Ⅲ.수열

2.수열의 합

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_5+a_{13}=3a_9$, $\sum_{k=1}^{18} a_k=\frac{9}{2}$를 만족시킬 때, a_{13}의 값은? [4점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

3 $f(x)=\frac{1}{2}x+2$에 대하여 $\sum_{k=1}^{15}f(2k)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

4 좌표평면에서 함수 $f(x)=\begin{cases}-x+10, & (x<10)\\(x-10)^2, & (x\geq 10)\end{cases}$과 자연수 n에 대하여 점 $(n, f(n))$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_n이 있다. x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 아랫부분에 있는 모든 점의 개수를 A_n, 원 O_n의 내부에 있고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 윗부분에 있는 모든 점의 개수를 B_n이라 하자.
$\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

5 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{n}{n+1}$일 때, a_4의 값은?[3점]

① $\frac{1}{22}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{18}$
④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{1}{14}$

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

6 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\log_3 n, & (n\text{이 홀수})\\ \log_2 n, & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

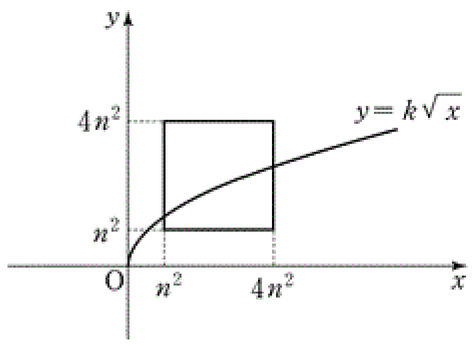
수열 $\{a_n\}$이 $a_n=f(6^n)-f(3^n)$일 때, $\sum_{n=1}^{15}a_n$의 값은? [3점]

① $120(\log_2 3-1)$ ② $105\log_3 2$ ③ $105\log_2 3$
④ $120\log_2 3$ ⑤ $120(\log_3 2+1)$

[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

7 [공통]좌표평면에서 자연수 n에 대하여 A_n을 4개의 점 (n^2, n^2), $(4n^2, n^2)$, $(4n^2, 4n^2)$, $(n^2, 4n^2)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형이라 하자.

정사각형 A_n과 함수 $y=k\sqrt{x}$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $a_5=15$
ㄴ. $a_{n+2}-a_n=7$
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} a_k=200$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

8 [공통]수열 $\{a_n\}$이

$$\sqrt{17}-4=\frac{1}{8+a_1}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}}=\cdots$$ 을

만족시킬 때, a_{2002}의 값은?[3점]

① $\sqrt{17}-4$ ② $3-\sqrt{17}$ ③ $5-\sqrt{17}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{17}+4$

[난이도 : ★★☆] [2002 학년도 대수능]

9 [공통]함수 $f(x)$가 $f(10)=50$, $f(1)=3$을 만족시킬 때,

$\sum_{k=1}^{9} f(k+1)-\sum_{k=2}^{10} f(k-1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

10 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=3,\ \sum_{k=1}^{10} a_k^2=7$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k^2-a_k)$의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

11 $\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=300$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

12 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{11} a_k=4,\ \sum_{k=1}^{11} b_k=24$$

일 때, $\sum_{k=1}^{11}(5a_k+b_k)$의 값은?[3점]

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

13 $\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)} = \frac{15}{4}$ 일 때, n의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

14 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n \quad (n \geq 1)$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} k a_{4k+1}$의 값은? [3점]

① 2960 ② 3000 ③ 3040
④ 3080 ⑤ 3120

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

15 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 15$이고,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = 2n+1 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값은 [3점]

① 28 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 36

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

16 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 15$이고,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = 2n+1 \, (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

17 [공통]첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$ 일 때, S_{11}의 값은?[3점][2012년 6월]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

18 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} (k-\alpha)(k-\beta)$의 값은?[4점][2012년 6월]

① 255 ② 265 ③ 275
④ 285 ⑤ 295

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

19 [공통]수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=2$이고, $n \geq 1$일 때, a_{n+1}은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_k}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수이다. a_{10}의 값을 구하시오.[4점][2012년 6월]

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

20 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k = n^3$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★]

21 3보다 큰 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a라 하자.

(가) $a \geq 3$ (나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5)=4$이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$의 값을 구하시오.[4점][2012년 6월]

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

22 $\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[3점]

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

23 수열 $\{a_n\}$이 $7a_1+7^2a_2+\cdots+7^na_n=3^n-1$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값은?[4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

24 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = \frac{\log\{n+1\}}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

25 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2^n$일 때, a_1+a_5의 값은?[3점]

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

26 [공통]수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 $\frac{n}{3^k}$이 자연수가 되게 하는 음이 아닌 정수 k의 최댓값이라 하자. 예를 들어 $a_1=0$이고 $a_6=1$이다.

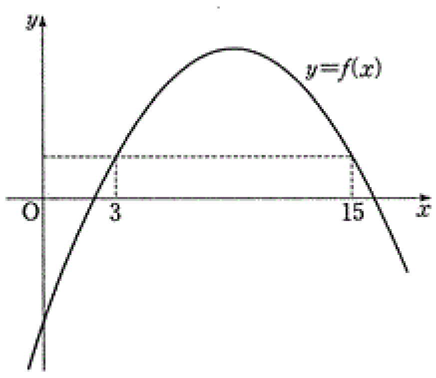
$a_m=3$일 때, $a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{9m}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

27 [공통]함수 $y=f(x)$는 $f(3)=f(15)$를 만족하고, 그 그래프는 그림과 같다.

모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$인 수열 $\{a_n\}$이 있다.

m이 15보다 작은 자연수일 때, $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{15} < 0$을 만족시키는 m의 최솟값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

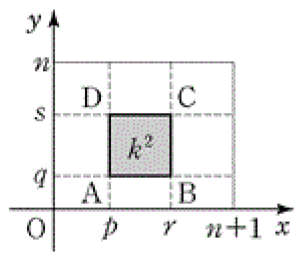
28 [공통]수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$일 때, $\sum_{n=1}^{2010} na_n$의 값은?[4점]

① -2011　② -2010　③ 0
④ 2010　⑤ 2011

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

29 [공통]자연수 n과 $0 \le p < r \le n+1$, $0 \le q < s \le n$을 만족시키는 네 정수 p, q, r, s에 대하여 좌표평면에서 네 점 $A(p, q)$, $B(r, q)$, $C(r, s)$, $D(p, s)$를 꼭짓점으로 하고 넓이가 k^2인 정사각형의 개수를 a_k라고 하자.

다음은 $\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값을 구하는 과정이다.(단, k는 n이하의 자연수이다.)

> 그림과 같이 넓이가 k^2인 정사각형
>
> 
>
>
> $ABCD$를 만들 때, 두 점 A, B의 y좌표가 주어지면 x좌표의 차가 $r-p=k$인 변 AB를 택하는 경우의 수는 [(가)]이다.
> 또 두 점 A, D의 x좌표가 주어지면 y좌표의 차가 $s-q=k$인 변 AD를 택하는 경우의 수는 [(나)]이다.
> 따라서 $a_k = (n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2$이다.
> 그러므로 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{(n+1)(n+2) - (2n+3)k + k^2\}$
> [(다)]`

(가), (나), (다)에 들어갈 식으로 알맞은 것은?[3점]

① $n-k+1$, $n-k+2$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

② $n-k+2$, $n-k+1$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

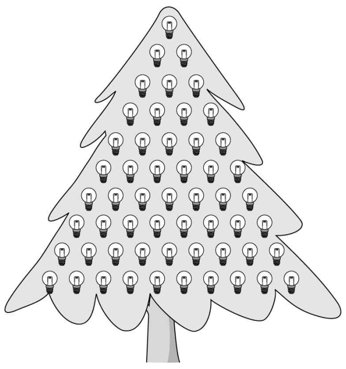
③ $n-k+1$, $n-k+2$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

④ $n-k+2$, $n-k+1$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

⑤ $n-k+1$, $n-k+2$, $\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

30 [공통]그림과 같이 나무에 55개의 전구가 맨 위 첫 번째 줄에는 1개, 두 번째 줄에는 2개, 세 번째 줄에는 3개, $\cdots$, 열 번째 줄에는 10개가 설치되어 있다. 전원을 넣으면 이 전구들은 다음 규칙에 따라 작동한다.



(가) n이 10이하의 자연수일 때, n번째 줄에 있는 전구는 n초가 되는 순간 처음 켜진다.
(나)모든 전구는 처음 켜진 후 1초 간격으로 꺼짐과 켜짐을 반복한다.

전원을 넣고 n초가 되는 순간 켜지는 모든 전구의 개수를 a_n이라고 하자.

예를 들어 $a_1=1,\ a_2=2,\ a_4=6,\ a_{11}=25$이다. $\sum_{n=1}^{14} a_n$의 값은?[3점]

① 215 ② 220 ③ 225
④ 230 ⑤ 235

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

31 [공통]수열 $\{a_n\}$의 제 n항 a_n을 자연수 k의 양의 제곱근 $\sqrt{k}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 n이 되는 k의 개수라 하자.

