$a_{2m}=a_1+\sum_{k=1}^{2m-1}b_k$$

=[(나)]

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(m)$이라 할 때, $f(10)+g(10)$의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

33 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고,

$n^2a_{n+1}=(n^2-1)a_n+n(n+1)2^n\,(n\geq 1)$을 만족시킨다.

다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+n+\dfrac{1}{n}2^n$
>
> 이다. $b_n=n-\dfrac{1}{n}a_n$이라 하면
>
> $b_{n+1}=b_n+$ [(가)] $(n\geq 1)$이고, $b_1=0$이므로
>
> $b_n=$ [(나)] $(n\geq 1)$이다. 그러므로
>
> $a_n=\begin{cases}2, & (n=1)\\ \dfrac{n}{n-1}\times((나)), & (n\geq 2)\end{cases}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때,

$f(5)+g(10)$의 값은? [3점]

① 1014 ② 1024 ③ 1034
④ 1044 ⑤ 1054

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

34 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$a_{n+1}=\dfrac{S_n}{a_n}\,(n\geq 1)$

을 만족시킨다. 다음은 S_n을 구하는 과정이다.

> [보기]
>
> 주어진 식으로부터 $a_2=\dfrac{S_1}{a_1}=1$이다.
>
> $n\geq 3$일 때, $a_n=\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{S_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-1}}{a_{n-1}}$
>
> 이므로 $a_n=a_{n-2}+1$이다.
>
> 따라서 일반항 a_n을 구하면, 자연수 k에 대하여 $n=2k-1$일 때, $a_{2k-1}=k+1$
>
> $n=2k$일 때, $a_{2k}=$ [(A)]이다.
>
> 한편, $S_n=a_na_{n+1}$이므로
>
> $S_n=\{(k+1)\times[(A]$, $(n=2k-1$이다.

위의 (A), (B)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때,
$f(6)+g(7)$의 값은?[4점][2012년 6월]

① 65 ② 67 ③ 69
④ 71 ⑤ 73

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

35 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(x_n, y_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $x_1 = y_1 = 1$
(나) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ y_{n+1} = y_n + (-1)^2(n+1) \end{cases} (n \geq 1)$

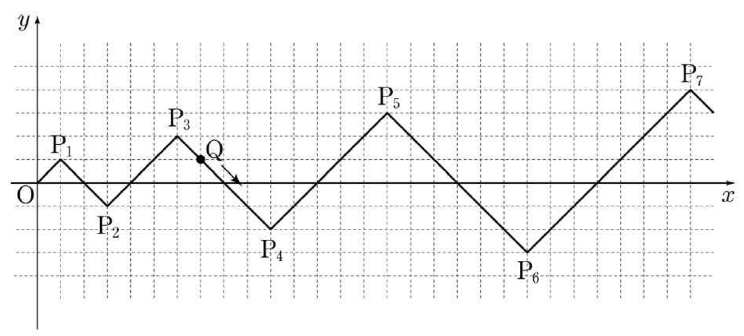
점 Q는 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}$을 따라 점 P_1에 도착한다.

자연수 n에 대하여 점 P_n에 도착한 점 Q는 점 P_{n+1}을 향하여 $\overline{P_nP_{n+1}}$을 따라 이동한다.

점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동한다.

예를 들어, 원점에서 출발하여 7번 이동한 점 Q의 좌표는 $(7, 1)$이다.

원점에서 출발하여 55번 이동한 점 Q의 y좌표는? [4점]



① -5　② -6　③ -7
④ -8　⑤ -9

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

36 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2} = a_n - 4\,(a = 1, 2, 3, 4)$
(나)모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 이다.

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 258$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

37 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 2$이고,
$n^2 a_{n+1} = (n^2 - 1)a_n + n(n+1)2^n\ (n \geq 1)$을 만족시킨다.

다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여 $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n + n + \frac{1}{n}2^n$이다.
$b_n = n - \frac{1}{n}a_n$이라 하면
$b_{n+1} = b_n + (\text{가})\ (n \geq 1)$
이고, $b_1 = 0$이므로
$b_n = (\text{나})\ (n \geq 1)$이다.
그러므로
$a_n = \begin{cases} 2, & (n = 1) \\ \frac{n}{n-1} \times ((\text{나})), & (n \geq 2) \end{cases}$이다.

위의(가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5) + g(10)$의 값은? [4점]

① 1014　② 1024　③ 1034
④ 1044　⑤ 1054

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

38 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k(n\geq 1)$을 만족시킨다.

다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식으로부터 $a_2=$ (가)이다. 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+1}2^{n+1-k}a_k$ $\sum_{k=1}^{n}2^{n+1-k}a_k+a_{n+1}$ =(나) $\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k+a_{n+1}$ =(다) a_{n+1}이다. 따라서 $a_1=1$이고, $n\geq 2$일 때 $a_n=[(다)]^{n-2}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?[3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

39 [공통]두 원소 A, B가 들어있는 기체 K가 기체확산장치를 통과하면

A, B의 농도가 변한다. 기체확산장치를 통과하기 전 기체 K에 들어있는 A, B의 농도를 각각 a_0, b_0이라 하고, 기체확산장치를 n번 통과한 기체에 들어있는 A, B의 농도를 각각 a_n, b_n이라 하자.

$c_0=\frac{a_0}{b_0}, c_n=\frac{a_n}{b_n}$이라 하면 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$c_n=1.004\times c_{n-1}$

$c_0=\frac{1}{99}$일 때, 기체 K가 기체확산장치를 n번 통과하면

$c_n\geq\frac{1}{9}$이 된다.

자연수 n의 최솟값은?(단, $\log 1.1=0.0414$, $\log 1.004=0.0017$로 계산한다.)

[3점][2011년 6월 평가원]

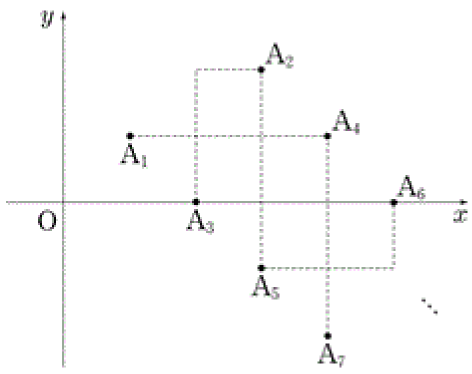
① 593 ② 613 ③ 633
④ 653 ⑤ 673

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

40 [공통]자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가)점 A_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. (나) n이 짝수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다. (다) n이 3이상의 홀수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_k의 좌표가 $(7,\ -2)$이고 점 A_l의 좌표가 $(9,\ -7)$일 때, $k+l$의 값은?



[4점][2011년 6월 평가원]

① 27　② 29　③ 31
④ 33　⑤ 35

[난이도 : ★★★] [2011년 09월 모의평가]

41 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}(n\geq 1)$을 만족시킨다.

다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

모든 자연수 n에 대하여 $4a_{n+1}-1=4\times\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\dfrac{1}{4a_n-1}$이다. 수열 $\{b_n\}$을 $b_1=1,\ b_{n+1}=(4a_n-1)b_n\,(n\geq 1)\cdots\cdots(*)$이라 하면, ⋮ $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$이다. 즉, $\{b_n\}$은 등차수열이므로 $(*)$에 의하여 $b_n=$ [(가)]이고, $a_n=$ [(나)]이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n),\ g(n)$이라 할 때, $f(14)\times g(5)$의 값은?[4점][2011년 9월 평가원]

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

[난이도 : ★★★] [2011년 09월 모의평가]

42 [공통]자연수 n에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.

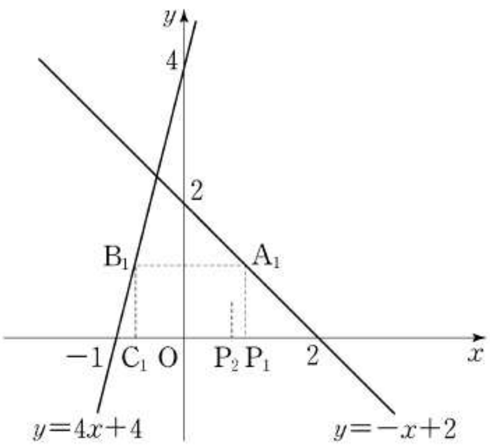
(가)정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n,\ 2^n)$이다. (나)정사각형과 그 내부에 있는 점 $(x,\ y)$중에서 x가 자연수이고, $y=2^x$을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1=12$이다. $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값을 구하시오.[4점][2011년 9월 평가원]

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

43 자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> ㈎점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)\,(0<a_1<2)$이다.
> ㈏(1)점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
> (2)점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=4x+4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
> (3)점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다.
> (4)점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다.



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점]

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

44 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k\,(n\geq 2)$를 만족시킨다. 다음은 일반항 $\{a_n\}$을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2=7$이다. 자연수 $n(n\geq 3)$에 대하여
> $a_n=n^2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k\,(n\geq 2)$
> $=n^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k+(2n-1)a_{n-1}$
> $=n^2+a_{n-1}-[㈎]+(2n-1)a_{n-1}$
> 이므로 $a_n+1=2n(a_{n-1}+1)$이 성립한다. 따라서
> $a_n+1=n\times(n-1)\times\cdots\times 3\times[㈏]\{\times(a)_2+1)$
> $=4\times n!\times[㈏]$ 이다.

위의 ㈎에 알맞은 식을 $f(n)$, ㈏에 알맞은 식을 $g(n)$할 때, $f(9)\times g(9)$의 값은?[4점]

① 2^{13}　② 2^{14}　③ 2^{15}
④ 2^{16}　⑤ 2^{17}

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

45 [공통]수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\alpha\,(\alpha\neq 0)$이고, 모든 $n\,(n\geq 2)$에 대하여 $(n-1)a_n+\sum_{m=1}^{n-1}ma_m=0$을 만족시킨다.

다음은 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha\,(n\geq 1)$임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때, $a_1=\alpha=\dfrac{(-1)^{1-1}}{(1-1)!}\alpha$이다.
>
> (2) i) $n=2$일 때, $a_2+a_1=0$이므로 $a_2=-a_1=\dfrac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!}\alpha$이다.
> 따라서 주어진 식이 성립한다.
> ii) $n=k\,(k\geq 2)$일 때 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
>
> $0=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k}ma_m$
>
> $=ka_{k+1}+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m+ka_k$
>
> $=ka_{k+1}+$[(가)]$\times a_k+ka_k$이므로
>
> $=a_{k+1}=$[(나)]$\times a_k=\dfrac{(-1)^k}{k!}\alpha$이다.
>
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식의 곱을 $f(k)$라 할 때, $f(10)$의 값은?[4점]

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{3}{10}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{7}{10}$ ⑤ $\dfrac{9}{10}$

[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

46 수열 $\{a_n\}$에서 a_1이고, 자연수 n에 대하여

$a_na_{n+1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?[4점]

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

47 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!} < \dfrac{2}{n+1}$ 가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> 자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(n+1)!}$ 이라 할 때,
>
> $a_n < \dfrac{2}{n+1}$ 임을 보이면 된다.
>
> (1) $n=1$일 때, $a_1 = \dfrac{1!}{2!} = \dfrac{1}{2} < 1$이므로 주어진 부등식은 성립한다.
>
> (2) $n=k$일 때, $a_k < \dfrac{2}{k+1}$ 라고 가정하면 $n=k+1$일 때,
>
> $a_{k+1} = \dfrac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$
>
> $=$[(가)]$\{(1+a_k)\} <$ [(가)]$\left(1+\dfrac{2}{k+1}\right)$
>
> $= \dfrac{1}{k+2} +$ [(나)] 이다.
>
> 자연수 k에 대하여 $\dfrac{2}{k+1} \le 1$이므로
>
> [(나)] $\le \dfrac{1}{k+2}$ 이고 $a_{k+1} < \dfrac{2}{k+2}$ 이다.
>
> 따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.
> 그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?[3점]

① $\dfrac{1}{k+2}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

② $\dfrac{1}{k+2}$, $\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$

③ $\dfrac{1}{k+1}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

④ $\dfrac{1}{k+1}$, $\dfrac{2}{(k+1)(k+2)}$

⑤ $\dfrac{1}{k+1}$, $\dfrac{2}{(k+1)^2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

48 [공통]다음은 19세기 초 조선의 유학자 홍길주가 소개한 제곱근을 구하는 계산법의 일부를 재구성한 것이다.

> 1보다 큰 자연수 p에서 1을 뺀 수를 p_1이라 한다.
> p_1이 2보다 크면 p_1에서 2를 뺀 수를 p_2라 한다.
> p_2가 3보다 크면 p_2에서 3을 뺀 수를 p_3이라 한다.
> ⋮
> p_{k-1}이 k보다 크면 p_{k-1}에서 k를 뺀 수를 p_k라 한다.
> 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 수 p_n이 $(n+1)$보다 작으면 이 과정을 멈춘다.
> 이때, $2p_n$이 $(n+1)$과 같으면 p는[(가)]이다.

(가)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?[4점]

① $n+1$

② $\dfrac{(n+1)^2}{2}$

③ $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

④ 2^{n+1}

⑤ $(n+1)!$

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

49 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

(단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.)

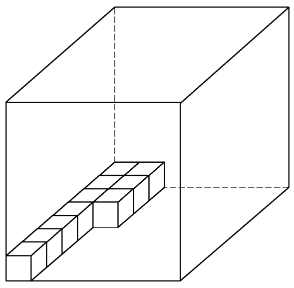
$a_1 = 1,\ a_2 = 3$

$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4\,(n=2, 3, 4, \cdots)$일 때, a_{20}의 값은?[3점]

① 39 ② 43 ③ 47
④ 51 ⑤ 55

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

50 [공통]한 변의 길이가 $70cm$인 정육면체 모양의 상자에 한 변의 길이가 $10cm$인 정육면체 모양의 나무 블록을 다음 규칙에 따라 빈틈없이 가득 채우려고 한다.



n번째에 넣는 나무 블록의 개수를 a_n이라 할 때, ㈎ $a_1=10$ ㈏ $a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]+3,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.) ㈐상자를 가득 채우면 나무 블록 넣기를 멈춘다.

k번째에 상자를 가득 채웠다고 할 때, k의 값을 구하시오.(단, 상자의 두께는 무시한다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

51 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\begin{cases} a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}, & \cdots① \\ b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}, & \cdots② \end{cases}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킬 때 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_1=b_1$일 때, $a_n=b_n$ ㄴ. $a_1=0$, $b_1=1$일 때, $a_{n+1}>a_n$ ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

52 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ 이

성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변) $=1$, (우변) $=1$이므로 주어진 식은 성립한다. (ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $1k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k1$ $=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. $1(k+1)+2k+3(k-1)+\cdots+(k+1)1$ $=1k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k1$ $+(1+2+3+\cdots+k)+$ ㈎ $=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+$ ㈏ $=$㈐ 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[4점]

① k, $\dfrac{k(k+1)}{2}$, $\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

② k, $\dfrac{k(k+3)}{2}$, $\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

③ k, $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$

④ $k+1$, $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

⑤ $k+1$, $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$

[난이도 : ★★★] [2005년 06월 모의평가]

53 [공통]한 변의 길이가 1 인 정삼각형 ABC가 있다. 양수 r에 대하여 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1은 꼭짓점 A이다.
(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n에서 정삼각형 ABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 r^n 만큼 이동한 점이다.

집합 S를 $S=\{P_n \mid n$은 자연수$\}$라 할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

[보 기]
ㄱ. $r=2$이면, 점 P_3은 꼭짓점 C이다.
ㄴ. $r=\frac{4}{5}$이면, 변 CA 위에 S의 원소가 무수히 많다.
ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$이면, 변 AB 위에 S의 원소가 무수히 많다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004년 6월 모의평가]

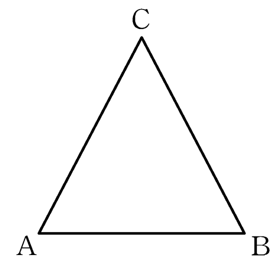
54 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{2n-1}=2^n$이고 $a_{2n}=5^n$일 때, $\sum_{n=1}^{10}\log a_n$의 값을 구하여라.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

55 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{2n-1}=2^n$ 이고 $a_{2n}=5^n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10}\log a_n$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

56 [공통]한 변의 길이가 1 인 정삼각형 ABC가 있다. 양수 r에 대하여 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.



㈎점 P_1은 꼭짓점 A이다.
㈏점 P_{n+1}은 점 P_n에서 정삼각형 ABC의 변을 따라 시계 반대 방향으로 r^n 만큼 이동한 점이다.

집합 S를 $S=\{P_n \mid n$은 자연수 $\}$라 할 때 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $r=2$이면, 점 P_3은 꼭짓점 C이다.
ㄴ. $r=\frac{4}{5}$이면, 변 CA위에 S의 원소가 무수히 많다.
ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$이면, 변 AB위에 S의 원소가 무수히 많다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

57 모든 자연수 n에 대하여

$$1n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-1)2+n1=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]
(i) $n=1$일 때, (좌변) $=1$, (우변) $=1$이므로 주어진 식은 성립한다. (ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $1k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k1$ $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$ 이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. $1(k+1)+2k+3(k-1)+\cdots+(k+1)1$ $1k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k1$ $+(1+2+3+\cdots+k)+$ (가) $=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+$ (나) =(다) 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[4점]

① k , $\frac{k(k+1)}{2}$, $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

② k , $\frac{k(k+3)}{2}$, $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

③ k , $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

④ $k+1$, $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

⑤ $k+1$, $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

58 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\begin{cases} a_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2} \\ b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2} \end{cases}$,

$(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킬 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_1=b_1$일 때, $a_n=b_n$ ㄴ. $a_1=0$, $b_1=1$일 때, $a_{n+1}>a_n$ ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

59 첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2-a_n & (a_n \ge 0) \\ a_n+p & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

60 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2n+1-2k)^2=\frac{n^2(2n^2+1)}{3}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변) $=1$, (우변) $=1$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, 등식 $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$

$=\frac{m^2(2m^2+1)}{3}$ 이 성립한다고 가정하자.

$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+(가)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$$

$$+[(나)]\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)+[(가)]$$

$$=\frac{(m+1)^2\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$ 이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(3)+p$의 값은? [4점]

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

61 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ ……(*)이 성립함을

수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변) $=(-1)^2\times1^2=1$

(우변) $=(-1)^2\times\frac{1\times2}{2}=1$

따라서 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+(가)$$

$$=(나)+(가)$$

$$=(-1)^{m+2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (*)이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{f(5)}{g(2)}$의 값은? [4점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

62 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=1$, $a_2=2$

(나) a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지($n\ge3$)

$\sum_{k=1}^{m}a_k=166$일 때, m의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

63 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}-2a_n, & (n\text{이 홀수}) \\ 6a_{n+1}-a_n, & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에서 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{2n+1}=a_{2n}-2a_{2n-1}$ …㉠
> $a_{2n+2}=6a_{2n+1}-a_{2n}$ …㉡
> $a_{2n+3}=a_{2n+2}-2a_{2n+1}$ …㉢
> 이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 정리하면
> $a_{2n+3}-a_{2n+1}=2(a_{2n+1}-a_{2n-1})$
> 이고, ㉠에서 $n=1$일 때 $a_3=3$이므로
> $a_{2n+1}-a_{2n-1}=$ [(가)]$(n\ge 1)$
> 이다. 따라서
> $a_{2n-1}=$ [(나)]$(n\ge 1)$
> 이고, ㉠으로부터
> $a_{2n}=a_{2n+1}+2a_{2n-1}$
> 이므로
> $a_{2n}=$ [(다)]$(n\ge 1)$
> 이다. 그러므로 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{2n-1}=$ [(나)], $a_{2n}=$ [(다)]
> 이다.

위의(가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 식을 $h(n)$이라 할 때, $\dfrac{f(5)g(10)}{h(10)-1}$의 값은? [4점]

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

64 (공통)수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$2S_n=3a_n-4n+3\ (n\ge 1)$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $2S_n=3a_n-4n+3$ …㉠
> 에서 $n=1$일 때, $2S_1=3a_1-1$이므로 $a_1=1$이다.
> $2S_{n+1}=3a_{n+1}-4(n+1)+3$ …㉡
> ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터
> $a_{n+1}=3a_n+$ [(가)]
> 이다. 수열 $\{a_n+2\}$가 등비수열이므로
> 일반항 a_n을 구하면
> $a_n=$ [(나)]$(n\ge 1)$
> 이다.

위의(가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(5)$의 값은? [4점]

① 225 ② 230 ③ 235
④ 240 ⑤ 245

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

65 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$, $a_2=0$이고,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-n^2a_n=0\,(n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> $n=2m-1$(m은 자연수)일 때,
> 주어진 식을 정리하면
> $$\frac{a_{n+2}}{a}n=\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$
> 이므로
> $$\frac{a_3}{a}1=\frac{1^2}{2\times 3}$$
> $$\frac{a_5}{a}3=\frac{3^2}{4\times 5}$$
> $\vdots$
> $$\frac{a_{2m+1}}{a}2m-1=[(가)]$$
> 이다. 좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면
> $$a_{2m+1}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2m-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2m}\times\boxed{(나)}$$
> $$=\frac{{}_{2m}\mathrm{C}_m}{4^m}\times\boxed{(나)}$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(5)\times g(4)$의 값은? [4점]

① $\frac{7}{110}$ ② $\frac{4}{55}$ ③ $\frac{9}{110}$

④ $\frac{1}{11}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

66 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

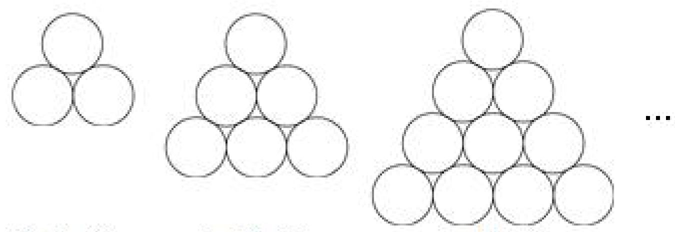
> (가) $a_1=1$, $a_2=2$
> (나) a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지 $(n\geq 3)$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=166$일 때, m의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

67 다음 [단계]에 따라 반지름의 길이가 같은 원들을 외접하도록 그린다.

> [단계 1] 3개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 1 > 을 얻는다.
> [단계 2] < 그림 1 > 의 아래에 3개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 2 > 를 얻는다.
> [단계 3] < 그림 2 > 의 아래에 4개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 3 > 을 얻는다.
> $\vdots$
> [단계 m] < 그림 $m-1$ > 의 아래에 $(m+1)$개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 m > 을 얻는다.$(m\geq 2)$



<그림 1> <그림 2> <그림 3> …

< 그림 n > 에 그려진 원의 모든 접점의 개수를 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. 예를 들어, $a_1=3$, $a_2=9$이다.

a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

68 (공통)모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고

$(n+1)a_n=a_{n+1}(3n-2a_n)$ $(n\geq 1)$을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면
$\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{3n-2a_n}{a_n}$
이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면
$b_{n+1}=3b_n+$ [(가)]
이고, $b_{n+1}-1=3(b_n-1)$이다.
$b_1=4$이므로 $b_n-1=$ [(나)]
$b_n=$ [(나)] $+1$
이다. 그러므로
$a_n=\frac{n}{\boxed{(나)}+1}$ $(n\geq 1)$
이다.

위의 (가)에 알맞은 값을 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(3)$의 값은? [4점]

① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

69 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$2S_n=3a_n-4n+3$ $(n\geq 1)$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$2S_n=3a_n-4n+3$ ⋯ ㉠
㉠에서 $n=1$일 때, $2S_1=3a_1-1$이므로 $a_1=1$이다.
$2S_{n+1}=3a_{n+1}-4(n+1)+3$ ⋯ ㉡
㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터
$a_{n+1}=3a_n+$ [(가)]
이다. 수열 $\{a_n+2\}$가 등비수열이므로 일반항 a_n을 구하면
$a_n=$ [(나)] $(n\geq 1)$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(5)$의 값은? [4점]

① 225 ② 230 ③ 235
④ 240 ⑤ 245

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

70 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$이고,

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & (a_n\text{은 짝수})\\ \frac{a_n+93}{2}, & (a_n\text{은 홀수})\end{cases}$$

가 성립한다. $a_k=3$을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

71 (공통)수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n a_{n+1}}{n+1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로
> $\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n a_{n+1}}{n+1}$
> 을 변형하면
> $\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}=$ [(가)]
> 이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면 $b_1=\frac{1}{2}$이고
> $b_{n+1}-b_n=$ [(가)]$(n\geq 1)$
> 이므로
> $a_n=$ [(나)]
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(13)g(4)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

72 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가)점 A_1의 좌표는 $(0,\ 0)$이다.
> (나)n이 짝수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 y축의 방향으로 $(-1)^{\frac{n}{2}}\times(n+1)$만큼 평행이동한 점이다.
> (다)n이 3이상의 홀수이면 점 A_n은 점 A_{n-1}을 x축의 방향으로 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\times n$만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_{30}의 좌표를 $(p,\ q)$라 할 때, $p+q$의 값은? [4점]

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

73 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{20}a_n=p$라 할 때, 등식

$$2a_n+n=p\ (n\geq 1)$$

가 성립한다. a_{10}의 값은?(단, p는 상수이다.)[4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$
④ $\frac{11}{12}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

74 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고,

$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{2a_n}{n+1}+\frac{2^{n+1}}{n+1}$ $(n\geq 1)$을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
> $$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$
> 이다. $b_n=\frac{n}{2^n}a_n$이라 하면
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}\ (n\geq 1)$$
> 이고 $b_1=\boxed{(나)}$이므로
> $$b_n=\boxed{(다)}\ (n\geq 1)$$
> 이다. 그러므로
> $$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{(다)}\ (n\geq 1)$$
> 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+g(p)$의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

75 (공통)수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고,

$$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{2a_n}{n+1}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
> $$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$
> 이다. $b_n=\frac{n}{2^n}a_n$이라 하면
> $$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}\ (n\geq 1)$$
> 이고 $b_1=\boxed{(나)}$이므로
> $$b_n=\boxed{(다)}\ (n\geq 1)$$
> 이다. 그러므로
> $$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{(다)}\ (n\geq 1)$$
> 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+g(p)$의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

[난이도 : ★★☆]

76 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 $\{P\}_n$, $\{Q\}_n$을 다음 규칙대로 잡는다.

> (가)점 P_1의 좌표는 $(0, 0)$이다.
> (나)점 $\{P\}_n$을 x축의 방향으로 n만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점은 $\{Q\}_n$이다.
> (다)점 $\{Q\}_n$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 점은 $\{P\}_{n+1}$이다.

점 $\{Q\}_n$의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $a_{21}+b_{21}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

77 [공통] 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=2a_n+1$

을 만족시킬 때, $\log_4(a_{20}+1)$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

78 [공통] 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n}=1+a_n,\ a_{2n+1}=\dfrac{1}{a_{2n}}$

을 만족시킨다. $a_k=\dfrac{1}{7}$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오.
[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

79 [공통] 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1,\ a_2=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $(n+1)a_{n+2}+5a_n=(n+5)a_{n+1}$을 만족시킨다.

다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $(n+1)a_{n+2}-5a_{n+1}=na_{n+1}-5a_n$이다.
> $n\ge 2$에 대하여 $na_{n+1}-5a_n=(n-1)a_n-5a_{n-1}$이고,
> $a_1=1,\ a_2=5$이므로
> $a_{n+1}=[(A)]\,a_n\,(n\ge 1)\cdots$ ㉠ 이다.
> $CL21$의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 차례로 대입하여 얻어진 $(n-1)$개의 등식을 변끼리 곱하여 정리하면,
> $a_n=\dfrac{5^{n-1}}{[(B)]}\,(n\ge 2)$이고, $a_1=1$이므로
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=\dfrac{5^{n-1}}{[(B)]}$이다.

위의 (A)에 알맞은 식을 $f(n)$, (B)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(20)\times g(7)$의 값은? [4점]

① 180 ② 190 ③ 200
④ 210 ⑤ 220

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

80 [공통]수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1,\ a_2=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n+2}-a_{2n}=1$
> (나) $a_{2n+1}-a_{2n-1}=0$

$a_{100}+a_{101}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 4월 학력평가]

81 [공통] 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ 을 만족시킬 때, $100a_{10}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

82 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}-a_n=2^{n-5}+n$을 만족시킬 때, $a_{10}-a_7$의 값은?[3점]

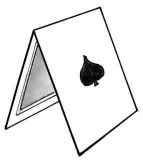
① 40 ② 44
③ 48 ④ 52
⑤ 56

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

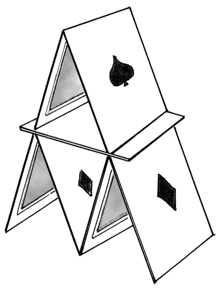
83 [공통]다음은 n층 카드탑에 대한 설명이다.

Ⅰ. 1층 카드탑:두 장의 카드를 맞대어 세운 것.
Ⅱ. 2층 카드탑:1층 카드탑 두 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 한 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 1층 카드탑을 쌓은 것.
Ⅲ. 3층 카드탑:1층 카드탑 세 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 두 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 2층 카드탑을 쌓은 것.
Ⅳ. n층 카드탑:1층 카드탑 n개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 $(n-1)$장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 $(n-1)$층 카드탑을 쌓은 것.

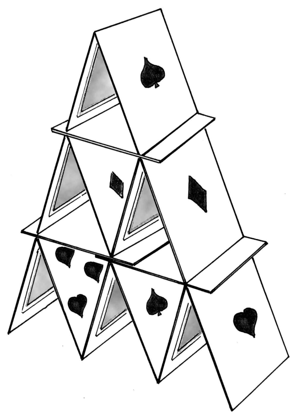
1층 카드탑



2층 카드탑



3층 카드탑



n층 카드탑을 만드는데 필요한 카드의 개수를 a_n이라 할 때, a_{20}의 값을 구하시오.[3점][2012년 7월]

[난이도 : ★★★] [2012년 4월 학력평가]

84 [공통]모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}=S_n\,(n\ge 1)$이 성립한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

> 주어진 식에 $n=1$을 대입하면
> $S_1>0$이므로 $a_1=$ [(가)] 이다.
> $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6S_k}{a_k+3}=\frac{6S_n}{a_n+3}\,(n\ge 2)$이고 $a_1=\frac{6S_1}{a_1+3}$
> 이므로
> [(나)] $\cdot\, S_n=a_n^2+$ [(가)] $\cdot\, a_n\,(n\ge 1)$이다.
> 한편, $6(S_{n+1}-S_n)=a_{n+1}^2+3a_{n+1}-\left(a_n^2+3a_n\right)$이므로
> $6a_{n+1}=a_{n+1}^2-a_n^2+3a_{n+1}-3a_n$
> ⋮
> 따라서 $a_n=$ [(다)]

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+f(10)$의 값은?[4점]

① 36 ② 39 ③ 42
④ 45 ⑤ 48

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

85 [공통] 다음은 어느 포털 사이트에 게시된 질문과 답변이다.

> 질문 a_{20}의 값을 구하는 데 어디가 틀렸을까요?
>
> 저는 고등학교 2학년 학생입니다. 궁금한 것이 있어 글을 올립니다. 먼저 [문제]와 저의 [풀이]를 보시고 [질문]에 답해 주세요.
>
> [문제]
> 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고,
> $a_n=a_{n-1}+2n-1\,(n\ge 2)$
> 을 만족시킬 때, a_{20}의 값을 구하시오.
>
> [풀이]
> $n\ge 2$일 때, $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$
> $\therefore\ a_{20}=362$
>
> [질문]
> 저는 잘 푼 것 같은데 정답이 362가 아니라고 합니다.
> 제가 어디가 틀렸을까요?
> 틀린 부분과 정답을 알려주세요.
>
> 답변 좋은 질문입니다. 추천하기
>
> 학생의 [풀이]에서
> $n\ge 2$일 때, $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{\text{(A)}}$
> 로 식을 수정하여 a_{20}의 값을 계산하면
> $a_{20}=\boxed{\text{(B)}}$입니다.

위의 답변이 옳을 때, (A)에 알맞은 식을 $f(k)$, (B)에 알맞은 수를 c라 하자. 이때, $f(10)+c$의 값은? [4점]

① 415 ② 417 ③ 419
④ 421 ⑤ 423

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

86 $a_1=5,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left[\frac{\log\{1\}}{a_n-4}\right]$의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

87 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k}=1-\frac{1}{(n+1)3^n}\cdots$ (★)이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=\sum_{k=1}^{1}\frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k}=$ [(가)] = (우변)이므로(★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k}=1-\frac{1}{(m+1)3^m}$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{2k+3}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{3^k}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}\cdot[(나)]$$
$$=1-\frac{1}{(m+1)(m+2)}\cdot[(다)]+\frac{2m+5}{(m+1)(m+2)3^{m+1}}$$
$$=1-\frac{1}{(m+2)3^{m+1}}$$

그러므로

$n=m+1$일 때도(★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여(★)이 성립한다.

위 증명에서(가)에 알맞은 값을 p라 하고(나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m),\ g(m)$이라 할 때, $p\times f(1)\times g(1)$의 값은?[4점]

① $\frac{23}{54}$ ② $\frac{13}{27}$ ③ $\frac{29}{54}$
④ $\frac{16}{27}$ ⑤ $\frac{35}{54}$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

88 [공통] 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+n+1$

을 만족시킬 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

$n\geq1$일 때, $a_{n+1}=2a_n+n+1\cdots$ ㉠
$a_{n+2}=2a_{n+1}+[(가)]\cdots$ ㉡이고, ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터
$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+1$
을 얻는다. $b_n=a_{n+1}-a_n$이라 하면
$b_{n+1}=2b_n+1$이므로
$b_n=2^{n+1}-1$
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-1)\ (n\geq2)$
$2^{n+1}+$ [(나)]이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n),\ g(n)$이라 할 때, $f(5)-g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

89 [공통]자연수 n에 대하여 다음 시행을 한다.

n이 홀수이면 n에서 1을 빼고, n이 짝수이면 n을 2로 나눈다.

자연수 n이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 a_n이라 정의하자.

예를 들어 $a_7=4,\ a_8=3$이다.

$S_n=\sum_{k=2^n}^{2^n+3}a_k$라 할 때, S_{50}의 값은?(단, $a_1=0$이다.)[4점]

① 200 ② 201 ③ 202
④ 203 ⑤ 204

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

90 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_n a_{n+1}-2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2$을 만족시킬 때, $a_8=pa_5+qa_4$를 만족하는 두 자연수 $p,\ q$에 대하여 p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

91 좌표평면 위에 두 점 $A(4,\ 0),\ B(0,\ -3)$이 있고, 자연수 n에 대하여 점 P_n이 원 C_n : $(x+2)^2+(y-2)^2=\left(\frac{2}{n}\right)^2$ 위를 움직일 때, 다음 [단계]와 같이 수열 $\{a_n\}$을 정한다.

> [1단계]원 C_1위를 움직이는 점 P_1에 대하여 삼각형 ABP_1의 넓이의
> 최댓값과 최솟값의 차를 a_1이라 하자.
> [2단계]원 C_2위를 움직이는 점 P_2에 대하여 삼각형 ABP_2의 넓이의
> 최댓값과 최솟값의 차를 a_2라 하자.
> ⋮
> [n단계]원 C_n위를 움직이는 점 P_n에 대하여 삼각형 ABP_n의 넓이의
> 최댓값과 최솟값의 차를 a_n이라 하자.

이때, $\sum_{n=1}^{19} a_n a_{n+1}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

92 [공통]일반항이 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$인 수열 $\{a_n\}$에서 a_n의 값이 6의 배수인 항들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=1}^{4n} b_k$를 구하는 과정이다.

> $a_{n+12}-a_n=$ [(가)] 이므로 $a_{n+12}-a_n$은 6의 배수이다. …①
> $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{12}$ 중에서 6의 배수인 것은
> $a_3=6,\ a_8=36,\ a_{11}=66,\ a_{12}=78$이므로
> $b_1=a_3,\ b_2=a_8,\ b_3=a_{11},\ b_4=a_{12}$이다. … ②
> ① , ②에서 $b_{4n-3}=a_{12n-9}=6(4n-3)(3n-2)$
> $b_{4n-2}=a_{12n-4}=6(3n-1)(4n-1)$
> $b_{4n-1}=$ [(나)]
> $b_{4n}=6n(12n+1)$
> 따라서 $\sum_{k=1}^{4n} b_k=\sum_{k=1}^{n}$ ([(다)])= []

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n),\ g(n),\ h(k)$라 할 때, $f(1)+g(2)+h(1)$의 값은?[4점]

① 552 ② 558 ③ 564
④ 570 ⑤ 576

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

93 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이

$3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)a_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

을 만족시킬 때, 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 하면
> $3S_n=(n+2)a_n \cdots$ ㉠
> $3S_{n+1}=(n+3)a_{n+1} \cdots$ ㉡이고, ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터
> $\dfrac{a_{n+1}}{n+2}=\dfrac{a_n}{(A)}$이며 양변을 $n+1$로 나누면
> $\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{a_n}{(B)}$이다.
> $b_n=\dfrac{a_n}{(B)}$ 이라 하면 $b_{n+1}=b_n$이므로
> $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1$이다.
> 따라서, $a_n=(C)$이다.

위의 과정에서 (A), (B), (C)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(1)+g(2)+h(3)$의 값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

94 [공통]수열 $\{a_n\}$을 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_n}{n+1}$

으로 정의할 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$이라 놓으면 $a_n=(n+1)b_n$이므로
> $(n+3)b_{n+2}=[(A)]b_{n+1}+b_n$
> $(n+3)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(b_{n+1}-b_n)\cdots$ (★)
> 식(★)에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\,(m\ge 2)$를 대입하면
> $4(b_3-b_2)=-(b_2-b_1)$
> $5(b_4-b_3)=-(b_3-b_2)$
> $\vdots$
> $(m+2)(b_{m+1}-b_m)=-(b_m-b_{m-1})$
> 좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,
> $b_{m+1}-b_m=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{m+2}\right)(b_2-b_1)$
> $b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\,(n\ge 2)$
> 따라서 $a_1=1,\ a_n=(n+1)\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(B)\right)(n\ge 2)$이다.

위의 (A), (B)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$라 할 때, $f(1)g(3)$의 값은? [4점][2012년 7월]

① $\dfrac{1}{240}$ ② $\dfrac{1}{180}$ ③ $\dfrac{1}{40}$ ④ $\dfrac{1}{30}$ ⑤ $\dfrac{1}{24}$

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

95 [공통] 두 이차 정사각행렬 A, B가 $2A+B=E$, $AB=O$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이고 O는 영행렬이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $BA=O$
ㄴ. $(A+2B)^2=A+4B$
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $(A+B)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n A+B$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

96 동전의 앞면과 뒷면은 다음과 같다.

동전 $4n$개(n은 자연수)가 앞면이 보이도록 일렬로 나열되어 있다.

이웃한 동전 한 쌍을 뒤집는 시행을 반복하여과 같이 앞면과 뒷면이 앞면부터 교대로 나열되도록 만들려고 한다.

$4n$개

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=$ (앞면이 보이도록 나열된 $4n$개의 동전을 <그림> 처럼 만드는데 필요한 최소의 시행 횟수)

이다. 예를 들어, 앞면이 보이도록 나열된 4개의 동전을

와 같이 두 번의 시행으로 처럼 만들 수 있으므로 $a_1=2$이다.

$\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

97 [공통] 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n}=1+a_n \\ a_{2n+1}=\dfrac{1}{a_{2n}} \end{cases}$$ 을 만족시킨다.

$a_k=\frac{1}{7}$일 때, 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

98 [공통] 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$ 이고,

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}a_n\ (n\geq 1)$을 만족시킨다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식으로부터 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}$이다.

모든 자연수 m 에 대하여(i) $n=2m$ 일 때

$a_{2m+1}=\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{1}{2m}a_{2m-1}-\frac{1}{2m+1}a_{2m}$ … ㉠이므로

$a_{2m}=\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{3}a_2+\cdots+\frac{1}{2m}a_{2m-1}$ … ㉡이다.

㉠ 에서 ㉡을 뺀 식으로부터 $a_{2m+1}=$ [(가)] $\times a_{2m}$이다.

(ii) $n=2m+1$ 일 때

$a_{2m+2}=\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{3}a_2+\cdots-\frac{1}{2m+1}a_{2m}+\frac{1}{2m+2}a_{2m+1}$ … ㉢

⋮ $a_{2m+2}=$ [(나)] $\times a_{2m+1}$이다.

따라서 $a_{2m+1}=\frac{1}{3}$이고, $a_{2m+2}=\frac{1}{3}\times$ [(나)]이다.

위의(가)에 알맞은 식을 $f(m)$, (나)에 알맞은 식을 $g(m)$ 이라 할 때, $f(9)\times g(9)$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{38}$ ② $\frac{187}{190}$ ③ $\frac{189}{190}$
④ $\frac{191}{190}$ ⑤ $\frac{193}{190}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

99 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k \cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때, (좌변) $=1$, (우변) $=1$이므로 ①이 성립 한다.
(2) $n=m$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}(m+1-k)^2=\sum_{k=1}^{m}k$이다.

$n=m+1$일 때 ①이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}(m+2-k)^2$$
$$=(-1)^0(m+1)^2+(-1)^1m^2+\cdots+(-1)^m\cdot 1^2$$
$$=(m+1)^2+\text{(가)}\cdot\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}(m+1-k)^2$$
$$=(m+1)^2+\text{(나)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}k$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 ①이 성립한다.
따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $a+f(9)$의 값은?[4점]

① -46 ② -44 ③ -42 ④ -40 ⑤ -38

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

100 [공통]다음은 자연수 n에 대하여 등식

$\sum_{i=1}^{2n-1}\{i+(n-1)^2\}=(n-1)^3+n^3 \cdots (*)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(1) $n=1$일 때, $1+0^2=0^3+1^3$이므로(*)이 성립한다.
(2) $n=k$일 때, (*)이 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때(*)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2)=\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\}+\sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1)+[\text{(가)}]=[\text{(나)}]$$

그러므로 $n=k+1$일 때도(*)이 성립한다.
따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여(*)이 성립한다.

위의(가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\dfrac{g(4)}{f(4)}$의 값은?[3점]

① $\frac{23}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{25}{7}$ ④ $\frac{26}{7}$ ⑤ $\frac{27}{7}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

101 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log_2(a_n+1)\log_2(a_{n+1}+1)}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

102 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 첫째항이 모두 1이고

$a_{n+1}=3a_n$, $b_{n+1}=(n+1)b_n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$을 만족시킨다.

수열 $\{c_n\}$을 $c_n=\begin{cases} a_n, & (a_n<b_n) \\ b_n, & (a_n \ge b_n) \end{cases}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{50} 2c_n$의

값은?[4점]

① $3^{50}-20$ ② $3^{50}-19$ ③ $3^{50}-15$
④ $3^{50}-11$ ⑤ $3^{50}-7$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

103 [공통]수열 $\{a_n\}$이 임의의 두 자연수 $i,\,j$에 대하여

$a_{i+j}\le a_i+a_j$을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

부등식 $a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}\ge a_n \cdots (\triangle)$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변) $=a_1=$ (우변)이므로 $(\triangle)$이 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때, $(\triangle)$이 성립한다고 가정하면

$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_k}{k}\ge a_k$이다.

$(k+1)\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_k}{k}\right)$

$=ka_1+(k-1)\dfrac{a_2}{2}+(k-2)\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_k}{k}+$ (가)

$=a_1+\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}\right)+\cdots+\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_k}{k}\right)+$ (가)

$\ge 2(a_1+a_2+\cdots+a_k)=\sum_{i=1}^{k}$ (나) $\ge \sum_{i=1}^{k} a_{k+1}$이므로

$(k+1)\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\right.$ (다) $\left.\right)$이 고

$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\dfrac{a_3}{3}+\cdots+\dfrac{a_{k+1}}{k+1}\ge a_{k+1}$이다.