$\sum_{i=1}^{10} a_i$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

32 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2+n$일 때, a_{47}의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 모의평가]

33 $\sum_{k=1}^{10} (k-1)(k+2)$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 모의평가]

34 [공통]수열 $\{a_n\}$에서 $a_{2n-1}=2^n$이고 $a_{2n}=5^n$일 때, $\sum_{n=1}^{10} \log a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 09월 모의평가]

35 $\sum_{k=1}^{10} (k-1)(k+2)$의 값을 구하시오. [2점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

36 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 ω^n의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999} \left\{ f(k) + \frac{1}{3} \right\}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

37 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 20$일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_n - 1)$의 값은? [3점]

① 2 ② 6 ③ 10
④ 14 ⑤ 18

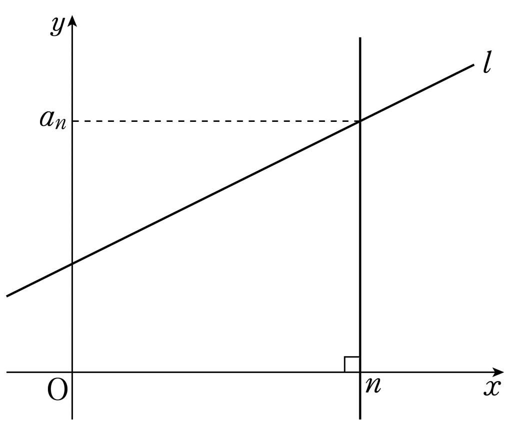
[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

38 9.등식 $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k} = a + \sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}$을 만족시키는 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

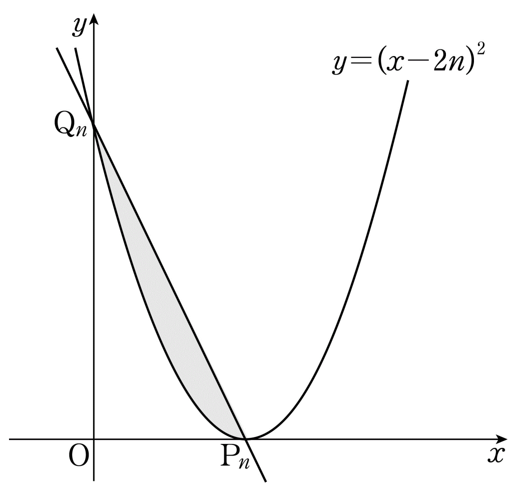
39 좌표평면에 그림과 같이 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하자. $a_4 = \frac{7}{2}$, $a_7 = 5$일 때, $\sum_{k=1}^{25} a_k$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

40 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y = (x-2n)^2$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자.

두 점 P_n, Q_n을 지나는 직선과 곡선 $y = (x-2n)^2$으로 둘러싸인 영역(경계선 포함)에 속하고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다.



두 점 P_n, Q_n을 지나는 직선의 방정식은

$y =$ (가) $\times x + 4n^2$

이다.

주어진 영역에 속하는 점 중에서 x좌표가 k(k는 $2n-1$ 이하의 자연수)이고 y좌표가 자연수인 점의 개수는 (나) $+2nk$이므로

$$a_n = \sum_{k=1}^{2n-1}(\text{ (나) } + 2nk)$$

이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3} =$ (다) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p \times f(3) \times g(4)$의 값은? [4점]

① 100 ② 105 ③ 110
④ 115 ⑤ 120

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

41 n이 자연수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-p}$이

$f(1)<f(5)<f(3)$

을 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m이라 하자.

자연수 n에 대하여 $p=m$일 때의 함수 $f(x)$와 함수

$g(x)=\dfrac{2x+n}{x+q}$이

$g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$

을 만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

42 유리함수 $f(x)=\dfrac{8x}{2x-15}$와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=f(n)$이다. $\sum_{n=1}^{m} a_n \le 73$을 만족시키는 자연수 m의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

43 x에 대한 이차방정식 $nx^2-(2n^2-n)x-5=0$의두 근의 합을 a_n(n은 자연수)라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 88 ② 91 ③ 94
④ 97 ⑤ 100

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

44 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_k=2n-1$을 만족시킬 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

45 이차 함수 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$에 대하여

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$S_n=2f(n)$이다. a_6의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

46 20.자연수 n에 대하여 $\left|\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2-m\right|<\dfrac{1}{2}$

을 만족시키는 자연수 m을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?[4점]

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

47 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n+2^n$일 때, a_6의 값은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

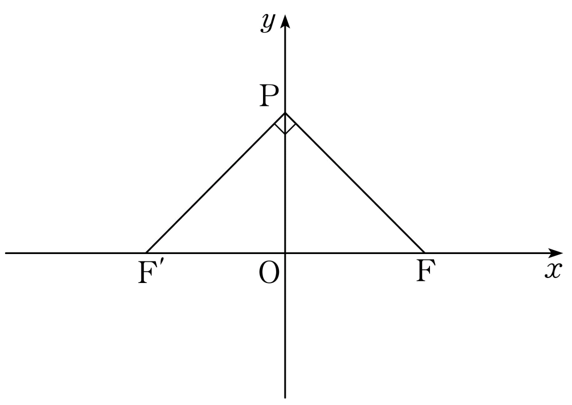
48 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2n-3$일 때, $\sum_{k=2}^{m} a_{k+1} = 48$을 만족시키는 m의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

49 그림과 같이 좌표평면에 x축 위의 두 점 F, F'과 점 $P(0, n)$ $(n>0)$이 있다.

삼각형 $PF'F$가 $\angle FPF' = \frac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형일 때,



n이 자연수일 때 삼각형 $PF'F$의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값은? [3점]

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

50 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = 2n-3$일 때, $\sum_{k=2}^{m} a_{k+1} = 48$을 만족시키는 m의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

51 수열 $\{a_n\}$은 15와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 모두 나열하여 만든 것이다. 예를 들면 $a_2 = 2$, $a_4 = 7$이다.

$\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은? [4점]

① 240 ② 280 ③ 320
④ 360 ⑤ 400

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

52 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n = 2^p \times q$(p는 음이 아닌 정수, q는 홀수)일 때, $a_n = p$이다.

예를 들어, $20 = 2^2 \times 5$이므로 $a_{20} = 2$이다. $a_m = 1$일 때,

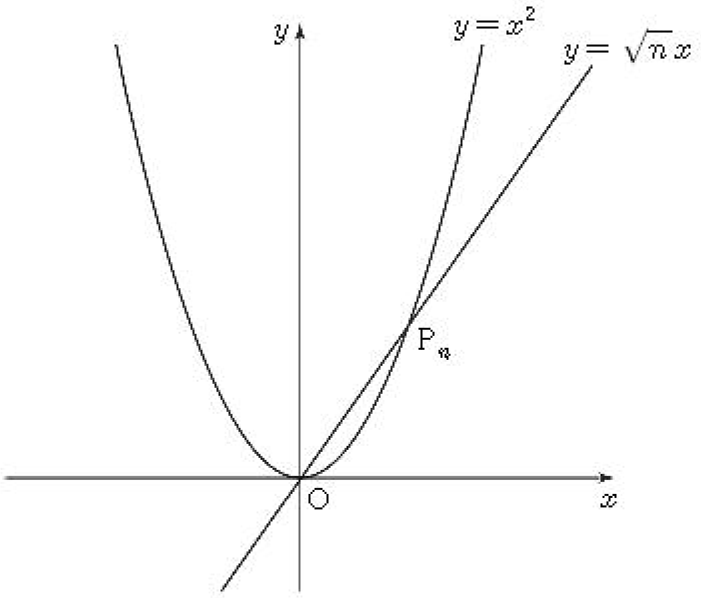
$a_m + a_{2m} + a_{3m} + a_{4m} + a_{5m} + a_{6m} + a_{7m} + a_{8m} + a_{9m} + a_{10m}$

의 값은? [4점]

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

53 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 P_n이라 하자.



점 P_n을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}x$와 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 삼각형 OQ_nR_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5}\frac{2S_n}{\sqrt{n}}$의 값은?(단, O는 원점이다.) [4점]

① 80 ② 85 ③ 90
④ 95 ⑤ 100

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

54 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 $f(x)=|x-1|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)$를 $g(x)=x+f(x)$라 하자.

자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $n \le a \le n+2$
(나) $0 < b \le g(a)$

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

55 17. $a>1$인 실수 a에 대하여 $a^{\log_5 16}$이 2^n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 되도록 하는 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k$의 값은? [4점]

① 185 ② 190 ③ 195
④ 200 ⑤ 205

[난이도 : ★☆☆] [2012년 11월 학력평가]

56 $\sum_{n=1}^{10}(2n-3)$의 값은? [2점]

① 65 ② 70 ③ 75
④ 80 ⑤ 85

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

57 $\sum_{k=1}^{10}2k(k+1)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

58 수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 32이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열을 이룰 때, $\sum_{k=1}^{11}|\log_2 a_k|$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

59 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=n(x-1)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{a_nb_n}$의 값은? [3점][2012년 7월]

① 80 ② 85 ③ 90
④ 95 ⑤ 100

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

60 $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]$의 값을 구하시오.(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

61 다음 등식을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{n+1}k^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=78$$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

62 n이 자연수일 때, x에 대한 방정식 $\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$의 0이 아닌 해를 $x=a_n$이라 하자. a_{10}의 값은?[3점]

① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

63 $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{9}a_{3k+1}+21$을 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{10}a_{3k}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

64 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{6}{11}$
④ $\frac{13}{22}$ ⑤ $\frac{7}{11}$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

65 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $a\neq0$인 실수, $d\neq0$이고 $d\neq1$인 실수)[4점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{2^{a_n}\}$은 공비가 2^d인 등비수열이다.
ㄴ. 수열 $\{S_{2n}-S_{2n-1}\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
ㄷ. 수열 $\left\{\frac{2^{a_{n+1}}}{4^{a_n}}\right\}$은 공비가 2^{-d}인 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

66 유한수열 $\{a_n\}$은 다음 세 조건을 만족한다.

(가) $a_i \in \{-1, 0, 1\}\ (i=1, 2, 3, \cdots, 10)$

(나) $\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 10$

(다) $\left(\sum_{k=1}^{10} a_k^3\right)\left(\sum_{k=1}^{10} a_k^4\right) = 16$

이때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{3^k}$의 값을 최대가 되게 하는 수열 $\{a_n\}$의 모든 홀수 번째 항들의 합은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

67 정의역이 $\{x|x>0\}$인 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

(가) $0 < x \le 1$에서 $f(x)=x$이다.

(나) $f(x+1) = -f(x)$

자연수 n에 대하여 점 $A_n(n+1, 1)$과 원점 O를 지나는 직선을 l_n이라 하자.