따라서 $n=k+1$일 때도 $(\triangle)$이 성립한다.
그러므로 모든 자연수 n에 대하여 $(\triangle)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\sum_{i=1}^{k} a_i$, a_i+a_{k+1-i}, $\dfrac{a_{k+1}}{k+2}$

② $\sum_{i=1}^{k} a_{i+1}$, $a_{i+1}+a_{k+1-i}$, $\dfrac{a_{k+1}}{k+2}$

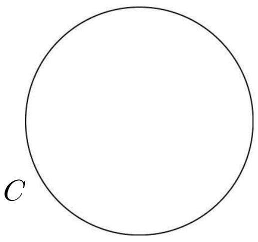
③ $\sum_{i=1}^{k} a_i$, $a_{i+1}+a_{k+1-i}$, $\dfrac{a_{k+1}}{k+1}$

④ $\sum_{i=1}^{k} a_{i+1}$, a_i+a_{k+1-i}, $\dfrac{a_{k+1}}{k+1}$

⑤ $\sum_{i=1}^{k} a_i$, a_i+a_{k+1-i}, $\dfrac{a_{k+1}}{k+1}$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

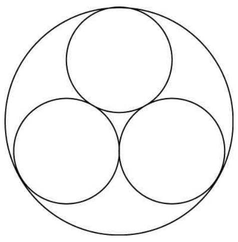
104 주어진 원 C에 다음과 같은 방법으로 도형을 그린다.



원 C

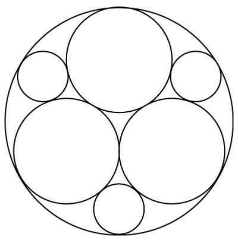
〔1단계〕

아래 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 3개를 각각 서로 외접하면서 원 C에 각각 내접하게 그린다.



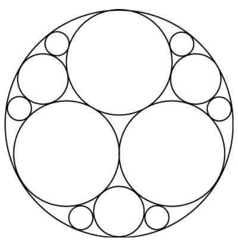
〔2단계〕

아래 그림과 같이 1단계의 그림에서 원 C에 내접한 원 중 2개와 원 C에 동시에 접하는 원을 추가하여 그린다.



〔3단계〕

아래 그림과 같이 2단계의 그림에서 원 C에 내접한 원 중 2개와 원 C에 동시에 접하는 원을 추가하여 그린다.



⋮ ⋮

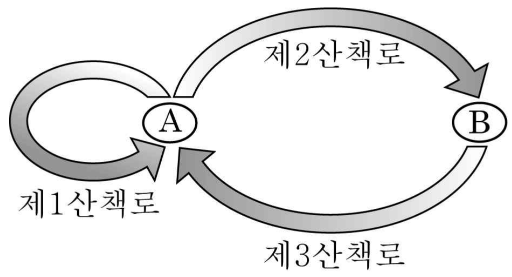
이와 같은 방법으로 계속하여 그릴 때, n단계의 그림에서 원의 최대 개수를 a_n이라 하고, 그때의 접점의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들면 $a_1=4,\ a_2=7,\ b_1=6,\ b_2=15$이다. 이때, b_8-a_8의 값은?

(단, 원 사이의 교점은 접점만 존재한다.)[4점]

① 754　② 764　③ 774　④ 784　⑤ 794

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

105 어느 공원에는 아래 그림과 같이 A지점에서 출발하여 A지점으로 돌아오는 제 1산책로, A지점에서 출발하여 B지점으로 이어지는 제 2산책로, B지점에서 출발하여 A지점으로 이어지는 제 3산책로가 있고, 각 산책로의 거리는 $1km$이다.



이 산책로들을 따라 다음과 같은 규칙으로 산책한 거리가 nkm일 때, A지점에서 출발하여 A지점에 도착하는 방법의 수를 a_n, A지점에서 출발하여 B지점에 도착하는 방법의 수를 b_n이라 하자.

㈎각 산책로에서는 화살표 방향으로만 진행해야 한다. ㈏같은 산책로를 반복할 수 있다. ㈐지나지 않는 산책로가 있을 수 있다.

a_7+b_7의 값은?(단, n은 자연수이다.)[4점]

① 21　② 29　③ 34　④ 42　⑤ 55

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

106 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 10$이고,

$$a_{n+1} = a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

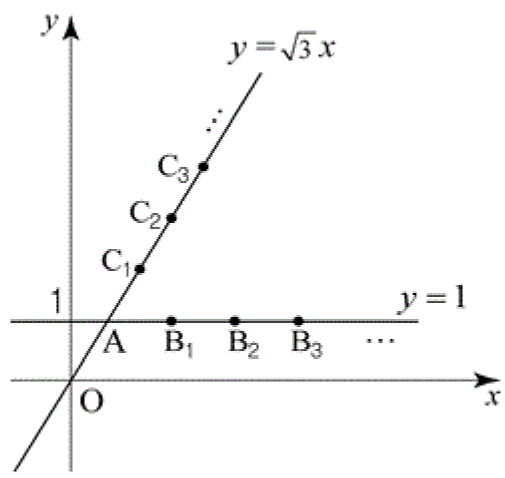
> $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여
> $a_{n+1} - a_n = \left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n}a_n\right)$
> $-\left(a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots + \frac{1}{n-1}a_{n-1}\right)$
> 이므로
> $a_{n+1} =$ [(가)] a_n 이다.
> $n = 2, 3, 4, \cdots, n-1$을 차례로 대입하면
> $a_3 = \frac{3}{2}a_2$
> $a_4 = \frac{4}{3}a_3$
> $\vdots$
> $a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1}$ 이므로
> $a_n =$ [(나)]$(n \geq 2)$
> 따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_1 = 10$ 이고, $a_n =$ [(나)]$(n \geq 2)$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라할 때, $f(5) \times g(10)$의 값은? [4점]

① 60 ② 75 ③ 90
④ 105 ⑤ 120

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

107 그림과 같이 점 A는 두 직선 $y=1$과 $y=\sqrt{3}x$의 교점이다. 자연수 n에 대하여 $y=1$위에 $\overline{AB_n}=n$인 점을 B_n, $y=\sqrt{3}x$위에 $\overline{AC_n}=n$인 점을 C_n이라 하자. 삼각형 AB_nC_n의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $a_n > 6$를 만족하는 n의 최솟값을 구하시오.(단, B_n, C_n은 제 1사분면의 점이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

108 [공통]수열 $\{a_n\}$이

$$T_n = 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)a_n = \frac{n}{2n+4} \text{ (단, } n=1, 2, 3, \cdots \text{)}$$

을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - T_n \cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n=1$일 때, (좌변) $= a_1 =$ [(가)]

(우변) $= \dfrac{1}{(1+1)^2} - T_1 =$ [(가)]

이므로(★)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + [\text{(나)}](T_{m+1} - T_m)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$$

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도(★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여(★)이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\dfrac{\alpha}{f(2)}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

109 [공통]좌표평면 위의 원점 O와 점 $P_1(1, 0)$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 점 $P_n(x_n, y_n)$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 동경 OP_n이 나타내는 각의 크기는 $\dfrac{n-1}{3}\pi$이다.

(나) $$\overline{OP_{n+1}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\overline{OP_n}, & (y_n > 0) \\ \overline{OP_n}, & (y_n = 0) \\ \dfrac{4}{3}\overline{OP_n}, & (y_n < 0) \end{cases}$$

$\overline{OP_{50}}$의 값은?[4점]

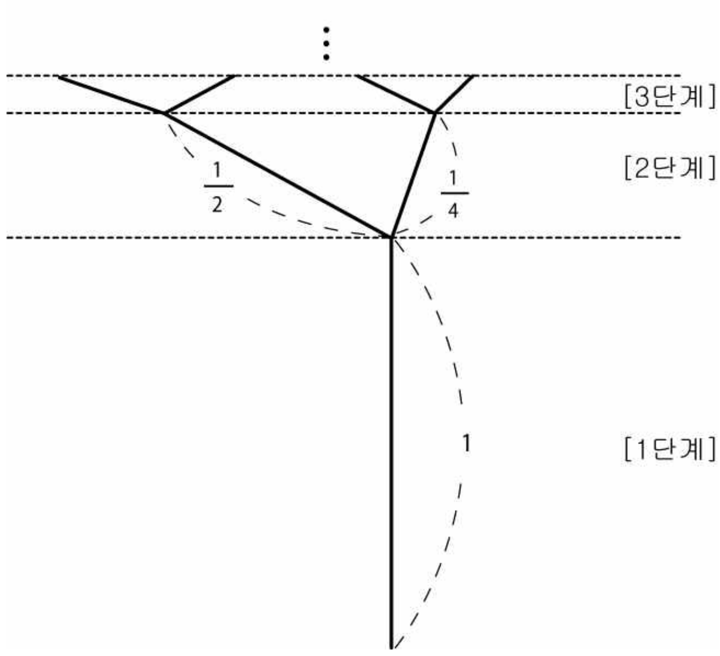
① $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ ③ $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^7$

④ $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$ ⑤ $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^8$

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

110 한 평면 위에 다음과 같은 단계에 따라 선분들을 차례대로 그림과 같이 그려 나간다.

[1단계]:길이가 1인 선분을 그린다.
[2단계]:[1단계]에서 그린 선분의 길이의 $\frac{1}{2}$만큼 왼쪽에, $\frac{1}{4}$만큼 오른쪽에[1단계]에 그려진 선분에 붙여 그린다.
[3단계]:[2단계]에서 그린 각 선분의 길이의 $\frac{1}{2}$만큼 왼쪽에, $\frac{1}{4}$만큼 오른쪽에[2단계]에 그려진 선분에 붙여 그린다.
⋮



이와 같은 과정을 계속하여[n단계]에서 그린 선분들의 길이의 합을 a_n이라 하자. 이때, a_{10}의 값은?[4점]

① $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$ ③ $\left(\frac{4}{5}\right)^{9}$
④ $\left(\frac{3}{4}\right)^{8}$ ⑤ $\left(\frac{4}{5}\right)^{8}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

111 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n - 3\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립할 때, $a_6 - a_5$의 값은?[3점]

① 27 ② 81 ③ 243
④ 729 ⑤ 2187

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

112 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1 = 1,\ \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

a_{20}의 값은?[3점]

① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$
④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

113 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n^5\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_5 a_{10}$은 m자리 정수이다.

이때, m의 값을 구하시오.(단, $\log 2 = 0.3010$으로계산한다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

114 철수가 인터넷 쇼핑몰을 창업한 후 A상품의 판매량을 조사하였더니 창업 첫째 날 1개, 둘째 날 2개가 판매되었다. 이 상품의 판매량을 임의로 연속 3일간 조사해 보면 조사 1일차의 판매량의 2배와 3일차의 판매량의 합이 2일차 판매량의 3배와 같았다. 이와 같이 상품이 판매되었을 때, 창업 첫째 날부터 10일간 판매된 A상품의 총 개수는?[3점]

① 512　② 1023　③ 1025
④ 2047　⑤ 2049

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

115 신맛이 매우 강한 오렌지주스 $4L$의 농도를 낮추기 위해 $2L$를 버리고 $2L$의 물을 섞는다. 이 시행을 10회 반복하여 $p\%$ 오렌지주스 $4L$를 만들었다.

시행 횟수를 줄이기 위해 $3L$를 버리고 $3L$의 물을 섞는 일을 반복하여 $p\%$ 오렌지주스 $4L$를 만들려면, 반복해야 할 시행 횟수는?[3점]

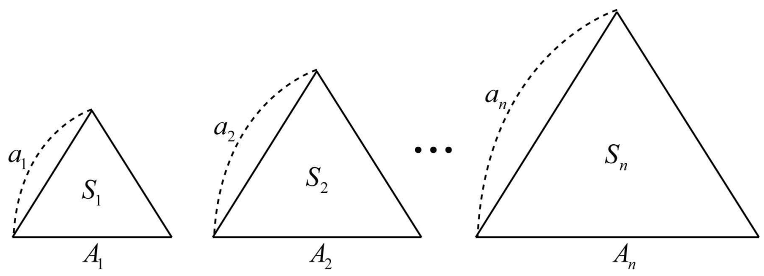
① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

116 [공통]그림과 같이 크기가 서로 다른 정삼각형 $A_1, A_2, \cdots, A_n$에 대하여 한 변의 길이를 각각 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이라 하자.

각 도형의 넓이를 $S_1, S_2, \cdots, S_n$이라 하면
$S_n=\sqrt{2}S_{n-1}\,(n\ge 2)$이 성립한다.

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_8=2^{11}$일 때, S_1의 값은?[4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{4}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

117 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식
$(n!)^2\cdot 4^n>(2n)!$ …①이 성립함을 증명한 것이다.

> (1) $n=1$일 때, (좌변) $=4$, (우변) $=$ [(가)]이므로 ①이 성립한다.
> (2) $n=k$일 때, ①이 성립한다고 가정하면
> $(k!)^2\cdot 4^k>(2k)!$ …②이다.
> $n=k+1$일 때 ①이 성립함을 보이자.
> ② 의 양변에[(나)]를 곱하면
> $\{(k+1)!\}^2\cdot 4^{k+1}>$ (나) $(2k)!>(2k+2)$(다) $(2k)\neq(2k+2)!$
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 ①은 성립한다.
> 그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① 1, $4(k+1)^2$, $2k$
② 1, $2(k+1)^2$, $2k$
③ 2, $4(k+1)^2$, $2k+1$
④ 2, $2(k+1)^2$, $2k+1$
⑤ 2, $4(k+1)^2$, $2k$

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

118 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변) = [(가)] , (우변) = [(나)] 이므로 (ii) $n=m$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면 $\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+2)!}$ 이다. $n=m+1$일 때, $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+2)\cdot k!}+$ [(나)] $=\frac{1}{2}-$ [(다)] 그러므로 $n=m+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{(m+2)\cdot m!}$, $\frac{1}{(m+2)!}$

② $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$, $\frac{1}{(m+3)!}$

③ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{(m+2)\cdot m!}$, $\frac{1}{(m+2)!}$

④ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$, $\frac{1}{(m+3)!}$

⑤ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{(m+3)\cdot(m+1)!}$, $\frac{1}{(m+2)!}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

119 [공통]두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ 을 만족시킬 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $a_2+b_2=17$
ㄴ. $b_n=3^n-1$
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=3$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

120 동심원 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 의 반지름의 길이를 각각 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 이라 하고, 그 넓이를 각각 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 이라 할 때, $S_{n+1}=2S_n\,(n=1, 2, \cdots)$이 성립한다. $r_1=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}$의 값은?[3점]

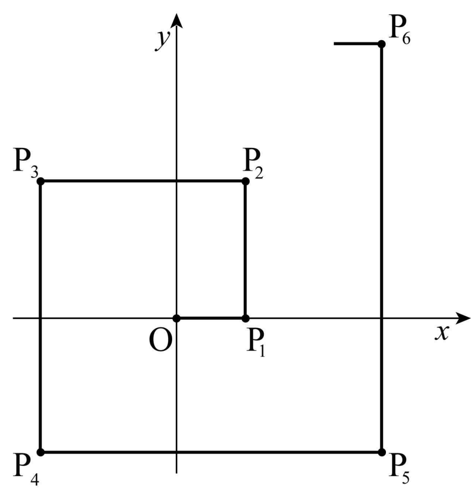
① $1+\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{2}$
③ $1+2\sqrt{2}$　④ $2+2\sqrt{2}$
⑤ $1+3\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

121 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 출발하여 $\overline{OP_1}=1$이고 $\overline{P_nP_{n+1}}=\overline{P_{n-1}P_n}+1$을 만족하며 x축 또는 y축과 평행하게 이동한 점을 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$이라 하자.

점 P_{22}의 좌표가 (x, y)일 때, $x+y$의 값을 구하시오.

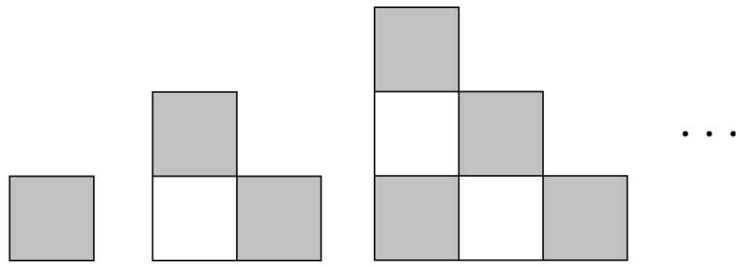
(단, 점 P_0는 원점 O이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

122 한 면은 흰 색, 다른 면은 검은색인 같은 크기의 정사각형 모양의 카드를 다음 규칙에 의해 그림과 같이 놓는다.

[1단계]검은색 면이 보이도록 카드를 한 개 놓는다.
[2단계] 1단계에서 놓여진 카드를 흰 색 면이 보이도록 뒤집고 그 카드 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 두 개의 카드를 놓는다.
[3단계] 2단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고 2단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 세 개의 카드를 놓는다.
...
[n단계] $n-1$단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집어 $n-1$단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 n개의 카드를 놓는다.



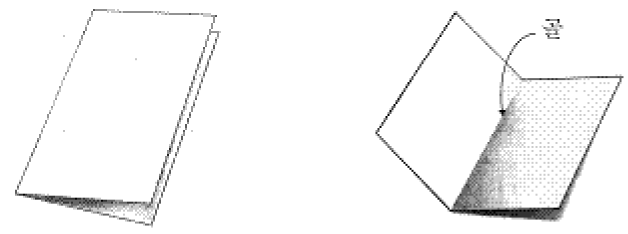
<1단계> <2단계> <3단계>

n단계에서 보이는 면의 색이 검은색인 카드의 개수를 a_n이라 할 때, $a_{n+1}-a_n=15$가 되는 모든 n의 값의 합은?[4점]

① 29 ② 31 ③ 49
④ 57 ⑤ 65

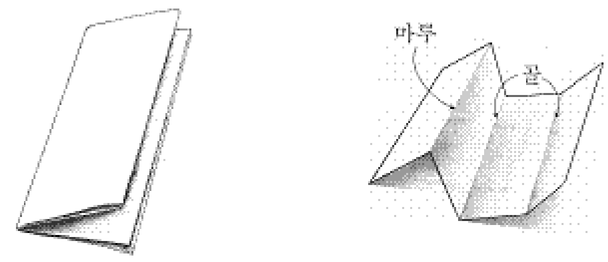
[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

123 직사각형 모양의 종이를 오른쪽으로 절반 접었다 펼쳤을 때 위로 접힌 선을 마루, 아래로 접힌 선을 골이라 하자.[그림 1]은 종이를 오른쪽으로 절반 접었다 펼쳤을 때 펼친 모양으로, 마루의 개수는 0개, 골의 개수는 1개다.



[그림1]

[그림 2]는[그림 1]의 절반으로 접힌 종이를 또 다시 오른쪽으로 절반 접었다 펼쳤을 때 펼친 모양으로, 마루의 개수는 1개, 골의 개수는 2개다.



[그림2]

이와 같은 방법으로 n번 접었다 펼쳤을 때, 펼친 모양의 마루의 개수를 a_n, 골의 개수를 b_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7}\frac{a_n}{b_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은?(단, 가운데가 골이 되도록 펼치며, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

① 370 ② 375 ③ 380
④ 385 ⑤ 390

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

124 수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_1=a_2=1 \\ a_{n+2}=(-1)^n a_n a_{n+1} \end{cases}$ (단, $n=1, 2, 3, \cdots$)을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2011}a_k$의 값은?[4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

125 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

(가) $a_1 = 2$
(나) $a_{n+1} = (a_n^2 + a_n$을 5로 나눈 나머지$)(n = 1, 2, 3, \cdots)$

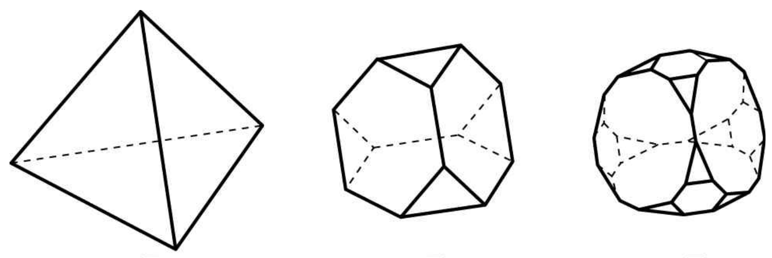
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

126 [공통]정사면체 T_1의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다.

T_1의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 4개를 잘라내어 팔면체 T_2를 만든다.

다시 팔면체 T_2의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_2의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 12개를 잘라내어 이십면체 T_3을 만든다.



T_1 T_2 T_3

이와 같은 방법으로 다면체 T_4, T_5, T_6을 만들 때, 다면체 T_6의 면의 개수는?[4점]

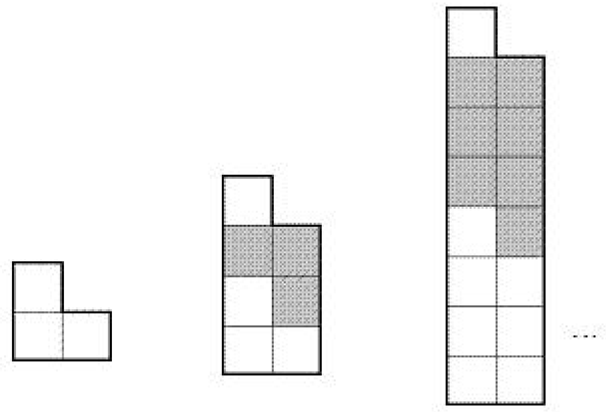
① 480 ② 482 ③ 484
④ 486 ⑤ 488

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

127 그림과 같이 넓이가 1인 정사각형 3개를 붙여서 만든 도형을 A_1이라 하자.

도형 A_1 위에 A_1과 같은 도형을 돌려서 붙이고 그 위에 넓이가 1인 정사각형 한 개를 붙여서 만든 도형을 A_2라 하자. 도형 A_2 위에 A_2와 같은 도형을 돌려서 붙이고 그 위에 넓이가 1인 정사각형 한 개를 붙여서 만든 도형을 A_3이라 하자.

이와 같은 시행을 계속하여 n번째 얻은 도형을 A_n이라 하자. 도형 A_n의 넓이를 S_n이라 할 때, S_n이 3000 이상이 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.(단, $2^{10} = 1024$이다.)[4점]



A_1 A_2 A_3 $\cdots$

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 학력평가]

128 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}<2\sqrt{n}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)= [(가)] $<2=$ (우변)이므로 성립한다.
> (ⅱ) $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면
> $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt{k}$
> $n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
> $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-$ [(나)]
> $<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-$ [(나)]
> $\frac{2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt{2}(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$
> 이때, $\left(2\sqrt{2}\sqrt{k^2+k}+1\right)^2-\{2\sqrt{2}(k+1)\}^2$ [(다)] 0 이므로
> $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<2\sqrt{k+1}$
> 그러므로 $n=k+1$일 때도 부등식은 성립한다.
> 따라서 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립 한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{2}$, $2\sqrt{k+1}$, $>$

② $\frac{1}{2}$, $2\sqrt{k}$, $>$

③ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2\sqrt{k+1}$, $>$

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2\sqrt{k}$, $<$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $2\sqrt{k+1}$, $<$

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

129 [공통]수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n \geq n$을 만족시킬 때, 다음은 부등식 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \geq$ [(가)] 이 성립함을 증명한 것이다.

> $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
> $=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)+\cdots$
> $+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}$
> $=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)$
> $+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)+\cdots$
> $+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$
> $\geq\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$
> $+\cdots+$ [(나)]
> $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$
> $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-$ [(다)]
> $=$[(가)]`

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, $\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$, $n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

③ $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$, $n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

④ $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$, $n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

⑤ $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$, $\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

130 [공통]임의의 자연수 p, q, r에 대하여, 수열 $\{a_n\}$은

$a_1 = 10,\ a_p + a_q + a_r = a_{p+q+r}$를 만족하고, 수열 $\{b_n\}$은

$b_1 = \dfrac{3}{5},\ b_p b_q = b_{p+q}$를 만족한다.

이때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

131 [공통]수열 $\{a_n\}$이

$a_1 = p,\ a_2 = q,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킬 때,

$a_{39} = 201$이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k = \sum_{k=1}^{200} a_k$이다.

이때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 상수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

132 [공통]수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라

할 때, 다음은 등식 $nS_n - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n} ka_k\ (n \geq 2) \cdots$ (★)이

성립함을 증명한 것이다.

(1) $n=2$일 때, (좌변) = (우변) = [(가)] 이므로(★)이 성립한다.

(2) $n=i\ (i \geq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면,

, $(i+1)S_{i+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} S_k = (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i\right)$

$= (i+1)S_{i+1} - $ [(나)]

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{i} ka_k +$ [(다)]

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{i+1} ka_k$

따라서, $n = i+1$일 때, $(i+1)S_{i+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} S_k = \sum_{k=1}^{i+1} ka_k$가 성립한다.

(1)과 (2)에 의하여 등식 (★)은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

(가)(나)(다)

① $a_1 + a_2$, $(i-1)S_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} ka_k$, $i(S_i - S_{i-1})$

② $a_1 + a_2$, $(i+1)S_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} ka_k$, $i(S_{i+1} - S_i)$

③ $a_1 + 2a_2$, $(i+1)S_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} ka_k$, $i(S_{i+1} - S_i)$

④ $a_1 + 2a_2$, $(i+1)S_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} ka_k$, $(i+1)(S_{i+1} - S_i)$

⑤ $a_1 + 2a_2$, $(i-1)S_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} ka_k$, $(i+1)(S_{i+1} - S_i)$

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

133 [공통]다음은 3이상의 자연수 n에 대하여 부등식 $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}<4$가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> 자연수 $n(n\geq 3)$에 대하여 $S_n=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$이라 하자.
>
> (1) $n=3$일 때, $S_3=3<4$이므로 성립한다.
>
> (2) $n=k(k\geq 3)$일 때, $S_k<4$가 성립한다고 가정하자.
>
> $n=k+1$일 때, $S_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{k+1}{k+1-i}\times\frac{1}{2^{i-1}}\right)$
>
> $=\frac{k+1}{k}+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$
>
> $+$ [(가)] $\times\left(\frac{k}{k-1}+\frac{k}{k-2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\frac{k}{2^{k-2}}\right)$
>
> $=1+\frac{1}{k}+$ [(나)] $\times S_k$
>
> 그런데, $k\geq 3$, $S_k<4$이므로
>
> $S_{k+1}=1+\frac{1}{k}+$ [(나)] $\times S_k<4$이다.
>
> 그러므로 (1), (2)에 의하여 3이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식의 합을 $f(k)$라 할 때, $f(3)$의 값은?[4점]

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{6}{7}$

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

134 그림은 도형 ○, △, □를 다음과 같은 규칙으로 배열한 것이다.

> (가)각 행에 ○ 다음에는 △, △다음에는 □, □ 다음에는 ○를 순서대로 반복해서 배열한다.
> (나)제 1행에 ○ 하나만 놓는다.
> (다)제 n행은 제 $n-1$행의 마지막에 있는 도형과 같은 도형으로 시작하여 규칙(가)에 의하여 n개를 배열한다.$(n\geq 2)$

제1행　○
제2행　○ △
제3행　△ □ ○
제4행　○ △ □ ○
⋮　⋮

위 도형의 배열에 대하여 옳은 것만을에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 제 5행에 배열된 ○의 개수는 2개다.
ㄴ. □로 시작하는 행이 존재한다.
ㄷ. 제 $3n$행까지 배열된 모든 ○의 개수는 $\frac{3n(n+1)}{2}$이다.

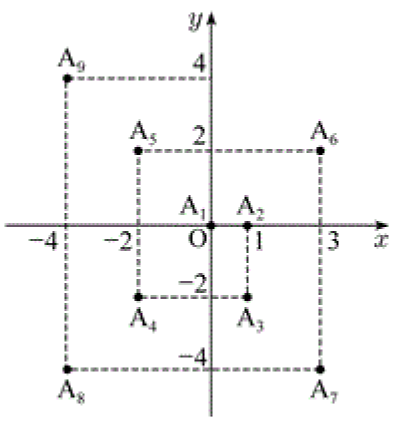
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

135 [공통]좌표평면에서 점 $A_n(n=1, 2, 3, \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가)점 A_1의 좌표는 $(0, 0)$이다.
(나)점 A_{4n-3}을 x축의 양의 방향으로 $(4n-3)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-2}이다.
(다)점 A_{4n-2}를 y축의 음의 방향으로 $(4n-2)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-1}이다.
(라)점 A_{4n-1}을 x축의 음의 방향으로 $(4n-1)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n}이다.
(마)점 A_{4n}을 y축의 양의 방향으로 $4n$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n+1}이다.

그림은 위의 규칙대로 정한 점 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 의 일부를 나타낸 것이다.



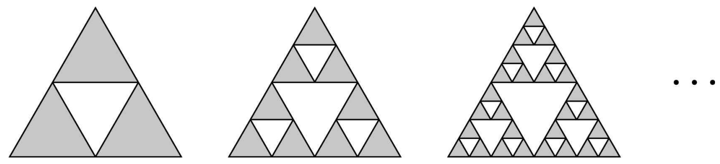
점 A_{50}의 좌표를 (p, q)라 할 때, $p+q$의 값은?[4점]

① 41 ② 43 ③ 45
④ 47 ⑤ 49

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

136 [공통]한 개의 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면

모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 27개의 정삼각형이 남는다. 그림은 이와 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.



두 정삼각형이 공유하는 꼭짓점은 한 개의 꼭짓점으로 셀 때, n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자.

예를 들어 $a_1=6, a_2=15$이다. a_5의 값은?[4점]

① 366 ② 376 ③ 386
④ 396 ⑤ 406

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

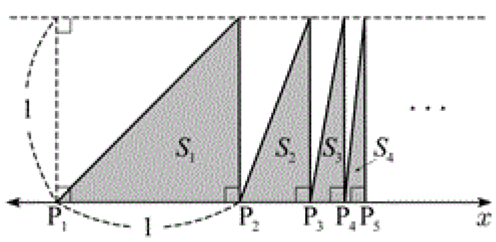
137 수직선 위에 점 $P_n\,(n=1,2,3,\cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> ㈎점 P_1의 좌표는 $P_1(0)$이다.
> ㈏ $\overline{P_1P_2}=1$이다.
> ㈐ $\overline{P_nP_{n+1}}=\dfrac{n-1}{n+1}\times\overline{P_{n-1}P_n}\,(n=2,3,4,\cdots)$

선분 P_nP_{n+1}을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하자.

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{50}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

138 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(a+k-1)!}{(k-1)!}=\frac{(a+n)!}{(a+1)(n-1)!}\cdots$ (★)이 성립함을 증명하는 과정이다.(단, a는 양의 정수이다.)

> (i) $n=1$일 때, (좌변)=[㈎], (우변)=[㈎]이므로
> (★)이 성립한다.
> (ii) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면
> $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{(a+k-1)!}{(k-1)!}=\frac{(a+m)!}{(a+1)(m-1)!}$ 이다.
> $n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.
> $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(a+k-1)!}{(k-1)!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(a+k-1)!}{(k-1)!}+$ [㈏]
> $=\dfrac{(a+m)!}{(a+1)(m-1)!}+$ [㈏]
> $=\dfrac{(a+m)!}{(m-1)!}\,\dfrac{1}{a+1}+$ [㈐]
> $=\dfrac{(a+m+1)!}{(a+1)m!}$
> 따라서 $n=m+1$일 때도(★)이 성립한다.
> 그러므로 모든 자연수 n에 대하여(★)이 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[4점]

① $(a+1)!$, $\dfrac{(a+m)!}{(m+1)!}$, $\dfrac{1}{m(m+1)}$

② $(a+1)!$, $\dfrac{(a+m)!}{(m)!}$, $\dfrac{1}{m}$

③ $a!$, $\dfrac{(a+m)!}{(m+1)!}$, $\dfrac{1}{m(m+1)}$

④ $a!$, $\dfrac{(a+m)!}{m!}$, $\dfrac{1}{m}$

⑤ $a!$, $\dfrac{(a+m)!}{m!}$, $\dfrac{1}{m(m+1)}$

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

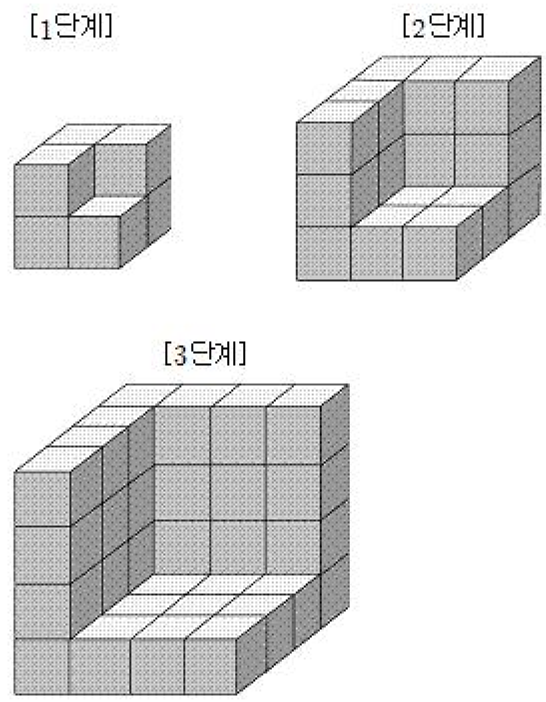
139 [공통]그림과 같이 모서리의 길이가 10인 크기가 모두 같은 정육면체 모양의 블록으로 쌓기 놀이를 하고 있다.

[1단계]는 블록 7개를 이용하여 2층으로 쌓은 입체도형이다.

[2단계]는[1단계]의 입체도형에 블록 12개를 더하여 3층으로 쌓은 입체도형이다.

[3단계]는[2단계]의 입체도형에 블록 18개를 더하여 4층으로 쌓은 입체도형이다.

이와 같은 모양으로 블록 쌓기를 계속하여 얻은[n단계]입체도형의 블록 개수를 a_n, 겉넓이를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값을 구하시오.[4점]



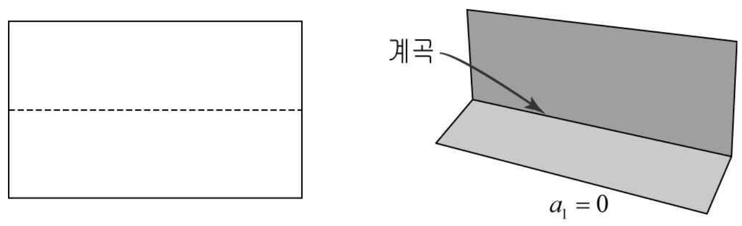
[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

140 그림과 같이 종이를 접어 안쪽으로 접힌 부분을 계곡, 밖으로 접힌 부분을 언덕이라 하자.

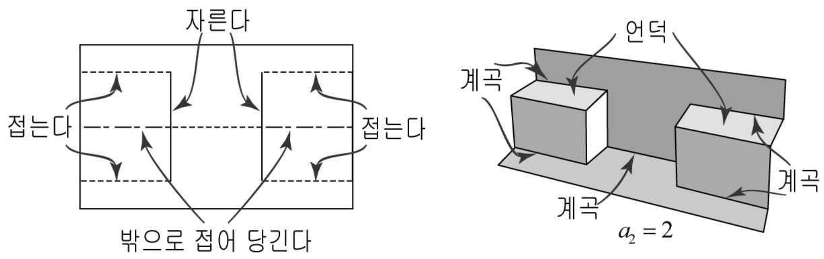
[그림 1]에서 계곡을 삼등분하여 자른 후 양끝을 밖으로 접어 당겨서[그림 2]를 만든다.[그림 2]에서 모든 계곡을 삼등분하여 자른 후 삼등분한 계곡의 양끝을 밖으로 접어 당겨서[그림 3]을 만든다.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째[그림 n]을 만든다.

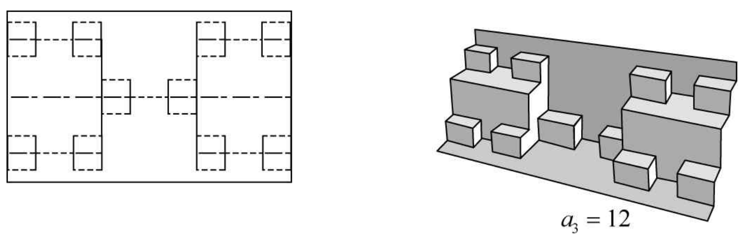
이때, [그림 1], [그림 2], [그림 3], ..., [그림 n]의 언덕의 개수를 각각 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이라 할 때, a_5의 값은?[4점]



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

⋮

① 156 ② 312 ③ 468
④ 624 ⑤ 780

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

141 [공통]다음은 $f(n)=2^n \cdot 3$이고 $\sigma(n)$은 $f(n)$의 양의 약수들의 합이라 할 때 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\sigma(n) > 2f(n) \cdots$ (★)이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

> (i) $n=2$일 때 $f(2)=12$이고 $\sigma(2)=1+2+3+4+6+12=28$ 이므로
> (★)이 성립한다.
> (ii) $n=k(k \geq 2)$일 때(★)이 성립한다고 가정하면
> $\sigma(k) > 2f(k)=2^{k+1} \cdot 3$이다.
> $n=k+1$일 때(★)이 성립함을 보이자.
> $f(k)$의 약수의 개수는 $2k+2$개이고 각각의 약수를 $a_1, a_2, \cdots, a_{2k+2}(a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k+2})$라 하면
> $f(k+1)$의 약수는 $a_1, a_2, \cdots, a_{2k+2}$, [㈎], $2a_{2k+2}$이므로
> $\sigma(k+1)=\sigma(k)+$[㈎]$+2a_{2k+2}$
> 한편, $a_{2k+2}=$[㈏] 이므로
> $\sigma(k+1)=\sigma(k)+$[㈐]
> $> 2^{k+1} \cdot 6=2f(k+1)$
> 그러므로 $n=k+1$일 때도(★)이 성립한다.
> 따라서 $n \geq 2$인 모든 자연수에 대하여(★)이 성립한다.

위 증명과정에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{3}a_{2k+2}$, $2^k \cdot 3$, 2^{k+2}
② $\frac{1}{3}a_{2k+2}$, $2^{k+1} \cdot 3$, 2^{k+3}
③ $\frac{2}{3}a_{2k+2}$, $2^k \cdot 3$, 2^{k+3}
④ $\frac{2}{3}a_{2k+2}$, $2^{k+1} \cdot 3$, 2^{k+4}
⑤ $\frac{2}{3}a_{2k+2}$, $2^k \cdot 3$, 2^{k+4}

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

142 모든 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3, & 2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$일 때, $a_{10}+b_{10}$의 값은?[3점]

① 3^{10} ② 3^{11} ③ 3^{12}
④ 3^{13} ⑤ 3^{14}

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

143 $a_1=10^{10}$, $a_4=125 \times 10^7$인 수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=\sqrt{a_n \cdot a_{n+2}}$를 만족한다.

이때, $\sum_{k=1}^{n} \log a_k$의 값이 최대가 되는 자연수 n의 값은?(단, $\log 2=0.30$)[3점]

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

144 [공통]모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

다음은 $2S_n=a_n+\frac{9}{a_n}(n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, S_{100}을 구하는 과정이다.

> (i) $n=1$일 때, $a_1=$[㈎]
> (ii) $n \geq 2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로
> $2S_n=S_n-S_{n-1}+\frac{9}{S_n-S_{n-1}}$이다.
> 따라서 $(S_n)^2-(S_{n-1})^2=$[㈏] 이다.
> $\therefore S_{100}=$[㈐]

위 과정에서 ㈎, ㈏, ㈐에 들어갈 모든 수의 합은?[3점]

① 39 ② 40 ③ 41
④ 42 ⑤ 43

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

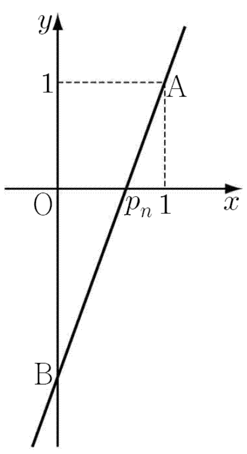
145 n이 자연수일 때, 점 $A_n(n,\ \sqrt{3}n)$과 원 $x^2+y^2=4n^2+3n$위의 점 P에 대하여 선분 PA_n의 길이의 최솟값을 a_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

146 [공통]자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 1)$, $B(0,\ -n)$을 지나는 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 p_n이라고 하자.

$l_n=p_{n+1}-p_n$이라 할 때, $10\sum_{n=1}^{8} l_n$의 값은?[3점]



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

147 [공통]다음은 등식

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$ 가

성립함을 증명한 것이다.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$=\sum_{k=1}^{n} [(가)]$$
$$=4!\left\{\frac{4!}{4!0!}+\frac{5!}{4!1!}+\cdots+\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}\right\}$$
$$=4!\cdot\sum_{k=1}^{n} [(나)]$$
$$=4!\cdot[(다)]$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$, ${}_{k+2}C_3$, ${}_{n+3}C_4$
② $\frac{(k+2)!}{(k-1)!}$, ${}_{k+2}C_3$, ${}_{n+4}C_5$
③ $\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$, ${}_{k+2}C_3$, ${}_{n+3}C_4$
④ $\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$, ${}_{k+3}C_4$, ${}_{n+3}C_4$
⑤ $\frac{(k+3)!}{(k-1)!}$, ${}_{k+3}C_4$, ${}_{n+4}C_5$

[난이도 : ★★☆] [2009년 04월 학력평가]

148 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$ 이

성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

증 명
i) $n=1$일 때, (좌변) = (우변) = [(가)]이므로 주어진 등식은 성립한다. ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 성립한다고 가정하면 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}$ $=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}$ 이다. $n=k+1$일 때, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+$ [(나)] $=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+$ [(나)] $=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+$ [(다)] $=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$ 이다. 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식 은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은? [3점]

① $1,\ \frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

② $1,\ \frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$

③ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

④ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$

⑤ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2},\ \frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

149 [공통]모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} b_k$를 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq$ [(다)] $\sum_{k=1}^{n} a_k$이 성립함을 증명한 것은?

절대부등식 $(x+y)^2\geq 4xy$를 이용하면 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\leq\sum_{k=1}^{n}$ [(가)] $=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 이 성립한다. $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}=\sum_{k=1}^{n}$ [(나)] $-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k}\geq$ [(다)] $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 따라서, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq$ [(다)] $\sum_{k=1}^{n}a_k$이 성립한다. (단, 등호는 $a_k=b_k(k=1,2,\cdots,n)$일 때 성립한다.)

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{1}{4}(a_k+b_k),\ a_k,\ \frac{1}{2}$

② $\frac{1}{2}(a_k+b_k),\ a_k,\ \frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{4}(a_k+b_k),\ a_k,\ \frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}(a_k+b_k),\ a_k^2,\ \frac{1}{4}$

⑤ $\frac{1}{4}(a_k+b_k),\ a_k^2,\ \frac{1}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

150 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\cdots$ $(*)$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> $S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 이라 하자.
>
> (1) $n=1$일 때, $S_1=$ [(가)] $=T_1$ 이므로(*)이 성립한다.
>
> (2) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면
>
> $S_{m+1}=S_m+$ [(나)]
>
> $T_{m+1}=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}+\cdots+\frac{1}{2m+2}$
>
> $=T_m-$ [(다)] $+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$
>
> $=T_m+$ [(나)] 이므로
>
> $n=m+1$일 때도(*)이 성립한다.
>
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여(*)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?[3점]

① 1　$\frac{1}{2m+1}$　$\frac{1}{m}$

② 1　$\frac{1}{2m+1}$　$\frac{1}{m+1}$

③ $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$　$\frac{1}{m+1}$

④ $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$　$\frac{1}{m}$

⑤ $\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2m+1}$　$\frac{1}{m+1}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

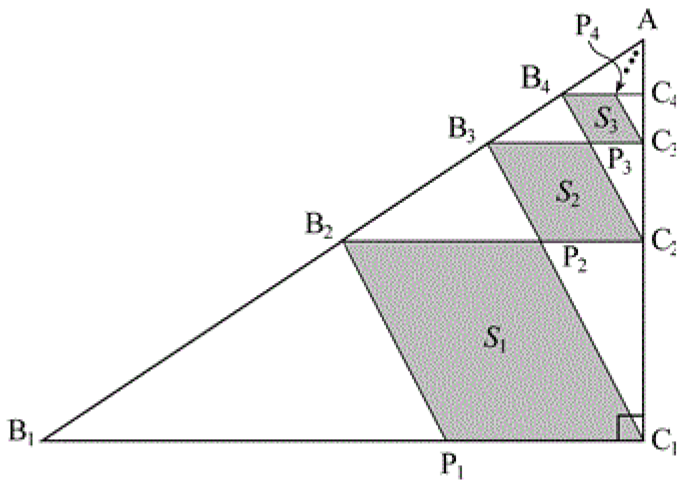
151 $\angle A=30^\circ$, $\angle B_1=30^\circ$, $\overline{AC_1}=6$인 직각삼각형 AB_1C_1이 있다 선분 B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 P_1이라 하자.

두 선분 AB_1, AC_1의 중점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 P_2라 할 때, 네 점 B_2, P_1, C_1, P_2를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_2P_1C_1P_2$를 만든다.

두 선분 AB_2, AC_2의 중점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 $2:1$로 내분하는 점을 P_3이라 할 때, 네 점 B_3, P_2, C_2, P_3을 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_3P_2C_2P_3$을 만든다.

두 선분 AB_3, AC_3의 중점을 각각 B_4, C_4라 하고, 선분 B_4C_4를 $2:1$로 내분하는 점을 P_4라 할 때, 네 점 B_4, P_3, C_3, P_4를 꼭짓점으로 하는 사각형 $B_4P_3C_3P_4$를 만든다. 이와 같은 과정을 계속할 때, 사각형 $B_{n+1}P_nC_nP_{n+1}$의 넓이를

$S_n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은?[3점]



① $8\sqrt{3}$　② $7\sqrt{3}$　③ $6\sqrt{3}$

④ $5\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

152 [공통]함수 $y=x^2$의 그래프 위에 다음 조건을 만족시키도록 점 $P_1, P_2, P_3, \cdots$을 차례로 정한다.

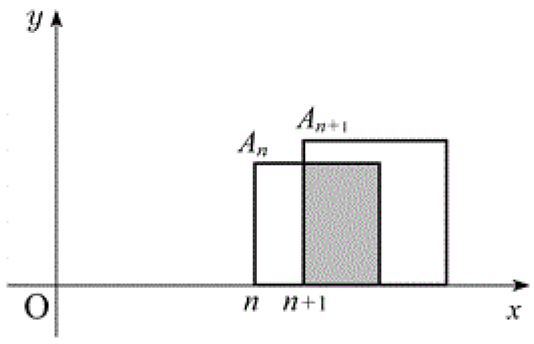
(가)점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다. (나)직선 P_nP_{n+1}의 기울기는 n이다.$(n=1, 2, 3, \cdots)$

점 P_{2009}의 x좌표는?[4점]

① 1001 ② 1002 ③ 1003
④ 1004 ⑤ 1005

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

153 n이 3이상의 자연수일 때, 네 점 $(n, 0)$, $\left(\frac{3n}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $\left(n, \frac{n}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 A_n이라 하자. 두 정사각형 A_n, A_{n+1}이 겹치는 부분(어두운 부분)의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?[4점]



① $\frac{113}{45}$ ② $\frac{116}{45}$ ③ $\frac{118}{45}$
④ $\frac{121}{45}$ ⑤ $\frac{124}{45}$

[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

154 수열 $\{a_n\}$을 $\begin{cases} a_1=1,\ a_2=-1 \\ a_{n+2}-a_n=2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$으로 정의할 때, $a_{15}+a_{16}$의 값을 구하시오.[4점]

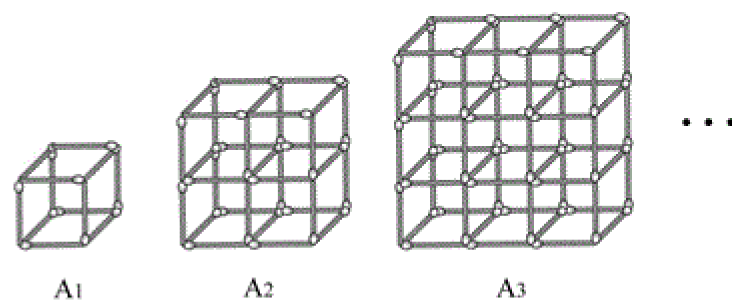
[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

155 A역에서는 일반열차를 오전 6시 정각에 첫 출발시켜 7분 간격으로 운행하고, 급행열차를 오후 6시 정각에 첫 출발시켜 13분 간격으로 추가 운행한다.

일반열차와 급행열차의 출발 시각이 처음으로 일치하는 순간, 이 일반열차는 오전 6시 정각부터 A역을 출발하는 일반열차들 중 몇 번째 열차인지 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

156 그림과 같이 길이가 1인 성냥개비를 이용하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1, 높이가 n인 직육면체 모양의 A_n을 계속 만들자.



직육면체 모양의 A_n을 만드는데 필요한 성냥개비의 개수와 겉넓이를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n}{n^4}$의 값을 구하시오.(단, 성냥개비의 두께는 무시한다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

157 자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\,(x \le y)$과 같이 $\frac{1}{n}$을 두 분수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$이므로 $a_1=1$, $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$이므로 $a_2=2$, $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$이므로 $a_3=2$이다.

다음은 수열 $\{a_n\}$.의 일반항을 구하는 과정이다.

> 자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\,(x \le y)$라 하면
> $xy=n(x+y)$이다.
> 따라서 $(x-n)(y-n)=n^2 \cdots$ (*)
> 이므로 $x-n$과 $y-n$은 n^2의 약수이다.
> $d(n)$을 n의 양의 약수의 개수라 하고, 방정식(*)의 해의 개수를 구하면
> i) $x=y$인 경우, $x=y=$ [(가)] 이므로 1개이다.
> ii) $x<y$인 경우, $x=y=$ [(가)] 이 제외되므로 {[(나)]개이다.
> 그러므로 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\,(x \le y)$로 표시할 수 있는 방법의 수는 [(다)]개이다.
> 따라서 구하는 수열의 일반항 $a_n=$ [(다)] 이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① n $d(n^2)$ $\frac{d(n^2)+1}{2}$

② n $d(n^2)-1$ $\frac{d(n^2)}{2}+1$

③ $2n$ $d(n^2)-1$ $\frac{d(n^2)+1}{2}$

④ $2n$ $d(n^2)-1$ $\frac{d(n^2)}{2}+1$

⑤ $2n$ $d(n^2)$ $\frac{d(n^2)}{2}+1$

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

158 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ pa_{n+1}=qa_n+1\,(n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, p, q는 0이 아닌 실수이다.)[4점]

> [보기]
> ㄱ. $p=q$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
> ㄴ. $p \ne q$일 때, 수열 $\left\{a_n-\frac{1}{p-q}\right\}$은 등비수열이다.
> ㄷ. $-1<\frac{q}{p}<1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

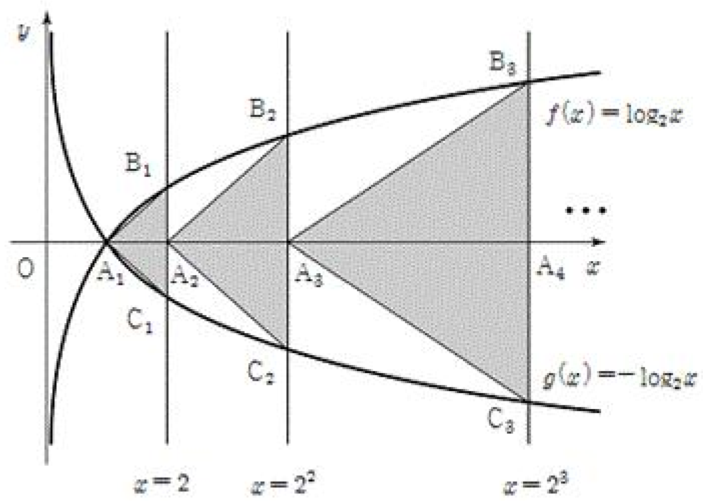
[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

159 두 함수 $f(x)=\log_2 x$와 $g(x)=-\log_2 x$의 그래프의 교점을 A_1, 직선 $x=2$가 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_1, A_2, C_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

직선 $x=2^2$이 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_2, A_3, C_2라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이를 S_2라 하자.

직선 $x=2^3$이 세 함수 $y=f(x)$, $y=0$, $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 B_3, A_4, C_3라 하고 삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} S_k$의 값은?[4점]



① $9 \cdot 2^{10}+1$ ② $9 \cdot 2^{11}+1$ ③ $10 \cdot 2^{10}+1$
④ $10 \cdot 2^{11}+1$ ⑤ $11 \cdot 2^{11}+1$

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

160 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5$,

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{6}a_n, & (a_n\text{이 6의 배수일 때})\\ a_n-1, & (a_n\text{이 6의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$

이다.

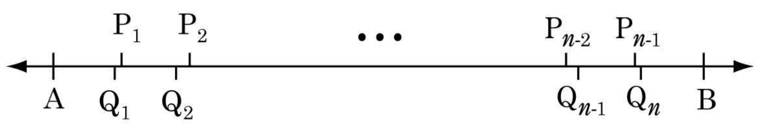
$a_k=1$일 때, k의 값은?[4점]

① 34 ② 35 ③ 36
④ 37 ⑤ 38

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

161 $n\ge2$인 자연수 n에 대하여 수직선 위의 선분 AB의 n등분점 $P_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$과 $n+1$등분점 $Q_j(j=1, 2, \cdots, n)$사이의 거리 $\overline{P_iQ_j}$의 최솟값이 2일 때, 선분 AB의 길이를 a_n이라 하자.

a_{30}의 값은?[4점]



① 1840 ② 1850 ③ 1860
④ 1870 ⑤ 1880

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

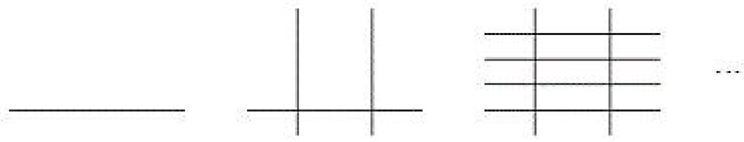
162 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=2$, $na_{n+1}a_n=(n+1)^2a_n-n^2a_{n+1}$으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[4점]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

163 [공통]한 평면 위에 다음과 같은 규칙으로 직선들을 차례로 그려 나간다.

[1단계]:직선을 1개 그린다.
[2단계]:[1단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 2개 그린다.
[3단계]:[2단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 3개 그린다.
⋮
[n단계]:[$(n-1)$단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 n개 그린다.($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)



[1단계]부터[n단계]까지 그린 직선들의 모든 교점의 개수를 a_n($n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$)이라 하자. 예를 들어, $a_2=2,\ a_3=8$이다. $a_{15}-a_{14}$의 값을 구하시오.[4점]

(단, 모든 직선은 서로 겹치지 않도록 그린다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

164 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2,\ a_2=3$,

$\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1}+\log_2 a_{n+2}=1$($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)을 만족시킬 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보 기]
ㄱ. $a_6=\dfrac{1}{3}$
ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=18$
ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}a_k=\frac{16}{3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

165 [공통]자연수 N에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=n(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)$이라 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{N+n}{N+1}a_n$ ⋯ (★)이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]
(1) $n=1$일 때, (좌변) $=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=$ [(가)]
(우변) $=\dfrac{N+1}{N+1}a_1=a_1=$ [(가)] 이므로(★)이 성립한다.
(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m$ 이다.
$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m+$ [(나)]
$=\dfrac{1}{N+1}\times\dfrac{(m+N)!}{(m-1)!}+$ [(나)]
$=\dfrac{1}{N+1}$ [(다)]
$=\dfrac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}$
그러므로 $n=m+1$일 때도(★)이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여(★)이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $N!,\ \dfrac{(m+N)!}{m!},\ \dfrac{(m+N-1)!}{m!}$

② $(N+1)!,\ \dfrac{(m+N-1)!}{m!},\ \dfrac{(m+N)!}{m!}$

③ $N!,\ \dfrac{(m+N)!}{m!},\ \dfrac{(m+N+1)!}{m!}$

④ $(N+1)!,\ \dfrac{(m+N)!}{m!},\ \dfrac{(m+N+1)!}{m!}$

⑤ $N!,\ \dfrac{(m+N-1)!}{m!},\ \dfrac{(m+N)!}{m!}$

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

166 두 함수 $f(x)=2^x$ 과 $g(x)=x-[x]$ 에 대하여 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{n}x+2\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 하자.

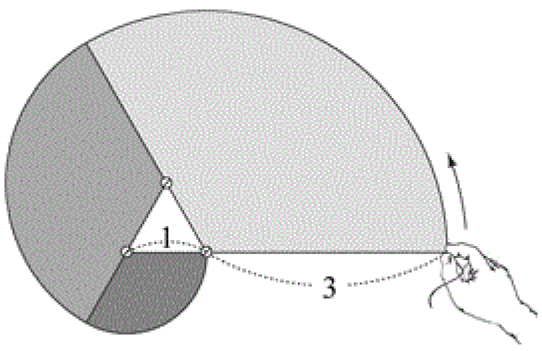
이때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

167 [공통]한 변의 길이가 1인 정 n각형의 꼭짓점에 못을 박아 놓는다.

실을 한 꼭짓점에 고정시켜 길이가 n이 되도록 잡고 한 변의 연장선 방향으로 팽팽하게 당긴 후 실의 끝의 이동거리가 최소가 되도록 정 n각형의 둘레로 한 바퀴 돌릴 때, 실이 움직인 영역의 넓이를 S_n 이라 하자.

예를 들어 S_3 은 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점에 고정시킨 길이가 3이 되도록 실을 잡고 정삼각형 둘레로 한 바퀴 돌릴 때 실이 움직인 영역의 넓이를 나타낸다. 이때, S_{20} 의 값은?(단, 실과 못의 굵기는 고려하지 않는다.)[4점]



① $\frac{287}{2}\pi$　② $\frac{289}{2}\pi$　③ $\frac{291}{2}\pi$
④ $\frac{293}{2}\pi$　⑤ $\frac{295}{2}\pi$

[난이도 : ★☆☆] [2008년 6월 학력평가]

168 [공통]좌표평면 위의 점 P_n 은 다음과 같은 규칙으로 점 P_{n+1} 로 움직인다.

점 P_n 의 좌표 $(x,\,y)$ 에 대하여 Ⅰ. $\log_2 xy$ 의 정수부분이 홀수이면 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(x+1,\,y)$ 이다. Ⅱ. $\log_2 xy$ 의 정수부분이 짝수이면 점 P_{n+1} 의 좌표는 $(x,\,y+1)$ 이다.

점 P_3 의 좌표가 $(2,\,3)$ 일 때, 점 P_6 의 좌표는?[3점]

① $(2,\,6)$　② $(3,\,5)$　③ $(4,\,4)$
④ $(5,\,3)$　⑤ $(6,\,2)$

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

169 [삭제]두 개의 물통 A, B에 각각 a_0, b_0의 물이 담겨 있다.

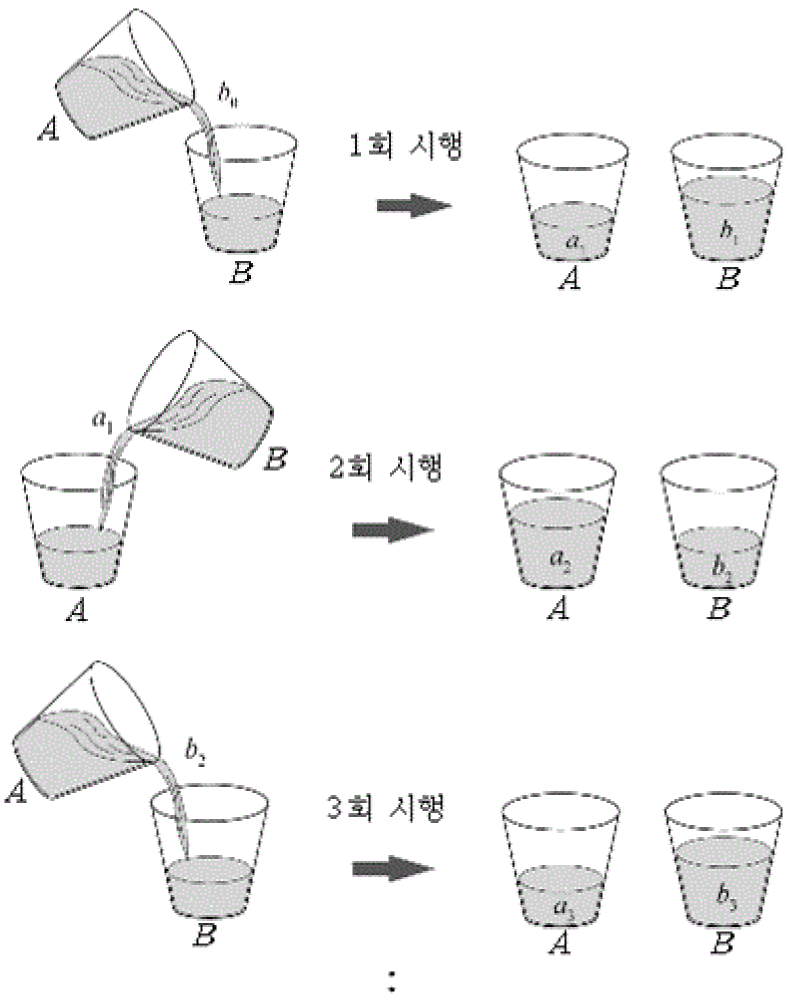
먼저 물통 A에서 물통 B로 b_0만큼 물을 옮겨 부었을 때, 물통 A, B에 남아있는 물의 양을 각각 a_1, b_1이라 하자. 다시 물통 B에서 물통 A로 a_1만큼 물을 옮겨 부었을 때, 물통 A, B에 남아있는 물의 양을 각각 a_2, b_2라 하자. 이와 같은 방법으로 물을 섞어 나갈 수 있을 때, n번 시행 후 물통 에 남아있는 물의 양을 각각 a_n, b_n이라 하자.

이때, a_n, b_n과 a_{n-1}, b_{n-1}의 관계를 행렬 X_n을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = X_n \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$X_{2008}+X_{2007}$의 모든 성분의 합은?

(단, 물을 옮기는 과정에서 유실되는 물은 없다.)[4점]



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

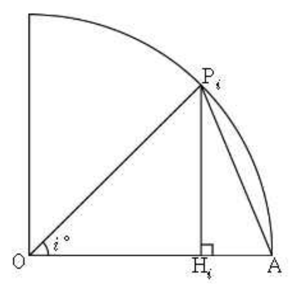
[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

170 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{1}{3}a_na_{n+1}$을 만족할 때, a_{30}의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

171 [공통]그림과 같이 길이가 1인 선분 OA를 반지름으로 하는 사분원 위에 점 $P_i(i=1, 2, 3, \cdots, 89)$를 $\angle P_iOA=i^\circ$가 되도록 잡는다. 점 P_i에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H_i라 하자.

이때, $2\sum_{i=1}^{89}\overline{P_iH_i}+\sum_{i=1}^{89}\overline{P_iA}^2$의 값을 구하시오.[4점]



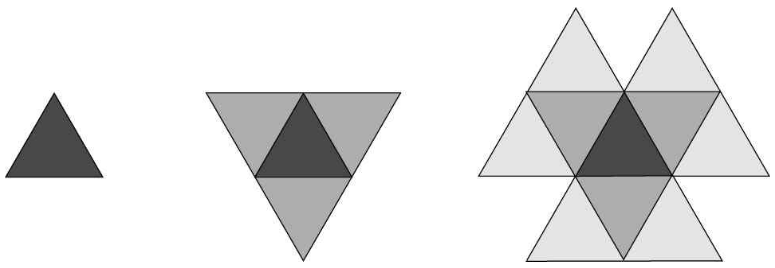
[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

172 그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형 모양의 타일을 다음과 같은 규칙으로 붙인다.

[1단계]:정삼각형 모양의 타일을 한 개 붙인다. [n단계]: $n-1$단계에서 붙여진 타일의 바깥쪽 테두리의 각 변에 정삼각형 모양의 타일을 붙인다.

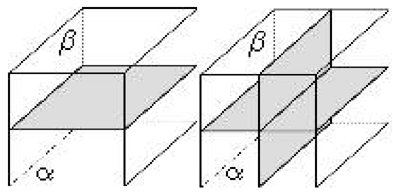
이와 같이 10단계를 시행했을 때, 타일로 덮인 부분의 전체의 넓이를 구하시오.[3점]

1단계, 2단계, 3단계, ...

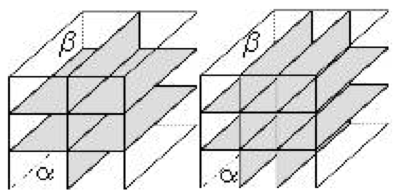


[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

173 정육면체의 밑면을 α, 옆면을 β라고 하자. α와 평행한 서로 다른 m개의 평면과 β와 평행한 서로 다른 n개의 평면으로 정육면체를 잘랐을 때, 얻어진 직육면체 모양의 조각의 개수를 $f(m, n)$으로 정의하자. 예를 들어 그림과 같이 $f(1, 0)=2$, $f(1, 1)=4$, $f(2, 1)=6$, $f(2, 2)=9$이다. 이때, $\sum_{k=1}^{10} f(k, k-1)$의 값은?[4점]



$f(1, 0)=2 f(1, 1)=4$

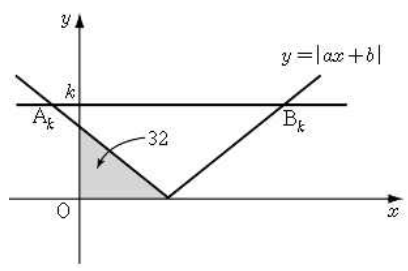


$f(2, 1)=6 f(2, 2)=9$

① 420 ② 430 ③ 440
④ 450 ⑤ 460

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

174 [공통]그림과 같이 $y=|ax+b|$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 32이고, 직선 $y=k$와 만나는 점이 각각 A_k, B_k이다. $\sum_{k=1}^{10} \overline{A_kB_k}=110$일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은?[4점]



① 63 ② 64 ③ 67
④ 67 ⑤ 67

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

175 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{(n+1)^n}<1$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)= [(가)] $<1=$ (우변)이므로 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면
$\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+k^k}{(k+1)^k}<1$
이므로 $1+2^2+3^3+\cdots+k^k<(k+1)^k$이다.
이때, $\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+k^k+[②]}{(k+2)^{k+1}}<\dfrac{(k+1)^k+[③]}{(k+2)^{k+1}}$
=[(다)]< 1
그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $\dfrac{1}{2}$, $(k+1)^{k+1}$, $\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^k$
② $\dfrac{1}{2}$, $(k+1)^{k+1}$, $\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$
③ $\dfrac{1}{2}$, $(k+1)^k$, $\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$
④ $\dfrac{3}{4}$, $(k+2)^k$, $\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^k$
⑤ $\dfrac{3}{4}$, $(k+1)^{k+1}$, $\left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^k$

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

176 [공통]자연수 n에 대하여 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$로 정의한다.

다음은 2이상인 모든 자연수 n에 대하여 등식 $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}=n(a_n-1)$이 성립함을 증명한 것이다.

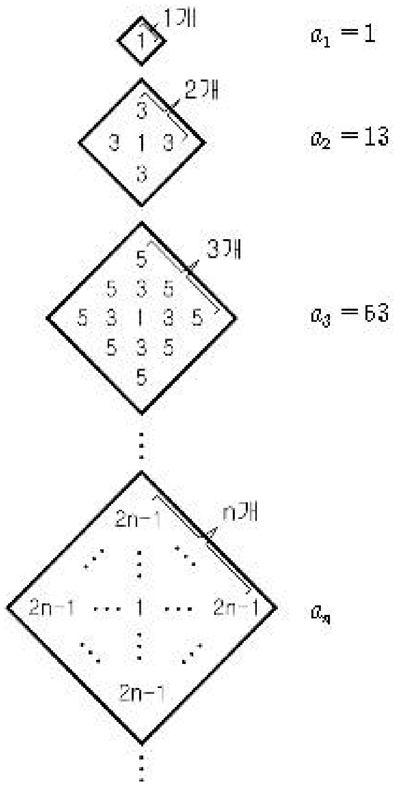
(1) $n=2$일 때, (좌변)=(우변)=[(가)]이므로 주어진 등식은 성립한다.
(2) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}=k(a_k-1)$
양변에 a_k를 더하면
$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k=$ [(나)]
그런데 $a_k=a_{k+1}-$ [(다)] 이므로
$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k=(k+1)(a_{k+1}-1)$
그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
따라서 2이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① 1, $ka_{k+1}-k$, $\dfrac{1}{k}$
② 1, $(k+1)a_k-k$, $\dfrac{1}{k+1}$
③ 1, $(k+1)a_k-k$, $\dfrac{1}{k}$
④ $\dfrac{3}{2}$, $ka_{k+1}-k$, $\dfrac{1}{k+1}$
⑤ $\dfrac{3}{2}$, $(k+1)a_k-k$, $\dfrac{1}{k+1}$

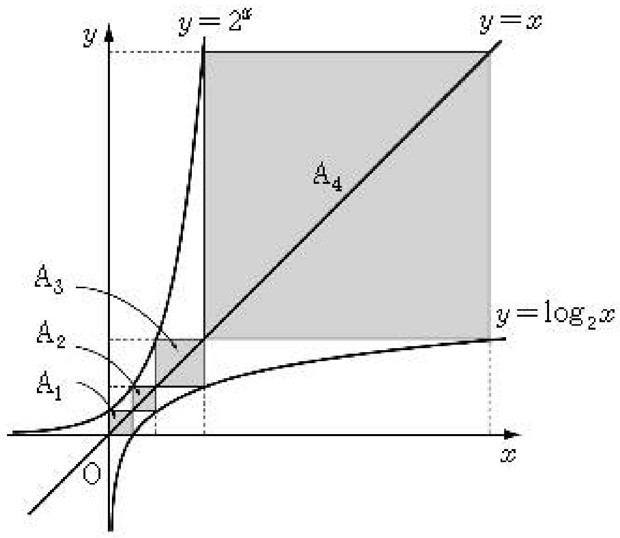
[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

177 [공통]그림과 같이 일정한 규칙에 따라 마름모의 변의 길이를 늘려가면서 수를 배열하려고 한다. 각 마름모 안의 수들의 합을 각각 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ 이라 할 때, a_7의 값을 구하시오.[3점]



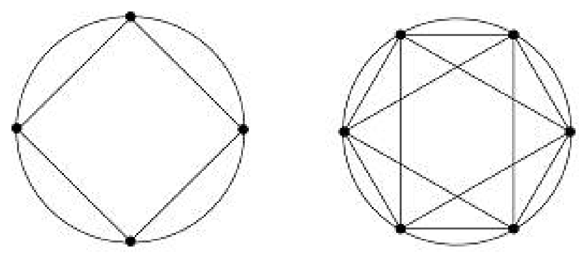
[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

178 그림에서 A_1은 원점 O, 직선 $y=x$ 위의 한 점과 두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$의 그래프가 좌표축과 만나는 두 점을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형이다. A_2, A_3, A_4는 두 함수 $y=2^x, y=\log_2 x$의 그래프 위의 각각의 한 점, $y=x$ 위의 두 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형이다. A_1과 A_2, A_2와 A_3, A_3와 A_4는 각각 한 개의 꼭짓점만을 공유한다. 이때, A_4의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

179 원에 내접하는 정 n각형의 꼭짓점 중에서 서로 다른 4개의 점을 연결하여 만든 직사각형의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_4=1$, $a_6=3$이다. $\sum_{k=2}^{20} a_{2k}$의 값은?[4점]



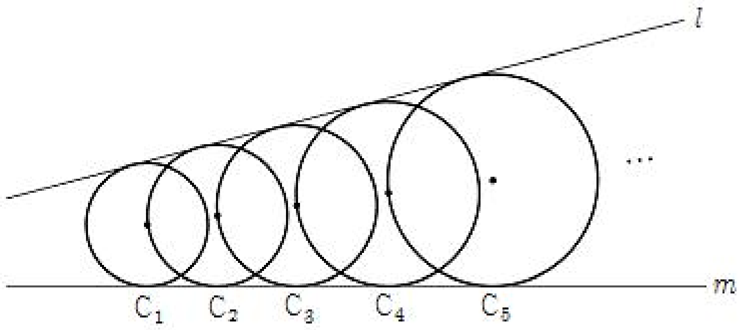
$a_4=1 a_6=3$

① 960　② 1020　③ 1140
④ 1235　⑤ 1330

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

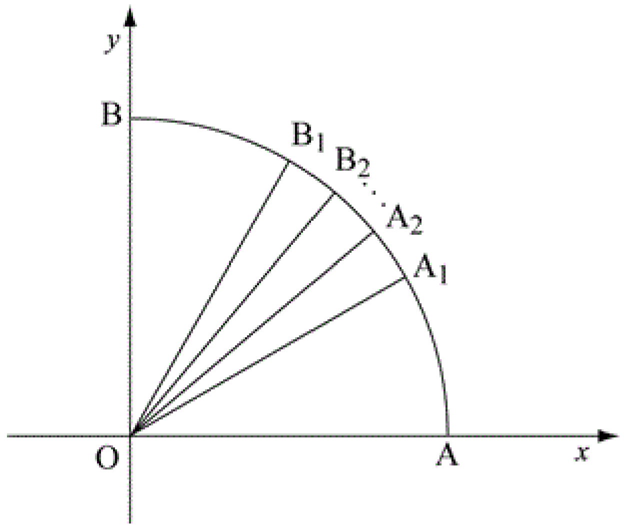
180 [공통]그림과 같이 두 직선 l, m에 동시에 접하는 원 C_1이 있다. 원 C_1의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_1보다 큰 원을 C_2라 하자.

원 C_2의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_2보다 큰 원을 C_3라 하자. 이와 같은 방법으로 원 C_k의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_k보다 큰 원을 C_{k+1}이라 하자.($k=1, 2, 3, \cdots$)원 C_1의 넓이가 1, 원 C_5의 넓이가 4일 때, 원 C_{19}의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

181 그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle AOB$를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_1, B_1이라 하고, $\angle A_1OB_1$을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 A_2, B_2라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle A_{10}OB$의 크기는?[4점]



① $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^9}\right)$ ② $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^9}\right)$ ③ $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)$

④ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{10}}\right)$ ⑤ $\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{3^{11}}\right)$

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

182 [공통]$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right) < 3-\frac{1}{n}\cdots$ ① 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

> (i) $n=2$일 때 (좌변)$=\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{9}{4}$,
>
> (우변)$=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
>
> 이므로 ①이 성립한다.
>
> (ii) $n=k(k\geq 2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면
>
> $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right) < 3-\frac{1}{k}\cdots$ ②
>
> ② 의 양변에[㈎]를 곱하면
>
> $\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)$([㈎])
>
> $<\left(3-\frac{1}{k}\right)$([㈎])$\cdots$ ③
>
> ③ 의 우변을 정리하면
>
> (우변) $=3-\frac{[(나)]}{k(k+1)^3}$
>
> 이때, $\frac{[(나)]}{k(k+1)^3}-\frac{1}{k+1}$ [㈐] 0
>
> 따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.
>
> 그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 ㈎, (나), ㈐에 알맞은 것은?[4점]

① $1+\frac{1}{(k+1)^3}$, k^3+3k^2+2, $<$

② $1+\frac{1}{(k+1)^3}$, k^3+3k^2+2, $>$

③ $1+\frac{1}{(k+1)^3}$, k^3-3k^2+2, $<$

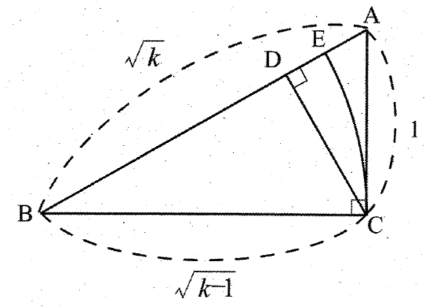
④ $\frac{1}{(k+1)^3}$, k^3-3k^2+2, $>$

⑤ $\frac{1}{(k+1)^3}$, k^3-3k^2+2, $<$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

183 [공통]다음은 2이상의 자연수 n에 대하여

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>$ [㈐] 이 성립함을 증명하는 과정이다.

> 
>
>
> 위의 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{k}$, $\overline{BC}=\sqrt{k-1}$, $\overline{AC}=1$, $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 점 C로부터 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라 하고 $\overline{BC}=\overline{BE}$가 되도록 선분 AB위에 점 E를 정하자.
>
> 이때, $\overline{AD}=$ [㈎] $\overline{AE}=$ [㈏] 고 2 이상의 자연수 k에 대하여
>
> [㈎]>[㈏]
>
> $\sum_{k=2}^{n}$ [㈎] $>\sum_{k=2}^{n}$ [㈏]
>
> 따라서 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq 1+\sum_{k=2}^{n}$ [㈏] =[㈐]
>
> 이므로
>
> $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>$ [㈐] 가 성립한다.

위 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 들어갈 식으로 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}$, $\sqrt{k}-1$, $\sqrt{n+1}$

② $\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}$, $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$, $\sqrt{n+1}$

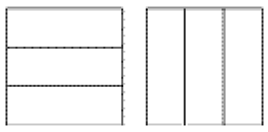
③ $\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sqrt{k}-1$, $\sqrt{n}$

④ $\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$, $\sqrt{n}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{k}}$, $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$, $\sqrt{n-1}$

[난이도 : ★★★] [2008년 04월 학력평가]

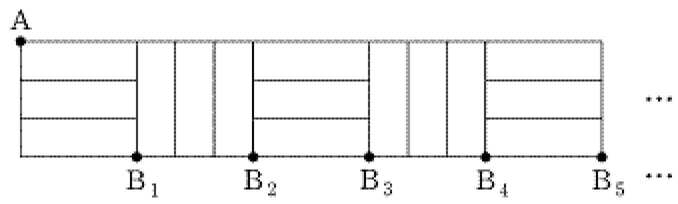
184 [공통]다음과 같이 정사각형을 가로 방향으로 3등분하여 [도형 1]을 만들고, 세로 방향으로 3등분하여 [도형 2]를 만든다.



[도형 1] [도형 2]

[도형 1]과 [도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래와 같은 도형을 만든다.

그림과 같이 첫 번째 붙여진 [도형 1]의 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 A라 하고, [도형 1]의 개수와 [도형 2]의 개수를 합하여 n개 붙여 만든 도형의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 B_n이라 하자.



꼭짓점 A에서 꼭짓점 B_n까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n이라 할 때, a_3+a_7의 값은? [4점]

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

[난이도 : ★★★] [2008년 11월 학력평가]

185 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$ 일 때, 부등식

$\dfrac{n(n+1)}{2}<a_n<\dfrac{(n+1)^2}{2}$ 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, $1<a_1=\sqrt{2}<2$이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, $\dfrac{k(k+1)}{2}<a_k<\dfrac{(k+1)^2}{2}$ 이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{k(k+1)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<a_{k+1}<\dfrac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}$

이다.

한편, $\sqrt{(k+1)(k+2)}>$ [(가)] 이므로

$\dfrac{k(k+1)}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}>$ [(나)] 이다.

$k+1>0,\ k+2>0$이므로

$\sqrt{(k+1)(k+2)}<$ [(다)] 이고,

$\dfrac{(k+1)^2}{2}+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\dfrac{(k+2)^2}{2}$ 이다.

그러므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

(가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $k+1$ $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ $\dfrac{2k+1}{2}$

② $k+1$ $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ $\dfrac{2k+3}{2}$

③ $k+1$ $\dfrac{(k+2)(k+3)}{2}$ $\dfrac{2k+1}{2}$

④ $k+2$ $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ $\dfrac{2k+1}{2}$

⑤ $k+2$ $\dfrac{(k+2)(k+3)}{2}$ $\dfrac{2k+3}{2}$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

186 [공통]모든 실수 x에 대하여 행렬 $A(x)$를

$A(x)=\begin{pmatrix} x-1, 1 \\ -1, x+1 \end{pmatrix}$이라 하자.

다음은 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여
$\{A(x)\}^n = A(x^n)+(nx^{n-1}-1)A(0)$이 성립함을
수학적귀납법으로 증명한 것이다.

임의의 실수 x, y에 대하여 $A(x)A(y)=A([\ (가)\ ]\ (나)\ ]$ ①   (ⅰ) $n=2$일 때, ①에 의하여 $\{A(x)\}^2 = A(x^2)+(2x-1)A(0)$이 성립한다.   (ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $\{A(x)\}^k = A(x^k)+(kx^{k-1}-1)A(0)$이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. $\{A(x)\}^{k+1}$ $=A(x)\{A(x)\}^k$ $=A(x)A(x^k)+(kx^{k-1}-1)A(x)A(0)$ $=A(x^{k+1})+(x^k+x-1)A(0)+(kx^{k-1}-1)([\ (다)\ ]$ $=A(x^{k+1})+\{(k+1)x^k-1\}A(0)$ 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.   따라서 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① xy, $x+y-1$, $A(0)$
② xy, $x+y-1$, $xA(0)$
③ xy, $x-y+1$, $A(0)$
④ $x+y$, $x+y-1$, $xA(0)$
⑤ $x+y$, $x-y+1$, $A(0)$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

187 수열 $\{a_n\}$이

$a_1=2$, $2n\cdot a_n a_{n+1} = a_n - a_{n+1}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$으로 정의될 때,

일반항 a_n은 $a_n = \dfrac{2}{2n^2+pn+q}$이다. $5p^2q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 상수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 3월 학력평가]

188 [공통]수열 $\{a_n\}$을

$a_1=1$, $a_{2n}=a_n+1$, $a_{2n+1}=a_n-1\,(n=1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의한다.

다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_6=1$ ㄴ. $n=2^k$ (k는 자연수)이면 $a_n=k+1$이다.   ㄷ. $n=2^k+1$ (k는 자연수)이면 $a_n=k-1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

189 [공통]수렴하는 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$의 항들 사이에 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$이 성립한다. 다음의 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, $0<a_1<b_1$)[4점]

[보기]
ㄱ. $a_{n+1}>b_{n+1}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ ㄴ. $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{\dfrac{a_n}{b_n}}+\sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}}\right)\right\}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

190 [공통] $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)>1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (1) $n=2$ 일 때, $\frac{3}{8}>$ [(가)]
>
> 이므로 주어진 부등식은 성립한다.
>
> (2) $n=k(k \geq 2)$ 일 때,
>
> $$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$
>
> 이라 가정하면
>
> $$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\times[(나)]$$
>
> $$>1-[(다)]$$
>
> $$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$
>
> $$>1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$
>
> 따라서, $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.
>
> 그러므로(1), (2)에 의하여 $n \geq 2$ 인 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{4}$, $1-\frac{1}{2^{k+1}}$, $\frac{1}{2^{k+1}}$

② $\frac{1}{4}$, $1-\frac{1}{2^{k+1}}$, $\frac{1}{2^k}$

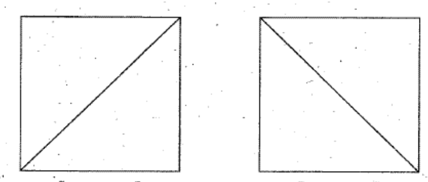
③ $\frac{1}{4}$, $1-\frac{1}{2^k}$, $\frac{1}{2^k}$

④ $\frac{1}{8}$, $1-\frac{1}{2^{k+1}}$, $\frac{1}{2^{k+1}}$

⑤ $\frac{1}{8}$, $1-\frac{1}{2^k}$, $\frac{1}{2^k}$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

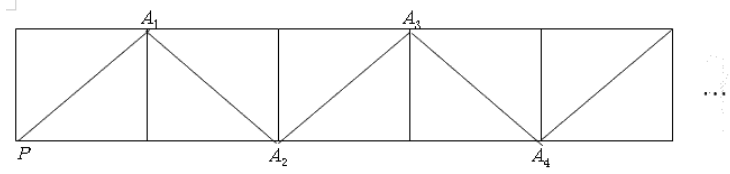
191 [공통] 다음과 같이 정사각형에 대각선을 각각 하나씩 그어 [도형 1]과 [도형 2]를 만든다.



[도형1] [도형2]

[도형 1]과[도형 2]를 번갈아 가며 계속 붙여 아래 그림과 같은 도형을 만든다.

그림과 같이 처음으로 붙여지는[도형 1]의 왼쪽 아래 꼭짓점을 P라 하고, [도형 1]의 개수와[도형 2]의 개수를 합하여 n개 붙여 만든 도형에서 가장 오른쪽 대각선의 끝점을 A_n이라고 하자.



지나온 선분으로 되돌아 갈 수 없고, 오른쪽 또는 위 아래, 대각선으로만 움직인다.

꼭짓점 P에서 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$을 순서대로 모두 거쳐서 A_n까지 도착하는 경로의 수를 a_n이라고 할 때, a_5의 값은?[4점]

① 124 ② 134 ③ 144
④ 154 ⑤ 164

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

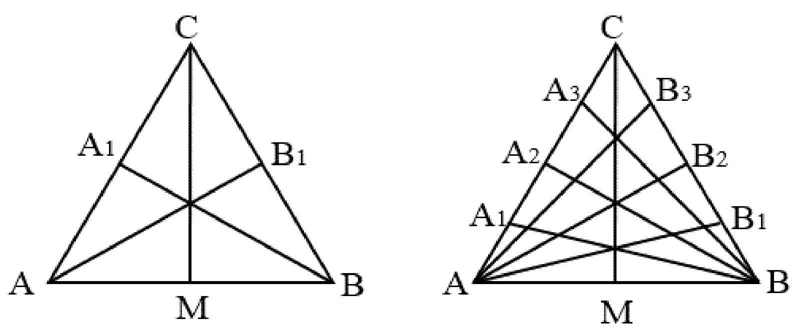
192 정삼각형 ABC에서 변 AC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$이라 하고, 변 BC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$이라 하자.

다음 [단계]와 같은 순서로 선분을 긋는다.

[단계 1] 꼭짓점 C와 선분 AB의 중점 M을 연결한 선분 CM을 긋는다. [단계 2] 꼭짓점 A와 점 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$을 각각 연결한 선분 $AB_1, AB_2, AB_3, \cdots, AB_n$을 긋는다. [단계 3] 꼭짓점 B와 점 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$을 각각 연결한 선분 $BA_1, BA_2, BA_3, \cdots, BA_n$을 긋는다.

이때, 나누어진 정삼각형 ABC의 내부 영역의 개수를 a_n이라 하자.