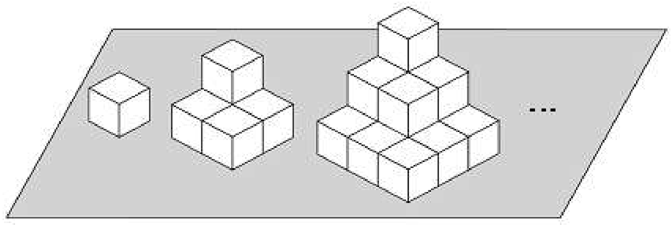
직선 l_n과 함수 $f(x)$의 그래프와의 교점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 25 ② 29 ③ 33 ④ 37 ⑤ 41

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

68 불투명한 평면 위에 크기가 같은 정육면체 모양의 나무 블록을 이용하여 그림과 같은 규칙으로 n층을 쌓고 한 면이라도 보이는 나무 블록의 개수를 a_n이라 하자.

예를 들어 $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 13$이다. 이때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

69 [공통]수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합 이 $S_n = n^2 + 3n + 1$일 때, $a_1 + a_6$의 값은?[3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

70 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = {}_{n+2}C_3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_{n+1} - a_n)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

71 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_{11}=3$이고, $b_n=na_n-na_{n+1}(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$이다.

$\sum_{k=1}^{10} b_k = 55$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

72 $\sum_{k=1}^{99} \log\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)}\right)$의 값은?[3점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

73 [공통]두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$에 대하여 $d(P,\ Q)$를 $d(P,\ Q)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$라 정의하자.

두 점 $A(1,\ 0)$과 $P_n(n,\ 2^n)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} d(A,\ P_n)$의 값은?[3점]

① 2^9+45 ② $2^{10}+43$ ③ $2^{10}+45$
④ $2^{11}+43$ ⑤ $2^{11}+45$

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

74 [공통]수열 $\{a_n\}$이 $a_{2n-1}=a_{2n}=n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

수열 $\{S_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 240항까지의 값 중에서 3의 배수를 값으로 하는 모든 항의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

75 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 $m,\ n$에 대하여

$$\begin{cases} a_1=1 : a_{m+n}=a_m+a_n \\ b_1=2 : b_{m+n}=b_m b_n \end{cases}$$

을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k b_k$의 값은?[4점]

① $18 \cdot 2^{21}+2$
② $19 \cdot 2^{21}-2$
③ $19 \cdot 2^{21}+2$
④ $20 \cdot 2^{21}-2$
⑤ $20 \cdot 2^{21}+2$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

76 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 $m,\ n$에 대하여

$\begin{cases} a_1=1 : a_{m+n}=a_m+a_n \\ b_1=2 : b_{m+n}=b_m b_n \end{cases}$을 만족할 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k b_k$의 값은?[4점]

① $18 \cdot 2^{21}+2$
② $19 \cdot 2^{21}-2$
③ $19 \cdot 2^{21}+2$
④ $20 \cdot 2^{21}-2$
⑤ $20 \cdot 2^{21}+2$

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

77 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_n은 자연수이다.

(나) $\left|a_n - \sqrt{n}\right| < \frac{1}{2}$

$\sum_{n=1}^{90} a_n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

78 [공통] $P_n = 3^{\frac{1}{n(n+1)}}$에 대하여 $P_1 \times P_2 P_3 \times \cdots \times P_{2010} = 3^k$일 때, 상수 k의 값은?(단, n은 자연수이다.)[3점]

① $\frac{2009}{2010}$ ② $\frac{2010}{2011}$ ③ 1
④ $\frac{2011}{2010}$ ⑤ $\frac{2010}{2009}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

79 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = (8a_n$을 5로 나눈 나머지$)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2010} a_k$의 값은?[3점]

① 5012 ② 5013 ③ 5022
④ 5023 ⑤ 5026

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

80 [공통] $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

81 n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2 - 33x + n(n+1) = 0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

82 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = \log(n+1) - \log n$이다.

$\sum_{k=50}^{m} a_k = \frac{\log 49}{25}$일 때, m의 값은?[3점]

① 91 ② 93 ③ 95
④ 97 ⑤ 99

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 학력평가]

83 자연수 n에 대하여 2^n 이하의 자연수 중에서 2^n과 서로소인 모든 자연수의 합을 S_n이라 하자.

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{S_n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

84 자연수 n에 대하여,

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} (n+k)(n+k+1)$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{S_n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

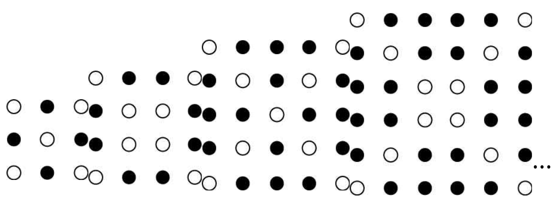
85 [공통]그림과 같이 (6×6)개의 칸에 $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$을 적어 넣었다.

모든 칸에 적힌 수들의 합을 S라 할 때, $\log_3 \frac{S-1}{5}$의 값을 구하시오.[4점]

1	3	3^2	3^3	3^4	3^5
3	3	3^2	3^3	3^4	3^5
3^2	3^2	3^2	3^3	3^4	3^5
3^3	3^3	3^3	3^3	3^4	3^5
3^4	3^4	3^4	3^4	3^4	3^5
3^5	3^5	3^5	3^5	3^5	3^5

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 학력평가]

86 그림과 같이 대각선에는 흰색 바둑돌을, 나머지에는 검은색 바둑돌을 정사각형 모양으로 놓는다.



[1단계]　　[2단계]　　[3단계]
[4단계] …

이와 같은 방법으로 계속하여 바둑돌을 놓을 때, [n단계]에 놓인 바둑돌 중 검은색 바둑돌의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?[4점]

① 460　② 480　③ 500
④ 520　⑤ 540

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

87 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = 2^n - n^2$이다.

a_{10}의 값은?[3점]

① 491　② 493　③ 495
④ 497　⑤ 499

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

88 자연수 n을 2진법으로 나타냈을 때, 일의 자리의 수를 a_n이라 하자.

$\sum_{k=1}^{30} k a_k$의 값은?[3점]

① 225　② 226　③ 227
④ 228　⑤ 229

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

89 $\sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=2}^{12} k^2 + \sum_{k=3}^{12} k^2 + \cdots + \sum_{k=12}^{12} k^2$의 값은?[4점]

① 3376　② 4356　③ 5324
④ 5840　⑤ 6084

[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

90 [공통]정사각형 모양을 이루고 있는 (19×19)개의 칸에 밝은 색과 어두운 색이 번갈아 칠해져 있다. 그림과 같이 밝은 색의 칸에 0부터 9까지의 모든 정수를 일정한 규칙에 따라 적었다고 할 때, 적힌 모든 수의 합은?[4점]

9	⋯	9		9		9		9	⋯	9
⋮	⋱	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰	⋮
9	⋯	3		3		3		3	⋯	9
	⋯		2		2		2		⋯	
9	⋯	3		1		1		3	⋯	9
	⋯		2		0		2		⋯	
9	⋯	3		1		1		3	⋯	9
	⋯		2		2		2		⋯	
9	⋯	3		3		3		3	⋯	9
⋮	⋰	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
9	⋯	9		9		9		9	⋯	9

① 1060 ② 1080 ③ 1100
④ 1120 ⑤ 1140

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

91 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=0,\ a_n=m^2$(단, $2^m\le n<2^{m+1},\ m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)으로 주어질 때, $a_n+a_{2n}\ge 100$이 성립하는 최소의 자연수 n의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

92 자연수 n에 대하여 $f_n(x)=nx+\dfrac{n}{x}\ (x>0)$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}f_n(x)$의 최솟값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

93 [공통]자연수 m에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\left[\dfrac{n}{m}\right]$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $m=2$일 때, $a_5=2$이다.
ㄴ. $m=3$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}a_k=1683$이다.
ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{mn}a_k=\frac{n(mn-m+2)}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

94 [공통]두 등차수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$에 대하여

$a_1+b_1=45,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=500$일 때, $a_{10}+b_{10}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

95 정수 a, 자연수 n에 대하여 집합 $A_n=\left\{\dfrac{a}{n}\,\middle|\,\left[\dfrac{a}{n}\right]=1\right\}$의 원소들의 총합을 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}S_k$의 값은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

① 220 ② 255 ③ 280
④ 305 ⑤ 330

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

96 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_1=\frac{5}{4}$, $S_n=a_n+\frac{n+3}{n+2}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?[3점]

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

97 다음과 같이 분모는 1부터 시작하여 99까지 1씩 증가하고, 분자는 99부터 시작하여 1까지 1씩 감소하는 분수로 이루어진 수열이 있다.

$\frac{99}{1}, \frac{98}{2}, \frac{97}{3}, \cdots, \frac{1}{99}$

이 수열에서 자연수인 항들의 총합을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

98 좌표평면에서 $y=\frac{2}{3}x$와 x축, $x=30$으로 둘러싸인 영역의 내부의 점 중 x, y의 좌표가 모두 정수인 순서쌍 (x, y)의 개수가 a개 일 때, a의 값을 구하시오.(단, 경계는 포함하지 않는다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 12월 학력평가]

99 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 3으로 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이다.

$1, 2, 4, 5, 7, 8, \cdots$

이때 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은?[3점]

① 675 ② 685 ③ 695
④ 705 ⑤ 715

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

100 $\sum_{k=1}^{10} \frac{k^3}{k^2-k+1}+\sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k^2-k+1}$의 값은? [3점]

① 62 ② 64 ③ 66
④ 68 ⑤ 70

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

101 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$로 정의하고, a_n을 3으로 나눈 나머지를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30} b_n$의 값은?[3점]

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

102 [공통]상용로그 $\log A$의 정수부분 n과 소수부분 α가 방정식 $4x^2-13x+\beta=0$의 두 근일 때, $\sum_{k=1}^{30}\left[\frac{400\alpha}{n^k}\right]$의 값을 구하시오.(단, β는 상수이고, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

103 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n+3$일 때, $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$의 값은?[3점]

① $\frac{7}{64}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{9}{64}$

④ $\frac{5}{32}$ ⑤ $\frac{11}{64}$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

104 수열 $\{a_n\}$이 $0.23, 0.2323, 0.232323, 0.23232323, \cdots$ 일 때, 일반항 a_n은 $a_n=\frac{23}{a}\{b-(10^c)^n\}$이다. $a+b+c$의 값을 구하시오.(단, a, b, c는 정수)[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

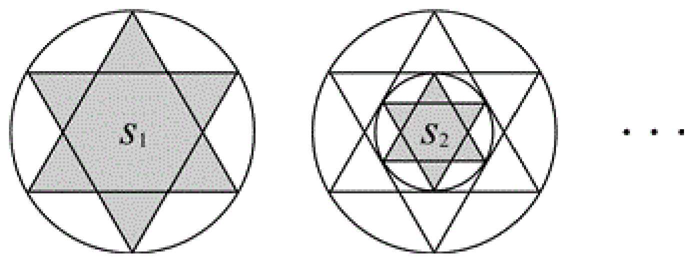
105 [공통]수열 $\{a_n\}$에서

$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$30a_{30}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{29})$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 12월 학력평가]

106 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이 있다. 그림과 같이 이 원에 내접하는 두 정삼각형이 겹쳐지는 부분이 정육각형이 되도록✡모양의 도형 S_1(어두운 부분)을 그린다. 또, S_1의 정육각형에 내접하는 원을 그리고, 이 원에 내접하는 두 정삼각형이 겹쳐지는 부분이 정육각형이 되도록✡모양의 도형 S_2(어두운 부분)를 그린다. 이와 같은 방법으로✡모양의 도형 $S_3, S_4, \cdots, S_{10}$을 그릴 때, 도형 S_{10}의 넓이는?[4점]

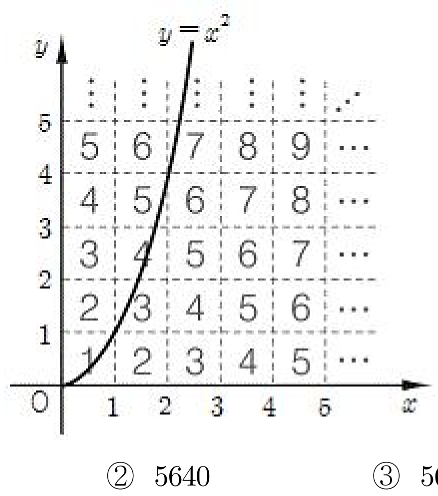


① $\frac{3\sqrt{3}}{2^{15}}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2^{16}}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2^{15}}$

④ $\frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2^{16}}$

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

107 [공통]그림과 같이 좌표평면의 제 1사분면을 한 변의 길이가 1인 정사각형들로 나누어 자연수를 배열하였다. $y=x^2\ (0\le x\le 10)$의 그래프가 지나는 한 변의 길이가 1인 정사각형에 배열된 수들의 합은?(단, 그래프가 정사각형의 내부를 지나지 않는 경우는 제외한다.)[4점]



① 5625 ② 5640 ③ 5665

④ 5680 ⑤ 5695

[난이도 : ★☆☆] [2007년 11월 학력평가]

108 로그함수 $f(x)=\log_3 x$의 그래프 위의 두 점 $P_n(n,\ \log_3 n)$, $P_{n+1}(n+1,\ \log_3(n+1))$을 지나는 직선 P_nP_{n+1}의 기울기를 $g(n)$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{80} g(k)$의 값은?[3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

109 [공통]등식 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)+c=\sum_{k=2}^{11}(k^2+k)$가 성립할 때, 상수 c의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

110 [공통]$\log_x(8-x-y)$가 정의되기 위한 자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 11월 학력평가]

111 [공통]자연수 n에 대하여 집합 $A_n=\{(x,\ y)|y>2x,\ y\le x+n,\ x,\ y$는 자연수 $\}$의 원소의 개수를 a_n이라고 할 때, a_{10}의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

112 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_n+a_{n+1}=n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{21} a_k$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 4월 학력평가]

113 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

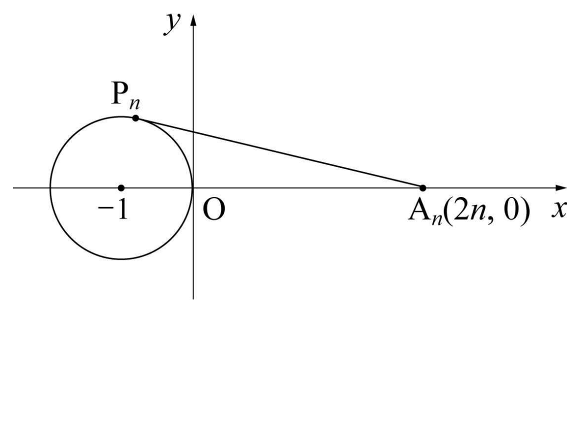
ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{n(n+1)}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k} l\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

114 x축 위의 점 $A_n(2n,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+y^2=1$에 접선을 그을 때, 접점의 좌표를 P_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\left(\overline{A_nP_n}\right)^2}=\frac{p}{q}$ ($p,\ q$는 서로소인 자연수)일 때, $p+q$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆]

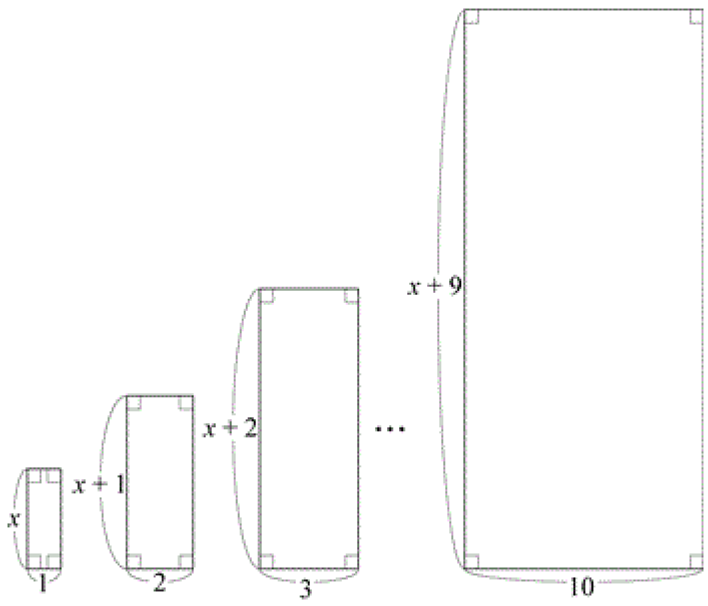
115 $\sum_{k=1}^{6}(k^2+2)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

116 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2$일 때, $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{n}{m}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.(단, m, n은 서로소이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

117 그림과 같이 [그림 1], [그림 2], [그림 3], ..., [그림 10]의 직사각형의 넓이를 각각 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$이라 하자. $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=880$일 때, x의 값을 구하시오.[4점]



[그림1] [그림2] [그림3] [그림10]

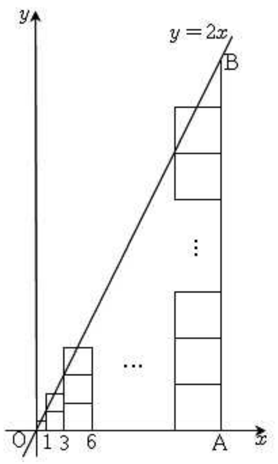
[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

118 2007^n을 5로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{4n}}{3^n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

119 그림은 직선 $y=2x$와 한 변의 길이가 1인 정사각형 1개, 한 변의 길이가 2인 정사각형 2개, ..., 한 변의 길이가 n인 정사각형 n개를 나타낸 것이다.

원점으로부터의 거리가 $1+2+3+\cdots+n$인 x축 위의 점 A를 지나고 y축에 평행인 직선이 $y=2x$와 만나는 점을 B라 하자.



다음은 이를 이용하여 어떤 수열의 합을 구하는 과정이다.

모든 정사각형들의 넓이의 합은 직각삼각형 OAB의 넓이와 같으므로, [가] $=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AB}$이다. $\overline{OA}=1+2+3+\cdots+n$이고 $\overline{AB}=$ [나]이다. 따라서, [가] = [다]이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, n^2, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

② $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$, $n(n+1)$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$, $n(n+1)$, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

④ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$, $n(n+1)$, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

⑤ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$, n^2, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

120 $\sum_{k=1}^{10} a_k=8$, $\sum_{k=1}^{10} b_k=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k+3)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

121 다음 규칙을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

Ⅰ. $a_1=2$ Ⅱ. a_{n+1}은 $3a_n$을 5로 나눈 나머지이다.

이 수열에서 $a_{13}+a_{40}$의 값은?[3점]

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2006년 11월 학력평가]

122 $\sum_{k=1}^{10}(2k+5)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

123 $\log_{10}1.23=\alpha$일 때, $\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}\log_{10}(123\times10^{k-1})$의 값은?[3점]

① $2+\alpha$ ② $3-\alpha$ ③ $4+\alpha$
④ $5-\alpha$ ⑤ $6+\alpha$

[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

124 정수 a, b에 대하여 $2^a \times 3^b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$가 성립할 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

125 $\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2 - 2\sum_{k=1}^{10}(k+2) + \sum_{k=1}^{10}3$의 값은?[2 점]

① 365 ② 370 ③ 375
④ 380 ⑤ 385

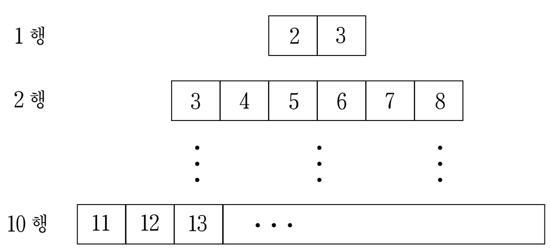
[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

126 [공통]첫째항이 400, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{59}}+\sqrt{a_{61}}}$의 값은?[3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

127 그림과 같이 자연수 k에 대하여 $[\log_{k+1}x] = 1$을 만족시키는 자연수 x를 k행에 차례로 배열할 때, k행에 배열된 자연수의 개수를 a_k라 하자. $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오.(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

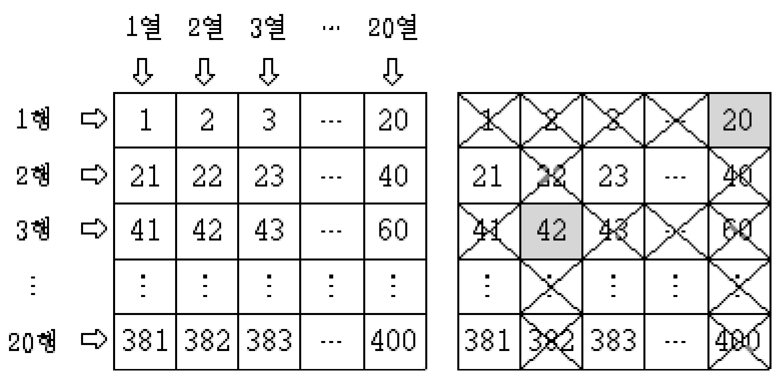
128 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = (n^n$의 일의 자리의 수 $)$로 정의할 때, 옳은 내용을 에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_3 = 7$
ㄴ. $\sum_{k=1}^{5} a_{2k} = 22$
ㄷ. $a_{13} = a_{23}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

129 [공통][그림 1]은 가로와 세로가 각각 20개의 칸으로 되어 있는 정사각형에 1부터 400까지의 자연수를 차례로 써 넣은 것이다.