예를 들어 $a_1=6$, $a_3=20$이다. a_{10}의 값은? [4점]



① 132 ② 136 ③ 140
④ 144 ⑤ 148

[난이도 : ★★★] [2008년 03월 학력평가]

193 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = pa_n + 1$이 성립한다. [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, p는 1이 아닌 상수이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $a_1 = \dfrac{1}{1-p}$ ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다. ㄷ. $p=\dfrac{2}{3}$이면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

194 [공통]다음은 4이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}<1+\frac{2n-3}{n(n-1)}$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.(단, $n \neq n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$)

> $a_n=\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$ 이라 하자.
>
> (ⅰ) $n=4$일 때, (좌변) $=\frac{1!+2!+3!+4!}{4!}=\frac{33}{24}$, (우변) $=1+\frac{5}{12}=\frac{17}{12}$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k\,(k\geq4)$일 때, 성립한다고 가정하면 $a_k<1+\frac{2k-3}{k(k-1)}$ 이다.
>
> $n=k+1$일 때, $a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+1)!}=1+[\text{(가)}]$
>
> 한편, $(k-1)^2\,[\text{(나)}]$ 이므로
>
> $\frac{2k-3}{k(k-1)}<\frac{k-1}{k}$ 이다.
>
> 그런데, $1+\frac{2k-3}{k(k-1)}<\frac{[\text{(다)}]}{k}$ 이므로
>
> $a_{k+1}<1+[\text{(가)}]$
>
> $<1+[①]\frac{[③]}{k}$
>
> $=1+\frac{2(k+1)-3}{(k+1)\{(k+1)-1\}}$ 이다.
>
> 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
>
> 따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 4이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $\frac{1}{k}$, $>$, $2k-1$

② $\frac{1}{k}$, `2k +1`

③ $\frac{1}{k+1}$, $>$, $2k-1$

④ $\frac{1}{k+1}$, $>$, $2k+1$

⑤ $\frac{1}{k+1}$, `2k +1`

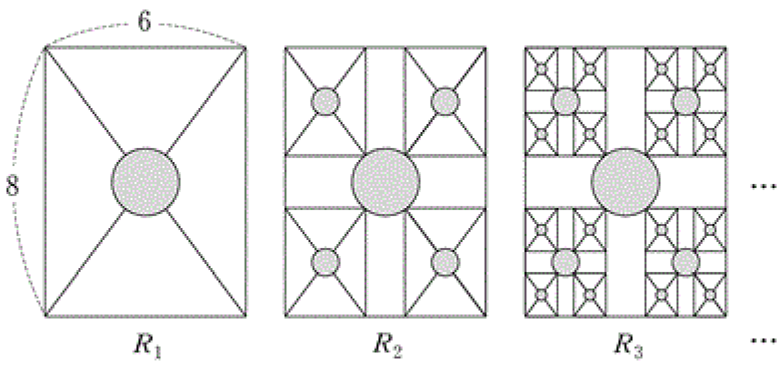
[난이도 : ★★★] [2008년 04월 학력평가]

195 [공통]아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?(단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)[4점]

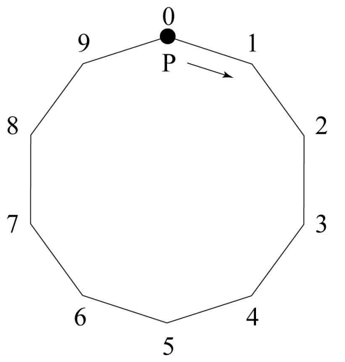


① $\frac{37}{9}\pi$ ② $\frac{34}{9}\pi$ ③ $\frac{31}{9}\pi$

④ $\frac{28}{9}\pi$ ⑤ $\frac{25}{9}\pi$

[난이도 : ★☆☆] [2007년 10월 학력평가]

196 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정십각형의 각 꼭짓점에 0부터 9까지 숫자가 적혀 있다. 점 P는 다음과 같은 규칙에 따라 정십각형 위를 시계 방향으로 움직인다.



㈎점 P는 0에서 출발 한다. ㈏점 P의 이동 거리는 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 따른다. $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n$ ㈐점 P가 0에서 a_1만큼 움직인 점의 위치를 P_1, 점 P가 P_1에서 a_2만큼 움직인 점의 위치를 P_2, $\cdots$ 점 P가 P_{n-1}에서 a_n만큼 움직인 점의 위치를 P_n이라 한다.

이때, P_{10}의 위치에 적힌 수는?[4점]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

197 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, & (a_n \geq 2) \\ \sqrt[3]{2}\,a_n, & (a_n<2)\end{cases}$ 를 만족시킬 때, a_{112}의 값은?[3점]

① 1 ② $\sqrt[3]{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt[3]{4}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

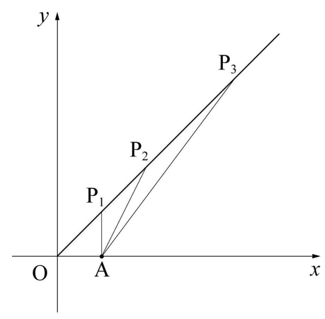
198 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1,\ 2S_n=a_na_{n+1}\,(n=1,2,3,\cdots)$로 정의되는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_2=2$ ㄴ. $a_{n+1}-a_{n-1}=2\,(n\geq 2)$ ㄷ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

199 점 A의 좌표는 $(1,0)$, 점 P_n의 좌표가 $(2^{n-1},2^{n-1})$일 때, $\triangle AP_nP_{n+1}$의 넓이를 a_n이라고 하자. a_{10}의 값은?(단, n은 자연수)[4점]



① 128 ② 160 ③ 192
④ 224 ⑤ 256

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

200 [공통]다음은 $a_1=2$이고 $\sqrt[3]{a_{n+1}}=4a_n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> 주어진 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
> $\log_2\sqrt[3]{a_{n+1}}=\log_2 4a_n$ 이고 $\log_2 a_{n+1}=$ [가] $+3\log_2 a_n$
> $\log_2 a_{n+1}+$ [나] $=3(\log_2 a_n+$ [나]
> 그러므로 수열 $\{\log_2 a_n+$[나]는 공비가 3인 등비수열이다.
> 따라서, .$\log_2 a_n=$ [다]
> $\therefore a_n=2^{[다]}$

위의 내용 중에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① 3, 6, $4\cdot 3^{n-1}-6$
② 3, 6, $2\cdot 3^{n-1}-6$
③ 6, 6, $4\cdot 3^{n-1}-3$
④ 6, 3, $4\cdot 3^{n-1}-3$
⑤ 6, 3, $2\cdot 3^{n-1}-3$

[난이도 : ★★☆] [2007년 4월 학력평가]

201 수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{4} \\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n^2+2n} \end{cases}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

202 자연수 n에 대하여 점 P_n이 원 $x^2+y^2=1$위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.(단, 점 P_n은 좌표축 위의 점이 아니다.)

> (가). 점 P_n이 제 1사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1}은 점 P_n을 원 위의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 이동시킨 점이다.
> (나). 점 P_n이 제 2사분면 또는 제 4사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1}은 점 P_n을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.
> (다). 점 P_n이 제 3사분면 위의 점이면, 점 P_{n+1}은 점 P_n을 y축에 대하여 대칭이동시킨 점이다.

점 P_1의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$일 때, 점 P_{2007}의 좌표는?[3점]

① $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ② $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

203 [공통]다음은

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$인 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$에서 $a_{n+2}-a_{n+\cdots}$ ①
> $(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$이라 하면,
> $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha be\cdots$ ②
> ① 과 ②에서 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$을 얻을 수 있다.
> $\alpha,\ \beta$는 이차방정식[(가)]의 두 근이다.
> $\therefore\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 또는 $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
> $(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$에서 수열 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$은 첫째항이 $a_2-\alpha a_1$, 공비가 β인 등비수열이다.
> $\therefore a_{n+1}-\alpha a_n=(a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1}$
> (1) $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
> $\therefore a_{n+1}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_n=$ [(나)] ...③
> (2) $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
> $\therefore a_{n+1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n=$ [(다)] ...④
> ④ -③을 하면,
> $\therefore a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}$ {(다)-(나)}이 된다.

위의 풀이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $x^2-x-1=0,\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

② $x^2+x-1=0,\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

③ $x^2-x-1=0,\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

④ $x^2+x-1=0,\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $x^2-x-1=0,\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

204 [공통]수열 $\{a_n\}$이

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의될 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수임임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, $a_4=$ [가]이므로 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면
> $a_{4(k+1)}=2a_{4k+3}+a_{4k+2}$
> $=$ [나]
> $=$ [다]라]
> 따라서 $a_{4(k+1)}$은 12의 배수이다.
> 그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?[3점]

① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

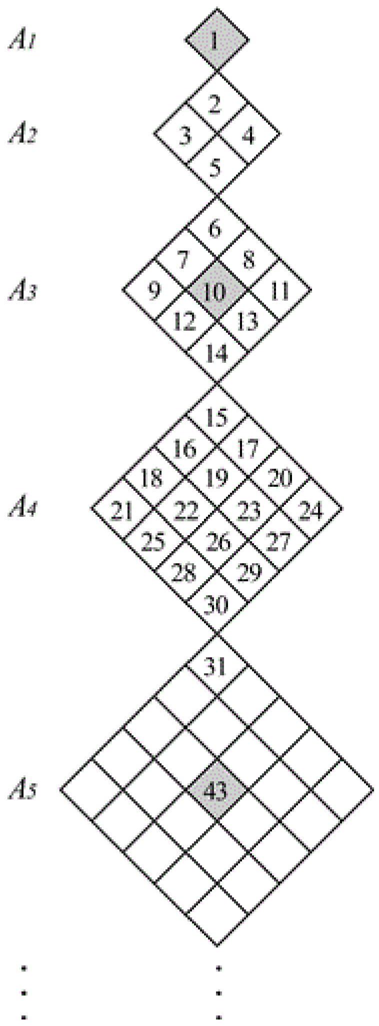
[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

205 $a_1=2,\ a_{n+1}=10a_n+81\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 이때 a_{10}의 각 자리의 수의 합은?[3점]

① 68 ② 70 ③ 72
④ 74 ⑤ 76

[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

206 그림과 같이 크기가 같은 정사각형 1개, 4개, 9개, ...로 만들어진 도형 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 이 이어져 있다. 각 정사각형에 자연수를 규칙적으로 적어 나갈 때, $A_1, A_3, A_5, \cdots$ 에는 정중앙(어두운 부분)에 적힌 수가 있다. 예를 들면, A_3의 정중앙에 적힌 수는 10이고, A_5의 정중앙에 적힌 수는 43이다. 이때 A_9의 정중앙에 적힌 수를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

207 수열 $\{a_n\}$이 $\begin{cases} a_1 = 1 : a_2 = 3 : a_3 = 5 : a_4 = 7 \\ a_{k+4} = 2a_k (k = 1, 2, 3 \cdots) \end{cases}$ 으로 정의될 때,

$\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 11월 학력평가]

208 다음과 같이 각 행의 등식이 성립하도록[]안에 자연수를 넣으려고 한다.

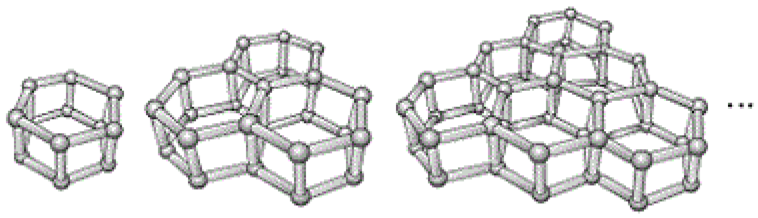
> 제 1행에 있는 3개의[]안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 1인 등차수열을 이룬다.
> 제 2행에 있는 5개의[]안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 2인 등차수열을 이룬다.
> 제 3행에 있는 7개의[]안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 3인 등차수열을 이룬다.
> ⋮
> 제 n행에 있는 $(2n+1)$개의[]안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 n인 등차수열을 이룬다.
>
> 제1행　$\square + \square = \square$
>
> 제2행　$\square + \square + \square = \square + \square$
>
> 제3행　$\square + \square + \square + \square = \square + \square + \square$
>
> ⋮
>
> 제n행　$\square + \square + \square + \cdots + \square = \square + \square + \cdots + \square$

제 n행의 맨 왼쪽의 수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

209 그림과 같이 쇠구슬과 막대자석을 이용하여 육각기둥 모양을 1개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_1, 육각기둥 모양을 3개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_2, 육각기둥 모양을 6개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_3, ⋮

이와 같은 과정을 계속하였을 때, a_{10}의 값은?[4점]



① 532 ② 531 ③ 532
④ 533 ⑤ 534

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

210 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$ 가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

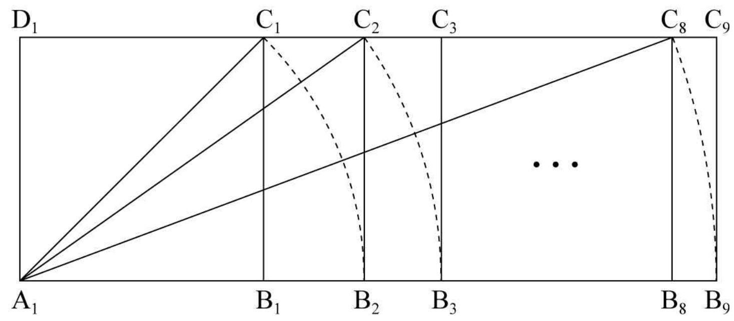
(i) $n=1$일 때, (좌변) = (우변) = [가]이므로 성립한다. (ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$ 이 식의 양변에 [나]를 더하면 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{k}{2^k}+$ [나] $=2-\frac{k+2}{2^k}+$ [나] $=2-$ [다]이다. 따라서, $n=k+1$일 때도 성립한다. (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 값들의 합은?[4점]

① $\frac{2^{k-1}+k+1}{2^{k+1}}$ ② $\frac{2^{k-1}+k+2}{2^{k+1}}$ ③ $\frac{2^{k-1}+k+3}{2^{k+1}}$
④ $\frac{2^{k-1}+k+1}{2^k}$ ⑤ $\frac{2^{k-1}+k+2}{2^k}$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

211 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 대각선 A_1C_1의 길이와 같은 길이의 선분 A_1B_2를 가로로 하는 직사각형 $A_1B_2C_2D_1$을 만들고, 같은 방법으로 대각선 A_1C_2의 길이와 같은 길이의 선분 A_1B_3을 가로로 하는 직사각형 $A_1B_3C_3D_1$을 만든다.이와 같은 방법으로 직사각형을 계속 만들 때, $\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\cdots+\overline{B_8B_9}$의 값은?[4점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

212 $n \ge 2$ 인 자연수일 때, 부등식

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdots$ ① 을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=2$일 때, 좌변은 $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{12}$ 이고 우변은 $\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$ 이므로 성립한다.

(ii) $n=k(k\ge 2)$일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)\cdots$ ②

② 식의 양변에[가]를 더하면

$\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+$ [가]

한편 $\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+$ [가]에서 $2(2k+1)>4k$임을 이용하여

$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+$ [가] $<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+$ [나] $=\frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}$

따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 부등식 ①은 $n\ge 2$인 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$, $\frac{1}{2k(k+1)}$

② $\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$, $\frac{1}{4k(k+1)}$

③ $\frac{1}{2k(2k-1)}$, $\frac{1}{2k(k+1)}$

④ $\frac{1}{2k(2k-1)}$, $\frac{1}{4k(k+1)}$

⑤ $\frac{1}{2k(2k-1)}$, $\frac{1}{k(k+1)}$

[난이도 : ★★★] [2007년 11월 학력평가]

213 [공통]다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 $a_n=pn+q$일 때, 모든 자연수 n에 대하여

$na_1+(n-1)a_2+(n-2)a_3+\cdots+a_n=\frac{1}{6}n(n+1)(pn+2p+3q)$ 임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

i) $n=1$일 때, (좌변) = (우변) = [가]이므로 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$ka_1+(k-1)a_2+(k-2)a_3+\cdots+a_k$

$=\frac{1}{6}k(k+1)(pk+2p+3q)$

이 식의 양변에[나]를 더하면

$ka_1+(k-1)a_2+(k-2)a_3+\cdots+a_k+$[나]

$=\frac{1}{6}k(k+1)(pk+2p+3q)+$[나]

$=\frac{1}{6}(k+1)\{pk^2+(5p+3q)k+$ [다] $\}$

$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)\{p(k+1)+2p+3q\}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

i), ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[4점]

① pq, $a_1+a_2+\cdots+a_k$, $3(p+q)$

② pq, $a_1+a_2+\cdots+a_k$, $4(p+q)$

③ $p+q$, $a_1+a_2+\cdots+a_k$, $6(p+q)$

④ $p+q$, $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$, $4(p+q)$

⑤ $p+q$, $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$, $6(p+q)$

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

214 다음은 양수 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n-a^n-b^n \geq 2^{2n}-2^{n+1}$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]
(i) $n=1$일 때, $(a+b)-a-b \geq 2^2-2^2$이므로 성립한다. (ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $(a+b)^k-a^k-b^k \geq 2^{2k}-2^{k+1}$이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$이면 $ab=a+b$이므로 ab의 최솟값은 [가]이다. $(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}$ $=$[나]$\{(a+b)^k-a^k-b^k\}+a^kb+ab^k$ $\geq$ [가] $(2^{2k}-2^{k+1})+$ [다] $=2^{2(k+1)}-2^{(k+1)+1}$ 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. 따라서 (i), (ii)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n-a^n-b^n \geq 2^{2n}-2^{n+1}$이다.

이 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[4점]

① 2, $(a-b)$, 2^{k+1}
② 2, $(a-b)$, 2^{k+2}
③ 2, $(a+b)$, 2^{k+2}
④ 4, $(a+b)$, 2^{k+1}
⑤ 4, $(a+b)$, 2^{k+2}

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

215 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 $(n^2-n+1)+(n^2-n+3)+(n^2-n+5)+\cdots$

$+(n^2+n-3)+(n^2+n-1)=n^3$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변) $=1$, (우변) $=1^3$이므로 성립한다. (ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $(k^2-k+1)+(k^2-k+3)+\cdots+(k^2+k-1)=k^3$ $n=k+1$일 때 $(k^2+k+1)+(k^2+k+3)+\cdots+$ [㈎] $=(k^2-k+1)+(k^2-k+3)+\cdots+(k^2+k-1)$ $+$ [㈏] $+$ [㈎] $=$[㈐] 따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다. 그러므로 주어진 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 차례대로 알맞은 것은?[4점]

① k^2+3k-1, $2k^2$, k^3+1
② k^2+3k-1, $2(k^2+1)$, $(k+1)^3$
③ k^2+3k-1, $2k(k+1)$, k^3+1
④ k^2+3k+1, $2k^2$, $(k+1)^3$
⑤ k^2+3k+1, $2k(k+1)$, $(k+1)^3$

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

216 [공통]그림과 같이 모든 자연수를 1부터 차례대로 나열하였다.

3의 배수와 4의 배수를 제외하고 남아 있는 수를 크기순으로 나열하여 수열 $\{a_n\}$을 만들었다.

1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, $\cdots$

그림에서 a_{2007}이 i행 j열의 수일 때, $i+j$의 값은?[4점]

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	제7열	제8열	제9열	제10열
제1행	1	2	~~3~~	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	10
제2행	11	~~12~~	13	14	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
제3행	~~21~~	22	23	~~24~~	25	26	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
제4행	31	~~32~~	~~33~~	34	35	~~36~~	37	38	~~39~~	~~40~~
제5행	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	46	47	~~48~~	49	50
제6행	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	58	59	~~60~~
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

① 405　② 407　③ 409
④ 411　⑤ 413

[난이도 : ★★☆] [2006년 11월 학력평가]

217 [공통]모든 자연수 n에 대하여 "$2^{3^n}+1$은 3^{n+1}으로 나누어떨어진다." …① 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

(ⅰ) $n=1$일 때, 2^3+1은 3^2으로 나누어떨어지므로 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때, $2^{3^{k+1}}+1=\left(2^{3^k}\right)^3+1=([가])\left\{\left(2^{3^k}\right)-\left(2^{3^k}\right)+1\right\}$

에서 2^{3^k}은 3으로 나누면 나머지가 [(나)]이고 $\left(2^{3^k}\right)^2-2^{3^k}+1$을 3으로 나누면 나머지는 [(다)]이므로

$2^{3^{k+1}}+1$은 3^{k+2}으로 나누어떨어진다.

따라서, $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 증명에서 (가)~(다)를 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $2^{3^k}-1$, 0, 1
② $2^{3^k}-1$, 0, 2
③ $2^{3^k}+1$, 1, 0
④ $2^{3^k}+1$, 2, 1
⑤ $2^{3^k}+1$, 2, 0

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 학력평가]

218 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ 이 자연수임을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

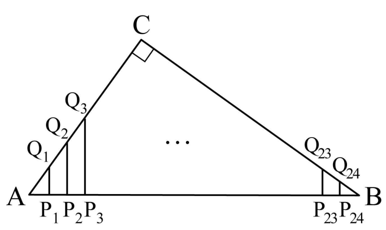
> (i) $n=1$일 때 $\frac{1^3}{6}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{3}=1$
>
> (ii) $n=k(k\geq 1)$일 때 $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$가 자연수라고 가정하자.
>
> $\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$
>
> $=\left(\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}\right)+\frac{[(가)]}{2}$
>
> 에서 $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$가 자연수이고 [(가)]는(은) [(나)]의 배수이므로
>
> $\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$ 은 자연수이다.
>
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$은 자연수이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[3점]

① $k(k+1)$ 2
② $(k+1)(k+2)$ 2
③ $(k+1)(k+2)$ 4
④ $(k+2)(k+3)$ 2
⑤ $(k+2)(k+3)$ 4

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

219 그림과 같이 $\overline{AC}=15$, $\overline{BC}=20$이고, $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 25등분하는 점 $P_1, P_2, \cdots, P_{24}$를 지나 변 AB에 수직인 직선을 그어 변 AC또는 변 CB와 만나는 점을 각각 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{24}$라 하자. $\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$의 값을 구하시오.[4 점]

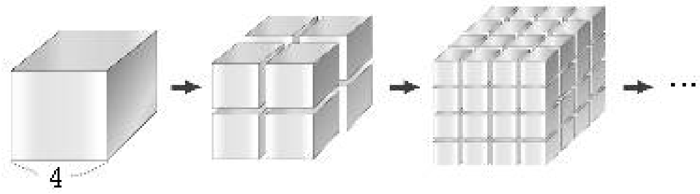


[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

220 [공통]한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다.

[그림 1]은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.[그림 2]는[그림 1]의 정육면체들의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.

(1회 시행 후)(2회 시행 후)



[그림 1][그림 2]

이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체들의 겉넓이의 합은?[4점]

① 3×2^{10} ② 3×2^{12} ③ 3×2^{15}
④ 3×2^{17} ⑤ 3×2^{20}

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

221 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=9$, $(a_{n+1})^3=a_n$으로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n$ 의 값은?[3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

222 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립함을 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=1$일 때, $4>2+1$
> $n=2$일 때, $8>6+1$이므로 성립한다.
> (ⅱ) $n=k(k\ge 2)$일 때, $2^{k+1} >$ [㈎]$+1 \cdots$ ①
> 이 성립한다고 가정하자.
> ① 의 양변에 2를 곱하면
> $2^{k+2} > 2(k^2+k+1)$
> 이때, $2(k^2+k+1)-$ [㈏]$=k^2-k-1$
> $k\ge 2$일 때, k^2-k-1 [㈐] 0이므로
> $2^{k+2} > 2(k^2+k+1) >$ [㈏]
> $\therefore 2^{k+2} >$ [㈏]
> 따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1)+1$이 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[3점]

① $k(k-1)$, $(k+1)(k+2)$, $<$
② $k(k+1)$, $(k+1)(k+2)$, $>$
③ $k(k-1)$, $(k+1)(k+2)+1$, $>$
④ $k(k-1)$, $(k+1)(k+2)+1$, $<$
⑤ $k(k+1)$, $(k+1)(k+2)+1$, $>$

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 학력평가]

223 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고 $na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n S_{n+2}}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

224 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n+2(n\ge 1)$로 정의될 때, a_{20}은?[4점]

① $3^{20}-1$ ② $3^{21}-1$ ③ $3^{22}-1$
④ $3^{23}-1$ ⑤ $3^{24}-1$

[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

225 [공통] $a_1=2$, $a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$(단, $n\ge 2$)로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 값은?[3점]

① 2^{10} ② 2^{11} ③ 2^{12}
④ 2^{13} ⑤ 2^{14}

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

226 [공통]다음은 n부터 $2n-1$개의 연속한 자연수의 합에 대하여

$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

i) $n=1$일 때, (좌변)=1, (우변)=1^2이므로 성립한다. ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)=(2k-1)^2$ $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. $(k+1)+(k+2)+\cdots+$ [(가)] $=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)+$ [(나)] $=(2k-1)^2+$ [(나)] $=$ [(다)] 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. i), ii)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다)를 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $3k+1$, $8k$, $(2k+1)^2$
② $3k+1$, $8k$, $4k^2$
③ $3k+2$, $8k$, $(2k+1)^2$
④ $3k+2$, $4k-1$, $(2k+1)^2$
⑤ $3k+2$, $4k-1$, $4k^2$

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

227 3이상의 자연수 n을 3개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 가지수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $3=1+1+1$이므로 $a_3=1$, $4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$이므로 $a_4=3$이다. 이때, a_{20}의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

228 [공통]다음은 자연수 n에 대하여 $1=1^3$

$3+5=2^3$

$7+9+11=3^3$

$13+15+17+19=4^3$

$\vdots$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+n^2-n-1)=n^3$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명] i) $n=1$일 때, $2\cdot1+1^2-1-1=1^3$이므로 성립한다. ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면 $\sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)=k^3$이다. $n=k+1$일 때 성립함을 보이자. 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다. i), ii)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[4점]

① $2i+k^2+k-1$, k^2+3k+1
② $2i+k^2+k-1$, k^2-3k+1
③ $2i+k^2+k+1$, k^2+3k+1
④ $2i+k^2-k+1$, k^2-3k+1
⑤ $2i+k^2-k+1$, k^2+3k+1

[난이도 : ★★★] [2006년 3월 학력평가]

229 [공통]자연수 i에 대하여 $H_i = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}$이라 할 때,

다음은 부등식 $H_{2^n} \ge 1+\frac{n}{2}(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\cdots$ ① 이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=0$일 때, (좌변) $=H_{2^0}=H_1=$ [가]
(우변) $=1+\frac{0}{2}=1$
그러므로 ①이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, $H_{2^k} \ge 1+\frac{k}{2}$가 성립한다고 가정하면
$H_{2^{k+1}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^k}+$ [나]
$=H_{2^k}+$ [나]
$\ge\left(1+\frac{k}{2}\right)+$ [나]
$\ge\left(1+\frac{k}{2}\right)+$ [다] $\cdot\ \frac{1}{2^{k+1}}\ =1+\frac{k+1}{2}$
그러므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.
따라서 0과 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[4 점]

① $1,\ \sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l},\ 2^{k-1}$

② $1,\ \sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l},\ 2^k$

③ $1,\ \frac{1}{2^{k+1}},\ 2^k$

④ $\frac{3}{2},\ \frac{1}{2^{k+1}},\ 2^{k-1}$

⑤ $\frac{3}{2},\ \frac{1}{2^{k+1}},\ 2^k$

[난이도 : ★★★] [2006년 3월 학력평가]

230 [공통]양수 x에 대하여 $\langle x \rangle$는 x보다 크거나 같은 최소의 정수를 나타내기로 한다. 예를 들면, $\begin{cases}<2>=2\\<2.5>=3\end{cases}$이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=10,\ a_n=a_{<\frac{n}{2}>}+1(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$로 정의할 때, a_{50}의 값을 구하시오.[4 점]

[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

231 $a_1=\alpha,\ a_{n+1}-a_n=2n(n\ge1)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{10}=100$일 때, α의 값을 구하시오.[4점]

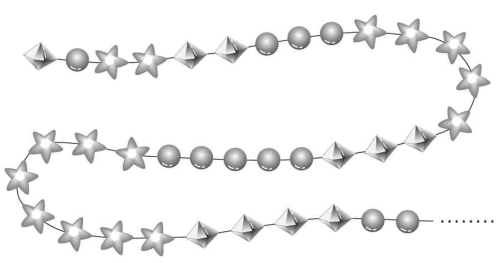
[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

232 어떤 학생이 계발활동 시간에 목걸이를 만들고자 한다.

그림과 같이 세 종류의 인조 보석, , 을 사용하여 처음에는

1개, 1개, 2개를 꿰고 난 뒤, 다음 규칙을 순서대로 반복한다.

Ⅰ. 는 바로 전 단계에 꿴 의 개수보다 1개 더 많이 꿴다.
Ⅱ. 는 바로 전 단계에 꿴 의 개수보다 2개 더 많이 꿴다.
Ⅲ. 는 Ⅰ과 Ⅱ에서 꿴 과 의 개수를 더한 만큼 꿴다.



인조 보석 200개를 사용하여 목걸이를 만들었을 때, 목걸이에 있는 의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

233 [공통]한 변의 길이가 1인 정사각형 모양의 검은 타일과 흰 타일이 있다.

㈎[그림 1]과 같이 검은 타일 3개와 흰 타일 1개를 붙여 한 변의 길이가 2인 정사각형이 되도록 한다.

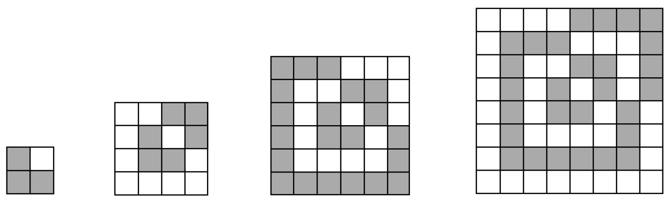
㈏[그림 2]와 같이[그림 1]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 4인 정사각형이 되도록 한다.

이때[그림 1]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

㈐[그림3]과 같이[그림 2]의 정사각형의 바깥쪽에 타일을 붙여 한 변의 길이가 6인 정사각형이 되도록 한다.

이때[그림 2]에 있는 흰 타일의 둘레에는 검은 타일을, 검은 타일의 둘레에는 흰 타일을 붙인다.

이와 같은 과정을 계속하여 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때, 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수 사이의 관계를 옳게 나타낸 것은?[4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① 검은 타일과 흰 타일의 개수가 같다.
② 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 18개 많다.
③ 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 20개 많다.
④ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 18개 많다.
⑤ 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

234 음이 아닌 정수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점의 좌표를 $P_n(a_n, b_n)$이라 하자.

(ㄱ) $a_0 = 1,\ b_0 = 0$
(ㄴ)점 $P_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$은 점 $P_n(a_n, b_n)$에서 원 $x^2+y^2=1$의 호를 따라 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{18}$만큼 이동한 점이다.

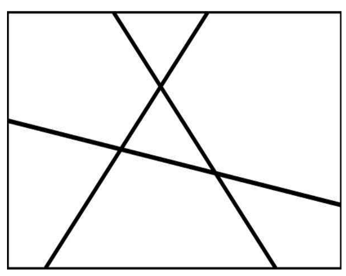
이때, $a_n = b_n$을 만족시키는 n은 [㈎]. 그리고 $c_k = a_{18k}(k=1, 2, 3, \cdots)$라 하면, 수열 $\{c_k\}$는 공비가 [㈏]인 등비수열이다.

위의 ㈎, ㈏에 알맞은 것은?[4점]

① 존재하지 않는다, $-\frac{1}{2}$
② 존재하지 않는다, -1
③ 존재한다, $-\frac{1}{2}$
④ 존재한다, -1
⑤ 존재한다, $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 학력평가]

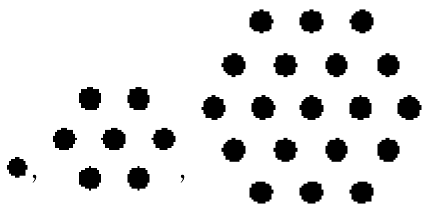
235 영희는 선분으로 도화지를 몇 개의 영역으로 분할하고, 각 영역에 한 가지 색으로 칠한 구성 작품을 만들려고 한다. 그림과 같이 도화지에 3개의 선분을 그렸더니, 도화지가 7개의 영역으로 분할되어 7가지 색을 칠한 작품을 만들 수 있었다. 29가지 색을 칠한 구성 작품을 만들려면 도화지에 최소한 몇 개의 선분을 그려야 하는가?(단, 선분의 시작과 끝은 항상 도화지의 가장자리이다.)[4점]



① 5개 ② 6개 ③ 7개
④ 8개 ⑤ 9개

[난이도 : ★☆☆] [2005년 3월 학력평가]

236 그림과 같이 정육각형 모양이 되도록 배열한 바둑알의 개수를 육각형정수라 한다.

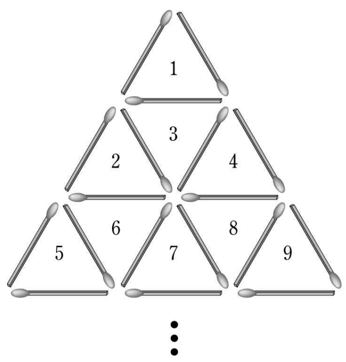


[첫 번째][두 번째] [세 번째]

예를 들면, 첫 번째 육각형정수는 1이고, 두 번째 육각형정수는 7이다. 이때, 10번째 육각형정수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

237 그림과 같이 번호를 붙여가면서 순서에 따라 성냥개비로 정삼각형을 만들어 나간다고 할 때, 95번째 정삼각형까지 만드는 데 필요한 성냥개비의 수를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

238 A, B의 두 비커에 농도가 같은 소금물이 같은 양만큼 들어 있다. 갑은 A비커, 을은 B비커의 소금물을 가지고 각각 다음과 같은 방법을 반복하여 새로운 소금물을 만들려고 한다.

갑:소금물의 양의 $\frac{3}{4}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 섞는다.
을:소금물의 양의 $\frac{1}{2}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 섞는다.

위의 과정을 갑은 5회, 을은 n회 반복하면 농도가 같은 소금물을 만들 수 있다.

이때, n의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

239 $a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_{n+1}a_n - 2a_{n+2}a_n + a_{n+1}a_{n+2} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

240 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변) $=1\geq 2\times\frac{1}{1\cdot 2}=$ (우변)이므로 주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+2}$$

$$=2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}\cdot[(가)]$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{[(B)]}{(k+1)(k+2)}$$

$$=2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (B)에 알맞은 내용을 바르게 짝지은 것은?[3점]

① $\frac{1}{k+1}$, 1　② $\frac{1}{k+1}$, 2

③ $\frac{1}{k+2}$, 1　④ $\frac{k+1}{k+2}$, 1

⑤ $\frac{k+1}{k+2}$, 2

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

241 다음과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4$이고

$a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n\cdot a_{n+2}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

이때, $\sum_{n=1}^{20}a_n$의 값은?[3점]

① 45　② 50　③ 55

④ 60　⑤ 65

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

242 [공통] 2 이상의 자연수 n에 대하여 부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$가 성립함이 알려져 있다. 다음은 이 사실을 이용하여 n이 6 이상의 자연수일 때, 부등식 $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.(단, $n \neq 1\times2\times3\times\cdots\times n$)

> (i) $n=6$일 때, $3^6=729$, $6!=720$이므로 성립한다.
>
> (ii) $n=k(k\geq6)$일 때 성립한다고 가정하면
>
> $$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}}\cdot\frac{(k+1)^k}{k^k}\cdot\boxed{}$$
> $$=\frac{k+1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\boxed{(가)}$$
> $$>\frac{k+1}{2}\cdot\boxed{(나)}$$
> $$=\boxed{}$$
>
> 이므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식은 6 이상의 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[3점]

① k^k $(k+1)!$
② k^k $2k!$
③ k^k $k!$
④ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ $(k+1)!$
⑤ $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ $2k!$

[난이도 : ★★☆] [2005년 11월 학력평가]

243 [공통] 1부터 5까지의 숫자가 적혀있는 카드를 그림과 같이 규칙적으로 배열하였다.

1행 [1]
2행 [2][3]
3행 [4][5][4][3]
4행 [2][1][1][2][3][4][5][4]
5행 [3][2][1][1][2][3][4][5][4][3][2][1][1][2][3][4]
⋮
10행 [ ][a][ ][ ] ⋯ [ ][ ][ ][ ] b

이때, $a+b$의 값은?[4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

244 [공통]다음은 2이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ 이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $n=2$일 때 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 에서 $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>$ [(A)]

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 가정하면

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

$\sqrt{k+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$

$\sqrt{k+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$<\sqrt{k+1}-[(B)]-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{[(C)]}{\sqrt{k+1}}<0$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

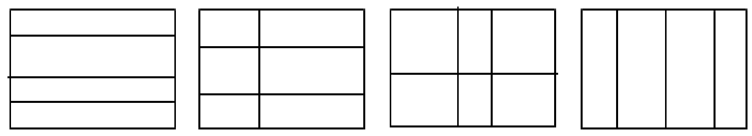
(i), (ii)에서 2이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명에서 (A), (B), (C)에 알맞은 것은?[4점]

① $\sqrt{2}$, $\sqrt{k+1}$, $\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$
② $\sqrt{2}$, $\sqrt{k}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}$
③ $\sqrt{2}$, $\sqrt{k}$, $k-\sqrt{k(k+1)}$
④ 2, $\sqrt{k}$, $k-\sqrt{k(k+1)}$
⑤ 2, $\sqrt{k+1}$, $\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 11월 학력평가]

245 [공통]어떤 직사각형의 내부에 가로 또는 세로에 평행한 n개의 직선을 그어 분할되는 영역의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들면, $n=3$인 경우는[그림 1], [그림 2], [그림 3], [그림 4]와 같이 4가지이고, 그 중에 영역의 개수가 최대일 때는[그림 2]또는[그림 3]의 경우이므로 $a_3=6$이다.



〔그림1〕 〔그림2〕 〔그림3〕 〔그림4〕

이때, a_{25}의 값은?[4점]

① 156 ② 169 ③ 182
④ 196 ⑤ 210

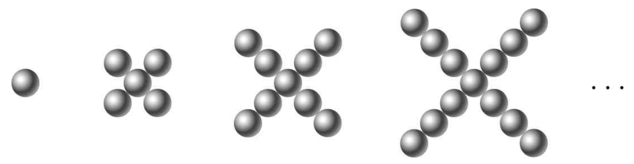
[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

246 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+1$로 정의될 때, $\log_4(a_{99}+1)$의 값은?[4점]

① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

247 다음 그림과 같은 규칙으로 개수를 증가시키면서 구슬을 배열해 나갈 때, 구슬의 개수를 왼쪽부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ 라 하자.



$a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots$

이때, 수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $a_{n+1}-a_n=4(n=1, 2, 3, \cdots)$
ㄴ. $a_{20}=75$
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k=190$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

248 $\begin{cases} a_1=1 : a_2=2 \\ a_{n+2}=a_{n+1}-a_n \end{cases}$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2005}$의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

249 [공통] $n \geq 5$일 때, $\frac{n}{2} > \log_2 n$이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정이다.

$\frac{n}{2} > \log_2 n \cdots$ ①
(1) $n=5$일 때, (좌변)-(우변) $=\frac{5}{2}-\log_2 5=$ [(가)] $-\log_2 5$
따라서, (좌변)gt(우변)이 되어 부등식 ①은 $n=5$일 때 성립한다.
(2) $n=k(k \geq 5)$일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면
$\frac{k}{2} > \log_2 k \cdots$ ②
부등식 ②의 양변에[(나)]을(를)더하면
[(다)] $> \log_2 k+$ [(나)]
[(다)] $> \log_2 \sqrt{2}k > \log_2(k+1)$
따라서, 부등식 ①은 $n=k+1$일 때도 성립한다.
(1) , (2)에 의하여 부등식 ①은 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $\log_2 2\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{k+1}{2}$

② $\log_2 2\sqrt{2}$, 1, $k+1$

③ $\log_2 4\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{k+1}{2}$

④ $\log_2 4\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $k+1$

⑤ $\log_2 4\sqrt{2}$, 2, $k+1$

[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

250 [공통]다음은 모든 자연수 n에 대하여 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n+b^n}{2}$이 성립함을 증명한 것이다.(단, a, b는 양수이다.)

> (i) $n=1$일 때, $\frac{a+b}{2}-\frac{a+b}{2}=0$이므로 주어진 식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
> $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a^k+b^k}{2}$ …① 이 성립한다.
> ① 의 양변에[(가)]를 곱하면
> $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)\times$ [(가)]
> $\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$
> 이때, $a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^kb=a^k(a-b)-b^k(a-b)$ (나)] 이므로,
> $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$
> $\le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$
> 즉, $n=k+1$일 때, 주어진 식이 성립한다.
> 따라서 , (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{a+b}{2}$ $<$ ② $\frac{a-b}{2}$ $\le$
③ $\frac{a+b}{2}$ $\le$ ④ $\frac{a-b}{2}$ $\ge$
⑤ $\frac{a+b}{2}$ $\ge$

[난이도 : ★★★] [2005년 10월 학력평가]

251 [공통]다음은 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2,\ a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$를 만족 할 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$에서 $(a_{n+1}+1)(a_n+2)=[(A)]$ … ①
> $(a_{n+1}-1)(a_n+2)=a_n-1$ … ②
> ① ÷ ②에서 $\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\frac{[(A)]}{a_n-1}$
> 따라서, 수열 $\left\{\frac{a_n+1}{a_n-1}\right\}$은 첫째항이[(B)], 공비가[(C)]인 등비수열이다. $\therefore a_n=\frac{[(D)]}{3^n-1}$

(A), (B), (C), (D)에 알맞은 것은?[4점]

① $3(a_n+1)$, 2, 3, 3^n+1
② $2(a_n+1)$, 3, 2, 3^n+2
③ $3(a_n+1)$, 3, 3, 3^n+1
④ $2(a_n+1)$, 2, 2, 3^n+1
⑤ $3(a_n+1)$, 3, 3, 3^n+2

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

252 $a_1=20,\ a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+10\ (n=1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{100}에 가장 가까운 정수는?[4점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 15 ⑤ 19

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

253 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$이 성립함을

수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(증명)

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1\cdot2\cdot3=6$,

(우변)$=\frac{1}{4}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4=6$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=i(i\ge1)$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{i} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}i(i+1)(i+2)(i+3) \cdots$ ①

① 의 양변에 [㈎]을(를)더하면

$\sum_{k=1}^{i+1} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}i(i+1)(i+2)(i+3) +$ [㈎]

=[㈏]

따라서 $n=i+1$일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것은?[4점]

① $i(i+1)(i+2)$ $\frac{1}{4}i(i+1)(i+2)(i+3)$

② $\frac{1}{4}i(i+1)(i+2)$ $\frac{1}{4}i(i+1)(i+2)(i+3)$

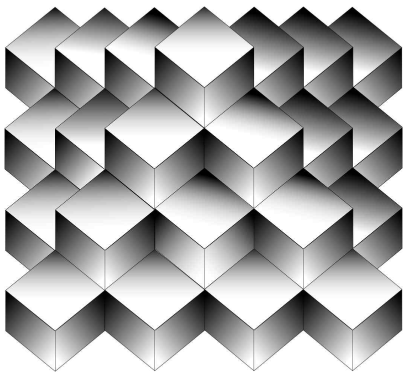
③ $\frac{1}{4}(i+1)(i+2)(i+3)$ $\frac{1}{4}(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)$

④ $(i+1)(i+2)(i+3)$ $\frac{1}{4}i(i+1)(i+2)(i+3)$

⑤ $(i+1)(i+2)(i+3)$ $\frac{1}{4}(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 4월 학력평가]

254 [공통]그림과 같은 모양의 4층 탑을 쌓았을 때, 크기가 같은 44개의 정육면체가 필요하였다. 이와 같은 규칙으로 10층 탑을 쌓으려고 할 때, 필요한 정육면체의 총 개수를 구하면?[4점]



① 650 ② 670 ③ 690

④ 710 ⑤ 730

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

255 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1,\ a_{n+1}=3a_n-5(n\ge1)$일 때, $a_{100}-a_{99}$의 값은?[4점]

① $-3^{98}+1$ ② $-3^{99}+1$ ③ -3^{99}

④ -3^{100} ⑤ $-3^{100}+1$

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

256 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2,\ a_n+a_{n+1}=3n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수

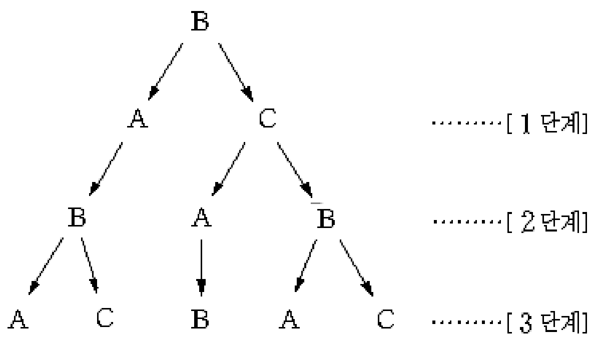
$P=a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19},\ Q=a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}$에 대하여 $P-Q$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

257 A, B, C세 사람은 아래와 같은 규칙으로 전자우편을 보내기로 하였다.

> Ⅰ. A는 B에게만 보낸다.
> Ⅱ. B는 A와 C모두에게 각각 한 통씩 보낸다.
> Ⅲ. C는 A와 B모두에게 각각 한 통씩 보낸다.