[그림 1]

[그림 2]

[그림 1]에서 각각의 행과 열에 대하여 중복되거나 빠지지 않게 각 행마다 한 개씩 수를 선택하고자 한다. 예를 들어 1행의 20과 3행의 42가 이미 선택되었다면, 다른 행의 수를 선택할 때에는[그림 2]와 같이 20과 42가 포함된 행과 열의 어떤 수도 선택할 수 없다. 이와 같이 20개의 수들을 선택할 때, 선택되어진 수들의 합은?[4점]

① 2090 ② 3030 ③ 3070
④ 4010 ⑤ 4050

[난이도 : ★☆☆] [2005년 5월 학력평가]

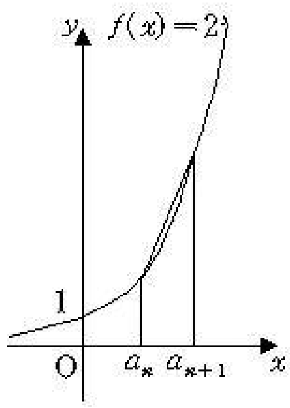
130 [공통] $n \neq n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$ 일 때,

$\sum_{n=1}^{100}(n!+n)$ 의 일의 자리수는?[4점]

① 0　　② 3　　③ 6
④ 8　　⑤ 9

[난이도 : ★☆☆] [2005년 5월 학력평가]

131 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2n-1$로 주어지고, 함수 $f(x)=2^x$에 대하여 네 점 $(a_n,\,0)$, $(a_{n+1},\,0)$, $(a_n,\,f(a_n))$, $(a_{n+1},\,f(a_{n+1}))$을 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이를 S_n이라 할 때, $S_n \geq 320$을 만족시키는 n의 최솟값은?[4점]



① 4　　② 5　　③ 6
④ 7　　⑤ 8

[난이도 : ★☆☆] [2005년 10월 학력평가]

132 $\sum_{k=1}^{10}(k^2+k+1)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-k-1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

133 [공통]임의의 양수 x에 대하여

$<2x>-<x>=<x-\frac{1}{2}>$ 가 항상 성립한다. 이 성질을 이용하여

$\left(<50>-<\frac{50}{2}>\right)+\left(<\frac{50}{2}>-<\frac{50}{2^2}>\right)+\cdots+\left(<\frac{50}{2^{n-1}}>-<\frac{50}{2^n}\right.$

을 $\sum$를 사용하여 나타내면 $\sum_{k=1}^{n}<\frac{p}{2^k}+q>$ 이다. 이때, pq의 값은?(단, $<x>$ 는 x보다 작지 않은 최소의 정수)[4점]

① -40　　② -35　　③ -30
④ -25　　⑤ -20

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

134 $\sum_{k=2}^{10}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

135 정수 $x,\,y$에 대하여 $|x|+|y|\leq n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$을 만족하는 점 $(x,\,y)$의 개수를 a_n이라 할 때, $a_{100}-a_{99}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

136 [공통] $\sum_{k=1}^{5}(2^k+5k+1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

137 두 함수 $y=\dfrac{1-x}{x}$ 와 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프가 직선 $y=k$ (k는 자연수)의 그래프와 만나는 점의 x좌표를 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} f(k)g(k)=\dfrac{b}{a}$ 이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로소)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

138 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n^3-n$을 만족할 때, a_{10}의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 학력평가]

139 $\sum_{k=1}^{10} a_k=20$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2)$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 11월 학력평가]

140 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=2^n-10$, $b_n=2n-6$일 때, $\sum_{i=1}^{6}\left(\sum_{j=1}^{6} a_i b_j\right)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

141 [공통]모든 자연수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$위의 두 점 $P(k, f(k))$, $Q(k+1, f(k+1))$를 지나는 직선의 기울기가 $2k$일 때, $\sum_{k=1}^{10} f(k)$의 값을 구하시오.(단, $f(1)=1$)[4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

142 다음은 연속하는 $2n+1$개의 자연수 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n+1}$에 대하여

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n+1}^2=a_{n+2}^2+a_{n+3}^2+a_{n+4}^2+\cdots+a_{2n+1}^2$이

성립할 때, a_{n+1}을 구하는 과정이다. [ ]안에 알맞은 것은?(단, n은 자연수)[3점]

> $a_{n+1}=x$로 놓으면 x는 연속하는 $2n+1$개의 자연수 중에서 가운데 수이므로
>
> $x^2+\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$
>
> $x^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2-\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2$
>
> 이 식을 정리하면
>
> $x^2=[\ \ ]x$
>
> 그런데 $x\neq 0$이므로 $x=[\ \ ]$
>
> 따라서 $a_{n+1}=[\ \ ]$

① $\dfrac{n(n-1)}{2}$ ② $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ③ $n(n+3)$

④ $2n(n-1)$ ⑤ $2n(n+1)$

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

143 자연수 n에 대하여 4^n을 10으로 나눈 나머지를 a_n이라 하자. 이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$의 합은?[4점]

① $\frac{23}{90}$ ② $\frac{47}{90}$ ③ $\frac{23}{99}$
④ $\frac{46}{99}$ ⑤ $\frac{91}{99}$

[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

144 [공통]3으로도 5로도 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하자. 예를 들면, $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4$이다. 이때, a_{100}의 값은?[4점]

① 172 ② 187 ③ 195
④ 202 ⑤ 210

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

145 [공통]서로 다른 자연수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$에 대하여 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=2340$을 만족시키는 n의 최댓값을 찾는 과정이다.

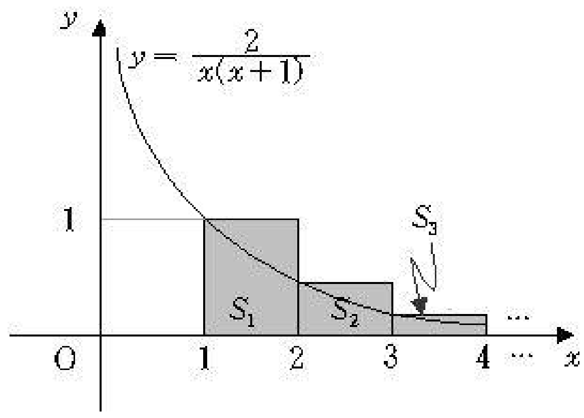
$\sum_{k=1}^{m}k^2>2340$을 만족시키는 자연수의 m의 최솟값은 [(가)]이다. 따라서, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=2340$을 만족시키는 n의 최댓값은 [(가)]-1보다 작거나 같다. 한편, $\sum_{k=1}^{20}k^2-(19^2+[(나)])=2340$이므로 n의 최댓값은 [(다)]이다.

위 과정에서 (가), (다)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① 19, 17 ② 19, 18 ③ 20, 18
④ 20, 19 ⑤ 20, 20

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

146 그림과 같이 x좌표가 각각 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$인 x축 위의 점에서 y축에 평행한 직선을 그어 곡선 $y=\frac{2}{x(x+1)}$과 만나는 점까지를 세로로 하는 직사각형을 한없이 만든다. 이때 만들어지는 직사각형의 넓이를 $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots$라 할 때, $\sum_{n=1}^{100}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{200}{99}$ ② $\frac{200}{100}$ ③ $\frac{200}{101}$
④ $\frac{201}{101}$ ⑤ $\frac{201}{103}$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

147 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)+\sum_{k=2}^{n}(-k^2+4k-1)=82$를 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

148 다음은 네 자연수 1, 2, 3, 4를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기 순으로 나열한 것이다.

1234	1243	⋯	1423	1432
2134	2143	⋯	2413	2431
3124	3142	⋯	3412	3421
4123	4132	⋯	4312	4321

위의 모든 수들의 총합은?[3점]

① 88880 ② 77770 ③ 66660
④ 55550 ⑤ 44440

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

149 함수 $f(x)=x+\log_{10}x$에 대하여 $\sum_{n=1}^{100}[f(n)]$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점]

① 5055 ② 5060 ③ 5084
④ 5128 ⑤ 5142

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

150 $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2$의 값은?[2점]

① 645 ② 630 ③ 615
④ 600 ⑤ 585

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

151 $\sum_{k=1}^{30}\{(-1)^k k^2\}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

152 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{5}(k+\alpha^2)(k+\beta^2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

153 수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$일 때, a_{15}를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

154 [공통] $\sum_{k=1}^{10}(k+5)(k-2)-\sum_{k=1}^{10}(k-5)(k+2)$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

155 아래 표는 어느 달 국내 원유 수입량의 70%를 차지하는 두바이(Dubai)유의 1배럴당 국제 가격을 일주일 간격으로 나타낸 것이다.

이 표에 있는 두바이유의 가격 a_n은 다음 관계식을 만족한다.