아래 그림과 같이 B부터 전자우편을 보내기 시작할 때, [1단계], [2단계], [3단계]에서 A가 받은 전자우편의 개수를 각각 a_1, a_2, a_3라 할 때, a_{10}의 값을 구하시오.(예를 들면 $a_3=2$이며, 전자우편의 개수와 용량은 제한하지 않는다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

258 [공통]다음은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ 임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=$ [가]일 때, (좌변) $=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}<2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=$ (우변)
> 따라서, $n=$ [가]일 때, 주어진 식은 성립한다.
> (ⅱ) $n=k(n\geq 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$ 이다.
> 위 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$
> 그런데 $\left\{-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-$ [나] $=-\frac{1}{k(k+1)^2}<0$ 이므로
> $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$ 이다.
> 따라서, $n=k+1$일 때에도 성립한다.
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여
> $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ 이 성립한다.

이 증명 과정의 (가), (나)에 알맞은 내용을 바르게 짝지은 것은?[3점]

① 1, $\frac{1}{k+1}$　② 1, $-\frac{1}{k+1}$　③ 2, $-\frac{1}{k+1}$
④ 2, $\frac{1}{k(k+1)}$　⑤ 2, $\frac{1}{(k+1)^2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

259 자동차를 이용하여 S_n지역에서 S_{n+1}지역까지 가는 방법은 n가지 있고, 비행기를 이용하여 S_n지역에서 S_{n+2}지역으로 직통으로 가는 방법이 1가지 있다. S_1지역에서 S_n지역까지 가는 방법의 수를 T_n이 라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $T_1=1$, $n=1, 2, 3, \cdots$)점]

① $T_6=T_5+5T_4$　② $T_6=2T_5+4T_4$　③ $T_6=3T_5+3T_4$
④ $T_6=4T_5+2T_4$　⑤ $T_6=5T_5+T_4$

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

260 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$일 때,

a_{20} 은?[4점]

① $\frac{1}{59}$ ② $\frac{1}{29}$ ③ 1
④ 29 ⑤ 59

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

261 다음은 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 부등식

$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$이 성립함을 증명하는 과정이다.

(i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\geq 1+1+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$2+[(A)]>2(\because\ n\geq 2)$

(ii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$1+1+\frac{1}{2!}()+\frac{1}{3!}([(B)])+\cdots+\frac{1}{n!}()$

$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

그런데 $k\neq 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots k\geq 2^{k-1}$이므로 $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}}$

$\therefore\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$3-[(C)]<3$

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 부등식

$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$이 성립한다.

위의 증명과정에서(A), (B), (C)에 알맞은 것을 차례로 나열하면?[3점]

① $\frac{n-1}{2n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

② $\frac{n+1}{2n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

③ $\frac{n-1}{2n}$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

④ $\frac{n+1}{2n}$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $\frac{n-1}{2n}$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

262 [공통]흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 있다. 이 바둑돌 n개를 일렬로 나열하되, 흰 바둑돌끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_1=2$, $a_2=3$이다.

○, ● ○●, ●○, ●●

$a_1=2$ $a_2=3$

이때 a_{10}의 값을 구하시오.[4점]

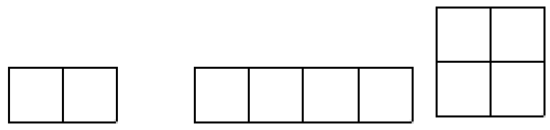
[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 학력평가]

263 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$과 같이 정의한다. 이때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=6$을 만족하는 자연수 k의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

264 [공통]평면 위에서 같은 크기의 정사각형 n개를 붙여서 만들 수 있는 서로 다른 모양의 직사각형의 개수를 a_n이라 하자.

예를 들면 $a_2=1$, $a_4=2$이다.



$a_2=1$ $a_4=2$

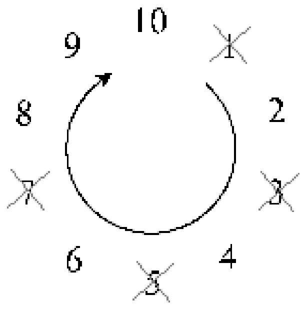
이때, 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $a_6=2$
ㄴ. n이 소수이면 $a_n=1$이다.
ㄷ. $a_n=2$인 한 자리 자연수 n은 3개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

265 그림과 같이 1부터 10까지의 자연수가 시계방향으로 둥글게 놓여있다.



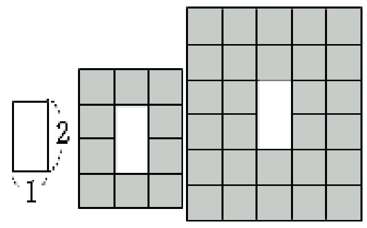
맨 처음 1을 지우고 2를 건너뛰어 3을 지운다. 다시 4를 건너뛰어 5를 지운다. 이와 같이 한 개의 수를 지우고 난 다음 아직 지워지지 않고 남아있는 수 중에서 한 개의 수를 건너뛰어 그 다음에 남아있는 수를 지우는 시행을 반복하면 $1, 3, 5, 7, 9, 2, 6, 10, 8$이 차례로 지워지고 마지막에 4가 남는다. 1부터 n까지의 자연수를 시계방향으로 둥글게 놓고 이와 같은 시행을 반복할 때, k번째 $(1,\ \le k<n)$에 지워지는 수를 ${}_{n}A_{k}$로 나타내자. 예를 들면 ${}_{10}A_{6}=2$이다. 이때, 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. n이 홀수일 때, ${}_{n}A_{k}=n$이면 $k=\dfrac{n+1}{2}$이다.
ㄴ. n이 짝수일 때, ${}_{n}A_{k}=n$이면 $k=\dfrac{n}{2}+1$이다.
ㄷ. $n=2^{6}$일 때, 시행 후 마지막에 남는 수는 2^{6}이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

266 가로와 세로의 길이가 각각 $1, 2$인 직사각형 모양의 나무판 둘레에 한 변의 길이가 1인 정사각형 타일을 빈틈없이 붙이는 작업을 하여 그림과 같은 도형을 만들어 갈 때, 6회째에 만들어진 도형에서 사용된 타일의 총 개수를 구하시오.[4점]



cdots

나무판	1회째	2회째	cdots

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

267 다음은 n이 자연수일 때 등식 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r}b^r$이 성립함을 수학적귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때, $(a+b)^1 = \sum_{r=0}^{1} {}_1C_r a^{1-r}b^r = a+b$이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k(k \geq 1)$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $(a+b)^k = \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r}b^r$ 이므로
> $(a+b)^{k+1} = \left(\sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r}b^r\right)(a+b)$
> $= \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r+1}b^r + \sum_{r=0}^{k} {}_kC_r a^{k-r}b^{r+1}$
> $= {}_kC_0 a^{k+1} + \sum_{r=1}^{k} {}_kC_r a^{k-r+1}b^r + \sum_{r=0}^{k-1} {}_kC_r a^{k-r}b^{r+1} + {}_kC_k b^{k+1}$
> 그런데, $\sum_{r=0}^{k-1} {}_kC_r a^{k-r}b^{r+1} = $ [(가)]
> ${}_kC_r + {}_kC_{r-1} = $ [(나)] 이므로
> $(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} {}_{k+1}C_r a^{k+1-r}b^r$
> (i)과 (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 순서대로 적은 것은?[3점]

① $\sum_{r=1}^{k} {}_kC_r a^{k-r+1}b^r$, ${}_{k+1}C_r$

② $\sum_{r=1}^{k} {}_kC_r a^{k-r+1}b^r$, ${}_{k+1}C_{r+1}$

③ $\sum_{r=1}^{k} {}_kC_{r-1} a^{k-r+1}b^r$, ${}_kC_r$

④ $\sum_{r=1}^{k} {}_kC_{r-1} a^{k-r+1}b^r$, ${}_{k+1}C_r$

⑤ $\sum_{r=1}^{k} {}_kC_{r-1} a^{k-r+1}b^r$, ${}_{k+1}C_{r+1}$

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

268 다음은 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 행렬 $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$으로 정의될 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에서 $a_1=3$, $b_1=2$이고 $a_{n+1}=2a_n+b_n \cdots$ ①
> $b_{n+1}=3a_n+4b_n \cdots$ ② 이다.
> ① 에서 $b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1} \cdots$ ③ 이므로, ①과 ③을 ②에 대입하여 정리하면
> $a_{n+2}-6a_{n+1}+5a_n=0a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$
> 이때, $a_{n+1}-a_n=c_n$이라 하면
> 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이[(가)]이고, 공비가 5인 등비수열이다.
> 즉, $c_n=$ [(가)] $\cdot 5^{n-1}$ $\therefore a_n=a_1+$ [(나)] $= \frac{1}{4}$([(다)]$+7$)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{5}$, $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$, 5^n

② $\frac{1}{5}$, $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$, 5^{n+1}

③ 5, $\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$, 5^{n+1}

④ 5, $\sum_{k=1}^{n-1} 5^k$, 5^n

⑤ 5, $\sum_{k=1}^{n-1} 5^k$, 5^{n+1}

[난이도 : ★★★] [2004년 11월 학력평가]

269 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$은

$a_1 = 3,\ b_1 = 2,\ a_{n+1} = 4a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n + 4b_n$을 만족한다.
다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.(단, $n \geq 1$)

> $a_1 = 3,\ b_1 = 2$
>
> $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n + b_n \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \cdots ② \end{cases}$
>
> ① + ② 을 하면 $a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)$이므로
>
> $a_n + b_n = $ [(가)] $\cdots$ ③
>
> ① -②을 하면 $a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$이므로
>
> $a_n - b_n = $ [(나)] $\cdots$ ④
>
> 여기서, ③+④을 하여 정리하면
>
> $a_n = $ [(다)] 이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $5^{n-1},\ 3^n,\ \frac{1}{2}(5^{n-1} + 3^{n-1})$

② $5^{n-1},\ 3^n,\ \frac{1}{2}(5^n + 3^{n-1})$

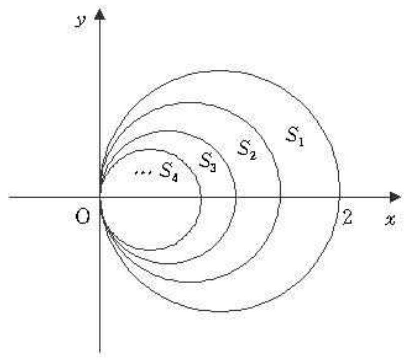
③ $5^n,\ 3^n,\ \frac{1}{2}(5^n + 3^n)$

④ $5^n,\ 3^{n-1},\ \frac{1}{2}(5^{n-1} + 3^{n-1})$

⑤ $5^n,\ 3^{n-1},\ \frac{1}{2}(5^n + 3^{n-1})$

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

270 그림과 같이 좌표평면 위의 원점 O을 지나며 반지름의 길이가 $1,\ \frac{3}{4},\ \left(\frac{3}{4}\right)^2,\ \left(\frac{3}{4}\right)^3,\ \cdots$인 원을 그려큰 원부터 차례로 $S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots$라 하자. 원 S_1부터 S_{10}까지의 둘레의 길이의 합은? [3점]



① $2\pi\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$ ② $4\pi\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\right\}$ ③ $4\pi\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$

④ $8\pi\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{9}\right\}$ ⑤ $8\pi\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

271 다음은 수열 $\{a_n\}$에서 일반항 a_n이 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 일 때,

$n\ge 2$인 모든 자연수에 n에 대하여
$n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

> i) $n=2$일 때, (좌변) $=2+\frac{1}{1}=3$, (우변) $=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$이므로, 주어진 식이 성립한다.
> ii) $n=k$, $(k\ge 2)$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면
> $k+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}=ka_k \cdots$ ①
> 이때, 식 ①의 좌변에 $1+a_k$를 더하면
> $k+1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k=$ [(가)]$+1+a_k=(k+1)a_k+1=$ (나)$=(k+1)a_{k+1}$
> 따라서, $n=k+1$일 때도 주어진 식이 성립한다.
> 그러므로 i), ii)에 의하여 $n+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=na_n$은 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[4점]

① ka_k, $a_k+\frac{1}{k+1}$ ② ka_k, $a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$
③ ka_k, $a_{k+1}+\frac{1}{k+1}$ ④ $(k+1)a_k$, $a_k+\frac{1}{k+1}$
⑤ $(k+1)a_k$, $a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 학력평가]

272 [공통]다음은 등식 $1+2+3+\cdots+2n=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$을 만족하는 자연수 n, k의 값을 구하는 과정이다.

> i) $k=1$일 때, 임의의 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립하지 않는다.
> ii) $k=2$일 때, $\frac{2n(2n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이므로 $n=$ [가]
> iii) $k\ge 3$일 때, $1+2+3+\cdots+2n=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$
> $\ge 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$
> 즉, $\frac{2n(2n+1)}{2}\ge\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이므로
> $4(2n+1)\ge$ [나]
> 이때, $8(n+1)>4(2n+1)$이므로
> 8[다]$n(n+1)>n^2$
> 그러므로, $n\le 2$일 때만 주어진 등식이 성립할 수 있다.
> 그런데, $n=1$이면 등식 $1+2=1^k$은 성립하지 않는다.
> $n=2$이면 등식 $1+2+3+4=1^k+2^k$은 성립하지 않는다.
> 따라서, i), ii), iii)에서 주어진 등식을 만족하는 n, k의 값은 $n=$ [가] $k=2$뿐이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① 5, $n(n+1)^2$, $>$
② 5, $n^2(n+1)$, $>$
③ 5, $n(n+1)^2$, $<$
④ 6, $n^2(n+1)$, $<$
⑤ 6, $n(n+1)^2$, $>$

정답 및 해설

3.수학적 귀납법

중단원 기출문제

1) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 귀납적으로 주어진 수열의 항을 구할 수 있는가?

$a_1=2$이고 이 수는 짝수이므로

$a_2=a_1-1=1$

이때, a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+2=1+2=3$

a_3는 홀수이므로

$a_4=a_3+3=3+3=6$

a_4는 짝수이므로

$a_5=a_4-1=6-1=5$

a_5는 홀수이므로

$a_6=a_5+5=5+5=10$

a_6는 짝수이므로

$a_7=a_6-1=10-1=9$

2) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해할 수 있는가?

$b_1=2$이고 $b_n=b_{n-1}+2n(n\geq 2)$이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구해보면

$b_n-b_{n-1}=2n$ 에서

$b_2-b_1=2\times 2$

$b_3-b_2=2\times 3$

$\vdots$

$b_n-b_{n-1}=2n$

이므로 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 더하면

$b_n-b_1=2(2+3+\times x+n)$

$\therefore\ b_n=b_1+2(2+3+\times x+n)\ =2+2(2+3+\times x+n)$

$=2(1+2+3+\times x+n)\ =2\times\dfrac{n(n+1)}{2}=$ (가) n (가) n $(n+1)$

따라서 $b_n=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$이므로

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=n(n+1)$ 에서

$\dfrac{S_2}{S_1}=1\times 2$

$\dfrac{S_3}{S_2}=2\times 3$

$\vdots$

$\dfrac{S_n}{S_{n-1}}=(n-1)n$

이고 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 곱하면

$\dfrac{S_n}{S_1}=1\times 2^2\times 3^2\times\times x\times(n-1)^2\times n$

$\therefore\ S_n=$ (가) $n\ \times\{(n-1)!\}^2$

따라서 $a_1=1$이고 $n\geq 2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}\ =n\times\{(n-1)!\}^2-(n-1)\times\{(n-2)!\}^2$

$=\{n(n-1)^2-(n-1)\}\times\{(n-2)!\}^2$

$=(n-1)(n^2-n-1)\ \times\{(n-2)!\}^2$

$\therefore\ f(n)=n,\ g(n)=(n-1)(n^2-n-1)$

$\therefore\ f(10)+g(6)\ =10+5\times 29\ =10+145=155$

3) 답 : ③

[해설]

[해설] $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ 에서

$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$ 이고

, $n=1,2,3,\cdots,n-1$을 차례대로 대입하면

$b_2-b_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

$b_3-b_2=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\ \cdots$

$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

위의 식들을 같은 변끼리 서로 더하면 $b_n-b_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore\ b_n=b_1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

$\therefore\ f(n)=n$

그래서 $S_n=(n+1)!\cdot b_n=(n+1)!\cdot\dfrac{n}{n+1}=n\cdot n!$

$\therefore\ a_n=nS_{n-1}+(n-1)!\ =n\cdot(n-1)\cdot(n-1)!+(n-1)!$ `

$=(n^2-n+1)(n-1)!$

$\therefore\ g(n)=n^2-n+1$

$\therefore\ f(7)+g(6)=7+6^2-6+1=38$

4) 답 : 256

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하고 항을 구할 수 있는가?

조건 ㈏에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이므로

$a_2=-2\times a_1$

조건 ㈎에서 $a_1=-2a_1+3$, $a_1=1$

$\therefore\ a_n=1\cdot(-2)^{n-1}$

$\therefore\ a_9=1\cdot(-2)^8=256$

5) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 조건을 만족시키는 일반항 $\{a_n\}$을 구할 수 있는가?

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1} = \frac{\log a_n}{n} + \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$b_n = \frac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1 = 1$ 이고

$$b_{n+1} = b_n + \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

이므로

$$\log a_n = n \times \left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

이다.

$\therefore\ f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$ 이고 $g(n) = 2 - \frac{1}{n}$ 이므로

$$\frac{g(10)}{f(4)} = \frac{2 - \frac{1}{10}}{\frac{1}{4\times 5}} = 38$$

6) 답 : 23

[해설]

점 P_n의 x좌표를 나열하면 $-1, 1, -1, 1, \cdots$이므로

점 P_{25}의 x좌표 a는 -1이다.

점 P_n의 y좌표를 나열하면 $0, 0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \cdots$이므로

홀수번째 항으로 이루어진 수열은

첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이므로

점 P_{25}의 y좌표 b는 $b = 0 + (13-1)\cdot 2 = 24$

$\therefore\ a + b = 23$

[다른 풀이]

P_n의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때,

선분 $P_n P_{n+1}$의 중점과 선분 $P_{n+2} P_{n+3}$의 중점이 같으므로

$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3}$

$b_n + b_{n+1} = b_{n+1} + b_{n+2} \cdots$㉠

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \cdots$이므로

$a_n = (-1)^n$

또한, 수열 $\{b_n\}$에서 $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 2$이므로 ㉠에 의하여

$b_4 = -2, b_5 = 4, b_6 = -4, \cdots$

$$\begin{cases} b_{2n-1} = 2n-2 \\ b_{2n} = -2n+2 \end{cases}$$

$\therefore\ a_{25} = (-1)^{25} = -1,\ b_{25} = 2\cdot 13 - 2 = 24$

따라서 P_{25}의 좌표는 $(-1, 24)$이므로 $a + b = 23$

7) 답 : ④

[해설]

$$a_{n+1} = n\cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k} \ldots ㉠$$

$$a_n = (n-1)\cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k} \ldots ㉡$$

㉠-㉡하면 $a_{n+1} - a_n = [(n+1)\cdot 2^{n-1}] + \frac{a_n}{n}$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + [(n+1)\cdot 2^{n-1}]$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 2^{n-1}$$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{[(n+1)\cdot 2^{n-1}]}{n+1}\ (n \ge 2)$$

$b_2 = 3$이므로

$$b_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^k = 3 + \frac{2(2^{n-2}-1)}{2-1} = [2^{n-1}+1]\ (n \ge 2)$$

$$\therefore\ a_n = \begin{cases} 4,\ (n=1) \\ n(2^{n-1}+1)\ (n \ge 2) \end{cases}$$

$\therefore\ f(n) = (n+1)\cdot 2^{n-1},\ g(n) = 2^{n-1}+1$

따라서 $f(4) + g(7) = 5\cdot 2^3 + 2^6 + 1 = 40 + 64 + 1 = 105$

8) 답 : ②

[해설]

$a_{n+1} = 2\cdot\frac{n}{n+1}a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$이므로

$$\begin{array}{rl} & a_2 = 2\cdot\frac{1}{2}a_1 \\ & a_3 = 2\cdot\frac{2}{3}a_2 \\ \times & a_4 = 2\cdot\frac{3}{4}a_3 \\ \hline & a_4 = 2^3\cdot\frac{1}{4}a_1 \end{array}$$

$\therefore\ a_4 = 2^3\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = 2$

[다른 풀이]

$a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n$ 에서 $(n+1)a_{n+1} = 2na_n$ 이므로

$\{na_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ na_n = 1\cdot a_1\cdot 2^{n-1}$

$n = 4$일 때, $4\cdot a_4 = 1\cdot 1\cdot 2^{4-1}$ $\therefore\ a_4 = 2$

9) 답 : ②

[해설]

자연수 n에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$이므로

$na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \ldots$ ①이다.

2이상의 자연수 n에 대하여

$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \ldots$ ②이고,

① 에서 ②을 뺀 식으로부터

$$na_{n+1} - (n-1)a_n = 2(S_n - S_{n-1}) + (3n^2+3n+1)$$
$$= 2(a_n) + (3n^2+3n+1)$$

$na_{n+1}=(n+1)a_n+3n^2+3n+1$를 얻는다.

양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{3n^2+3n+1}{n(n+1)}=\dfrac{a_n}{n}+3+\dfrac{1}{n(n+1)}$ 이다.

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ 이라 하면,

$b_{n+1}=b_n+3+\dfrac{1}{n(n+1)}\ (n\geq 2)$이므로

$$b_n=b_2+\sum_{k=2}^{n-1}\left(3+\frac{1}{k(k+1)}\right)$$
$$=b_2+3(n-2)+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=b_2+3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\ (n\geq 3)\text{이다.}$$

따라서 $f(n)=3n^2+3n+1,\ g(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$,

$h(n)=3(n-2)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$ 이므로

$$\therefore\ \frac{f(3)}{g(3)h(6)}=\frac{37}{\frac{1}{12}\times\frac{37}{3}}=36$$

10) 답 : ②

[해설]

(가) $\dfrac{{}_{m+1}C_0}{{}_{m+5}C_0}=1$

(나) ${}_{l+1}C_{k+1}=\dfrac{(l+1)!}{(k+1)!(l-k)!}$

$$=\frac{(l+1)\cdot l!}{(k+1)\cdot k!(l-k)!}=\frac{l+1}{k+1}\cdot {}_lC_k$$

(다) $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}C_{k+1}}{{}_{m+5}C_{k+1}}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\frac{m+1}{k+1}\cdot {}_mC_k}{\frac{m+5}{k+1}\cdot {}_{m+4}C_k}$

$$=\frac{m+1}{m+5}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_mC_k}{{}_{m+4}C_k}$$

11) 답 : ④

[해설]

(증명)(ⅰ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1+1}=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{1+1}$

이므로(*)은 $n=1$일 때 성립

(ⅱ)(*)이 $n=m$일 때 성립한다고 가정하면

즉, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$ 이 성립한다고 가정하면, 이때

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$

점화식에서 $a_{n+1}=\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}a_n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+a_{m+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\left[\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\right]a_m$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$
$$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdots\frac{1^2}{2\cdot 3}a_1$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}$$
$$+\frac{m^2}{(m+1)(m+2)}\cdot\frac{(m-1)^2}{m(m+1)}\cdot\frac{(m-2)^2}{(m-1)m}\cdots\frac{3^2}{4\cdot 5}\cdot\frac{2^2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1^2}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{m!m!}{(m+1)!(m+2)(m+1)!}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}-\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^2(m+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}-\frac{m+2-1}{(m+1)^2(m+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m}{m+1}-\frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}-\frac{m+1}{m+2}$$

그러므로 (*)는 $n=m+1$일 때 성립

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여(*)는 모든 자연수 n에 대하여 성립

12) 답 : 11

[해설]

$a_n=(n\times 1+1)+(n\times 2+2)+(n\times 3+3)+\cdots+\{n\times(n-1)+(n-1)\}$

$=(n+1)+2(n+1+3(n+1)+\cdots+(n-1)(n+1)$

$=(n+1)\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$

$=\dfrac{1}{2}(n+1)n(n-1)>500$

$a_n>500\Leftrightarrow(n-1)n(n+1)>1000$

$\therefore\ n=11,\ 12,\ 13,\ \ldots$

그러므로 n의 최솟값은 11

13) 답 : ②

[해설]

$[k(k+1)!]+\{(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=\{k+(k+1)^2+1\}\cdot(k+1)!$

$=[\{k^2+3k+2\}]\cdot(k+1)!$

$=(k+1)(k+2)(k+1)!$

$=(k+1)[\ (k+2)!\ ]$

14) 답 : ④

[해설]

$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$

$\therefore\ \alpha=-2$

$a_{n+1}+2=2(a_n+2)$

$\therefore\ a_n+2=(a_1+2)2^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$

$\therefore\ a_{10}=2^{11}-2=2048-2=2046$

15) 답 : ③

[해설]

$$\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\{5(m+1)-3\}\frac{1}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m+1}\right)+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left\{\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\right\}+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\frac{1}{m+1}+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(5k-3)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}(5k-3)+\frac{5m+2}{m+1}$$

$$=\frac{m(5m+3)}{4}+\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}(5k-3)$$

$$=\frac{(m+1)(5m+8)}{4}$$

따라서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은 차례로

$5m+2,\ m,\ 5k-3$이다.

16) 답 : ④

[해설]

ㄱ.(반례) $p=2$이면

$a_2=a_1+1=1\neq 2a_1=0$ (거짓)

ㄴ.㈎, ㈏에서

$a_1=0$,

$a_2=a_1+1=1$

$a_3=a_2+1=2$

$\cdots$

$a_p=a_{p-1}+1=p-1$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_p$

$=0+1+2+\cdots+(p-1)=\dfrac{p(p-1)}{2}$ (참)

ㄷ.㈐에 $k=p$를 대입하면

$a_{p+p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

$a_{2p+p}=a_{3p}=a_{2p}=a_p=p-1$,

$\cdots$

$a_{kp}=a_p=p-1$

$\therefore\ a_p+a_{2p}+\cdots+a_{kp}=k(p-1)$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

17) 답 : ②

[해설]

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

(1) $n=1$일 때, $a_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}>1$

(2) $n=k$일 때, $a_k>1$이라 가정하면

$$a_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$$

$n=k+1$일 때,

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$$

$$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\left[\frac{1}{k+1}\right]$$

한편, $(3k+2)(3k+4)[<](3k+3)^2$

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}$$

$$>\frac{6k+6}{(3k+3)^2}=\frac{2}{3k+3}$$

$$\therefore\ \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\left[\frac{2}{3k+3}\right]$$

$a_k>1$이므로

$$a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\frac{2}{3k+3}\right)-\frac{1}{k+1}>1$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

18) 답 : ②

[해설]

주양자수가 n일 때의 서로 다른 궤도의 수가 $2n^2$이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$에 대응되는 n의 모든 궤도의 수는

$$2\cdot 1^2+2\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 9^2$$

$$=2\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2\right)$$

$$=2\times\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}=570$$

19) 답 : ④

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+6}=a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$에서

주기가 6인 수열을 이룬다.

① $b_n=a_{2n+1}$
$$\begin{array}{lccccccc}\{b_n\}: & a_3, & a_5, & a_7, & a_9, & a_{11}, & a_{13}, & \cdots\\ & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \\ & a_3, & a_5, & a_1, & a_3, & a_5, & a_1, & \cdots\end{array}$$

② $b_n=a_{3n+1}$
$$\begin{array}{lccccccc}\{b_n\}: & a_4, & a_7, & a_{10}, & a_{13}, & a_{16}, & a_{19}, & \cdots\\ & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \\ & a_4, & a_1, & a_4, & a_1, & a_4, & a_1, & \cdots\end{array}$$

③ $b_n=a_{4n+1}$
$$\begin{array}{lccccccc}\{b_n\}: & a_5, & a_9, & a_{13}, & a_{17}, & a_{21}, & a_{25}, & \cdots\\ & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \\ & a_5, & a_3, & a_1, & a_5, & a_3, & a_1, & \cdots\end{array}$$

④ $b_n=a_{5n+1}$
$$\begin{array}{lccccccc}\{b_n\}: & a_6, & a_{11}, & a_{16}, & a_{21}, & a_{26}, & a_{31}, & \cdots\\ & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \\ & a_6, & a_5, & a_4, & a_3, & a_2, & a_1, & \cdots\end{array}$$

⑤ $b_n=a_{6n+1}$
$$\begin{array}{lccccccc}\{b_n\}: & a_7, & a_{13}, & a_{19}, & a_{25}, & a_{31}, & a_{37}, & \cdots\\ & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \Vert & \\ & a_1, & a_1, & a_1, & a_1, & a_1, & a_1, & \cdots\end{array}$$

수열 $\{b_n\}$중 n의 값이 모두 나타나는 것은 ④이다.

④ 에서 a_{5n+1}의 계수 5는 6과 서로소이다.

20) 답 : ①

[해설]

$a_{n+1}=a_{n+1}+a_n \to a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$ 에서

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}$$ 이므로

구하는 값 $=\sum_{n=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{a_{n+2}}$$

수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1}=a_{n+1}+a_n$을 만족하므로 증가하는 수열이고

따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{1}{2}$$

21) 답 : ②

[해설]

2526년 1월의 달력과 요일 및 날짜의 구성이 같으려면 어떤 주어진 달의 1일부터 그 해 12월 31일까지의 날짜 수가 7의 배수이어야 한다.

3월 1일 ~ 12월 31일의 날짜의 수: 306일

5월 1일 ~ 12월 31일의 날짜의 수: 245일

5월 1일 ~ 12월 31일의 날짜의 수: 184일

8월 1일 ~ 12월 31일의 날짜의 수: 153일

따라서 날짜 수가 7의 배수인 것은 5월이다.

22) 답 : ②

[해설]

부등식 $2^{n+1}<9n^4$ $N=0,\ S=2,\ N=1,\ S=2^2,\ S=2^3$ 이므로

㈎ $[S\leftarrow S\times 2]$가 되어야한다

문제에서 $2^{n+1}<9n^4$이 성립하지 않는 가장 작은 자연수이므로

㈏ $[S\geq 9N^4]$이 되어야 한다.

이때, ㈐ $[N$을 인쇄$]$라고 하여야 한다.

23) 답 : ④

[해설]

에너지 증가시: $a\to b,\ c$(2가지) $b\to c$(1가지)

에너지 감소시 $b\to a$(1가지)가지)

단계1: a

단계2: $a\to b$ 또는 c(각각 1가지)

단계3: $b\to a$ $c\to b$ 또는 a(각각 1가지)즉, $a(2),\ b(1)$

단계4: $a\to b$ 또는 c(각각 2가지) $b\to c$(1가지)즉, $b(2),\ c(3)$

단계5: $b\to a$(2가지) $c\to b$ 또는 a(각각 3가지)즉, $a(5),\ b(3)$

단계6: $a\to b$ 또는 c(각각 5가지) $b\to c$(3가지)즉, $b(5),\ c(8)$

단계7: $b\to a$(5가지) $c\to b$ 또는 a(각각 8가지)즉, $a(13),\ b(8)$

따라서, 가능한 변화 경로의 수는 21가지이다.

24) 답 : ③

[해설]

$n=2^k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 이고

$p_1\to 1$시간

$p_2\to p_1p_1$ 연결: $1+1+2=4$시간

$p_4\to p_2p_2$ 연결: $4+4+2\times 2=12$시간

$p_8\to p_4p_4$ 연결: $12+12+2\times 4=32$시간

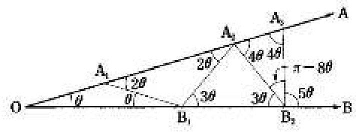
$p_{16}\to p_8p_8$ 연결: $32+32+2\times 8=80$시간

따라서, p_{16}을 한 개 만드는 데 80시간이 걸린다.

25) 답 : ③

[해설]

그림과 같이 각을 정할 수 있다.



5번째 이등변삼각형을 만들 수 없으므로

$$5\theta\geq\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \theta\geq\frac{\pi}{10}$$

또, $\pi-8\theta>0$이므로 $\theta<\frac{\pi}{8}$

$$\therefore\ \frac{\pi}{10}\leq\theta<\frac{\pi}{8}$$

26) 답 : ⑤

[해설]

$a_1=a$라고 할 때,

$a_2=a-2,\ a_3=a,$

$a_4=a+1,\ a_5=a+3,$

$a_6=a+1,\ a_7=a+2,\ \cdots,\ a_{13}=a+4,$

$a_{14}=a+2,\ a_{15}=a+4$

따라서 $a=39$

[다른 풀이]

$$a_{n+1}-a_n=b_n=\begin{cases}2\cdot(-1)^n, & (n\neq 3k)\\ 1, & (n=3k)\end{cases}$$

$$a_{15}=a+\sum_{k=1}^{14}b_k$$

$$=a+\sum_{k=1}^{5}b_{3k-2}+\sum_{k=1}^{5}b_{3k-1}+\sum_{k=1}^{4}b_{3k}$$

$$=a+\sum_{k=1}^{5}\left(2\cdot(-1)^{3k-2}+2\cdot(-1)^{3k-1}\right)+\sum_{k=1}^{4}1$$

$$=a+\sum_{k=1}^{5}0+\sum_{k=1}^{4}1$$

$$=a+4=43$$

$\therefore\ a=39$

27) 답 : ⑤

[해설]

$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)\ \cdots$ ㉠

이고 $b_n = \log_2(S_n+1)$

이므로 $\therefore\ S_n+1=2^b n$ $\therefore\ S_{n+1}+1=2^b n+1$ 이다.

$\therefore$ ㉠ $\Rightarrow 2^b n+1=2^n \cdot 2^b n$

$\Rightarrow b_{n+1}=n+b_n$ $\therefore$ (가)$=n$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}}$

$\therefore$ (나)$=\dfrac{n^2-3n+4}{2}$

$\therefore\ f(n)=ng(n)=\dfrac{n^2-3n+4}{2}$

$\therefore\ f(12)=12g(5)=7$

$\therefore\ f(12)-g(5)=12-7=5$

28) 답 : ①

[해설]

$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ 라 하면 $b_{n+1}=\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ 으로부터

$b_{n+1}=\dfrac{S_n}{n} \rightarrow nb_{n+1}=S_n$ ...㉠

마찬가지 논리로

$b_{n+2}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1} \Rightarrow (n+1)b_{n+2}=S_{n+1}$ ... ㉡

이므로 ㉡-㉠으로부터

$(n+1)b_{n+2}-nb_{n+1}=S_{n+1}-S_n$

$\Rightarrow (n+1)b_{n+2}-nb_{n+1}=b_{n+1}$

$\Rightarrow (n+1)b_{n+2}=(n+1)b_{n+1}$

$\therefore\ b_{n+2}=b_{n+1}$ ($\because\ n\ge 1$)

$S_{n+1}=\boxed{\dfrac{n+1}{n}}\times S_n$

또한 ㉡ ÷ ㉠ 으로부터 $\dfrac{(n+1)b_{n+2}}{nb_{n+1}}=\dfrac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$S_n=S_1\times\dfrac{S_2}{S_1}\times\dfrac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\dfrac{S_n}{S_{n-1}}$

$=10\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}$

$=[10n]$

$f(n)=n+\dfrac{1}{n}$, $g(n)=10n$ 이므로

$f(5)\times g(6)=\dfrac{6}{5}\times 60=72$

29) 답 : ②

[해설]

$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{n} S_k\ (n\ge 1)$ ...(*) `

에 의하여

$\dfrac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1} S_k\ (n\ge 2)$ ...㉠

(*)에서 ㉠을 빼면

$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n} S_k-\sum_{n-1}^{n} S_k$

$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}-\dfrac{S_n}{n}=S_n\ (n\ge 2)$

$\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{n+1}{n}S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}$

$\therefore\ \dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{(n+1)^2}{n}\ (n\ge 2)$

㉠으로부터 $S_2=2$ 이고,

$S_n=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\times\dfrac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{S_3}{S_2}\times S_2\ (n\ge 3)$ 이므로

$S_n=\dfrac{n^2}{n-1}\times\dfrac{(n-1)^2}{(n-2)}\times\cdots\times\dfrac{3^2}{2}\times 2$

$= n\cdot n!\times\dfrac{1}{2\times 1}$

$=n!\times\dfrac{n}{2}\ (n\ge 3)$ 이다.

그러므로 a_n 은

$a_n=\begin{cases}1,\ (n=1,\ 2)\\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)!,\ (n\ge 3)\end{cases}$ 이다.

$\therefore\ f(n)=(n+1)^2,\ g(n)=\dfrac{n}{2}$

$\therefore\ f(4)\times g(20)=5^2\times\dfrac{20}{2}=250$

30) 답 : ④

[해설]

$-\dfrac{6(n+1)-4}{(n+1)!}=\dfrac{4}{(n+1)!}-3\cdot$ [(가)]

[(가)] $=\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{4}{(n+1)!}+\dfrac{6(n+1)-4}{(n+1)!}\right\}=\dfrac{2(n+1)}{(n+1)!}=\dfrac{2}{n!}$

[(나)] $=b_1\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$f(3)=\dfrac{2}{3!}$, $g(3)=\dfrac{9}{4}$

따라서 구하는 정답은 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9}{4}=\dfrac{3}{4}$

31) 답 : 8

[해설]

주어진 조건을 만족하는 점들을 하나씩 구해보면

$(1,1)\Rightarrow(1,4)\Rightarrow(4,4)\Rightarrow(4,1)\Rightarrow(1,1)$ 이 나타나므로

이 규칙을 만족하는 수열은 주기가 4인 수열이다.

따라서 2015번째 항은 3번째항에 해당하므로 $(4,4)$ 이다.

32) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 계차수열의 성질을 이용하여 일반항을 구할 수 있음을 증명한다.

$b_n=a_{n+1}-a_n$ 이라 하면

$b_1=b_2=1$ 이고 $b_{n+2}=b_n+1$ ($n\ge 1$)이다.

따라서 수열 $\{b_{2n-1}\}$, $\{b_{2n}\}$은 모두 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열이다. 즉,

$b_{2n-1}=b_{2n}=n$ ($n\geq 1$)이다.

그러므로 $n\geq 2$일 때 a_n은 다음과 같다.

ⅰ) n이 홀수일 때, $n=2m-1$이라 하면

$$a_{2m-1}=a_1+\sum_{k=1}^{2m-2}b_k$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k})$$

$$=0+\sum_{k=1}^{m-1}k+\sum_{k=1}^{m-1}k$$

$$=2\times\frac{(m-1)m}{2}$$

$$=<SPANclass=AM>m^2-m\frac{<}{S}PAN>$$

ⅱ) n이 짝수일 때, $n=2m$이라 하면

$$a_{2m}=a_1+\sum_{k=1}^{2m-1}b_k$$

$$=a_1+\sum_{k=1}^{m-1}(b_{2k-1}+b_{2k})+b_{2m-1}$$

$$=0+\sum_{k=1}^{m-1}2k+m$$

$$=2\times\frac{(m-1)m}{2}+m$$

$$=m^2$$

따라서 $f(n)=n,\ g(m)=m^2$이다.

$\therefore\ f(10)+g(10)=110$

33) 답 : ⑤

[해설]

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+n+\frac{1}{n}2^n$$

양변에 $\frac{n}{n+1}$ 을 곱하면 $\frac{n}{n+1}a_{n+1}=n-\frac{1}{n}a_n+2^n$

$b_n=n-\frac{1}{n}a_n$, $b_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n+1}$이므로 $b_{n+1}=b_n+2^n$, $b_1=0$

$$b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^n-2$$

$\therefore\ f(n)=2^n$, $g(n)=2^n-2$

$f(5)+g(10)=2^5+(2^{10}-2)=1054$

(다른 풀이)

$b_n=n-\frac{1}{n}a_n$에서 $a_{n+1}=n+\frac{1}{n}b_{n+1}$이므로

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+n+\frac{1}{n}2^n$에 대입하면

$$n+\frac{1}{n}b_{n+1}=n+\frac{1}{n}b_n+n+\frac{1}{n}2^n$$

$\therefore\ f(n)=2^n$

$b_{n+1}=b_n+2^n$, $b_1=0$이므로 $b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^n-2$

$\therefore\ g(n)=2^n-2$

$\therefore\ f(5)+g(10)=32+1022=1054$

34) 답 : ③

[해설]

$a_n=a_{n-2}+1$ 에서

(a) $n=2k-1$ 일 때

$a_{2k-1}=a_{2k-3}+1(k\geq 2)$

수열 $\{a_{2k-1}\}$은 첫째항이 $a_1=2$ 이고

공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k-1}=2+(k-1)\cdot 1=k+1(k\geq 1)$

(b) $n=2k$ 일 때

$a_{2k}=a_{2k-2}+1(k\geq 2)$

수열 $\{a_{2k}\}$은 첫째항이 $a_2=1$ 이고

공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k}=1+(k-1)\cdot 1=k(k\geq 1)$

$S_n=a_na_{n+1}$ 이므로

$$S_n=\begin{cases}a_{2k-1}a_{2k}=(k+1)\times k(n=2k-1)\\ a_{2k}a_{2k+1}=[k(k+2)(n=2k)\end{cases}$$

따라서 $f(k)=k,\ g(k)=k(k+2)$

$\therefore\ f(6)+g(7)=6+63=69$

35) 답 : ①

[해설]

점 Q 는 직선을 따라 한 번에 $\sqrt{2}$ 만큼 이동하기 때문에 x방향으로+1 만큼, y 축 방향으로 ± 1 만큼씩 이동한다.

$\overline{OP_1}$ 에서 1회, $\overline{P_1P_2}$ 에서 2회... $\overline{P_nP_{n+1}}$ 에서 $n+1$ 회 이동한다.

따라서 원점에서 출발하여 55번 이동한 Q 점의 y 좌표는 $1+2+3\cdots+10$ 합에 의해 P_{10} 의 위치로 이동하게 된다.

$y_{n+1}=y_n+(-1)^n\times(n+1)$ 에 의해

$$y_{10}=y_1+\sum_{k=1}^{9}(-1)^k\times(k+1)$$

$$=1+\{(-2)+3+\cdots+(-10)\}=-5$$

36) 답 : 11

[해설]

(가) $a_{n+2}=a_n-4,\ a_2=x$ 라 하면

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ 은 차례로 $7,\ x,\ 3,\ x-4,\ -1,\ x-8$ 의 값을 가지는 주기가 6인 주기 함수가 된다.

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=3x-3$

조건 $\sum_{k=1}^{50}a_k=8(3x-3)+7+x=258$

$a_2=x=11$

37) 답 : ⑤

[해설]

(나의 풀이)

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+n+\frac{1}{n}2^n$

양변에 $\frac{n}{n+1}$ 을 곱하면 $\frac{n}{n+1}a_{n+1}=n-\frac{1}{n}a_n+2^n$

$b_n=n-\frac{1}{n}a_n$, $b_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_{n+1}$ 이므로 $b_{n+1}=b_n+2^n$, $b_1=0$

$b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^n-2$

$\therefore f(n)=2^n$, $g(n)=2^n-2$

$f(5)+g(10)=2^5+(2^{10}-2)=1054$

(다른 풀이)

$b_n=n-\frac{1}{n}a_n$ 에서 $a_{n+1}=n+\frac{1}{n}b_{n+1}$ 이므로

$a_{n+1}=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n+n+\frac{1}{n}2^n$ 에 대입하면

$n+\frac{1}{n}b_{n+1}=n+\frac{1}{n}b_n+n+\frac{1}{n}2^n$

$\therefore\ f(n)=2^n$

$b_{n+1}=b_n+2^n$, $b_1=0$ 이므로

$b_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=2^n-2$

$\therefore\ g(n)=2^n-2$

$\therefore\ f(5)+g(10)=32+1022=1054$

38) 답 : ④

[해설]

해설

$a_1=1$ 이고, $a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k$

먼저 $n=1$ 일때,

$a_2=\sum_{k=1}^{1}2^{1-k}a_k=2^0a_1=a_1=1$

그러므로 (가)는 1이다.