$a_n = 34.4 + .3 \times b_n$ (단, n은 자연수) 이러한 추세로 가격이 결정될 때, $\sum_{k=1}^{8} b_k$의 값을 구하시오.[4점]

(가격단위 : 달러)

n째주	두바이유 가격 a_n
1	34.7
2	35.0
3	35.6
4	36.8
5	39.2
⋮	⋮

[난이도 : ★★★] [2004년 11월 학력평가]

156 $f(x) = \sqrt{4x + 2\sqrt{4x^2 - 1}}$, $(x \geq 1)$에 대하여

$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(59)} + \frac{1}{f(60)}$ 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 학력평가]

157 [공통]두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$a_1 = b_1$, $a_{10} + b_{10} = 30$, $a_{n+1} + a_n = b_{n+1} - b_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$의 값은?[4점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 10 ⑤ 15

정답 및 해설

2.수열의 합

중단원 기출문제

1) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 조건을 만족시키는 등차 수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$\frac{a_5+a_{13}}{2}=a_9$ 이므로 $a_9=0$ 에서

$a+8d=0$ …㉠

또, $\sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{18}{2}\times(a_1+a_{18})=9(2a+17d)$

이므로 $9(2a+17d)=\frac{9}{2}$ 에서

$2a+17d=\frac{1}{2}$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 $a=-4$, $d=\frac{1}{2}$ 이므로

$a_{13}=a+12d=-4+12\times\frac{1}{2}=2$

2) 답 : 14

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질을 이용할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)^2=28$ 에서

$\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+2a_k+1\}=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=28$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=18$ …㉠

또, $\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+1)=16$ 에서 $\sum_{k=1}^{10}\{(a_k)^2+a_k\}=16$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+\sum_{k=1}^{10}a_k=16$

이 식의 양변에 2를 곱하면

$2\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2+2\sum_{k=1}^{10}a_k=32$ …㉡

㉡에서 ㉠을 변끼리 빼면 $\sum_{k=1}^{10}(a_k)^2=14$

3) 답 : 150

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 정의를 이해하고 거듭제곱의 합과 시그마의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

$f(x)=\frac{1}{2}x+2$ 이므로

[구하는 값] $=\sum_{k=1}^{15}f(2k)=\sum_{k=1}^{15}(k+2)$

$=\sum_{k=1}^{15}k+\sum_{k=1}^{15}2$

$=\frac{15\times16}{2}+(2\times15)$

$=120+30$

$=150$

4) 답 : ④

[해설]

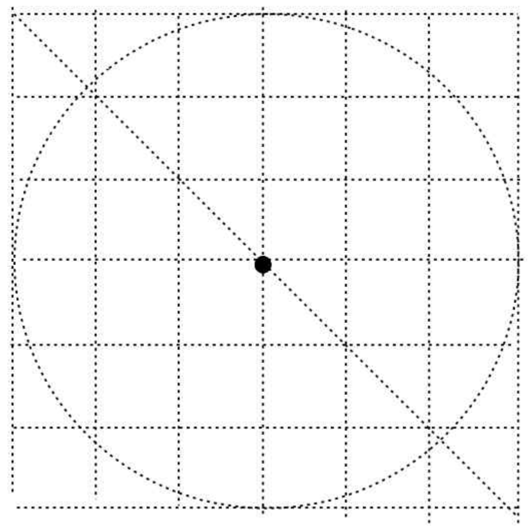
[출제 의도]: 조건을 만족시키는 점의 개수의 합을 구할 수 있는가?

각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $n\le7$일 때,

대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로

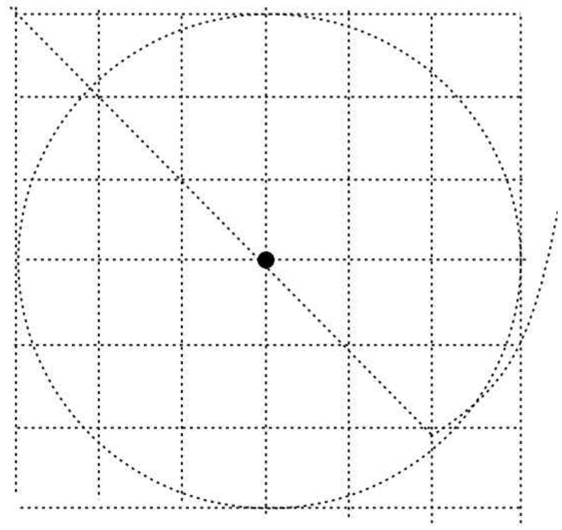
$A_n-B_n=0$



(ii) $n=8$일 때,

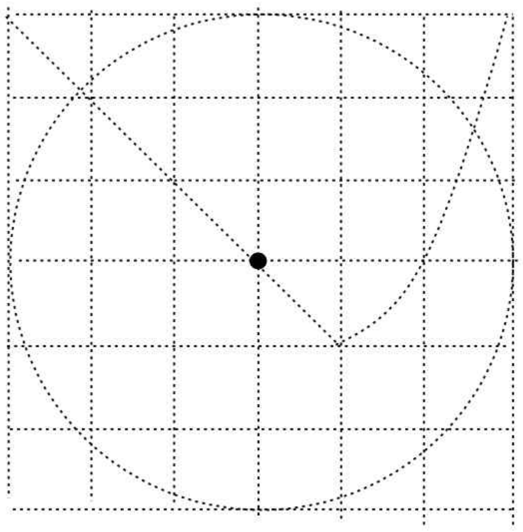
아래 그림에서 대칭성을 이용하여 조사하면

$A_8-B_8=0$



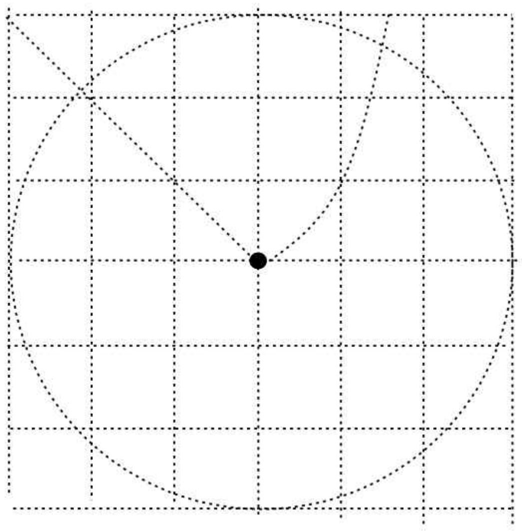
(iii) $n=9$일 때,

아래 그림에서 $A_9-B_9=12-8=4$



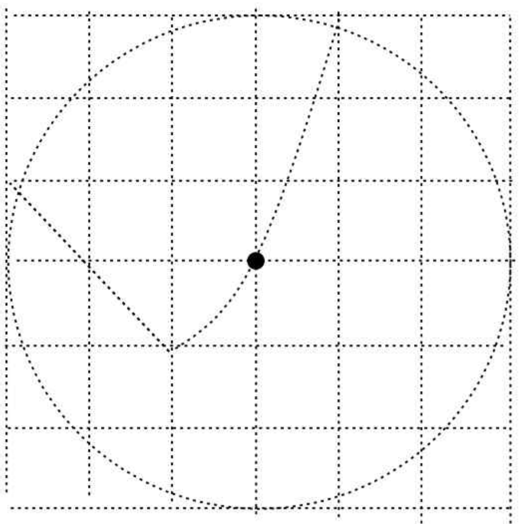
(iv) $n=10$일 때,

아래 그림에서 $A_{10}-B_{10}=17-4=13$



(v) $n=11$일 때,

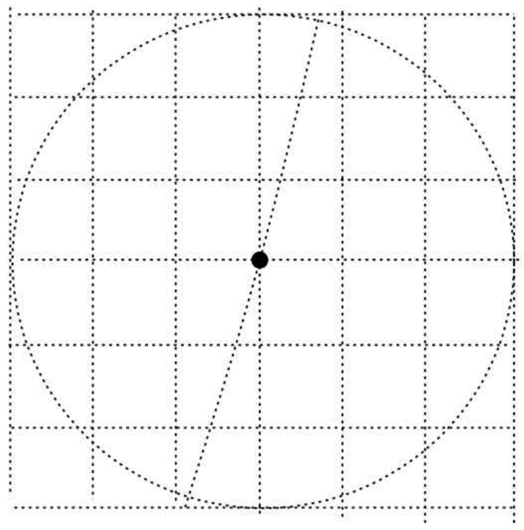
아래 그림에서 $A_{11}-B_{11}=15-7=8$



(vi) $12 \le n \le 20$일 때,

대칭성을 이용하여 조사하면 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 아랫부분에 있는 점의 개수와 원 O_n의 내부에 있고 곡선 $y=f(x)$의 윗부분에 있는 점의 개수가 같으므로

$A_n-B_n=0$



따라서, 구하는 값은

$\sum_{n=1}^{20}(A_n-B_n)=4+13+8=25$

5) 답 : ②

[해설]

$S_n=\dfrac{n}{n+1}$ 이므로

수열의 합과 일반항의 관계에 의해

$\therefore\ a_4=S_4-S_3=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{20}$

6) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 일반항을 구한 후 합을 구할 수 있는가?

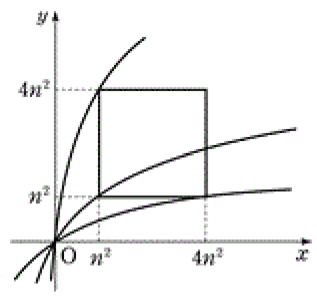
자연수 n에 대하여 6^n은 짝수, 3^n은 홀수이므로

$$\begin{aligned} a_n &= f(6^n)-f(3^n) \\ &= \log_2 6^n - \log_3 3^n \\ &= n \cdot \log_2 6 - n \\ &= n \cdot (1+\log_2 3)-n \\ &= n \cdot \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{구하는 값}] &= \sum_{n=1}^{15} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{15} n \cdot \log_2 3 \\ &= \log_2 3 \times \frac{15 \cdot 16}{2} \\ &= 120\log_2 3 \end{aligned}$$

7) 답 : ④

[해설]



$y=k\sqrt{x}$ 가 $(4n^2, n^2)$을 지나면

$n^2=k\cdot\sqrt{4n^2}$ 에서 $k=\frac{1}{2}n$

$y=k\sqrt{x}$ 가 $(n^2, 4n^2)$을 지나면

$4n^2=k\cdot\sqrt{n^2}$ 에서

∴ $y=k\sqrt{x}$ 가 주어진 정사각형과 만날려면

$\frac{1}{2}n\le k\le 4n$ 이어야 한다.