자연수 n 으로부터,

$a_{n+2}=\sum_{k=1}^{n+1}2^{n+1-k}a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}2^{n+1-k}a_k+a_{n+1}$

$=2\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k+a_{n+1}$

$(\because\ 2^{n+1-k}=2\times 2^{n-k})$

따라서, (나)는 2이다.

주어진 조건인

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k$ 으로부터,

$2\sum_{k=1}^{n}2^{n-k}a_k+a_{n+1}$

$=2a_{n+1}+a_{n+1}=3a_{n+1}$

그러므로 (다)는 3이 된다.

따라서, (가)+(나)+(다)의 합은 9

39) 답 : ②

[해설]

해설

$c_n=1.004\times c_{n-1}$ 이고, $c_0=\frac{1}{99}$

따라서, $c_n=c_1\times(1.004)^{n-1}=\frac{1}{99}(1.004)^n$ 이 된다.

$c_n=\frac{1}{99}(1.004)^n\geq\frac{1}{9}$ 에서, $(1.004)^n\geq 11$

양변에 10을 밑으로 로그를 취하면,

$n\log1.004\geq\log11=1+\log1.1$

$n\log1.004\geq 1+\log1.1=1.0414$

$0.0017\times n\geq 1.0414$

$n\geq\frac{1.0414}{0.0017}≒612.588\cdots$

따라서 구하고자 하는 자연수 n 의

최솟값은 613이다.

40) 답 : ①

[해설]

해설

(가), (나), (다)조건에 의하면

$A_1(1,1)$, $A_3(2,0)$, $A_5(3,-1)$, $\cdots$

$\therefore\ A_{2n-1}(n,-n+2)$

$A_2(3,2)$, $A_4(4,1)$, $A_6(5,0)$, $\cdots$

$\therefore\ A_{2n}(n+2,-n+3)$

따라서,

A_{10} 의 좌표가 $(7,-2)$ 이고 A_{17} 의 좌표가 $(9,-7)$ 이다.

따라서, $k=10$, $l=17$

$k+l=27$

41) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 일반항을 구할 수 있는가 ?

$b_2=(4a_1-1)b_1=3$ 이므로

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n=\cdots=b_2-b_1=2$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$b_n=2n-1$

따라서 $b_{n+1}=2n+1$ 이므로 (*)에서

$2n+1=(4a_n-1)(2n-1)$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{4}\left(2n+\frac{1}{2n-1}+1\right)=\frac{n}{2n-1}$

따라서 $f(n)=2n-1$, $g(n)=\frac{n}{2n-1}$ 이므로

$f(14)\times g(5)=27\times\frac{5}{9}=15$

42) 답 : 392

[해설]

[출제 의도] 주어진 조건을 만족시키는 수열의 일반항을 추론할 수 있는가?

(ⅰ) $n=1$일 때

세 점 $(1, 2^1)$, $(2, 2^2)$, $(3, 2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_1 = 2\times(2^3-2^1)=12$

(ⅱ) $n=2$일 때

세 점 $(1, 2^1)$, $(2, 2^2)$, $(3, 2^3)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_2 = 2\times(2^3-2^2)=8$

(ⅲ) $n\geq 3$일 때

세 점 $(n-2, 2^{n-2})$, $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우이므로

$a_n = 2\times(2^n-2^{n-2})=3\times 2^{n-1}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$\sum_{k=1}^{7} a_k = 12+8+3(2^2+2^3+\cdots+2^6)$$

$$=20+3\times\frac{2^2(2^5-1)}{2-1}=20+12\times 31=392$$

위의 풀이의 (ⅲ)에서

세 점 $(n-1, 2^{n-1})$, $(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$이 정사각형과

그 내부에 포함되는 경우에는 점 $(n-2, 2^{n-2})$도 이 정사각형의 내부에 포함되므로

조건을 만족시키지 않는다.

마찬가지로, 세 점

$(n, 2^n)$, $(n+1, 2^{n+1})$, $(n+2, 2^{n+2})$이 정사각형과 그 내부에 포함되는 경우도

조건을 만족시키지 않는다.

43) 답 : ⑤

[해설]

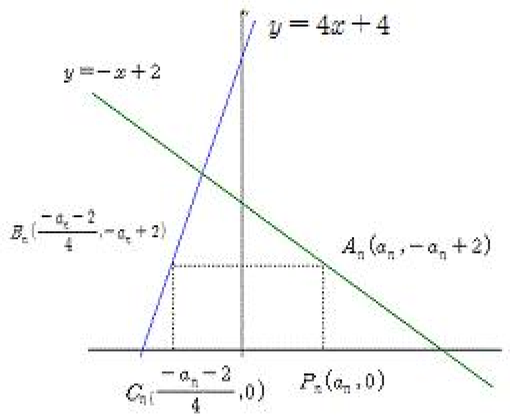
$P_n(a_n, 0)$이므로 $P_{n+1}(a_{n+1}, 0)$주어진 조건에 따라 점 A_n, B_n, C_n의

좌표를 차례로 구하면

$$A_n(a_n, -a_n+2),\ B_n\left(\frac{-a_n-2}{4}, -a_n+2\right),\ C_n\left(\frac{-a_n-2}{4}, 0\right),$$

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}, 0\right)$$

따라서 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2}$



$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하면

$$\alpha = \frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$$

44) 답 : ①

[해설]

$a_n = n^2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)a_k$에서

$a_{n-1} = (n-1)^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k$이므로

$\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k = a_{n-1}-(n-1)^2$

따라서

$$a_n = n^2+\sum_{k=1}^{n-2}(2k+1)a_k+(2n-1)a_{n-1}$$

$$=n^2+a_{n-1}-(n-1)^2+(2n-1)a_{n-1}$$

$$\therefore\ f(n)=(n-1)^2$$

또 $a_n+1=2n(a_{n-1}+1)$

$$=2n\cdot 2(n-1)(a_{n-2}+1)$$

$\vdots$

$$=n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot 2^{n-2}(a_2+1)$$

이므로 $g(n)=2^{n-2}$이다.

$$\therefore\ f(9)\times g(9)=2^6\times 2^7=2^{13}$$

45) 답 : ⑤

[해설]

$(k-1)a_k+\sum_{m=1}^{k-1}ma_m=0$에서

$\sum_{m=1}^{k-1}ma_m=-(k-1)a_k=(1-k)a_k$이므로

[(가)] $=1-k$

$ka_{k+1}+(1-k)a_k+ka_k=0$에서

$ka_{k+1}=-a_k\ \therefore\ a_{k+1}=-\frac{1}{k}a_k$이므로

[(나)] $=-\frac{1}{k}$

$f(k)=\frac{k-1}{k}$

$$\therefore\ f(10)=\frac{9}{10}$$

46) 답 : ③

[해설]

$a_n\cdot a_{n+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^n\cdots$①

$a_{n+1}\cdot a_{n+2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\cdots$②

② ÷①: $\frac{a_n}{a_{n+2}}=\frac{1}{5}$은 짝수번째항의 공비를 의미한다.

① 에 $n=1$을 대입하면 $a_1\cdot a_2=\frac{1}{5}$이므로 $a_2=\frac{1}{5}$이다.(∵ $a_1=1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

(다른 풀이)

축차대입법에 의하여

$n=1, 2, 3, \cdots$대입하여 나열하면

$$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^3, \left(\frac{1}{5}\right)^3, \cdots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$은 공비가 $\frac{1}{5}$인 등비급수이므로

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

47) 답 : ②

[해설]

$$a_{k+1} = \frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+2)!}$$

$$= \frac{1!+2!+3!+\cdots+k!+(k+1)!}{(k+2)\times(k+1)!}$$

$$= \left(\frac{1}{k+2}\right)a_k + \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k+2}\right)a_k + \frac{1}{k+2}$$

$$= \left[\frac{1}{k+2}\right](1+a_k) < \frac{1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k+2} + \left[\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right]$$

48) 답 : ②

[해설]

$p_1 = p-1$

$p_2 = p_1 - 2$

$p_3 = p_2 - 3$

⋮

$p_n = p_{n-1} - n < n+1$이면 멈춘다.

$\therefore\ p_{n+1} - p_n = -(n+1)$

$$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\{-(k+1)\} = p-1-2-3-\cdots-n = p - \frac{n(n+1)}{2}$$

$2p_n = 2p - n(n+1) = n+1$

$\therefore\ 2p = (n+1)^2,\ p = \frac{(n+1)^2}{2}$

49) 답 : ①

[해설]

$S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n$이므로

주어진 식은 $(a_{n+1}+a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

따라서 $(a_{n+1}-a_n)^2 = 4$

$\therefore\ a_{n+1} - a_n = 2\ (\because\ a_{n+1} > a_n)$

$\therefore\ a_{20} = 1 + 2(20-1) = 39$

[정답]①

50) 답 : 56

[해설]

$a_1 = 10$이므로

$a_2 = \left[\frac{10}{2}\right] + 3 = 5+3 = 8$

$a_3 = \left[\frac{8}{2}\right] + 3 = 4+3 = 7$

$a_4 = \left[\frac{7}{2}\right] + 3 = 3+3 = 6$

$a_5 = \left[\frac{6}{2}\right] + 3 = 3+3 = 6$

⋮

이므로 $n \ge 4$일 때, $a_n = 6$이다.

작은 정육면체는 모두 $7^3 = 343$개가 필요하므로

$10+8+7+6\times53 = 343$에서 56번째에 상자를 가득 채울 수 있다.[정답]56

51) 답 : ③

[해설]

$(a_{n+1} - b_{n+1}) = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$이므로 $a_1 = b_1$이면, $a_n = b_n$이다.

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}, \ \ldots ① \\ b_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}, \ \ldots ② \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)\text{라 두자.}$$

ⅰ)①-② 하면

$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$이므로

$a_n - b_n = (a_1 - b_1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …③

ⅱ)①+② 하면

$a_{n+1} + b_{n+1} = -\frac{1}{2}(a_n + b_n) + 3$

여기서, $a_n + b_n = c_n$이라 두면

$c_{n+1} = -\frac{1}{2}c_n + 3$

$(c_{n+1} - 2) = -\frac{1}{2}(c_n - 2)$이고

$c_n - 2 = (c_1 - 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_n + b_n = 2 + (a_1 + b_1 - 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …④

③ 과 ④를 연립하면,

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{2 + (a_1 - b_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (a_1 + b_1 - 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{2 - (a_1 - b_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (a_1 + b_1 - 2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

ㄱ. $a_1 = b_1$이면 $a_n = b_n$이다.

ㄴ. $a_1 = 0,\ b_1 = 1$이면

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{2 + (0-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + (0+1-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$= 1$$

이므로 $a_{n+1}=a_n$ 이다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=1$ 이다.

52) 답 : ④

[해설]

수열[정답]④

$n=k+1$일 때,

$$1\cdot(k+1)+2\cdot k+3\cdot(k-1)+\cdots+(k+1)\cdot 1$$
$$=1\cdot k+2\cdot(k-1)+3\cdot(k-2)+\cdots+k\cdot 1$$
$$+(1+2+3+\cdots+k)+k+1$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\left[\frac{k(k+1)(k+2)}{6}\right]+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$=\left[\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}\right]$$

53) 답 : ②

[해설]

ㄱ. $r=2$이면, 점 P_2는 꼭짓점 C이고,

점 P_3는 꼭짓점 B이다.

ㄴ. $r=\frac{4}{5}$이면, 점 P_2는 점 $A=P_1$에서 $\frac{4}{5}$되는 지점의 점이고,

점 P_3는 앞의 점에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$되는 지점의 점이다.

계속하면 점 P_n이 움직인 거리는

$\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$(즉, 점 B)에 가까이 가므로

변 CA위에 S의 원소는 유한개이다.

ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$이면, 점 P_2는 점 $A=P_1$에서 r되는 지점의 점이고,

점 P_3는 앞의 점에서 r^2되는 지점의 점이다.

계속하면 점 P_n이 움직인 거리는

$r+r^2+r^3+\cdots=\frac{r}{1-r}\ \left(0<\frac{r}{1-r}<1\right)$

(즉, 점 B)이므로 변 AB 위에 S의 원소가 무수히 많다.

54) 답 : 15

[해설]

$$\sum_{n=1}^{10}\log a_n=\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{5}\log 2^n+\sum_{n=1}^{5}\log 5^n$$
$$=\log 2\sum_{n=1}^{5}n+\log 5\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=(\log 2+\log 5)\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=1\times\frac{5\times 6}{2}=15$$

55) 답 : 15

[해설]

$$\sum_{n=1}^{10}\log a_n=\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{5}\log 2^n+\sum_{n=1}^{5}\log 5^n$$
$$=\log 2\sum_{n=1}^{5}n+\log 5\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=(\log 2+\log 5)\sum_{n=1}^{5}n$$
$$=1\times\frac{5\times 6}{2}=15$$

56) 답 : ②

[해설]

ㄱ. $r=2$이면, 점 P_2는 꼭짓점 C이고, 점 P_3는 꼭짓점 B이다.

ㄴ. $r=\frac{4}{5}$이면, 점 P_2는 점 $A=P_1$에서 $\frac{4}{5}$되는 지점의 점이고,

점 P_3는 앞의 점에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$되는 지점의 점이다.

계속하면 점 P_n이 움직인 거리는

$\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$(즉, 점 B)에 가까이 가므로

변 CA위에 S의 원소는 유한개이다.

ㄷ. $0<r<\frac{1}{2}$이면, 점 P_2는 점 $A=P_1$에서 r되는 지점의 점이고,

점 P_3는 앞의 점에서 r^2되는 지점의 점이다.

계속하면 점 P_n이 움직인 거리는

$r+r^2+r^3+\cdots=\frac{r}{1-r}\ \left(0<\frac{r}{1-r}<1\right)$

(즉, 점 B)이므로 변 AB위에 S의 원소가 무수히 많다.

57) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열

$n=k+1$일 때,

$$1\cdot(k+1)+2\cdot k+3\cdot(k-1)+\cdots+(k+1)\cdot 1$$
$$=1\cdot k+2\cdot(k-1)+3\cdot(k-2)+\cdots+k\cdot 1$$
$$+(1+2+3+\cdots+k)+k+1$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$

58) 답 : ③

[해설]

$\begin{cases} a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}\cdots ① \\ b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}\cdots ② \end{cases}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 두자.

ⅰ)①-② 하면

$a_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n-b_n)$이므로

$a_n-b_n=(a_1-b_1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots ③$

ⅱ)①+② 하면

$a_{n+1}+b_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)+3$

여기서, $a_n+b_n=c_n$이라 두면

$c_{n+1}=-\dfrac{1}{2}c_n+3$

$(c_{n+1}-2)=-\dfrac{1}{2}(c_n-2)$이고

$c_n-2=(c_1-2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$a_n+b_n=2+(a_1+b_1-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots ④$

③ 과 ④를 연립하면,

$a_n=\dfrac{1}{2}\left\{2+(a_1-b_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+(a_1+b_1-2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$b_n=\dfrac{1}{2}\left\{2-(a_1-b_1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+(a_1+b_1-2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

ㄱ. $a_1=b_1$이면 $a_n=b_n$이다.

ㄴ. $a_1=0,\ b_1=1$이면

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{2+(0-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+(0+1-2)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=1$$

이므로 $a_{n+1}=a_n$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$이다.

$(a_{n+1}-b_{n+1})=\dfrac{1}{2}(a_n-b_n)$이므로 $a_1=b_1$이면, $a_n=b_n$이다.

59) 답 : 8

[해설]

[출제 의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6이므로 $a_1>0$

이때 $a_2=2-6=-4$

$a_2<0$이므로

$a_3=a_2+p=-4+p$

(ⅰ) $-4+p\geq 0$, 즉 $p\geq 4$일 때

$a_4=2-a_3=2-(-4+p)=6-p=0$에서 $p=6$

(ⅱ) $-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때

$a_4=a_3+p=(-4+p)+p=-4+2p=0$에서 $p=2$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a_4=0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합은 $6+2=8$

60) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

$f(m)=2m+1$이고

$(2m+3-2k)^2$

$=(2m+1-2k+2)^2$

$=(2m+1-2k)^2+4(2m+1-2k)+4$

$=(2m+1-2k)^2+8(m+1-k)$

이므로

$\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2$

$=\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$

$+8\times\sum\limits_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)$

에서 $p=8$

따라서 $f(3)+p=7+8=15$

61) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명한다.

수학적 귀납법에 의한 증명이므로

$n=1$일 때 성립함을 증명하고 $n=m$일 때 성립함을 가정하여 $n=m+1$일 때도 성립함을 증명한다.

문제에서 $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하였으므로

$\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$ ...㉠

또, $\sum\limits_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2$은 $k=1$부터 $k=m+1$까지 $(-1)^{k+1}k^2$의 합이므로

$\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2$에 $(-1)^{m+2}(m+1)^2$을 합한 것과 같다. 즉,

$\sum\limits_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2=\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{m+2}(m+1)^2$

그러므로 (가)는 $(-1)^{m+2}(m+1)^2$이다.

또, 등식 $\sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+$(가) $=$(나)$+$(가)와

㉠에서 (나)는 $(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$

그러므로 $f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$,

$g(m)=(-1)^{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}$이므로

$f(5)=(-1)^{5+2}(5+1)^2=-36$

$g(2)=(-1)^{2+1}\cdot\dfrac{2(2+1)}{2}=-3$이다.

따라서 $\dfrac{f(5)}{g(2)}=\dfrac{-36}{-3}=12$

62) 답 : 123

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기
(가)에서 $a_1=1$, $a_2=2$
(나)에서 $n\geq 3$인 자연수에 대하여 a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지이므로
$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=1$, $a_5=0$, $a_6=1$,
$a_7=1$, $a_8=2$, $\cdots$
$\sum_{k=1}^{6}a_k=8$, $a_{n+6}=a_n$이므로 $\sum_{k=1}^{6n}a_k=8n$
$n=20$일 때, $\sum_{k=1}^{120}a_k=160$
$a_{121}=a_1=1$, $a_{122}=a_2=2$, $a_{123}=a_3=3$
$\therefore \sum_{k=1}^{m}a_k=160+1+2+3=\sum_{k=1}^{120}a_k+a_{121}+a_{122}+a_{123}$
따라서 $m=123$

63) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항 구하는 과정을 증명한다.
주어진 식에서 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n+1}=a_{2n}-2a_{2n-1}\ldots$㉠
$a_{2n+2}=6a_{2n+1}-a_{2n}\ldots$㉡
$a_{2n+3}=a_{2n+2}-2a_{2n+1}\ldots$㉢
이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 연립하면
$$\begin{aligned}a_{2n+3}&=a_{2n+2}-2a_{2n+1}\\&=(6a_{2n+1}-a_{2n})-2a_{2n+1}\\&=4a_{2n+1}-(a_{2n+1}+2a_{2n-1})\\&=3a_{2n+1}-2a_{2n-1}\end{aligned}$$
이다. 즉,
$$\begin{aligned}a_{2n+3}-a_{2n+1}&=2(a_{2n+1}-a_{2n-1})\\&=2^n(a_3-a_1)\end{aligned}$$
이고, ㉠에서 $a_3=a_2-2a_1=3$이므로 $a_3-a_1=2$
따라서
$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2^n$ ($n\geq 1$)
$$\begin{aligned}a_{2n-1}&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k\\&=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}\\&=2^n-1\ (n\geq 2)\end{aligned}$$
이고, $a_1=1$이므로
$a_{2n-1}=2^n-1$ ($n\geq 1$)
㉠으로부터
$a_{2n}=a_{2n+1}+2a_{2n-1}$
이므로
$$\begin{aligned}a_{2n}&=(2^{n+1}-1)+2(2^n-1)\\&=2^{n+2}-3\ (n\geq 1)\end{aligned}$$
이다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n-1}=2^n-1$, $a_{2n}=2^{n+2}-3$
이다.
(가)에 알맞은 식은 2^n이므로 $f(n)=2^n$
(나)에 알맞은 식은 2^n-1이므로 $g(n)=2^n-1$
(다)에 알맞은 식은 $2^{n+2}-3$이므로 $h(n)=2^{n+2}-3$
따라서
$$\frac{f(5)g(10)}{h(10)-1}=\frac{2^5(2^{10}-1)}{(2^{12}-3)-1}=\frac{2^5(2^{10}-1)}{2^2(2^{10}-1)}=8$$

64) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기
$2S_n=3a_n-4n+3\ \ldots$㉠
에서 $n=1$일 때, $2S_1=3a_1-1$이므로
$a_1=1$
$2S_{n+1}=3a_{n+1}-4(n+1)+3\ldots$㉡
㉡-㉠을 하면
$$\begin{aligned}2(S_{n+1}-S_n)&=3a_{n+1}-3a_n-4\\2a_{n+1}&=3a_{n+1}-3a_n-4\\a_{n+1}&=3a_n+[4]\\a_{n+1}+2&=3(a_n+2)\end{aligned}$$
이다. 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 a_1+2, 공비가 3인등비수열이므로
$a_n+2=(a_1+2)\times 3^{n-1}$
일반항 a_n을 구하면
$a_n=3\times 3^{n-1}-2=[\ 3^n-2\ ]$ ($n\geq 1$)
이다.
$\therefore\ p=4$, $f(n)=3^n-2$
따라서 $p+f(5)=4+(3^5-2)=245$

65) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론한다.
$n=2m-1$을 대입하면 $\dfrac{a_{2m+1}}{a_{2m-1}}=\dfrac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$
그러므로 (가)는 $\dfrac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$
$m-1$개의 식을 곱하여 정리하면
$$\frac{a_{2m+1}}{a_1}=\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times(2m-1)^2}{2\times3\times4\times5\times\cdots\times(2m+1)}$$
$$a_{2m+1}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2m-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times 2m}\times\frac{1}{2m+1}$$
그러므로 (나)는 $\dfrac{1}{2m+1}$
따라서 $f(5)\times g(4)=\dfrac{9}{110}$

66) 답 : 123
[해설]
[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(가)에서 $a_1=1$, $a_2=2$

(나)에서 $n\ge 3$인 자연수에 대하여 a_n은 a_{n-2}와 a_{n-1}의 합을 4로 나눈 나머지이므로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=1$, $a_5=0$, $a_6=1$, , $a_7=1$, $a_8=2$, ...

$\sum_{k=1}^{6}a_k=8$, $a_{n+6}=a_n$이므로 $\sum_{k=1}^{6n}a_k=8n$

$n=20$일 때, $\sum_{k=1}^{120}a_k=160$

$a_{121}=a_1=1$, $a_{122}=a_2=2$, $a_{123}=a_3=3$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{m}a_k=160+1+2+3=\sum_{k=1}^{120}a_k+a_{121}+a_{122}+a_{123}$

따라서 $m=123$

67) 답 : 165

[해설]

[출제 의도] 계차수열을 활용하여 추론하기

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3n+3$이므로

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+3)=\frac{3n(n+1)}{2}\quad(n\ge 2)$$

따라서 $a_{10}=165$

68) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

> 주어진 식의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면
>
> $$\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{3n-2a_n}{a_n}$$
>
> 이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면
>
> $b_{n+1}=3b_n+\boxed{(-2)}$
>
> 이고, $b_{n+1}-1=3(b_n-1)$이다.
>
> $b_1=4$이므로 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열이다.
>
> $b_n-1=\boxed{3^n}$
>
> $b_n=\boxed{3^n}+1$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$a_n=\frac{n}{\boxed{3^n}+1}\quad(n\ge 1)$$
>
> 이다.

주어진 식의 양변을 a_na_{n+1}로 나누면

$\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{3n-2a_n}{a_n}$이다.

$b_n=\frac{n}{a_n}$이라 하면

$b_{n+1}=3b_n+\boxed{(-2)}$이고, $b_{n+1}-1=3(b_n-1)$이다.

$b_1=4$이므로 수열 $\{b_n-1\}$은 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열이다.

$b_n-1=\boxed{3^n}$

$b_n=\boxed{3^n}+1$

이다. 그러므로

열이다. $a_n=\frac{n}{\boxed{3^n}+1}$ $(n\ge 1)$이다.

$p=-2$, $f(n)=3^n$

따라서 $-2+f(3)=25$

69) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$2S_n=3a_n-4n+3$ ... ㉠

에서 $n=1$일 때, $2S_1=3a_1-1$이므로 $a_1=1$

$2S_{n+1}=3a_{n+1}-4(n+1)+3$...㉡

㉡-㉠을 하면

$2(S_{n+1}-S_n)=3a_{n+1}-3a_n-4$

$2a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n-4$

$a_{n+1}=3a_n+$ [4]

$a_{n+1}+2=3(a_n+2)$

이다. 수열 $\{a_n+2\}$는 첫째항이 a_1+2, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n+2=(a_1+2)\times 3^{n-1}$

일반항 a_n을 구하면

$a_n=3\times 3^{n-1}-2=$ [3^n-2] ($n\ge 1$)

이다.

$\therefore$ $p=4$, $f(n)=3^n-2$

따라서 $p+f(5)=4+(3^5-2)=245$

70) 답 : 235

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열을 이용하여 추론하기

$a_1=3$

$a_2=\frac{3+93}{2}=48$

$a_3=\frac{48}{2}=24$

$a_4=\frac{24}{2}=12$

$a_5=\frac{12}{2}=6$

$a_6=\frac{6}{2}=3$

⋮

$a_k=3$을 만족시키는 50이하의 모든 자연수 k는

1, 6, 11, 16, ⋯, 46

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$$\sum_{m=1}^{10}(5m-4)=5\times\frac{10\times(10+1)}{2}-4\times 10$$

$=235$

71) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 과정을 증명한다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n a_{n+1}}{n+1}$$

의 양변에 $\frac{n(n+1)}{a_n a_{n+1}}$ 을 곱하면

$$\frac{n+1}{a_{n+1}}-\frac{n}{a_n}=[\ n\ ]$$

이다. $b_n=\frac{n}{a_n}$ 이라 하면 $b_1=\frac{1}{2}$ 이고

$b_{n+1}-b_n=[\ n\ ]\ (n\geq 1)$

이므로

$$b_n=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+1}{2}$$

$$a_n=\frac{n}{b_n}=[\ \frac{2n}{n^2-n+1}\ ]$$

따라서 $f(n)=n$, $g(n)=\frac{2n}{n^2-n+1}$ 이다.

$\therefore\ f(13)g(4)=13\times\frac{8}{13}=8$

72) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열 추론하기

$A_1(0,\ 0)$

$A_2(0,\ (-1)\times 3)$

$A_3((-1)\times 3,\ (-1)\times 3)$

$A_4((-1)\times 3,\ (-1)\times 3+(-1)^2\times 5)$

$A_5((-1)\times 3+(-1)^2\times 5,\ (-1)\times 3+(-1)^2\times 5)$

$A_6((-1)\times 3+(-1)^2\times 5,\ (-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7)$

$A_7((-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7,\ (-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7)$

$\vdots$

$\therefore\ p=(-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7+\cdots+(-1)^{14}\times 29$

$=-3+5-7+9-\cdots+29=14$

$q=(-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7+\cdots+(-1)^{15}\times 31$

$=-3+5-7+9-\cdots-31=-17$

따라서 $p+q=-3$

73) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 등차수열의 일반항과 합의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$2a_n+n=p$에

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20$을 대입하면

$2a_1+1=p$

$2a_2+2=p$

$\cdots$

$2a_{20}+20=p$

변끼리 더하면

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{20})+(1+2+\cdots+20)=20p$

$2p+\frac{20\times 21}{2}=20p$

$18p=210$

$\therefore\ p=\frac{35}{3}$

$2a_{10}+10=\frac{35}{3}$ 에서

$a_{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{35}{3}-10\right)=\frac{5}{6}$

74) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

주어진 식에 의하여

$$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$

이다. $b_n=\frac{n}{2^n}a_n$이라 하면

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{n}\ (n\geq 1)$$

이고 $b_1=\boxed{6}$이므로

$$b_n=\boxed{\frac{n^2-n+12}{2}}\ (n\geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{\frac{n^2-n+12}{2}}\ (n\geq 1)$$

이다.

$f(n)=n$, $p=6$,

$g(n)=b_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}k\ (n\geq 2)$

$g(n)=6+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+12}{2}$

따라서 $f(p)+g(p)=f(6)+g(6)=6+21=27$

75) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

주어진 식에 의하여

$$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$

이다. $b_n=\frac{n}{2^n}a_n$이라 하면

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{n}\ (n\geq 1)$$

이고 $b_1=\boxed{6}$이므로

$$b_n=\boxed{\frac{n^2-n+12}{2}}\ (n\geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{\frac{n^2-n+12}{2}}\ (n\geq 1)$$

이다.

$f(n)=n$, $p=6$,

$g(n)=b_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}k\ (n\geq 2)$

$g(n)=6+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+12}{2}$

따라서 $f(p)+g(p)=f(6)+g(6)=6+21=27$

76) 답 : 462

[해설]

[출제 의도] 조건을 만족시키는 수열을 추론하여 항의 값을 구한다.

점 $\{P\}_n$, $\{Q\}_n$의 좌표는 다음과 같다.

$P_1(0, 0)$, $Q_1(1, 1)$

$P_2(0, 2)$, $Q_2(2, 4)$

$P_3(1, 5)$, $Q_3(4, 8)$

$P_4(3, 9)$, $Q_4(7, 13)$

$P_5(6, 14)$, $Q_5(11, 19)$

$P_6(10, 20)$, $Q_6(16, 26)$

⋮

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n\}$인

수열이므로 $a_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}k=1+\frac{20\cdot 21}{2}=211$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 계차수열이 $\{n+2\}$인 수열이므로

$b_{21}=1+\sum_{k=1}^{20}(k+2)=1+\frac{20\cdot 21}{2}+2\cdot 20=251$

$\therefore\ a_{21}+b_{21}=211+251=462$

[다른 풀이]

$P_1(0, 0)$으로부터 $Q_1(1, 1)$이므로 $a_1=1$, $b_1=1$

Q_n의 좌표 (a_n, b_n)으로부터

P_{n+1}의 좌표는 (a_n-1, b_n+1)

Q_{n+1}의 좌표는 $(a_n-1+(n+1), b_n+1+(n+1))$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+n$, $b_{n+1}=b_n+n+2$

$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n+2n+2$

수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=2$,

계차수열이 $\{2n+2\}$인 수열이므로

$a_{21}+b_{21}=2+\sum_{k=1}^{20}(2k+2)$

2+2 cdot {:20 cdot 21:} / {2}+2 • 20=462`

77) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용한 문제 해결하기

$a_{n+1}=2a_n+1$에서 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$a_n+1=b_n$이라고 하면, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이

$a_1+1=2$, 공비가 2인 등비수열이므로

$b_n=a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$

따라서 $\log_4(a_{20}+1)=\log_4 2^{20}=\log_4 4^{10}=10$

78) 답 : 65

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$a_1=1$, $a_{2n}=1+a_n$이므로

$a_2=2$, $a_4=3$, $a_8=4$, $a_{16}=5$, $a_{32}=6$, $a_{64}=7$이다.

그리고 $a_{2n+1}=\frac{1}{a_{2n}}$이므로 $a_{65}=\frac{1}{7}$이다.

따라서 $k=65$

79) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$f(n)=\frac{5}{n}$, $g(n)=(n-1)!$

따라서 $f(20)\times g(7)=\frac{5}{20}\times 6\neq 180$

80) 답 : 51

[해설]

[출제 의도]조건을 만족시키는 수열을 추론하여 항의 값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 구하면 다음과 같다.

$a_3=a_1=1$, $a_5=a_3=1$, $a_7=a_5=1$, ⋯

$\therefore\ a_{2n-1}=1$

$a_4=a_2+1=2$, $a_6=a_4+1=3$, $a_8=a_6+1=4$, ⋯

$\therefore\ a_{2n}=n$

따라서 $a_{100}+a_{101}=50+1=51$이다.

81) 답 : 55

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}$, ⋯, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n}\times\frac{n-1}{n}$

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1\times 3}{2\times 2}\times\frac{2\times 4}{3\times 3}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$

따라서 $100a_{10}=55$

82) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 계차수열의 뜻을 이해하여 두 항의 차를 구한다.

$a_{n+1}-a_n=b_n$으로 놓으면

$a_{10}-a_7=(a_{10}-a_9)+(a_9-a_8)+(a_8-a_7)$

$=b_9+b_8+b_7$

$=(2^4+9)+(2^3+8)+(2^2+7)$

$=52$

83) 답 : 610

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 규칙성 추론하기

$a_{n+1}=a_n+2(n+1)+n$이므로 정리하면

$a_{n+1}=a_n+3n+2$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항 $b_n=3n+2$이므로

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

$a_{20} = 610$

84) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의 추론하기

$p=3$, $q=6$, $f(n)=3n$이므로 $p+q+f(10)=39$

85) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제 해결하기

$n \geq 2$에 대하여

$a_n = a_{n-1}+2n-1$에서 $a_n - a_{n-1} = 2n-1$이므로

$n \geq 1$에 대하여

$a_{n+1}-a_n = 2(n+1)-1 = 2n+1$이다.

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$이므로 $f(k)=2k+1$이다.

$a_{20} = 1 + \sum_{k=1}^{19}(2k+1) = 400$이므로 $c=400$이다.

따라서 $f(10)+c = 21+400 = 421$

86) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$이므로

$$a_{n+1}-4 = \frac{1}{2}(a_n - 4),\ a_1 - 4 = 1$$

$$a_n - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\frac{\log\{1\}}{a_n - 4} = \log 2^{n-1}$이므로

$n=1, 2, 3, 4$일 때: $[\log 1] = \cdots = [\log 8] = 0$

$n=5, 6, 7$일 때: $[\log 16] = \cdots = [\log 64] = 1$

$n=8, 9, 10$일 때: $[\log 128] = \cdots = [\log 512] = 2$

$\therefore\ 3+6=9$

87) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변) $= \sum_{k=1}^{1}\frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = \left[\frac{5}{6}\right]$ = (우변)이므로 (★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}\frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} = 1 - \frac{1}{(m+1)3^m}$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{2k+3}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{3^k} + \frac{[2m+5]}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{[3^{m+1}]}$$

$$= 1 - \frac{1}{(m+1)3^m} + \frac{2m+5}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{3^{m+1}}$$

$$= 1 - \frac{[3(m+2)]}{(m+1)(m+2)[3^{m+1}]},\ \left(+\frac{2m+5}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{1}{3^{m+1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{3m+6-2m-5}{(m+1)(m+2)3^{m+1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{(m+2)3^{m+1}}$$

그러므로

$n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

$p = \frac{5}{6}$, $f(m) = \frac{2m+5}{3^{m+1}}$, $g(m) = \frac{3(m+2)}{3^{m+1}}$

$$\therefore\ p \times f(1) \times g(1) = \frac{5}{6} \times \frac{7}{9} \times 1 = \frac{35}{54}$$

88) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 과정을 설명한다.

$a_{n+1} = 2a_n + n + 1$에서 n에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + n+1+1$이므로

$f(n) = n+2$

$a_n = 1 + \frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1} - (n-1) = 2^{n+1} - n - 2$이므로

$g(n) = -n-2$

$\therefore\ f(5) - g(5) = 7 - (-7) = 14$

89) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]조건을 만족시키는 수열을 추론하여 식의 값을 구한다.

2^n이 1이 될 때까지 시행이 n번 반복된다.

$\therefore\ a_{2^n} = n$

따라서 다음이 성립한다.

k	2^n	2^n+1	2^n+2	2^n+3
시행	2^{n-1}	2^n	$2^{n-1}+1$	2^n+2
	2^{n-2}	$\vdots$	2^{n-1}	$\vdots$
	$\vdots$		$\vdots$	
	1	1	1	1
a_k	n	$n+1$	$n+1$	$n+2$

따라서 $S_n = \sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k = 4n+4$이다.

$\therefore\ S_{50} = 204$

90) 답 : 13

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열 이해하기

$a_{n+1}a_{n+2} - 2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2$ …㉠

$a_n a_{n+1} - 2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ …㉡

㉠ − ㉡ 을 하면

$a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = a_{n+1}^2$이며 인수분해하면

$a_{n+1}(a_{n+2} - a_n) = a_{n+1}^2$이고 양변을 a_{n+1}으로 나누면

$$a_{n+2}-a_n=a_{n+1}\text{이며 정리하면}$$
$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$$

$a_8=a_6+a_7=a_6+a_5+a_6=2a_6+a_5=3a_5+2a_4$ 이므로 $q=2$이다.

$\therefore\ p^2+q^2=13$

91) 답 : 95

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 P_n에서 직선 AB에 내린 수선의 길이를 h_n이라 하면

$\triangle ABP_n=\frac{1}{2}\overline{AB}\times h_n=\frac{5}{2}h_n$ 이므로

a_n은 h_n에 의하여 결정된다.

l:원의 중심과 직선 AB사이의 거리 r_n:원 C_n의 반지름

$a_n=\frac{5}{2}\times h_n$의 최댓값 $-\frac{5}{2}\times h_n$의 최솟값

$$=\frac{5}{2}(l+r_n)-\frac{5}{2}(l-r_n)=\frac{5}{2}\times 2r_n=\frac{10}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{19}a_na_{n+1}=\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{n(n+1)}=100\left(1-\frac{1}{20}\right)=95$$

92) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]증명 과정을 이해하여 빈 칸에 들어갈 식을 구한다.

$$a_{n+12}-a_n=\frac{(n+12)(n+13)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=6(2n+13)$$
$$b_{4n-3}=a_{12n-9}=6(4n-3)(3n-2)$$
$$b_{4n-2}=a_{12n-4}=6(3n-1)(4n-1)$$
$$b_{4n-1}=a_{12n-1}=6n(12n-1)$$
$$b_{4n}=a_{12n}=6n(12n+1)$$
$$\sum_{k=1}^{4n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\left(b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}6\left(48k^2-24k+7\right)$$
$$=6\left(16n^3+12n^2+3n\right)$$

따라서 $\begin{cases}f(n)=6(2n+13)\\ g(n)=6n(12n-1)\end{cases}$

$h(k)=6\left(48k^2-24k+7\right)$이므로

$f(1)+g(2)+h(1)=90+276+186=552$

93) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열 연역적 추론하기

$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$이라 하면

$3S_n=(n+2)a_n$ ⋯㉠

$3S_{n+1}=(n+3)a_{n+1}$ ⋯㉡

㉡-㉠에서 $3(S_{n+1}-S_n)=3a_{n+1}$이므로

$3a_{n+1}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$이며 정리하면

$0=na_{n+1}-(n+2)a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n}$ 이므로

$f(n)=n$의 양변을 $n+1$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}\text{ 이므로}$$

$g(n)=n(n+1)$

$b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}$ 이라 하면 $b_{n+1}=b_n$이므로

$b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1$이다.

따라서 $\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_1}{1\cdot 2}$ 이므로 $h(n)=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ f(1)+g(2)+h(3)=13$

94) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$b_n=\frac{a_n}{n+1}$ 이라 놓으면 $a_n=(n+1)b_n$이므로

$$(n+3)b_{n+2}=(n+2)b_{n+1}+b_n$$
$$(n+3)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(b_{n+1}-b_n)\ldots\ \ldots(\bigstar)$$

식 ($\bigstar$)에 $n=1,2,\cdots,m-1\ (m\ge 2)$를 대입하면

$$4(b_3-b_2)=-(b_2-b_1)$$
$$5(b_4-b_3)=-(b_3-b_2)$$
$$\vdots$$
$$(m+2)(b_{m+1}-b_m)=-(b_m-b_{m-1})$$

좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,

$$b_{m+1}-b_m=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+2}\right)(b_2-b_1)$$
$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\ (n\ge 2)$$
$$\therefore\ a_n=(n+1)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}\right]\right)\ (n\ge 2)$$

$f(n)=n+2,\ g(k)=\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}$

$\therefore\ f(1)g(3)=\frac{1}{40}$

95) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]행렬의 거듭제곱과 곱셈의 성질 이해하기

[해설]

ㄱ. $BA=(E-2A)A=A-2A^2=A(E-2A)=AB=O$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의해 $A-2A^2=0$이므로

$A^2=\frac{1}{2}A,\ 2AB=O$이므로

$(E-B)B=O$이다.

따라서 $B^2=B$이다.

$(A+2B)^2=A^2+2A(2B)+4B^2=\frac{1}{2}A+4B$(거짓)

ㄷ. 수학적 귀납법에 의해

$n=1$일 때

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2=\frac{1}{2}A+B$이다.

$n=k$일 때, 관계식이 성립한다고 하면,

$(A+B)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k A+B$이다.

$$\begin{aligned}(A+B)^{k+2} &= (A+B)^{k+1}(A+B)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k (A+B)(A+B)\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k A^2 + BA + \left(\frac{1}{2}\right)^k AB + B^2\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}(A+B)\end{aligned}$$

그러므로 $n=k+1$일 때에도 관계식이 성립한다.
따라서 수학적 귀납법에 의해
모든 자연수 n에 대하여 $(A+B)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n A+B$이다.(참)

96) 답 : 420
[해설]
[출제 의도] 수열의 규칙성을 이용하여 여러 가지 수열 문제를 해결한다.
a_n의 경우, 마지막 상태에서는 $4n$개의 동전 중 $2n$개의 동전이 이므로
적어도 $2n$번의 시행을 해야 한다.
그런데 $4n$개 동전을 4개씩 n개의 묶음으로 나누면 각 묶음마다 2회씩을 시행하여
총 $2n$회의 시행 후 마지막 상태를 만들 수 있다.
즉, ... , ..., ... 와
같이 $2n$번의 시행으로 마지막 상태를 만들 수 있으므로 $a_n = 2n$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=1}^{20} 2n = 2\sum_{n=1}^{20} n = 2\times\frac{20\cdot 21}{2} = 420$

97) 답 : 65
[해설]
[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기
$a_1 = 1,\ a_{2n} = 1+a_n$ 이므로
$a_2 = 2,\ a_4 = 3,\ a_8 = 4,\ a_{16} = 5,\ a_{32} = 6,\ a_{64} = 7$이다.
그리고 $a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$ 이므로 $a_{65} = \frac{1}{7}$ 이다.
따라서 $k=65$

98) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]수열의 합과 일반항을 이용한명제 추론하기
[해설] ㉠에서 ㉡을 뺀 식은
$a_{2m+1} - a_{2m} = -\frac{1}{2m+1}a_{2m}$ 이므로
$a_{2m+1} = \left(1-\frac{1}{2m+1}\right)a_{2m}$ 이고
$a_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}a_{2m}$ 이다.
따라서 [(가)] $= \frac{2m}{2m+1}$
같은 방법으로 ㉢에서 ㉠을 뺀 식으로 부터
$a_{2m+2} = \frac{2m+3}{2m+2}a_{2m+1}$ 이다.
따라서 [(나)] $= \frac{2m+3}{2m+2}$ 이다.
따라서 $f(9)\times g(9) = \frac{18}{19}\times\frac{21}{20} = \frac{189}{190}$ 이다.