ㄱ. $n=5$일 때 $\frac{5}{2}\le k\le 20$이므로 $a_5=20-2=18$

ㄴ. n이 홀수일 때

$$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}(n+1)-1\right)=\frac{7}{2}n+\frac{1}{2}$$

$$a_{n+2}=4(n+2)-\left(\frac{1}{2}(n+3)-1\right)=\frac{7}{2}n+\frac{15}{2}$$

n이 짝수일 때

$$a_n=4n-\left(\frac{1}{2}n\right)+1=\frac{7}{2}n+1$$

$$a_{n+2}=4(n+2)-\left(\frac{1}{2}(n+2)\right)+1=\frac{7}{2}n+8$$

∴ $a_{n+2}-a_n=7$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{2}(2k-1)+\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{7}{2}(2k)+1\right)$$

$=200$

8) 답 : ①

[해설]

$\sqrt{17}-4=\frac{1}{8+a_1}$ 이므로

$a_1=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)}-8=\sqrt{17}-4$ 이다.

또한, 조건

$$\frac{1}{8+a_1}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_2}}=\frac{1}{8+\frac{1}{8+\frac{1}{8+a_3}}}=\cdots$$ 로부터

$$a_1=\frac{1}{8+a_2},\ a_2=\frac{1}{8+a_3},\ \cdots$$

∴ $a_2=\frac{1}{a_1}-8,\ a_3=\frac{1}{a_2}-8,\ \cdots$

위 두 결과를 이용하여 $a_2, a_3, \cdots$의 값을 차례로 구하면

$$a_2=\frac{1}{a_1}-8=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\sqrt{17}-4$$

$$a_3=\frac{1}{a_2}-8=\frac{1}{\sqrt{17}-4}-8=\sqrt{17}-4$$

$\cdots$

∴ $a_{2002}=a_{2001}=\cdots=a_3=a_2=\sqrt{17}-4$

9) 답 : 47

[해설]

$\sum_{k=1}^{9}f(k+1)=\sum_{k=2}^{10}f(k)$

$\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=\sum_{k=1}^{9}f(k)$

따라서, $\sum_{k=1}^{9}f(k+1)=f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=f(1)+f(2)+\cdots+f(9)$

∴ $\sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=f(10)-f(1)$

$=50-3$

$=47$

10) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 시그마의 성질을 이용하여 값 구하기

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{10}a_k^2=7, & \cdots ①\\ \sum_{k=1}^{10}a_k=3, & \cdots ②\end{cases}$$ 이므로

① 과 ②를 이용하여

[구하는 값] $=\sum_{k=1}^{10}\left(2a_k^2-a_k\right)$

$=2\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k$

$=14-3=11$

11) 답 : 19

[해설]

풀이

$\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}a=2\times\frac{10\times 11}{2}+10a$

$=110+10a=300$

∴ $a=19$

12) 답 : ③

[해설]

[해설]

$\sum_{k=1}^{11}(5a_k+b_k)=5\sum_{k=1}^{11}a_k+\sum_{k=1}^{11}b_k$

$=5\times 4+24$

$=44$

13) 답 : ⑤

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= 4\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=4\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{4n}{n+1}$$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)}=\frac{15}{4}$ 에서 $\frac{4n}{n+1}=\frac{15}{4}$

$\therefore\ n=15$

14) 답 : ④

[해설]

[여러 가지 수열]

$a_1=0$ 이고

$a_n=\{n^2-n\}-\{(n-1)^2-(n-1)\}=2n-2\ \ (n\geq 2)$

$\therefore\ a_n=2n-2$ (단, $n\geq 1$)

$$\sum_{k=1}^{10}ka_{4k+1}=\sum_{k=1}^{10}8k^2=8\cdot 10\cdot 11\cdot\frac{21}{6}=3080$$

15) 답 : ④

[해설]

[여러 가지 수열]

$$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^{9}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=15+(2\times 9+1)=34$$

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$ 이므로

$a_{n+1}=2n+16$ (단, $n\geq 1$)

$\therefore\ a_{10}=34$

[MIM EDU 다른 풀이]

문제에서 주어진 등식 $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n+1\ \ (n\geq 1)$ 는

일반항이 $a_{n+1}-a_n$ 인 수열의 제 1 항부터 제 n 항 까지 합이다.

따라서 교과서 공식인 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}$ 을 이용해 풀면

$\begin{cases}a_{n+1}-a_n=2,\ (n\geq 2)\\ a_2-a_1=3,\ (n=1)\end{cases}$ 이며 등차수열이며 공차가 2 이다.

$a_n=\begin{cases}a_2+(n-2)\cdot 2=2n+14,\ (n\geq 2)\\ a_1=15,\ (n=1)\end{cases}$ 으로 표시해야 된다.

16) 답 : 34

[해설]

주어진 식을 정리해보면

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$ 이므로 $a_n=2(n-1)+1+a_1\ \ (n\geq 2)$

이다. 따라서 $a_n=2n+14\ \ (n\geq 2)$ 이고 $a_{10}=34$ 이다.

17) 답 : ①

[해설]

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_{k+1}}{S_kS_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}=\frac{1}{3}$$

$a_1=S_1=2$ 이므로 $\therefore\ S_{11}=6$

18) 답 : ②

[해설]

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2-2k-1)=385-110-10=265$$

19) 답 : 513

[해설]

주어진 부등식에서 자연수 k의 범위는

$na_n<k<(n+2)a_n$ 이므로 k의 개수 a_{n+1}은

$a_{n+1}=(n+2)a_n-na_n-1=2a_n-1$

$\therefore\ a_n=2^{n-1}+1$

$\therefore\ a_{10}=2^9+1=513$

20) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 수열의 합과 일반항의 관계를 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

$-a_1=1$ 이므로 $a_1=-1$ 이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k$ 라 하면

$$(-1)^na_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^ka_k$$
$$=n^3-(n-1)^3$$
$$=3n^2-3n+1\ \ (n\geq 2)$$

따라서

$a_{2n}=12n^2-6n+1$

$a_{2n-1}=-12n^2+18n-7$ 이므로

$a_{2n-1}+a_{2n}=12n-6$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-6}{n}=12$$

21) 답 : 86

[해설]

주어진 조건에서 $\frac{\log_n a}{a-2}\leq\frac{1}{2}$,

$\log_n a\leq\frac{1}{2}(a-2)\ \ (a\geq 3)$

$(1,0)$ 을 지나는 로그함수와 기울기 $\frac{1}{2}$ 이고 $(2,0)$ 을 지나는 직선의 위치관계를 만족하는 가장 작은 자연수 a를 $f(n)$이라 정의하고 있으

므로 (그래프 생략)

$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=4$

$f(9)=f(10)=\cdots=f(30)=3$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}4, & (4\le n\le 8)\\ 3, & (n\ge 9)\end{cases}$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=4}^{30} f(n)=4\times 5+3\times 22=86$

22) 답 : 29

[해설]

$$[\text{구하는 값}] = \sum_{k=1}^{14}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)$$
$$=1-\frac{1}{15}$$
$$=\frac{14}{15}$$

23) 답 : ①

[해설]

준 식을 S_n 이라 하면

$S_n-S_{n-1}=3^n-1-(3^{n-1}-1)$

$7^n a_n=2\cdot 3^{n-1}$ $\therefore$ $a_n=\dfrac{2\cdot 3^{n-1}}{7^n}$ $(n\ge 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^{n-1}}{7^n\cdot 3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{7^n}=\frac{\frac{2}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

24) 답 : ①

[해설]

$a_n=\dfrac{\log\{n+1\}}{n}=\log(n+1)-\log n$

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=\{(\log 2-\log 1)+(\log 3-\log 2)+\cdots+(\log(n+1)-\log n\}$

$=\log(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^{\log(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

25) 답 : ②

[해설]

$a_1=S_1=1^2+2^1=3$

$a_5=S_5-S_4=(5^2+2^5)-(4^2+2^4)=9+16=25$

$\therefore$ $a_1+a_5=28$

26) 답 : 31

[해설]

$a_m=3$이므로 $\dfrac{m}{3^3}=a$, $\therefore$ $m=3^3\cdot a$

(단, a는 3과 서로소인 자연수)

따라서 $a_m=a_{2m}=a_{4m}=a_{5m}=a_{7m}=a_{8m}=3$이고

$a_{3m}=a_{6m}=4$, $a_{9m}=5$이다.

$\therefore$ $a_m+a_{2m}+\cdots+a_{9m}=(3\times 6)+(4\times 2)+5=31$

27) 답 : 5

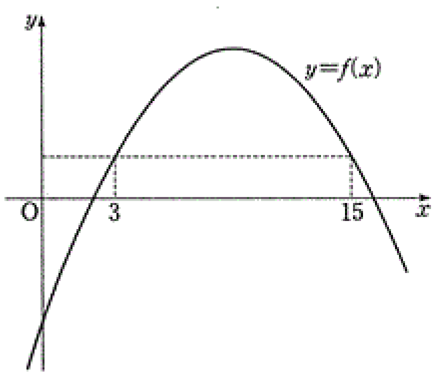
[해설]

$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_{15}$

$f(15)-f(m-1)<0$

$\therefore$ $f(15)<f(m-1)$

그림에서 $4\le m-1\le 14$



$5\le m\le 15$이므로

m의 최솟값은 5

28) 답 : ①

[해설]

$n(n+1)$은 연속한 두 자연수의 곱이므로 항상 짝수이다.

그러므로 $n(n+1)$은 $4k$또는 $4k+2$의 꼴의 수이다.

따라서 $n=4k-3,\ 4k-2,\ 4k-1,\ 4k$의 네가지이다.