99) 답 : ①
[해설]
$a=-1,\ f(m) = -\frac{m(m+1)}{2}$ 이므로
$a+f(9) = (-1)+(-45) = -46$

100) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]
수학적 귀납법을 이용한 증명을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2k+1}(i+k^2)\\ &= \sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2) + \sum_{i=2k}^{2k+1}(i+k^2)\\ &= \sum_{i=1}^{2k-1}(i+k^2) + (2k+k^2) + (2k+1+k^2)\\ &= \sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2+(2k-1)\} + (2k^2+4k+1)\\ &= \sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\} + \sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1) + (2k^2+4k+1)\end{aligned}$$

이므로 $f(k) = 2k^2+4k+1$이다.
한편

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2k-1}\{i+(k-1)^2\} + \sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1) + (2k^2+4k+1)\\ &= (k-1)^3 + k^3 + \sum_{i=1}^{2k-1}(2k-1) + (2k^2+4k+1)\\ &= (k-1)^3 + k^3 + (2k-1)^2 + (2k^2+4k+1)\\ &= k^3 - 3k^2 + 3k - 1 + k^3 + 4k^2 - 4k + 1 + 2k^2 + 4k + 1\\ &= k^3 + k^3 + 3k^2 + 3k + 1\\ &= k^3 + (k+1)^3\end{aligned}$$

그러므로 $g(k) = k^3 + (k+1)^3$이다.
$\therefore \frac{g(4)}{f(4)} = \frac{189}{49} = \frac{27}{7}$

101) 답 : ⑤
[해설]
점화식 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 1$이므로 변형하면
$(a_{n+1}+1) = 2(a_n+1)$이며 등비수열의 일반항 공식에 의해
$a_n + 1 = (a_1+1)\cdot 2^{n-1} = 2^n$

$$\begin{aligned}[\text{구하는 값}] &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log_2(a_n+1)\log_2(a_{n+1}+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log_2 2^n\cdot\log_2 2^{n+1}}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1$$

102) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n = 3^{n-1},\ b_n = n(n-1)\cdot\cdots 2\cdot 1 = n!$

$1 \le n \le 4$일 때 $a_n \ge b_n$이므로 $c_n = b_n$

$n \ge 5$일 때 $a_n < b_n$이므로 $c_n = a_n$

n	1	2	3	4	5	⋯
a_n	1	3	9	27	81	⋯
b_n	1	2	6	24	120	⋯
c_n	1	2	6	24	81	⋯

$$\sum_{n=1}^{50}2c_n = 2\left(\sum_{n=1}^{4}n! + \sum_{n=5}^{50}3^{n-1}\right)$$
$$= 2\left\{1+2+6+24+\frac{3^4(3^{46}-1)}{3-1}\right\}$$
$$= 3^{50}-15$$

103) 답 : ⑤

[해설]

(i) $n=1$일 때,

(좌변) $= a_1 =$ (우변)이므로 (△)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (△)이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_k}{k} \ge a_k \text{이다.}$$

$$(k+1)\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_k}{k}\right)$$
$$= ka_1 + (k-1)\frac{a_2}{2} + (k-2)\frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \sum_{i=1}^{k}a_i$$
$$= a_1 + \left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right) + \cdots + \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k}\right) + \sum_{i=1}^{k}a_i$$
$$\ge 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = \sum_{i=1}^{k}(a_i + a_{k+1-i}) \ge \sum_{i=1}^{k}a_{k+1} \text{이므로}$$
$$(k+1)\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_{k+1}}{k+1}\right) \ge (k+1)a_{k+1} \text{이고}$$
$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_{k+1}}{k+1} \ge a_{k+1} \text{이다.}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 (△)이 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 (△)이 성립한다.

104) 답 : ②

[해설]

$a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_3 = 13,\ \cdots$이므로

$$a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{k-1} = 3\cdot 2^{n-1}+1$$

$b_1 = 6,\ b_2 = 15,\ b_3 = 33,\ \cdots$이므로

$$b_n = 6 + \sum_{k=1}^{n-1}9\cdot 2^{k-1} = 9\cdot 2^{n-1} - 3 \text{이다.}$$

따라서 $b_8 - a_8 = (9\cdot 2^7 - 3) - (3\cdot 2^7 + 1) = 6\cdot 2^7 - 4 = 764$

105) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열을 귀납적인 방법을 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1 = 1,\ b_1 = 1$이고,

$a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n$이므로

$a_2 = 2,\ b_2 = 1$

$a_3 = 3,\ b_3 = 2$

$a_4 = 5,\ b_4 = 3$

$a_5 = 8,\ b_5 = 5$

$a_6 = 13,\ b_6 = 8$

$a_7 = 21,\ b_7 = 13$

$\therefore\ a_7 + b_7 = 34$

[다른 풀이]

$a_1 = 1,\ b_1 = 1$이고, $a_{n+1} = a_n + b_n,\ b_{n+1} = a_n$이므로

$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다. 이때,

$A = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$이라 하면,

$A^2 = \begin{pmatrix}2, & 1\\ 1, & 1\end{pmatrix},\ A^3 = \begin{pmatrix}3, & 2\\ 2, & 1\end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix}5, & 3\\ 3, & 2\end{pmatrix},$

$A^5 = \begin{pmatrix}8, & 5\\ 5, & 3\end{pmatrix},\ A^6 = \begin{pmatrix}13, & 8\\ 8, & 5\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}a_7\\ b_7\end{pmatrix} = A^6\begin{pmatrix}a_1\\ b_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13, & 8\\ 8, & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\ 13\end{pmatrix}$

$\therefore\ a_7 + b_7 = 34$

106) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 알고 추론하기

$f(n) = \dfrac{n+1}{n},\ g(n) = 5n$이므로

$f(5)\times g(10) = 60$

107) 답 : 18

[해설]

삼각형 AB_nC_n은 한 변의 길이가 n인 정삼각형이므로

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{2}n\times\frac{1}{3}+1$$

$a_n > 6,\ n > \sqrt{300}$

따라서 n의 최솟값은 18

108) 답 : ④

[해설]

(i) $n=1$일 때,

(좌변) $= a_1 = \dfrac{1}{2(2+4)} = \dfrac{1}{12}$

(우변) $= \dfrac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \dfrac{1}{12}$ 이므로(★)이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \dfrac{1}{(k+1)^2} - T_m$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + \frac{1}{m+2}\left(T_{m+1} - T_m\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2}\left(T_{m+1} - T_m\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도(★)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여(★)이 성립한다.

$\alpha = \dfrac{1}{12}, f(2) = \dfrac{1}{4}$. 따라서 $\dfrac{\alpha}{f(2)} = \dfrac{1}{3}$

109) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n = \overline{OP_n}$이라 하자.

$y_n = a_n \sin \dfrac{n-1}{3}\pi$에서

$y_1 = 0, y_2 > 0, y_3 > 0, y_4 = 0, y_5 < 0, y_6 < 0, y_7 = 0$, …으로 y_n의 부호가 주기적으로 바뀐다.

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 몇 개의 항을 구하면

$a_1 = 1\ a_2 = 1\ a_3 = \dfrac{1}{2}$

$a_4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\ a_5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\ a_6 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$a_7 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\ a_8 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 \ldots$

으로 동경 OP_1에서 동경 OP_7까지 동경이 2π만큼 회전하면 a_7은 a_1의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$배이다.

즉, 2π만큼씩 회전할 때마다 그 이전 길이의 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$배가 된다.

$a_{n+6} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 a_n$인 관계가 성립하므로

$$a_{50} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_{44} = \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^{16} a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{16}$$

110) 답 : ②

[해설]

$a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$,

$a_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2$, …이므로

$a_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_{10} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^9$

111) 답 : ②

[해설]

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 3 \cdots$①,

$a_{n+1} = 3a_n - 3 \cdots$②

① -②: $a_{n+2} - a_{n+1} = 3\left(a_{n+1} - a_n\right)$

$a_2 - a_1 = 1$에서 $a_{n+1} - a_n = 3^{n-1}$

$\therefore\ a_6 - a_5 = 81$

112) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]귀납적 정의로 주어진 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{1}{a_n} = b_n$이라 하면, $\{b_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이다.

$b_1 = 1$이므로 $b_n = 1 + \dfrac{1}{2}(n-1) = \dfrac{n+1}{2}$이다.

따라서 $a_n = \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{2}{n+1}$이므로 $a_{20} = \dfrac{2}{21}$

113) 답 : 7

[해설]

$a_{n+1} = a_n^5$의 양변에 5를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_5 a_{n+1} = 5\log_5 a_n$이다.

이때, $\log_5 a_n = b_n$이라 하면

$b_{n+1} = 5b_n$이므로 $b_n = b_1 \cdot 5^{n-1} = 5^{n-1}$이다.

그러므로 $\log_5 a_{10} = b_{10} = 5^9$이므로

$\log 5^9 = 9(1 - \log 2) = 9 \times 0.6990 = 6.2910$이다.

따라서, $\log 5^9$의 정수부분이 6이므로 $m = 7$이다.

114) 답 : ②

[해설]

n일째 판매량을 a_n이라 하면,

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ 2a_n + a_{n+2} = 3a_{n+1}$이다.

$a_n = 2^{n-1}$이므로

첫째 날부터 10일간 전체 판매량은

$\dfrac{\{1 \times (2)^{10} - 1\}}{2-1} = 1023$개이다.

115) 답 : ①

[해설]

처음 농도를 a%라 하자.

ⅰ)첫 번째 방법: $p = a\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{10}$

ⅱ)두 번째 방법: $p=a\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n}$

ⅰ), ⅱ)에서 $a\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10}=a\left(1-\frac{3}{4}\right)^{n}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$\therefore\ n=5$

116) 답 : ②

[해설]

$S_n=\sqrt{2}S_{n-1}$이므로 $a_n=\sqrt{\sqrt{2}}\,a_{n-1}$이다.

$a_1a_2\cdots a_8=a_1^8\cdot 2^7=2^{11}$

$a_1=\sqrt{2}$ 이므로 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

117) 답 : ③

[해설]

(가): 2, (나): $4(k+1)^2$, (다): $2k+1$

118) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수학적 귀납법을 이용하여 추론하기

(가) $\frac{1}{3}$ (나) $\frac{1}{(m+3)\times(m+1)!}$

(다) $\frac{1}{(m+3)!}$

119) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $a_2=9,\ b_2=8$이므로 $a_2+b_2=17$이다.(참)

ㄴ. $\begin{pmatrix}a_{n+1}, & b_{n+1}\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}a_n, & b_n\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3, & 2\\ 0, & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3a_n, & 2a_n+b_n\\ 0, & 1\end{pmatrix}$에서 $a_{n+1}=3a_n$이고

$a_1=3$이므로 $a_n=3^n$이다.

이때, $b_{n+1}=b_n+2\cdot 3^n$이므로

$b_n=b_1+2\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+3(3^{n-1}-1)=3^n-1$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n}=1$ (거짓)

120) 답 : ②

[해설]

$S_n=\pi r_n^2,\ S_{n+1}=2S_n$이므로

$\pi r_{n+1}^2=2\pi r_n^2,\ r_{n+1}=\sqrt{2}r_n$

$r_1=1$이므로 $r_n=(\sqrt{2})^{n-1}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}$

121) 답 : 23

[해설]

점 P_{2n-1}의 x좌표는

$1-3+5-7+\cdots+(-1)^{n+1}(2n-1)$

점 P_{2n}의 y좌표는

$2-4+6-8+\cdots+(-1)^{n+1}2n$

점 P_{2n}의 x좌표는 점 P_{2n-1}의 x좌표와 같다.

P_{22}의 좌표는 $(11,\ 12)$이므로 $x+y=23$이다.

122) 답 : ④

[해설]

$\{a_n\}$: $1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9,\ \cdots$이므로

$a_{2k-1}=k^2,\ a_{2k}=k(k+1)$이다.

$a_{n+1}-a_n=b_n$이라 하면

$\{b_n\}$: $1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ \cdots$이므로

$b_n=15$인 n은 $28,\ 29$이다.

$\therefore\ 28+29=57$

123) 답 : ④

[해설]

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_4=7,\ \cdots$

$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=4,\ b_4=8,\ \cdots$이므로

$a_n=2^{n-1}-1,\ b_n=2^{n-1}$이다.

$\sum_{n=1}^{7}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{7}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{321}{64}$

$\therefore\ p+q=385$

124) 답 : ④

[해설]

$\{a_n\}$: $1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1\cdots$

제 1항부터 6개의 항이 규칙적으로 반복되므로

$2011=6\times 335+1$

$\sum_{k=1}^{2011}a_k=\sum_{k=1}^{2010}a_k+a_{2011}=1$이다. ($\because\ a_{2011}=1$)

125) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용하여 급수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$은 $2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ \cdots$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\therefore\ p+q=8+7=15$

126) 답 : ⑤

[해설]

T_n의 면의 개수를 a_n, 꼭짓점의 개수를 b_n이라 하면,

$b_1=4,\ b_{n+1}=3b_n$에서 $b_n=4\cdot 3^{n-1}$

$a_1=4,\ a_{n+1}=a_n+b_n=a_n+4\cdot 3^{n-1}$

$$\therefore\ a_6=4+\sum_{k=1}^{5}4\cdot3^{k-1}=488$$

127) 답 : 11

[해설]

$S_{n+1}=2S_n+1$이므로 $S_n=\{4\times2\}^{n-1}-1$

$\{4\times2\}^{n-1}-1\ge3000$을 만족하는 n의 최솟값은 11이다.

128) 답 : ⑤

[해설]

(ⅰ) $n=1$일 때(좌변) $=\dfrac{1}{\sqrt2}<2=$(우변)이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt4}+\frac{1}{\sqrt6}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k}}<2\sqrt k$$

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt4}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-2\sqrt{k+1}$$
$$<2\sqrt k+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}-2\sqrt{k+1}$$
$$=\frac{2\sqrt2\sqrt{k^2+k}+1-2\sqrt2(k+1)}{\sqrt{2k+2}}$$

이때,

$(2\sqrt2\sqrt{k^2+k}+1)^2-\{2\sqrt2(k+1)\}^2<0$이 므로

$$\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt4}+\frac{1}{\sqrt6}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<2\sqrt{k+1}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 부등식은 성립한다.

따라서 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

129) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 성질을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$$=\left(1-\frac12\right)(1\cdot2a_1)+\left(\frac13-\frac14\right)(3\cdot4a_2)+\left(\frac15-\frac16\right)(5\cdot6a_3)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot2na_n\}$$
$$=\left(1-\frac12-\frac13+\frac14\right)(1\cdot2a_1)$$
$$+\left(\frac13-\frac14-\frac15+\frac16\right)(1\cdot2a_1+3\cdot4a_2)$$
$$+\left(\frac15-\frac16-\frac17+\frac18\right)(1\cdot2a_1+3\cdot4a_2+5\cdot6a_3)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot2a_1+3\cdot4a_2+\cdots+(2n-1)\cdot2na_n\}$$
$$\ge\left(1-\frac12-\frac13+\frac14\right)+2\left(\frac13-\frac14-\frac15+\frac16\right)$$
$$+3\left(\frac15-\frac16-\frac17+\frac18\right)+\cdots+n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=1-\frac12+\frac13-\frac14+\frac15-\frac16+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$
$$=1+\frac12+\frac13+\frac14+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$
$$-2\left(\frac12+\frac14+\frac16+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (나) $n\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n}\right)$

(다) $2\left(\dfrac12+\dfrac14+\dfrac16+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$

130) 답 : 15

[해설]

$p=q=1,\ r=n$이면 $2a_1+a_n=a_{n+2}$이므로 $a_{n+2}=a_n+20$

$p=q=r=1$이면 $a_3=30$

$p=q=2,\ r=1$이면 $a_5=2a_2+a_1$이고,

$a_5=a_3+2a_1,\ a_5=50$이므로 $a_2=20$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 10인 등차수열이다.

$a_n=10n\cdots$①

수열 $\{b_n\}$에서 $p=1$을 대입하여 정리하면

$$b_n=\frac35\left(\frac35\right)^{n-1}=\left(\frac35\right)^n\cdots②$$

① , ②에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_nb_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n\times\left(\frac35\right)^n}{n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac35\right)^n=15$$

131) 답 : 603

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

$a_1=p,\ a_2=q$이므로

$a_3=q-p,\ a_4=-p,\ a_5=-q,\ a_6=p-q,\ a_7=p,$

$a_8=q,\ \cdots$이다.

자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이고

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k=0$이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k=2q-p,\ \sum_{k=1}^{200}a_k=p+q$이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=1}^{200}a_k$에서 $q=2p$이고

$a_{39}=a_3=q-p=201$이다.

따라서 $p=201,\ q=402$이다.

그러므로 $p+q=603$이다.

132) 답 : ④

[해설]

(ⅰ) $n=2$일 때,

(좌변) = (우변) = $[a_1+2a_2]$

(ⅱ) $n=i\,(i\ge2)$일 때, 주어진 등식이 성립함을 가정하면,

즉, $\displaystyle iS_i-\sum_{k=1}^{i-1}S_k=\sum_{k=1}^{i}ka_k$임을 가정할 때,

, $\displaystyle(i+1)S_{i+1}-\sum_{k=1}^{i}S_k$

$$=(i+1)S_{i+1}-\left(\sum_{k=1}^{i-1}S_k+S_i\right)$$

$$= (i+1)S_{i+1} - \left(\left[(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k \right] \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{i} ka_k + \left[(i+1)(S_{i+1} - S_i) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{i+1} ka_k$$

133) 답 : ④

[해설]

자연수 $n\ (n \geq 3)$에 대하여 $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{(n-i)2^{i-1}}$이라 하자.

(1) $n=3$일 때, $S_3 = 3 < 4$이므로 성립한다.

(2) $n=k\ (k \geq 3)$일 때, $S_k < 4$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$$S_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{k+1}{k+1-i} \times \frac{1}{2^{i-1}} \right)$$

$$= \frac{k+1}{k} + \frac{k+1}{k-1} \times \frac{1}{2} + \frac{k+1}{k-2} \times \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{k+1}{2^{k-1}}$$

$$= \frac{k+1}{k} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k-1} + \frac{k}{k-2} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-2}} \right)$$

$$+ \left[\frac{1}{2} \right] \times \left(\frac{k}{k-1} + \frac{k}{k-2} \times \frac{1}{2} + \cdots + \frac{k}{2^{k-2}} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{2}S_k + \frac{1}{2k}S_k$$

$$= 1 + \frac{1}{k} + \left[\frac{k+1}{2k} \right] \times S_k$$

그런데, $k \geq 3,\ S_k < 4$이므로

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{k+1}{2k} \times S_k < 4 \text{이다.}$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 3이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서, $f(x) = \frac{1}{2k} + \frac{k+1}{2k} = \frac{k+2}{2k}$ 이므로 $f(3) = \frac{5}{6}$ 이다.

134) 답 : ③

[해설]

규칙에 의해 도형을 배열하면

제 $(3k-2)$행은 ○로 끝나고,

제 $(3k-1)$행은 △ 로 끝나고,

제 $3k$행은 ○로 끝난다.

ㄱ. 5행은 ○, △, □, ○, △∴ (참)

ㄴ. □로 끝나는 행이 없으므로 □로 시작하는 행은 없다. ∴ (거짓)

ㄷ. 1행에서 3행까지 모든 ○는 3개, 4 ~ 6행까지 모든 ○는 6개, …이므로

$1-3n$행까지 모든 ○는 총 $\frac{3n(n+1)}{2}$개. ∴ (참)

135) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 규칙에 따라 점 A_n을 정하면

$n=4k-2\ (k=2, 3, \cdots)$일 때, 점 A_n은 제 1사분면에 있다.

$A_6(3, 2),\ A_{10}(5, 4),\ A_{14}(7, 6),\ \cdots,\ A_{4k-2}(2k-1, 2k-2)$

따라서 $A_{50}(25, 24)$이므로 $p+q=49$이다.

136) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열을 이용하여 점의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 규칙에 따라 각 항의 값을 구하면

$a_1 = 6,\ a_2 = 15 = 3a_1 - 3$

$a_3 = 3a_2 - 3$

...

이므로 $a_{n+1} = 3a_n - 3$이 성립함을 알 수 있다.

$a_{n+1} - \frac{3}{2} = 3\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$에서 $a_n - \frac{3}{2} = \left(a_1 - \frac{3}{2}\right) \cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_n = \frac{3}{2}(3^n + 1)$

따라서 $a_5 = \frac{3}{2}(3^5+1) = 366$이다.

137) 답 : 101

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 추론하여 삼각형의 넓이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{P_nP_{n+1}} = a_n$이라 하면 규칙㈐에서

$a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} \cdots ①$

① 의 n대신 $2, 3, 4, \cdots, n$을 차례로 대입하면

$a_2 = \frac{1}{3}a_1,\ a_3 = \frac{2}{4}a_2,\ a_4 = \frac{3}{5}a_3,\ \cdots,\ a_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

위의 식을 각 변끼리 곱하여 약분하면

$a_n = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$

따라서 $S_n = \frac{1}{2}a_n = \frac{1}{n(n+1)}$이므로

$\sum_{k=1}^{50} S_k = \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{50}{51}$

$\therefore\ p+q = 101$

138) 답 : ④

[해설]

(i) $n=1$일 때

(좌변) $= a!$, (우변) $= a!$이므로(★)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때

(★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} \frac{(a+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(a+m)!}{(a+1)(m-1)!}$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(a+k-1)!}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(a+k-1)!}{(k-1)!} + \frac{(a+m)!}{m!}$$

$$= \frac{(a+m)!}{(a+1)(m-1)!} + \frac{(a+m)!}{m!}$$

$$= \frac{(a+m)!}{(m-1)!}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{m} \right)$$

$=\dfrac{(a+m+1)!}{(a+1)m!}$

따라서 $n=m+1$일 때도(★)이 성립한다.
그러므로 모든 자연수 n에 대하여(★)이 성립한다.

139) 답 : 200
[해설]
$a_1=7,\ a_2=19,\ a_3=37,\ a_4=61$, $\cdots$

$a_n=7+\sum_{k=1}^{n-1}6(k+1)=3n^2+3n+1$

$b_n=\{6\times100\times(n+1)\}^2=600(n+1)^2$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=200$

140) 답 : ②
[해설]
$a_1=0,\ a_2=2\times1,\ a_3=0+2\times1+2\times5$

$a_4=0+2\times1+2\times5+2\times5^2$

$a_n=0+2(1+5+5^2+\cdots+5^{n-2})\ (n\ge2)$

$=\dfrac{2(5^{n-1}-1)}{5-1}=\dfrac{5^{n-1}-1}{2}$

$a_5=\dfrac{5^4-1}{2}=312$

141) 답 : ③
[해설]
(i) $n=2$일 때
$f(2)=12$이고
$\sigma(2)=1+2+3+4+6+12=28$이므로
(★)이 성립한다.
(ii) $n=k(k\ge2)$일 때(★)이 성립한다고 가정하면
$\sigma(k)>2f(k)=2^{k+1}\cdot3$이다.
$n=k+1$일 때(★)이 성립함을 보이자.
$f(k)$의 약수의 개수는 $2k+2$개이고 각각의 약수를
$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2k+2}(a_1<a_2<\cdots<a_{2k+2})$라 하면 $f(k+1)$의 약수는
$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2k+2},\ \dfrac{2}{3}a_{2k+2},\ 2a_{2k+2}$이므로

$\sigma(k+1)=\sigma(k)+\ \dfrac{2}{3}a_{2k+2}\ +2a_{2k+2}$

한편, $a_{2k+2}=\ 2^k\cdot3$이므로

$\sigma(k+1)=\sigma(k)+\dfrac{8}{3}a_{2k+2}$

$\sigma(k)+\ 2^{k+3}\ >2^{k+1}\cdot3+2^{k+3}\ =2^{k+1}\cdot7\ >2^{k+1}\cdot6$
$=2f(k+1)$
그러므로 $n=k+1$일 때도(★)이 성립한다.
따라서 $n\ge2$인 모든 자연수에 대하여(★)이 성립한다.

142) 답 : ①
[해설]
$a_{n+1}=3a_n+2b_n,\ b_{n+1}=b_n$
$b_{n+1}=b_n=\cdots=b_1=2$

따라서 $a_{n+1}=3a_n+4$
$a_n=3^n-2$
$\therefore\ a_{10}+b_{10}=3^{10}$
[별해]
$\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+2b_n,\ \cdots① \\ b_{n+1}=b_n,\ \cdots②\end{cases}$
①, ②을 더하면 $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$이므로
수열 $\{a_n+b_n\}$은 $a_1+b_1=3$이고 공비가 3인 등비수열
$\therefore\ a_n+b_n=3^n$

143) 답 : ⑤
[해설]
수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열

$\sum_{k=1}^{n}\log a_k$의 값이 최대가 되려면 $\log a_n\ge0$

즉, $a_n\ge1$ 이므로 $10^{10}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\ge1$ 의 양변에 로그를 취하면

$10+(1-n)\log2\ge0$

$n\le\dfrac{10}{\log2}+1=34.\cdots$

$\therefore\ n=34$

144) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]수열의 합 추론하기
(i) $n=1$일 때, $a_1=3$
(ii) $n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로

$2S_n=S_n-S_{n-1}+\dfrac{9}{S_n-S_{n-1}}$ 이다.

$(S_n)^2-(S_{n-1})^2=9$

따라서 수열 $\{(S_n)^2\}$은 첫째항이 9이고, 공차가 9인 등차수열이다.
$(S_n)^2=9n$이므로 $S_n=3\sqrt{n}\ (n\ge1)$이다.
$\therefore\ S_{100}=30$

145) 답 : ②
[해설]
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)=\dfrac{3}{4}$

146) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]여러 가지 수열의 합 이해하기
두 점 $A(1,\ 1),\ B(0,\ -n)$을 지나는 직선의 방정식은
$y=(n+1)x-n$이므로

x축과 만나는 점의 x좌표는 $p_n=\dfrac{n}{n+1}$이다.

따라서

$10\sum_{n=1}^{8}l_n=10\sum_{n=1}^{8}(p_{n+1}-p_n)=10(p_9-p_1)=10\left(\dfrac{9}{10}-\dfrac{1}{2}\right)=4$

147) 답 : ⑤

[해설]

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+3)!}{(k-1)!}$,

$4!\left\{\frac{4!}{4!0!}+\frac{5!}{4!1!}+\cdots+\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}\right\}=4!\sum_{k=1}^{n} {}_{k+3}C_4$,

${}_4C_4+{}_5C_4+\cdots+{}_{n+3}C_4={}_{n+4}C_5$

148) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 수학적귀납법으로 증명하기

[해설] (가) $\frac{1}{2}$, (나) $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}$, (다) $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$

149) 답 : ①

[해설]

두 실수 x, y에 대하여 $xy \le \frac{1}{4}(x+y)^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kb_k}{a_k+b_k} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{4}(a_k+b_k)^2}{a_k+b_k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

이므로(가) $\frac{1}{4}(a_k+b_k)$ (나) a_k (다) $\frac{1}{2}$

150) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $T_1=\frac{1}{2}$ 이므로(*)이 성립한다.

$$S_{m+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$

$$=S_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$

$$T_{m+1}=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}+\cdots+\frac{1}{2m+2}$$

$$=T_m-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$$

$$=T_m+\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$$

가정에서 $S_m=T_m$이므로 $S_{m+1}=T_{m+1}$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여(*)이 성립한다.

151) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]급수를 활용하여 도형의 넓이의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사각형 $B_2P_1C_1P_2$에서

$\overline{P_1C_1}=\frac{1}{3}\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$

$\overline{C_1C_2}=\frac{1}{2}\overline{AC_1}=3$이므로

$S_1=\overline{P_1C_1}\cdot\overline{C_1C_2}=6\sqrt{3}$

모든 자연수 n에 대하여 $\overline{P_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{P_nC_n}$이므로

$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

[구하는 값]= $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=8\sqrt{3}$

152) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]조건을 만족하는 점의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{x_{n+1}-x_n}=n$에서 $x_{n+1}+x_n=n$

그런데 $x_1=1$이므로 수열 $\{x_n\}$은

1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, $\cdots$이다.

따라서 자연수 n에 대하여

$x_{2n-1}=n$, $x_{2n}=n-1$

따라서 점 P_{2009} 즉, 점 $P_{(2\times1005-1)}$의 x좌표는 1005이다.

153) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]분수식이 들어 있는 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=\left\{\frac{3n}{2}-(n+1)\right\}\times\frac{n}{2}=\frac{n-2}{2}\times\frac{n}{2}$ ($n\ge3$)

[구하는 값]= $\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{a_n}=4\sum_{n=3}^{10}\frac{1}{(n-2)n}$

$$=2\sum_{n=3}^{10}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2\left\{\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right.$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{116}{45}$$

154) 답 : 28

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용하여 두 항의 합 추론하기

$a_3-a_1=2$

$a_4-a_2=2$

$a_5-a_3=2$

$a_6-a_4=2$

$\vdots$

$a_{15}-a_{13}=2$

$a_{16}-a_{14}=2$에서

좌변과 우변을 모두 더하면

$a_{15}+a_{16}-a_1-a_2=28$

$\therefore\ a_{15}+a_{16}=28$

155) 답 : 115

[해설]

n번째로 출발한 일반열차의 오전 6시부터 경과 시간(분)을 a_n, 급행열차의 오전 6시부터 경과시간(분)을 b_n이라 하면 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, 공차가 7인 등차수열이고 $\{b_n\}$은 $b_1=720$, 공차가 13인 등차수열이므로

$a_n=7n-7,\ b_n=13n+707$

n번째 일반열차와 m번째 급행열차의 출발시각이 일치하려면

$7n-7=13m+707$

$7(n-102)=13m$인 최소 자연수 $m=7$

($\because$ n, m은 자연수)이므로 $n=115$

156) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항과 극한을 이용한 수학 내적 문제 해결하기

$\{a_n\}$: 12, 33, 64, $\cdots$

따라서

$$a_n=12+\frac{(n-1)\{42+(n-2)10\}}{2}$$
$$=(n+1)(5n+1)$$

$b_n=2n^2+4n=2n(n+2)$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^4}=10$$

157) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항 구하기

[해설](가)

$2n$

, (나)

$d(n^2)-1$

(다)

$$\frac{d(n^2)+1}{2}$$

158) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $p=q$일 때 주어진 식의 양변을 p로 나누면

$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{p}$이다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $\dfrac{1}{p}$인 등차수열이다.(참)

ㄴ. $a_{n+1}=\dfrac{q}{p}a_n+\dfrac{1}{p}$이므로

$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{q}{p}(a_n-\alpha)$ 단, $\alpha=\dfrac{1}{p-q}$

따라서 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 첫째항이 $a_1-\dfrac{1}{p-q}$이고,

공비가 $\dfrac{q}{p}$인 등비수열이다.(참)

ㄷ. ㄴ에서 $a_n=\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1}(a_1-\alpha)+\alpha$이므로

$-1<\dfrac{q}{p}<1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다.(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

159) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]로그함수의 그래프를 이해하고 수열의 합 구하기

$A_n(2^{n-1}, 0),\ A_{n+1}(2^n, 0),\ B_n(2^n, n),\ C_n(2^n, -n)$이므로

$S_n=n\cdot.2^{n-1}.$이다.

$\sum_{k=1}^{10}S_k=S$라 하면

$S=1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+10\cdot2^9\cdots$①

$2S=\ 1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+10\cdot2^{10}\cdots$②

① − ② 를 하면

$-S=1+2+2^2+\cdots+2^9-10\cdot2^{10}=-9\cdot2^{10}-1$이다.

따라서 $S=9\cdot2^{10}+1$이다.

160) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성 추론하기

$a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5$

$a_2=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+4$

$a_3=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+3$

$a_4=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+2$

$a_5=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+1$

$a_6=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+$

$a_7=5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6^1+5$

$\vdots$

따라서 위와 같은 규칙에 의해서 $a_{35}=1$

161) 답 : ③

[해설]

(선분 AB의 길이) $=a_n$이라 하면,

$\overline{AQ_i}=\dfrac{i}{n+1}a_n,\ \overline{AP_i}=\dfrac{i}{n}a_n,\ \overline{AQ_{i+1}}=\dfrac{i+1}{n+1}a_n$

$(1\le i\le n-1)$

$\overline{Q_iP_i}=\left(\dfrac{i}{n}-\dfrac{i}{n+1}\right)a_n=\dfrac{i}{n(n+1)}a_n$이 최소일 때 $i=1$, 최솟값은

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}$

$\overline{P_iQ_{i+1}}=\left(\dfrac{i+1}{n+1}-\dfrac{i}{n}\right)a_n=\dfrac{n-i}{n(n+1)}a_n$이 최소일 때 $i=n-1$, 최솟값은 $\dfrac{a_n}{n(n+1)}$

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=2$이므로 $a_n=2n(n+1)$

$\therefore$ $a_{30}=1860$

162) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 구하기

$n=\dfrac{(n+1)^2}{a_{n+1}}-\dfrac{n^2}{a_n},\ b_n=\dfrac{n^2}{a_n}$라 하면

주어진 식은 $b_{n+1}-b_n=n$으로 표현된다.

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n^2-n+1}{2}$ 이므로

$\frac{n^2}{a_n}=\frac{n^2-n+1}{2}$ 이다.

$$a_n=\frac{2n^2}{n^2-n+1}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$

163) 답 : 840

[해설]

[출제 의도]주어진 규칙성을 활용하여 직선들의 교점의 개수를 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

구하는 $a_{15}-a_{14}$의 값은 2단계, 4단계, 6단계, ⋯, 14단계에서 그린 직선의 총 개수와 15단계에서 그린 직선의 개수의 곱과 같다.

$\therefore\ a_{15}-a_{14}=15\times(2+4+6+\cdots+14)=840$

164) 답 : ⑤

[해설]

로그의 성질에 의해 $a_na_{n+1}a_{n+2}=2$이므로

수열 $\{a_n\}$은 $2, 3, \frac{1}{3}$ 이 반복되어 나타난다.

ㄱ. $6=3\times2$이므로 $a_6=\frac{1}{3}$ (참)

ㄴ. $S_{10}=\frac{16\times4-10}{3}=18$ (참)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_{3n}=\frac{16}{3}$ 이다. (참)

165) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 주어진 식 증명하기

(1) $n=1$일 때,

(좌변) $=\sum_{k=1}^{1}a_k=a_1\ =\ N!$

(우변) $=\ \frac{N+1}{N+1}a_1=a_1\ =\ N!$

이므로(★)이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m$ 이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{N+m}{N+1}a_m+\ a_{m+1}$$

$$=\frac{N+m}{N+1}a_m+\ \frac{(m+N)!}{m!}$$

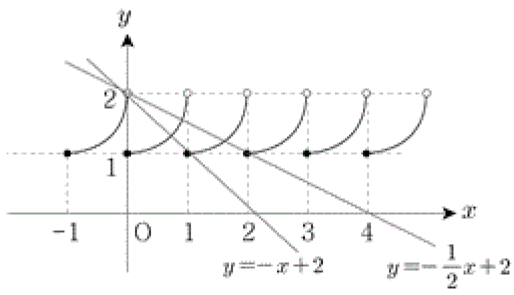
$$=\frac{1}{N+1}\times\frac{(m+N)!}{(m-1)!}+\ \frac{(m+N)!}{m!}$$

$$=\frac{1}{N+1}\left\{\frac{(m+N+1)!}{m!}\right\}$$

$$=\frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}$$

166) 답 : 65

[해설]



그림에서 수열 $\{a_n\}$은 $2, 3, 4, 5, \cdots$이므로

첫째항이 2, 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{10(2+11)}{2}=65$

167) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형의 규칙성을 추론하여 수학 내적 문제 해결하기

$$S_3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\times3^2+\frac{2\pi}{3}\times2^2+\frac{2\pi}{3}\times1^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{3}(3^2+2^2+1^2)$$

$$S_4=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\times4^2+\frac{\pi}{2}\times3^2+\frac{\pi}{2}\times2^2+\frac{\pi}{2}\times1^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(4^2+3^2+2^2+1^2)$$

$$\vdots$$

$$S_{20}=\frac{\pi}{20}(20^2+19^2+\cdots+1^2)$$

$$=\frac{287\pi}{2}$$

168) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]로그의 성질을 이용하여 계산하기

$P_3(2, 3)$에 대하여

$2<\log_2 6<3$이므로 $P_4(2, 4)$

$\log_2 8=3$이므로 $P_5(3, 4)$

$3<\log_2 12<4$이므로 $P_6(4, 4)$

169) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]행렬을 이용한 수학 외적문제 해결하기

n이 홀수일 때

	A	B
$(n-1)$번 시행 후	a_{n-1}	b_{n-1}
n번 시행 후	$a_{n-1}-b_{n-1}$	$2b_{n-1}$

$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1, & -1\\0, & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n-1}\\b_{n-1}\end{pmatrix}$, $X_n=\begin{pmatrix}1, & -1\\0, & 2\end{pmatrix}$

n이 짝수일 때

	A	B
$(n-1)$번 시행 후	a_{n-1}	b_{n-1}
n번 시행 후	$2a_{n-1}$	$b_{n-1}-a_{n-1}$

$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}$

$$X_{2008}+X_{2007} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & -1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 4

170) 답 : 45

[해설]

[출제 의도]수열의 합과 일반항의 관계 이해하기

$3(a_1+a_2+\cdots+a_n) = a_n a_{n+1} \cdots$ ①

$3(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}) = a_{n-1}a_n \cdots$ ②이므로

① $-$ ② 에서

$3a_n = (a_{n+1}-a_{n-1})a_n$

$\therefore\ a_{n+1}-a_{n-1}=3$

한편 $3a_1 = a_1 a_2$이므로 $a_2 = 3$이다.

수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 4, 6, 7, 9, $\cdots$이다.

그러므로 $a_{2n}=3n$

$\therefore\ a_{30}=45$

171) 답 : 178

[해설]

[출제 의도]삼각함수 성질을 이용한 수학 내적문제 해결하기

$$\sum_{i=1}^{89}\overline{P_iH_i} = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 89^\circ$$

$$\overline{P_iA}^2 = \sin^2 i^\circ + (1-\cos i^\circ)^2 = 2-2\cos i^\circ$$

$$\sum_{i=1}^{89}\overline{P_iA}^2 = 2\times 89 - 2(\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cdots + \cos 89^\circ)$$이므로

$$2\sum_{i=1}^{89}\overline{P_iH_i} + \sum_{i=1}^{89}\overline{P_iA}^2 = 178$$

172) 답 : 136

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열 이해하기

1단계의 타일로 덮인 넓이 $a_1=1$

2단계의 타일로 덮인 넓이 $a_2=4$

3단계의 타일로 덮인 넓이 $a_3=10$

⋮

n단계의 타일로 덮인 넓이

$$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}3k = \frac{3}{2}n(n-1)+1$$

10단계의 타일로 덮인 넓이 $a_{10}=136$

173) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 일반항 추론하기

$f(1,\ 0) = 2\times 1 = 2$,

$f(2,\ 1) = 3\times 2 = 6$,

$\cdots$이므로

$f(k,\ k-1) = (k+1)\times k = k^2+k$이다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} f(k,\ k-1) = \sum_{k=1}^{10}(k^2+k) = 440$$

174) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등차수열을 이용한 수학 내적문제 해결하기

넓이는 $\frac{1}{2}\times|b|\times\left|\frac{b}{a}\right| = 32$이므로

$b^2 = 64|a|$

$\overline{A_kB_k} = \left|\frac{k-b}{a} - \frac{-k-b}{a}\right| = \left|\frac{2k}{a}\right|$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\overline{A_kB_k} = \frac{2}{|a|}+\frac{4}{|a|}+\frac{6}{|a|}+\cdots+\frac{20}{|a|} = 110$$

$|a|=1$이고 $b^2=64$

따라서 $a^2+b^2=65$

175) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 부등식 추론하기

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변) $=\frac{1}{2}<1=$ (우변)이므로 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$$\frac{1+2^2+3^3+\cdots+k^k}{(k+1)^k} < 1$$

이므로 $1+2^2+3^3+\cdots+k^k < (k+1)^k$이다.

이때, $\dfrac{1+2^2+3^3+\cdots+k^k+(k+1)^{k+1}}{(k+2)^{k+1}}$

$$< \frac{(k+1)^k+(k+1)^{k+1}}{(k+2)^{k+1}} = \frac{(k+1)^k(k+2)}{(k+2)^{k+1}} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k < 1$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

176) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

㈎: 1

㈏: $(k+1)a_k - k$

㈐: $\frac{1}{k+1}$

177) 답 : 813

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항 추론하기

$a_1=1,\ a_2=1+3\times 4,\ a_3=1+3\times 4+5\times 8$

$a_4=1+3\times 4+5\times 8+7\times 12$

...ÿÿÿÿÿ

178) 답 : 144

[해설]

[출제 의도]지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기

그림과 같이 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 좌표축과 각각 $(0,\ 1)$, $(1,\ 0)$에서 만나므로

정사각형 A_1의 한 변의 길이는 1이다.

또, $x=1$을 지수함수에 대입하면

정사각형 A_2의 한 변의 길이는 1이고,

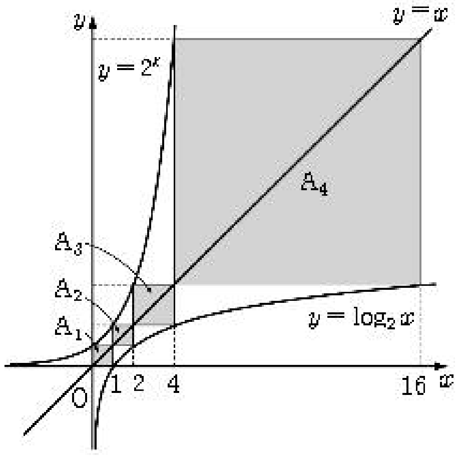
$x=2$를 지수함수에 대입하면

정사각형 A_3의 한 변의 길이는 2이고,

$x=4$를 지수함수에 대입하면

정사각형 A_4의 한 변의 길이는 12이다.

그러므로 A_4의 넓이는 144이다.



179) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]조합의 성질을 이용하여 직사각형의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=2}^{20} a_{2k} = a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{40}$$

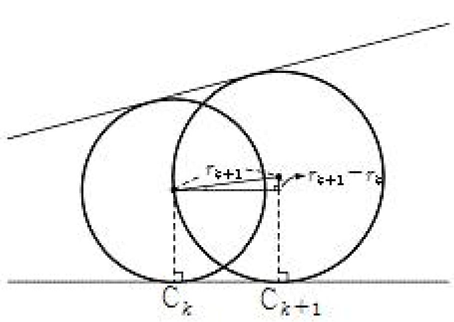
$$= {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{20}C_2 = {}_{21}C_3 = 1330$$

180) 답 : 512

[해설]

[출제 의도]등비수열의 항의 값 구하기

원 C_k의 반지름을 r_k, 넓이를 S_k, 원 C_{k+1}의 반지름을 r_{k+1}, 넓이를 S_{k+1}이라 하면,



$\dfrac{r_{k+1}-r_k}{r_{k+1}} = p$ (상수), $r_{k+1} = \dfrac{1}{1-p} r_k$

수열 $\{r_k\}$가 등비수열이므로 수열 $\{S_k\}$도 등비수열이고, $\{S_k\}$의 공비를 a라 하면

$S_1 = 1,\ S_5 = a^4 = 4$이므로 $a^2 = 2$

$\therefore\ S_{19} = a^{18} = 2^9 = 512$

181) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열의 합 구하기

$$\angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \angle A_{10}OA$$

$$\angle A_{10}OA = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\times\frac{1}{3} + \frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \frac{\pi}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^9$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right)$$

$$\therefore\ \angle A_{10}OB = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{1}{3^{10}}\right)$$

182) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 부등식의 귀납적 추론하기

(ⅰ) $n=2$일 때

(좌변) $= \left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right) = \dfrac{9}{4}$

(우변) $= 3 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$이므로 성립한다.(ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right) < 3 - \frac{1}{k} \cdots ②$$

② 의 양변에 $1 + \dfrac{1}{(k+1)^3}$를 곱하면

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right)$$

$$< \left(3-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{(k+1)^3}\right) \cdots ③$$

③ 의 우변을 정리하면

(우변) $= 3 - \dfrac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3}$

이때, $\dfrac{k^3+3k^2+2}{k(k+1)^3} - \dfrac{1}{k+1} > 0$

따라서 $\left(3-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{(k+1)^3}\right) < 3 - \dfrac{1}{k+1}$

그러므로 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

183) 답 : ④

[해설]

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD$이므로 $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AD} : \overline{AC}$이다.

따라서 $1 : \sqrt{k} = \overline{AD} : 1$

$\therefore\ \overline{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} =$ (가)

$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE} = \overline{AB} - \overline{BC} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} =$ (나)

$1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) = 1 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n} =$ (다)

184) 답 : ④

[해설]

A에서 B_n까지 가는 경우의 수를 a_n이라 하면 A에서 B_{n+1}까지 가는 경우의 수는 B_n을 걸쳐가는 경우 a_n까지와 B_n을 걸쳐가지 않는 경우 3가지가 있다.

$\therefore a_{n+1}=a_n+3,\ a_1=4$

$\therefore a_n=3n+1$

$a_3+a_7=10+22=32$

185) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법으로 대소관계 추론하기

[해설](가) $k+1$, (나) $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, (다) $\dfrac{2k+3}{2}$

186) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법으로 행렬의 거듭제곱 증명하기

[해설](가) xy

(나) $x+y-1$

(다) $xA(0)$

187) 답 : 20

[해설]

양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면 $2n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$이면, $2n=b_{n+1}-b_n,\ b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 계차의 일반항이 $2n$이므로

$$b_n=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}2k=\frac{2n^2-2n+1}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{2n^2-2n+1}$$

$p=-2,\ q=1\ \therefore\ 5p^2q=20$

188) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_6=a_3+1=(a_1-1)+1=1$ (참)

ㄴ. $n=2^k$이면

$a_n=a_{2^k}=a_{2^{k-1}}+1=a_{2^{k-2}}+2=\cdots=a_{2^0}+k=k+1$ (참)

ㄷ. $a_{2n}=a_n+1,\ a_{2n+1}=a_n-1$이므로

$a_{2n}-a_{2n+1}=2$가 성립한다.

$\therefore\ a_{2^k}-a_{2^k+1}=2$

따라서 $n=2^k+1$일 때, ㄴ을 이용하면

$a_n=a_{2^k+1}=a_{2^k}-2=(k+1)-2=k-1$ (참)

189) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. 산술기하평균의 성질 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 이므로

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\geq\sqrt{a_nb_n}=b_{n+1}\ (참)$$

ㄴ. $$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{\frac{a_n+b_n}{2}}{\sqrt{a_nb_n}}=\sqrt{\frac{\frac{(a_n+b_n)^2}{4}}{a_nb_n}}$$

$$=\sqrt{\frac{a_n^2+2a_nb_n+b_n^2}{4a_nb_n}}=\sqrt{\frac{2+\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{a_n}}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}+\sqrt{\frac{b_n}{a_n}}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{a_n}{b_n}}+\frac{\sqrt{b_n}}{a_n}}{2}$$

∴ 참

ㄷ. 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=b$$

라 하면 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$에서 $a=\dfrac{a+b}{2}\cdots$①

$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$에서 $b=\sqrt{ab}\cdots$②

①, ② 연립해서 풀면 $a=b$이다.(참)

190) 답 : ①

[해설]

(1) $n=2$일 때, $\dfrac{3}{8}>\dfrac{1}{4}$

(2) $n=k(k\geq 2)$일 때,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right)>1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

이라 가정하면

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right)>1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$>1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$$

따라서, $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

그러므로(1), (2)에 의하여 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

∴ (가): $\dfrac{1}{4}$, (나): $1-\dfrac{1}{2^{k+1}}$, (다): $\dfrac{1}{2^{k+1}}$

191) 답 : ③

[해설]

$a_{n+2}=2a_{n+1}+(a_{n+1}-a_n)$

$\Leftrightarrow a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$

$a_1=3,\ a_2=3a_1-1=8,\ a_3=3a_2-a_1=21$

$a_4=3a_3-a_2=55,\ a_5=3a_4-a_3=144$

192) 답 : ①

[해설]

$a_1=6,\ a_2=12,\ a_3=20,\ a_4=30,\ \cdots$

$a_n = 6+\sum_{k=1}^{n-1}(2n+4) = n^2+3n+2$ 이므로 $a_{10}=132$ 이다.

193) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $S_1 = a_1$ 이므로 $pa_1+1 = a_1$ $\therefore$ $a_1 = \frac{1}{1-p}$ (참)

ㄴ. $n \geq 2$ 일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (pa_n+1)-(pa_{n-1}+1) = pa_n - pa_{n-1}$

$\therefore$ $a_n = \frac{p}{p-1}a_{n-1}$ ($p \neq 1$)

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다. (참)

ㄷ. $p = \frac{2}{3}$ 이면 $\frac{p}{p-1} = -2 < -1$ 이므로

등비수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다. (거짓)

194) 답 : ③

[해설]

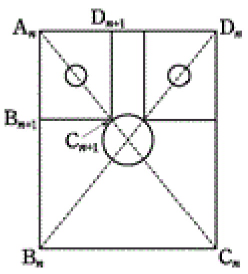
[출제 의도]수학적귀납법으로 증명하기

[해설](가) $\frac{1}{k+1}$, (나) $>$, (다) $2k-1$

195) 답 : ⑤

[해설]

$\square AB_nC_nD_n$ 과 $\square AB_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 에서



두 사각형은 닮은 도형이고 대각선의 길이의 비가 $10:4$ 이므로 넓이의 비는 $5^2:2^2$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \pi + 4\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\pi + 4^2\left(\frac{2}{5}\right)^4\pi+\cdots$

$= \frac{\pi}{1-\frac{16}{25}} = \frac{25}{9}\pi$

196) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_1 = 1$ 이고 $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 인 수열에서

일반항 $a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k = 2^n - 1$ 이고,

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2^k-1) = 2^{n+1}-n-2$

$\therefore$ $S_{10} = 2^{11}-10-2 = 2036$

따라서, 점 P의 위치는 6

197) 답 : ⑤

[해설]

$a_1 = 1$

$a_2 = \sqrt[3]{2}\cdot 1 = 2^{\frac{1}{3}}$

$a_3 = \sqrt[3]{2}\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$

$a_4 = \sqrt[3]{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2$

$a_5 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$a_6 = \sqrt[3]{2}\cdot 1 = 2^{\frac{1}{3}}$

$\cdots$

$a_{4n-3} = 1,\ a_{4n-2} = 2^{\frac{1}{3}}$

$a_{4n-1} = 2^{\frac{2}{3}},\ a_{4n} = 2$ ($n = 1, 2, 3\cdots$)

$\therefore$ $a_{112} = a_{4\times 28} = 2$

198) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_1 = S_1 = 1$ 이므로

$2S_1 = a_1a_2$ 에서 $2\cdot 1 = 1\cdot a_2$

$\therefore$ $a_2 = 2$ $\therefore$ 참

ㄴ. $2S_n = a_na_{n+1},\ 2S_{n-1} = a_{n-1}a_n$ 에서

$2(S_n - S_{n-1}) = a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$

$\therefore$ $a_{n+1}-a_{n-1} = 2$ $\therefore$ 참

ㄷ. ㄴ에서 $\{a_{2n-1}\},\ \{a_{2n}\}$ 은 모두 공차가 2 인

등차수열이고, $a_1 = 1,\ a_2 = 2$ 이므로

$\{a_n\}$ 은 공차가 1 인 등차수열이다. $\therefore$ 참

199) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비수열의 일반항 유추하기

$\triangle AP_nP_{n+1} = \triangle AOP_{n+1} - \triangle AOP_n$

$= \frac{1}{2}\times 1\times 2^n - \frac{1}{2}\times 1\times 2^{n-1}$

$= 2^{n-2}$

따라서, $a_{10} = 2^8 = 256$

200) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]점화식의 일반항 구하는 과정 이해하기

주어진 식의 양변에 밑이 2 인 로그를 취하면,

$\log_2\sqrt[3]{a_{n+1}} = \log_2 4a_n$ 이고 정리하면

$\log_2 a_{n+1} = 6+3\log_2 a_n$ 이며 변형하여

$\log_2 a_{n+1}+3 = 3(\log_2 a_n + 3)$

그러므로, 수열 $\{\log_2 a_n + 3\}$ 은 첫째 항이 $\log_2 a_1 + 3$ 이고 공비가 3 인 등비수열이다.

따라서, $\log_2 a_n = 4\cdot 3^{n-1}-3$

$\therefore$ [$a_n = 2^{4 \cdot 3^{n-1} - 3}$]

201) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]부분분수의 합을 이용한 수열의 극한값 구하기

$a_1 = \frac{1}{4}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$이므로

$$a_n = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

202) 답 : ①

[해설]

점 P_n의 좌표를 차례로 나열하면 다음과 같다.

$P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$P_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $P_6\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_7\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_8\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$P_9\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\cdots$

따라서 P_{8n+k} (n은 정수, $k = 1, 2, 3, \cdots, 8$)의 좌표는 P_k의 좌표와 같다.

$2007 = 8n + 7$꼴이므로 점 P_{2007}의 좌표는 P_7의 좌표와 같다.

$$\therefore P_{2007}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

203) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

㈎: $x^2 - x - 1 = 0$

㈏: $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

㈐: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

204) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) $n = 1$일 때,

$a_4 = 2a_3 + a_2 = 2(2a_2 + a_1) + a_2 = 5a_2 + 2a_1 = 12$

이므로 성립한다.

(ii) $n = k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)} &= 2a_{4k+3} + a_{4k+2} \\ &= 2(2a_{4k+2} + a_{4k+1}) + a_{4k+2} \\ &= 5a_{4k+2} + 2a_{4k+1} \\ &= 5(2a_{4k+1} + a_{4k}) + 2a_{4k+1} \\ &= 12a_{4k+1} + 5a_{4k} \end{aligned}$$

따라서 $n = k+1$일 때, $a_{4(k+1)}$은 12의 배수이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수이다.

따라서 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑에 알맞은 수는 차례로 12, 5, 12, 5이다.

$\therefore a + b + c + d = 34$

205) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

a_k의 각 자리의 수의 합을 b_k라 하면

$a_1 = 2$

$\therefore b_1 = 2$

$a_2 = 10 \cdot 2 + 81 = 101$

$\therefore b_2 = 1 + 0 + 1 = 2$

$a_3 = 10 \cdot 101 + 81 = 1091$

$\therefore b_3 = b_2 + 9$

$a_4 = 10 \cdot 1091 + 81 = 10991$

$\therefore b_4 = b_3 + 9 = b_2 + 9 \cdot 2$

$a_5 = 10 \cdot 10991 + 81 = 109991$

$\therefore b_5 = b_4 + 9 = b_2 + 9 \cdot 3$

$\vdots$

$\therefore b_{10} = b_2 + 9 \cdot 8 = 2 + 72 = 74$

206) 답 : 245

[해설]

[출제 의도]주어진 수열의 특징을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A_8의 마지막 수는

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$이므로

A_9의 처음 수는 205이다.

A_9의 마지막 수는

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 = 204 + 81 = 285$

따라서 A_9의 정중앙에 적힌 수는

$$\frac{205 + 285}{2} = \frac{490}{2} = 245$$

207) 답 : 496

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열의 합 구하기

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$이고 $a_{k+4} = 2a_k$이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16$,

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 2 \times 16$,

$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 2^2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 2^2 \times 16$,

$\vdots$

구하는 값 $= \sum_{k=1}^{20} a_k = 16(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 496$

208) 답 : 225

[해설]
[출제 의도]도형으로 정의된 수열의 규칙성을 파악하여 항의 수 추론하기
제 n행의 좌변은 첫째항이 a_n, 공차가 n인 등차수열의 $(n+1)$개 항의 합이고,
우변은 첫째항이 $a_n+n(n+1)$이고 공차가 n인 등차수열의 n개 항의 합이므로

[좌변]$=a_n+(a_n+n)+(a_n+2n)+\cdots+(a_n+n^2)$

$=\{a_n+n(n+1)\}+\{a_n+n(n+2)\}+\cdots+(a_n+2n^2)$

[우변]$=\dfrac{(n+1)(2a_n+n^2)}{2}=\dfrac{n(2a_n+3n^2+n)}{2}$ 이며 [좌변]=[우변]이므로

$\therefore\ a_n=n^3$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}k^3=\left(\frac{5\cdot6}{2}\right)^2=225$

(참고)
제 1행 $1+2=3$
제 2행 $8+10+12=14+16$
제 3행 $27+30+33+36=39+42+45$
⋮

209) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]계차수열을 이용하여 수열의 합 구하기
$a_1=18$
$a_2=a_1+9\cdot2+7=a_1+25$
$a_3=a_2+12\cdot2+9=a_2+33$
$a_4=a_3+15\cdot2+11=a_3+41$
⋮
$a_{n+1}=a_n+25+(n-1)\cdot8\,(n\geq1)$
따라서 a_{10}의 값을 구하면

$a_{10}=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(8k+17)$

$=18+8\cdot\dfrac{9\cdot10}{2}+17\cdot9=531$

210) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]수학적 귀납법을 이용한 명제 증명하기
-증명-
(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변) = (우변) = $\dfrac{1}{2}$ 이므로 성립한다.
(ⅱ) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면,
$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}=2-\dfrac{k+2}{2^k}$
이 식의 양변에 $\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$ 를 더하면

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$

$=2-\dfrac{k+2}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$

$=2-\dfrac{k+3}{2^{k+1}}$ 이다.

따라서, $n=k+1$일 때도 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.
그러므로, ㈎, ㈏, ㈐에 들어갈 값들의 합은
$\dfrac{2^k+2k+4}{2^{k+1}}=\dfrac{2^{k-1}+k+2}{2^k}$ 이다.

211) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]무리수 계산하기
$\overline{A_1C_1}=\sqrt{2},\ \overline{A_1C_2}=\sqrt{3},\ \cdots,\ \overline{A_1C_8}=\sqrt{9}$ 이므로
$\overline{A_1B_2}=\sqrt{2},\ \overline{A_1B_3}=\sqrt{3},\ \cdots,\ \overline{A_1B_9}=\sqrt{9}$ 이다.
$\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\cdots+\overline{B_8B_9}$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})$
$=2$

212) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]수학적 귀납법을 이용하여 부등식의 증명 완성하기
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdots$①
ⅰ) $n=2$일 때,
(좌변) $=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{12}$
(우변) $=\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$ 이므로 성립한다.
ⅱ) $n=k\,(k\geq2$인 자연수)일 때, ①이 성립한다고 가정하면
$\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)\cdots$②
② 식의 양변에 $\dfrac{1}{2(2k+1)(k+1)}$ 을 더하면
$\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$
한편 $\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{2(2k+1)(k+1)}$ 에서 $2(2k+1)>4k$임을 이용하여
$\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{2(2k+1)(k+1)}$
$<\dfrac{1}{4}\left(3-\dfrac{1}{k}\right)+\dfrac{1}{4k(k+1)}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4(k+1)}$
따라서 $n=k+1$일 때도 ①이 성립한다.
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 부등식 ①은 $n\geq2$인 모든 자연수에 대하여 성립한다.

213) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]수학적귀납법으로 명제 증명하기
㈎ $p+q$
㈏ $a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$
㈐ $6(p+q)$

214) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법으로 부등식 증명하기

[해설]㈎ 4

㈏ $(a+b)$

㈐ 2^{k+2}

215) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 증명하기

[해설]㈎: k^2+3k+1

㈏: $2k^2$

㈐: $(k+1)^3$

216) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성을 파악하여 위치 나타내기

[해설] 3과 4의 최소공배수인 12마다 6개의 항이 주기적으로 남게 되고, $2007=6\times335-3$이므로

$a_{6n-3}=12n-7$

$a_{2007}=12\times335-7=4013$이고

4013은 402행 3열의 수이다.

$\therefore\ 402+3=405$

217) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 자연수 n에 관한 참인 명제를 증명하기

[해설]

(ⅰ) $n=1$일 때,

2^3+1은 3^2으로 나누어떨어지므로 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ①이 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때,

$\left(2^{3^k}\right)^3+1=\left(2^{3^k}+1\right)\left\{\left(2^{3^k}\right)^2-2^{3^k}+1\right\}$에서

2^{3^k}은 3으로 나누면 나머지가 2이고

$\left(2^{3^k}\right)^2-2^{3^k}+1$을 3으로 나누면 나머지는 0이므로

$2^{3^{k+1}}+1$은 3^{k+2}으로 나누어떨어진다.

따라서, $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

① 이 성립한다.

$\therefore$ ㈎ $2^{3^k}+1$ ㈏ 2 ㈐ 0

218) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수학적 귀납법을 이용하여 주어진 식이 자연수임을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) $n=1$일 때

$\frac{1^3}{6}+\frac{1^2}{2}+\frac{1}{3}=1$

(ⅱ) $n=k(k\geq1)$일 때

$\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$가 자연수라고 가정하자.

$\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$

$\left(\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}\right)+\left(\frac{3k^2+3k+1}{6}+\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{3}\right)$에서

$\frac{3k^2+3k+1}{6}+\frac{2k+1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{k^2+3k+2}{2}=\frac{[(k+1)(k+2)]}{2}$

이때 $\frac{k^3}{6}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{3}$는 자연수이고

$(k+1)(k+2)$는 연속된 자연수의 곱이므로[2]의 배수이다.

그러므로 $\frac{(k+1)^3}{6}+\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{k+1}{3}$은 자연수이다.

따라서 $n=k+1$일 때에도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 $\frac{n^3}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$은 자연수이다.

219) 답 : 150

[해설]

[출제 의도]수열의 합에 관한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}=25$이므로 $\overline{CH}=\frac{15\times20}{25}=12$

$\overline{AH}=\sqrt{15^2-12^2}=9$이고 P_9, Q_9가 각각 H, C와 일치하므로

$\overline{P_9Q_9}=\overline{CH}=12$

삼각형 AHC에서

구하는 값

$=\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_9Q_9}=(1+2+3+\cdots+9)\tan A$

$=\frac{4}{3}\times\frac{9\times10}{2}=60$

또, 삼각형 BHC에서

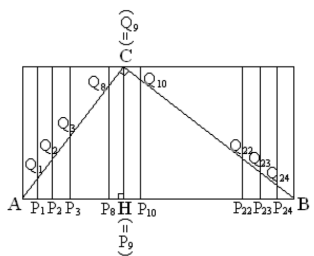
$\overline{P_{10}Q_{10}}+\overline{P_{11}Q_{11}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}=(15+14+13+\cdots+2+1)\tan B$

$=\frac{3}{4}\times\frac{15\times16}{2}=90$

따라서

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}=60+90=150$

[다른 풀이]다음 그림에서



$\left(\overline{P_1Q_1}+\cdots+\overline{P_8Q_8}\right)+\overline{P_9Q_9}+\left(\overline{P_{10}Q_{10}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}\right)$

$=\frac{1}{2}\times12\times8+12+\frac{1}{2}\times12\times15=150$

220) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]입체도형에서 등비수열의 규칙 찾아 값 구하기

[해설]분리된 정육면체의 개수와 한 변의 길이는 다음 표와 같다.

	정육면체의 개수	한 변의 길이
1회 시행 후	2^3	2
2회 시행 후	2^6	1
3회 시행 후	2^9	$\frac{1}{2}$
4회 시행 후	2^{12}	$\frac{1}{4}$
5회 시행 후	2^{15}	$\frac{1}{8}$

∴ 5회 시행 후 겉넓이의 합은 $\left(\frac{1}{8}\right)^2\times6\{\times2\}^{15}=3\times2^{10}$

221) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의로 정의된 수열에서 등비급수의 합 구하기

양변에 밑을 3으로 하는 로그를 취하면

$$\log_3 a_{n+1}=\frac{1}{3}\log_3 a_n$$

$$\log_3 a_n=\log_3 a_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\log_3 a_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log_3 a_n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

222) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수학적 귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=k\,(k\geq2)$일 때, $2^{k+1}>k(k+1)+1$이므로

$2\times2^{k+1}=2^{k+2}>2(k^2+k+1)$이고, 이때

$2(k^2+k+1)-\{(k+1)(k+2)+1\}=k^2-k-1=k(k-1)-1>0$

223) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]부분합을 이용해서 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이고 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$이므로

$na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 $n(S_{n+1}-S_n)=S_n$

$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+1}{n}$의 양변의 n에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$을 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\frac{S_4}{S_3}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$$

$$\frac{S_n}{S_1}=n$$

$$\therefore\ S_n=nS_1=na_1=\frac{n}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=16\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=8\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=12$$

224) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용하여 문제 해결하기

$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n+2$에서

$(a_{n+1}+1)=3(a_n+1)$이므로

$b_n=a_n+1$이라 하자.

$b_{n+1}=3b_n,\ b_1=a_1+1=3$이므로

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이다.

∴ $b_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

따라서 $a_n=3^n-1$이므로 $a_{20}=3^{20}-1$

225) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

$$\sum_{k=1}^{11}a_k=a_1+a_2+\cdots+a_{11}$$

$$=a_1+a_1+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$$

$$=2+2+2^2+2^3+\cdots+2^{10}$$

$$=2+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2^{11}$$

226) 답 : ①

[해설]

ⅰ) $n=1$일때, (좌변) $=1$, 우변 $=1^2$이므로 성립한다.

ⅱ) $n=k$일때, 성립한다고 가정하면

$k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)=(2k-1)^2$

$n=k+1$일 때, 성립함을 보이자.

$(k+1)(k+2)+\cdots+3k+1$

$=k+(k+1)+(k+2)+\cdots+(3k-2)+8k$

$=(2k-1)^2+8k$

$=(2k+1)^2$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

ⅰ), ⅱ)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

227) 답 : 171

[해설]

[출제 의도]계차수열의 일반항 구하기

$3=1+1+1\Rightarrow a_3=1$

$4=1+1+2=1+2+1=2+1+1$

$\Rightarrow a_4=3$

$5=1+1+3=1+3+1=3+1+1$

$1+2+2=2+1+2=2+2+1$

$\Rightarrow a_5=6$

$6=1+1+4=1+4+1=4+1+1$

$1+2+3=1+3+2=2+1+3$
$2+3+1=3+1+2=3+2+1$
$2+2+2$
$\Rightarrow a_6=10$
$\vdots$

따라서 $a_{n+2}=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\frac{1}{2}(n^2+n)$

$\therefore\ a_{20}=\frac{1}{2}(18^2+18)=171$

228) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]수학적귀납법으로 수열의 합 증명하기
[해설](가) $2i+k^2+k-1$, (나) k^2+3k+1

229) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.
(가)[좌변]= $=H_{2^0}=H_1=1$

(나) $H_{2^{k+1}}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\right)$

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)$

$H_{2^k}+\sum_{l=1}^{2^k}\frac{1}{2^k+l}$

(다) $\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$ 에서 항수는 2^k개 이고,

각 항은 $\frac{1}{2^{k+1}}$ 보다 크거나 같으므로

$\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}\ge 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}$

230) 답 : 16
[해설]
[출제 의도]수열의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$a_{50}=a_{25}+1=(a_{13}+1)+1=a_{13}+2=(a_7+1)+2$
$=a_7+3=(a_4+1)+3=a_4+4=(a_2+1)+4$
$=a_2+5=(a_1+1)+5=16$
[참고] $a_1=10,\ a_2=11,\ a_{2n-1}=a_{2n}=a_n+1\,(n\ge 2)$

231) 답 : 10
[해설]
[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용하여 문제 해결하기
$a_1=\alpha,\ a_{n+1}-a_n=2n\,(n\ge 1)$에서

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=\alpha+n(n-1)$이므로

$a_{10}=\alpha+10\times 9=100$이다.
$\therefore\ \alpha=10$

232) 답 : 64
[해설]
[출제 의도]여러 가지 수열을 활용하여 실생활문제 해결하기
첫 번째- : 1개, : 1개, : 2개
두 번째- : 2개, : 3개, : 5개
세 번째- : 3개, : 5개, : 8개
$\vdots$
n번째- : n개, : $2n-1$개, : $3n-1$개
n번째 후 전체 구슬의 개수는

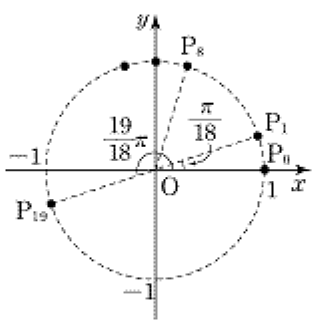
$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=n(3n+1)$

$n(3n+1)\le 200$인 최대의 n을 구하면 $n=8$이다.
또한 $n=8$까지 꿴 구슬은 모두 200개이므로 구슬 의 개수는

$\sum_{k=1}^{8}(2k-1)=2\cdot\frac{8\cdot 9}{2}-8=64$

233) 답 : ⑤
[해설]
수열
각 정사각형에서 검은 타일의 개수와 흰 타일의 개수의 차를 구해 보자.
한 변의 길이가 2인 정사각형은 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 2개 많다.
한 변의 길이가 4인 정사각형은 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 4개 많다.
한 변의 길이가 6인 정사각형은 검은 타일의 개수가 흰 타일의 개수보다 6개 많다.
$\vdots$
한 변의 길이가 20인 정사각형은 흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20개 많다.
따라서, 전체 타일의 개수가 400개가 되었을 때,
흰 타일의 개수가 검은 타일의 개수보다 20 개 많다.

234) 답 : ②
[해설]
$P_n(a_n,\ b_n)$을 좌표평면에 나타내면
$a_n=b_n$을 만족하는 점 P_n은 $y=x$의 그래프 위의 점이다.



이때, $y=x$의 그래프는 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\frac{\pi}{4}$이다.

그러나 $\frac{\pi}{18}\cdot t=\frac{\pi}{4}$를 만족하는 자연수 t가 존재하지 않으므로
$a_n=b_n$을 만족하는 n은 존재하지 않는다.
그리고 $c_1=a_{18}=-1,\ c_2=a_{36}=1$
따라서 수열 $\{c_k\}$는 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ 이다.
즉, 공비가 -1인 등비수열이다.

235) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]실생활과 관련된 상황을 수열과 관계지어 문제를 해결한다.

n개의 선분으로 분할되는 영역의 수의 최댓값을 a_n이라 하면

$\{a_n\}: 2, 4, 7, 11, \cdots$

$$a_n = 2 + (2+3+\cdots+n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 k개의 선분으로 분할된 영역의 수가 최소한 29이려면

$a_k \geq 29$

$$1 + \frac{k(k+1)}{2} \geq 29$$

$\therefore\ k \geq 7$

따라서 선분을 최소한 7개 그려야 한다.

236) 답 : 271

[해설]

[출제 의도]계차수열을 이용하여 수열의 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

수열 $1, 7, 19, 37, \cdots$의 계차수열을 구하면,

첫째항이 $b_1 = 6$이고, 공차가 $d = 6$인 등차수열이다

그러므로 10번째항은

$$a_{10} = a_1 + \sum_{k=1}^{9} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{9} 6k$$

$$= 1 + 6 \cdot \frac{9 \times 10}{2} = 271$$

237) 답 : 157

[해설]

【출제 의도】 수열의 규칙을 찾아 문제 해결하기

행의 수, 정삼각형의 수, 성냥개비의 수를 각각 α, β, γ라고 하면

α	1	2	3	$\cdots$	9	$\cdots$	n	$\cdots$
β	1	3	5	$\cdots$	17	$\cdots$	$2n-1$	$\cdots$
γ	3	6	9	$\cdots$	27	$\cdots$	$3n$	$\cdots$

따라서 95번째 삼각형은 10행의 14번째 삼각형이다.

사용된 성냥개비의 수는

$(3+6+9+\cdots+27) + (3\times 7) + 1 = 157$ (개)

238) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]지수법칙을 이해하고 이를 활용하기

소금물의 농도를 a라고 하자.

갑과 을이 각각 5회, n회 시행했을 때 소금물의 농도가 같으므로

$a\left(\frac{1}{4}\right)^5 = a\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이 된다.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\therefore\ n = 10$

239) 답 : 105

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열에 관한 문제를 해결하기

주어진 점화식의 양변을 $a_n a_{n+1} a_{n+2}$로 나누면

$\frac{1}{a_{n+2}} - \frac{2}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n} = 0$이므로 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다.

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k} = \frac{20 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 19 \cdot \frac{1}{2}\right)}{2} = 105$$

[정답] 105

240) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법의 원리를 이해하기

㈎ $\frac{k+1}{k+2}$, ㈏ 2

[정답]⑤

241) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]

주어진 점화식을 만족하는 수열의 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

주어진 점화식에 $n=2$를 대입하면

$a_1 \cdot a_3 = a_2 \cdot a_4$, $1 \cdot 4 = 2 \cdot a_4$이므로 $a_4 = 2$

또, $n=3$을 대입하면

$a_2 \cdot a_4 = a_3 \cdot a_5$, $2 \cdot 2 = 4 \cdot a_5$이므로 $a_5 = 1$

마찬가지로 $n = 4, 5, 6, \cdots$를 차례대로 대입하면

구하는 수열은 $1, 2, 4, 2, 1, 2, 4, 2, \cdots$

이 수열은 $1, 2, 4, 2$가 반복되는 수열이므로

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = 5 \times 9 = 45$$

242) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n = k\,(k \geq 6)$일 때 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^k}{k^k} \cdot k^k$$

$$= \frac{k+1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^k$$

그런데 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k > 2$이고 $\left(\frac{k}{2}\right)^k > k!$이므로

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} > \frac{k+1}{2} \cdot 2 \cdot k \neq (k+1)!$$

243) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

n행의 마지막 카드는 그림에서 $2^n - 1$번째 항이므로

10행의 첫 번째 카드는 512항이고 마지막 카드는 1023항이다.

이때 카드의 배열은 9개씩 반복되므로 9로 나누어보면

$512 = 9 \times 56 + 8$이고 $1023 = 9 \times 113 + 6$이므로

$a = 2$, $b = 4$이다.

[정답]①

244) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 부등식을 증명할 수 있는지를 묻는 문제이다.

(가) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>[\sqrt{2}]$

(나), ㈐

$\sqrt{k+1}-[\sqrt{k}]-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{[k-\sqrt{k(k+1)}]}{\sqrt{k+1}}<0$

245) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

$a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\ a_4=9,\ a_5=12,\ \cdots$에서

$\{a_{2n-1}\}$이 계차수열이 되므로

$$a_{2n-1}=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)$$
$$=2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}+2n-2$$
$$=n(n+1)$$

이때, $2n-1=25$에서 $n=13$이므로

$a_{25}=13\times14=182$

[정답]③

246) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

$a_{n+1}=2a_n+1$

$\Leftrightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$이므로

$a_n+1=b_n$이라 하면

$b_{n+1}=2b_n\cdots$①

이때, ①에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$을 차례로 대입하여 정리하면

$b_n=b_1\cdot2^{n-1}=2^{n+1}\ (\because\ b_1=4)$

따라서, $a_n=2^{n+1}-1$

$\therefore\ a_{99}=2^{100}-1$이므로

(준식) $=\log_4 2^{100}=50$

[정답]①

247) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]규칙의 이해 및 등차수열의 일반항, 합에 관한 이해력을 측정한다.

ㄱ. 구슬을 4개씩 붙여 나가므로 $a_{n+1}-a_n=4$

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 4인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)4=4n-3$

$\therefore\ a_{20}=4\cdot20-3=77$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)=4\cdot\frac{10\cdot11}{2}-3\cdot10=220-30$

$=190$

248) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

주어진 수열의 점화식을 이용하여 몇 개의 항을 구하면

$1,\ 2,\ 1,\ -1,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ \cdots$이다.

따라서, 주어진 수열은 6개 항을 주기로 반복되고

$a_1+a_2+\cdots+a_{2005}=(a_1+a_2+\cdots+a_6)$

$+\cdots+(a_{1999}+a_{2000}+\cdots+a_{2004})+a_{2005}$

$=a_{2005}=a_1=1$

[정답]③

249) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수학적 귀납법을 이용하여 부등식 증명하기

㈎ $\log_2 4\sqrt{2}$, ㈏ $\frac{1}{2}$, ㈐ $\frac{k+1}{2}$

[정답]③

250) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수학적귀납법의 원리 이해하기

[해설] (ii)에서

$n=k$일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^k\le\frac{a^k+b^k}{2}\cdots$① 이 성립한다.

① 의 양변에 $\frac{a+b}{2}$ ㈎를 곱하면

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\le\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right)\times\frac{a+b}{2}$

$\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$

이때,

$a^{k+1}+b^{k+1}-ab^k-a^kb=a^k(a-b)-b^k(a-b)$
$=(a-b)(a^k-b^k)$

이고, $a-b$와 a^k-b^k는 부호가 서로 같거나 0이므로,

$(a-b)(a^k-b^k)\ [\ \ge\ ]\ 0$

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$

$\le\frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$

즉, $n=k+1$일 때, 주어진 식이 성립한다.

따라서, (i), (ii)에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 주어진 식은 성립한다.

[정답]⑤

251) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의로 표현된 수열의 일반항 구하기

$a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$

$(a_{n+1}+1)(a_n+2)=a_{n+1}(a_n+2)+a_n+2$

$=(2a_n+1)+a_n+2$

$=3(a_n+1)\ ...$①

$(a_{n+1}-1)(a_n+2)=a_n-1\ ...$②

① ÷ ② 에서 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{3(a_n+1)}{a_n-1}$ 이므로

수열 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n-1}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{a_1+1}{a_1-1}=3$, 공비가 3인 등비수열이다.

따라서, $\dfrac{a_n+1}{a_n-1}=3\times 3^{n-1}=3^n$

$\therefore\ a_n=\dfrac{3^n+1}{3^n-1}$

252) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 알고 일반항 구하기

수열의 일반항이 $a_n=(a_1-15)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+15$ 이므로

$a_{100}=(20-15)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{99}+15$

[정답]④

253) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이해하고, 이를 이용한 증명 능력을 측정한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{i+1}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{i}k(k+1)(k+2)+(i+1)(i+2)(i+3)$ 이므로

$n=i+1$ 일 때에도 등식이 성립함을 보이려면

양변에 $(i+1)(i+2)(i+3)$을 더하여야 한다.

이때, 좌변은

$\displaystyle\sum_{k=1}^{i}k(k+1)(k+2)+(i+1)(i+2)(i+3)$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{i+1}k(k+1)(k+2)$

이고, 우변은

$\dfrac{1}{4}i(i+1)(i+2)(i+3)+(i+1)(i+2)(i+3)$

$=\dfrac{1}{4}(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)$

이므로 $n=i+1$ 일 때에도 주어진 등식이 성립한다.

$\therefore$ ㈎ $(i+1)(i+2)(i+3)$

㈏ $\dfrac{1}{4}(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)$

254) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

a_n을 n층의 정육면체의 개수라 하면

개수는 1, 5, 13, 25, ⋯ 이며 계차수열은

4, 8, 12, ⋯

$\displaystyle a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}4k=1+\frac{4n(n-1)}{2}=2n^2-2n+1$

$\displaystyle\therefore\ S_{10}=\sum_{n=1}^{10}(2n^2-2n+1)$

$=2\cdot\dfrac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}+10=670$

[정답]②

255) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]귀납적 정의를 이해하고 일반항 구하기

준식을 $a_{n+1}-\dfrac{5}{2}=3\left(a_n-\dfrac{5}{2}\right)$꼴로 변형하면

수열 $\left\{a_n-\dfrac{5}{2}\right\}$는 첫째항이 $a_1-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2}$,

공비가 3인 등비수열을 이루므로

$a_n-\dfrac{5}{2}=-\dfrac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{5}{2}+\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$

따라서, $a_{100}-a_{99}=-3^{99}$

[정답]③

256) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]주어진 수열의 규칙성을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=1$ 일 때, $a_1=2,\ a_1+a_2=3\ \therefore\ a_2=1$

$n=2$ 일 때, $a_2+a_3=6\ \therefore\ a_3=5$

$n=3$ 일 때, $a_3+a_4=9\ \therefore\ a_4=4$

⋮

$\therefore\ a_{2n-1}-a_{2n}=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\displaystyle\therefore\ P-Q=\sum_{n=1}^{10}(a_{2n-1}-a_{2n})=10$

257) 답 : 55

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ \cdots$

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 이므로 $a_{10}=55$

[정답]55

258) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의 이해하기

(ⅰ) 2이상의 모든 자연수 n에서 최소의 수는 2이므로 $n=2$이다.

(ⅱ) $-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}=-\dfrac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$

$-\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}=-\dfrac{k(k+1)+1}{k(k+1)^2}$

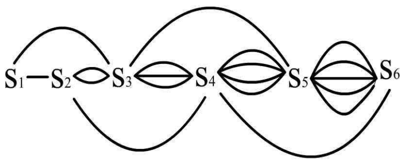
$-\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k(k+1)^2}$ 이므로

$-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}+\dfrac{1}{k+1}=-\dfrac{1}{k(k+1)^2}$

[정답]③

259) 답 : ⑤

[해설]



S_n까지 가는 방법의 수를 T_n

S_{n+1}까지 가는 방법의 수를 T_{n+1}이라 하면

S_{n+2}까지 가는 방법의 수 T_{n+2}은

S_n에서 S_{n+2}까지 직통으로 가는 방법의 수가 1가지이고,

S_{n+1}에서 S_{n+2}까지 가는 방법의 수가 $(n+1)$가지이므로

$T_{n+2}=(n+1)T_{n+1}+T_n$라 할 수 있다.

$n=4$일 때, 방법의 수를 구하면

$T_6=5T_5+T_4$

[정답]⑤

260) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의 이해하기

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=3+\frac{1}{a_n}$ 이므로

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항 $\frac{1}{a_1}=2$이고, 공차 3인 등차수열이다.

따라서, $\frac{1}{a_n}=2+3(n-1)=3n-1$이므로

$a_n=\frac{1}{3n-1}$

$\therefore\ a_{20}=\frac{1}{59}$

[정답]①

261) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]이항정리를 이용하여 부등식을 증명할 수 있다.

(i) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\geq 1+1+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2$

$2+\frac{n-1}{2n}>2\,(\because\ n\geq 2)$

(ii) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$=1+{}_nC_1\frac{1}{n}+{}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$

$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$

$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$k\neq 1\cdot 2\cdot\cdots k\geq 2^{k-1}$이므로 $\frac{1}{k!}\leq\frac{1}{2^{k-1}}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3$

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 부등식

$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$이 성립한다.

262) 답 : 144

[해설]

[출제 의도]수열을 이용하여 문제상황을 추측할 수 있다.

흰 바둑돌과 검은 바둑돌을 합쳐 n개가 있다고 하면 n개의 바둑돌은 맨 앞의 바둑돌이 검은 색인 경우와 앞의 두 바둑돌이 흰색-검은색인 경우 두 가지로 나눌 수 있다. 즉,

(i)맨 앞의 바둑돌이 검은 색인 경우

$● \underbrace{\times\ \times\ \times\ \times\ \cdots\ \times}_{n-1\text{개}}$ 이므로

$n-1$개를 배열 하는 방법의 수 a_{n-1}

(ii)맨 앞의 두 바둑돌이 흰색-검은색인 경우

$○\ ● \underbrace{\times\ \times\ \times\ \cdots\ \times}_{n-2\text{개}}$ 이므로

$n-2$개를 배열하는 방법의 수 a_{n-2}

따라서, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$가 성립한다.

이 수열을 a_1에서 a_{10}까지 차례로 나열하면 다음과 같다.

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

$\therefore\ a_{10}=144$

263) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]수열의 관계식에서 각 항의 값을 유추할 수 있다.

$a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

$a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-2}=-1$

$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 $\frac{1}{2}$, 2, -1이 반복된다.

$a_1+a_2+a_3=\frac{1}{2}+2+(-1)=\frac{3}{2}$ 이고

$6=\frac{3}{2}\times 4$이므로 $k=3\times 4=12$

264) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성을 발견할 수 있다.

a_n은 n개의 정사각형을 세로 i개, 가로 j개 붙여서 만들 수 있는 서로 다른 모양의 직사각형의 개수이므로

a_n은 두 자연수 i, j에 대하여 $i\times j=n(i\le j)$인 순서쌍 (i, j)의 개수이다.

ㄱ. $n=6$이면 $6=1\times 6=2\times 3$에서 $a_6=2$ ∴ 참

ㄴ. n이 소수이면 $a_n=1$ ∴ 참

ㄷ. $a_n=2$인 한 자리 자연수 n은 $4, 6, 8, 9$로 4개이다. ∴ 거짓

a_n은 자연수 n의 양의 약수의 개수를 p라 하면 p가 짝수이면

$a_n=\frac{p}{2}$

p가 홀수이면 $a_n=\frac{p+1}{2}$가 된다.

265) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]주어진 정의를 이해하여 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 홀수 n은 $\frac{n+1}{2}$번째에 지워지므로

$_nA_k=n$이면 $k=\frac{n+1}{2}$이다.(참)

ㄴ.(반례) $n=6$이면 $_6A_5=6$이므로

$k\ne\frac{n}{2}+1$이다.(거짓)

ㄷ. 자연수 n이 맨 마지막까지 남아있기 위해서는

한 바퀴째에는 $1, 3, 5, \cdots$ 이 지워지므로

n은 짝수이어야 한다.

두 바퀴째에는 $2, 6, 10, \cdots$ 이 지워지므로

n은 4의 배수이어야 한다.

세 바퀴째에는 $4, 12, 20, \cdots$ 이 지워지므로

n은 8의 배수이어야 한다. $\cdots$

따라서 $n=2^m$ (m은 자연수)꼴이어야 한다.(참)

266) 답 : 180

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 일반항 구하기

1회 작업일 때, $4\times 3-2$

2회 작업일 때, $6\times 5-2$

cdots n회 작업일 때, $2(n+1)(2n+1)-2$

그러므로, 6회 작업일 때는 $2\cdot 7\cdot 13-2=180$

[정답]180

267) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]

수학적귀납법을 이용하여 이항정리를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

㈎, ㈏에 알맞은 식은 순서대로

$\sum_{r=1}^{k}{}_kC_{r-1}a^{k-r+1}b^r$, ${}_{k+1}C_r$이다.

268) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 일반항 구하기

가. 5, 나. $\sum_{k=1}^{n-1}5^k$, 다. 5^n

[정답]④

269) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항 구하는 과정 이해하기

$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$에서 a_n+b_n은

첫째항이 a_1+b_1, 공비가 5인 등비수열이므로

$a_n+b_n=5^n$

$a_{n+1}-b_{n+1}=3(a_n-b_n)$에서

a_n-b_n은 첫째항이 a_1-b_1, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n-b_n=3^{n-1}$이를 정리하면 $2a_n=5^n+3^{n-1}$

∴ $a_n=\frac{1}{2}(5^n+3^{n-1})$

[정답]⑤

270) 답 : ⑤

[해설]

S_1의 둘레의 길이 $=2\pi$

S_2의 둘레의 길이 $=2\pi\left(\frac{3}{4}\right)$

S_3의 둘레의 길이 $=2\pi\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

S_{10}의 둘레의 길이 $=2\pi\left(\frac{3}{4}\right)^9$

이들의 합은 첫째항이 2π이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열의 합이므로

$$2\pi\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{4^{10}}\right)}{1-\frac{3}{4}}=8\pi\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$$

[정답]⑤

271) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수학적귀납법을 이용하여 참인 명제 증명하기

가. ka_k 나. $a_{k+1}-\frac{1}{k+1}$

[정답]②

272) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 합의 공식을 이용하여 완성형의 문제를 풀 수 있다.

ii) $k=2$일 때,

$\frac{2n(2n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$에서

$6=n+1$

∴ $n=[5]$

iii) $k\ge 3$일 때,

$$\frac{2n(2n+1)}{2} \ge \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$\therefore\ 4(2n+1) \ge n(n+1)^2$

이때, $8(n+1) = 4 \cdot (2n+2) > 4(2n+1)$에서

$8(n+1) > n(n+1)^2$

$\therefore\ 8 > n(n+1) > n^2$