(i) $n=4k-3$꼴 일 때

$a_n=-1$

(ii) $n=4k-2$꼴 일 때

$a_n=-1$

(iii) $n=4k-1$꼴 일 때

$a_n=1$

(iv) $n=4k$꼴 일 때

$a_n=1$

$\therefore$ $\{a_n\}: -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ \cdots$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2010} na_n=\{(-1)+(-2)+3+4\}+\{(-5)+(-6)+7+8\}+\cdots$

$+\{(-2005)+(-2006)+2007+2008\}+$

$(-2009)+(-2010)$

$=\{4+4+\cdots+4\}:\{4$가 502개$\}$

$=-2011$

29) 답 : ④

[해설]

x좌표의 차가 k인 변 AB를 택하는 경우의 수는 점 A의

x좌표가 $x=0$부터 $x=(n-k+1)$까지 가능하므로

$(n-k+1)+1=n-k+2$ ◀㈎

마찬가지로, 점 A의 y좌표는 $y=0$부터 $y=(n-k)$까지 가능하므로

$(n-k)+1=n-k+1$ ◀㈏

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\{(n+1)(n+2)-(2n+3)k+k^2\}$$

$$=n(n+1)(n+2)-(2n+3)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+4)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$ ◀㈐

30) 답 : ⑤

[해설]

$a_1+a_2=1+2$

$a_3+a_4=1+2+3+4$

$a_4+a_6=1+2+3+4+5+6$

$a_7+a_8=1+2+3+4+5+6+7+8$

$a_9+a_{10}=a_{11}+a_{12}=a_{13}+a_{14}$

$1+2+\cdots+10=55$

$$\sum_{n=1}^{14} a_n = 3+10+21+36+55+55+55=235$$

[다른 풀이]1번째줄, 2번째줄에 있는 전구는 14초가 될 때까지 모두 7번씩 켜지고 전구의 개수는 3개 이므로 3×7

3번째 줄, 4번째 줄에 있는 전구는 모두 7개가 있고 켜지는 횟수는 모두 6번씩이므로 7×6

이와 같은 방법으로

$$\sum_{n=1}^{14} a_n = 3\times7+7\times6+11\times5+15\times4+19\times3=235$$

31) 답 : 110

[해설]

$n-\frac{1}{2}\le\sqrt{k}<n+\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$n^2-n+\frac{1}{4}\le k<n^2+n+\frac{1}{4}$

k는 자연수이므로 $n^2-n+1\le k\le n^2+n$

$a_n=(n^2+n)-(n^2-n+1)+1=2n$

$$\sum_{n=1}^{10} a_i = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2\times\frac{10\times11}{2}=110$$

32) 답 : 94

[해설]

$S_n=n^2+n$

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge2)$이므로

$a_n=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n(n\ge2)$

$a_1=S_1=2$이므로 $a_n=2n(n=1,\ 2,\ \cdots)$

$\therefore\ a_{47}=94$

33) 답 : 420

[해설]

수열[정답]20

구하는 값 $=\sum_{k=1}^{10}(k-1)(k+2)$

$$=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-2)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2$$

$$=10\cdot11\cdot\frac{21}{6}+10\cdot\frac{11}{2}-20$$

$$=420$$

34) 답 : 15

[해설]

$$\sum_{n=1}^{10}\log a_n=\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{5}\log a_{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{5}\log2^n+\sum_{n=1}^{5}\log5^n$$

$$=\log2\sum_{n=1}^{5}n+\log5\sum_{n=1}^{5}n$$

$$=(\log2+\log5)\sum_{n=1}^{5}n$$

$$=1\times\frac{5\times6}{2}=15$$

35) 답 : 420

[해설]

[출제 의도]수열

$$\sum_{k=1}^{10}(k-1)(k+2)=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k-2)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}2$$

$$=10\cdot11\cdot\frac{21}{6}+10\cdot\frac{11}{2}-20$$

$$=420$$

36) 답 : 332

[해설]

[출제 의도]수열

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$을 근의 공식으로 풀면

$$\omega=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

이때, $f(n)$은 ω^n의 실수 부분이고,

$\omega^3=-1,\ \omega^2=\omega-1$

이므로 $f(n)$을 차례로 구하면

$\omega=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(1)=\frac{1}{2}$

$\omega^2=\omega-1$이므로 $f(2)=-\frac{1}{2}$

$\omega^3=-1$이므로 $f(3)=-1$

$\omega^4=\omega^3\omega=-\omega$이므로 $f(4)=-f(1)=-\frac{1}{2}$

$\omega^5=\omega^3\omega^2=-\omega^2$이므로 $f(5)=-f(2)=\frac{1}{2}$

$\omega^6=(\omega^3)^2=1$이므로 $f(6)=-f(3)=1$

$\omega^7=(\omega^3)^2\omega=\omega$ 이므로 $f(7)=f(1)$
따라서, $f(n)$은 주기가 6인 함수이고,
$f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$

[구하는 값] $=\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}=\sum_{k=1}^{999}f(k)+\sum_{k=1}^{999}\frac{1}{3}$

$=166\left\{\sum_{k=1}^{6}f(k)\right\}+f(997)+f(998)+f(999)+999\cdot\frac{1}{3}$

$=16\cdot 0+f(1)+f(2)+f(3)+333$

$=0+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1\right)+333$

$=332$

37) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] $\sum$의 성질 이해하기

$\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)=\sum_{n=1}^{10}a_n-\sum_{n=1}^{10}1=20-1\times10=10$

38) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도] 수열의 합을 이해하여 등식을 만족시키는 실수의 값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}=a+\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}$

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=a+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

$1=a+\frac{1}{6}$

따라서 $a=\frac{5}{6}$

39) 답 : 200
[해설]
[출제 의도] 두 직선의 교점을 이용하여 등차수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.
점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\frac{7}{2}$ 이고 $a_7=5$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3d=a_7-a_4=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

$d=\frac{1}{2}$

$a_1=a_4-3d=\frac{7}{2}-3\times\frac{1}{2}=2$

$\sum_{k=1}^{25}a_k$의 값은 첫째항이 2이고 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열의 첫째항부터 제25항까지의 합과 같으므로

$\sum_{k=1}^{25}a_k=\frac{25\left\{2\times2+(25-1)\times\frac{1}{2}\right\}}{2}=\frac{25\times16}{2}=200$

[다른 풀이 1]
점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 일차함수의 그래프와 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하면 a_n을 n에 관한 일차식으로 나타낼 수 있으므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_4=\frac{7}{2}$ 이고 $a_7=5$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$3d=a_7-a_4=5-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$

$d=\frac{1}{2}$

$a_{13}=a_7+6d=5+3=8$ 이므로

$\sum_{k=1}^{25}a_k=(a_1+a_{25})+(a_2+a_{24})+\cdots+(a_{12}+a_{14})+a_{13}$

$=2a_{13}+2a_{13}+\cdots+2a_{13}+a_{13}=12\times2a_{13}+a_{13}=25a_{13}=25\times8$

$=200$

[다른 풀이 2]

$a_4=\frac{7}{2}$ 이고 $a_7=5$ 이므로

직선 l은 두 점 $\left(4,\ \frac{7}{2}\right)$, $(7,\ 5)$를 지난다.

직선 l의 기울기는 $\frac{5-\frac{7}{2}}{7-4}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$ 이므로

직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{2}(x-4)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

점 $(n,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표가 a_n이므로 $a_n=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}$

$\sum_{k=1}^{25}a_k=\sum_{k=1}^{25}\left(\frac{1}{2}k+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{25\times26}{2}+\frac{3}{2}\times25$

$=\frac{25\times13+3\times25}{2}=\frac{25\times16}{2}=25\times8=200$

40) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도] 수열의 합을 이용하여 수열의 극한을 구하는 과정을 증명한다.

$P_n\ (2n,\ 0)$, $Q_n\ (0,\ 4n^2)$ 이므로
직선 P_nQ_n의 기울기는

$\frac{0-4n^2}{2n-0}=-4\frac{n^2}{2n}=-2n$ 이고

y절편은 $4n^2$ 이므로
직선 P_nQ_n의 방정식은 $y=-2n\times x+4n^2$
x좌표가 k(k는 $2n-1$ 이하의 자연수)일 때 영역에 속하는 점의 y좌표는 $(k-2n)^2$부터 $-2n\times k+4n^2$까지이므로 그 개수는
$-2n\times k+4n^2-(k-2n)^2+1=-k^2+1+2nk$

$a_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-k^2+1+2nk)$

$=-\frac{(2n-1)\times2n\times(4n-1)}{6}+(2n-1)$

$+2n\times\frac{(2n-1)\times2n}{2}$

$=-\dfrac{n(2n-1)(4n-1)}{3}+(2n-1)+2n^2(2n-1)$

$=(2n-1)\left\{2n^2-\dfrac{n(4n-1)}{3}+1\right\}=(2n-1)\left(\dfrac{2}{3}n^2+\dfrac{n}{3}+1\right)$

그러므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)\left(\dfrac{2}{3}n^2+\dfrac{n}{3}+1\right)}{n^3}=\dfrac{4}{3}$

$f(n)=-2n$, $g(k)=-k^2+1$, $p=\dfrac{4}{3}$ 이고

$f(3)=-6$, $g(4)=-15$

따라서

$p\times f(3)\times g(4)=\dfrac{4}{3}\times(-6)\times(-15)=120$

41) 답 : 320

[해설]

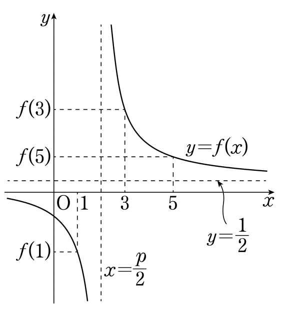
[출제 의도] 유리함수의 그래프와 수열의 합을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-p}=\dfrac{\dfrac{1}{2}(2x-p)+\dfrac{p}{2}+2n}{2x-p}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\dfrac{p}{2}+2n}{2x-p}$

이고 $\dfrac{p}{2}+2n>0$ 이므로

$f(1)<f(5)<f(3)$ …… ㉠

이 성립하려면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1<\dfrac{p}{2}<3$ 이어야 하므로 $2<p<6$ 에서 자연수 p의 최솟값 m은 3

함수 $g(x)=\dfrac{2x+n}{x+q}=\dfrac{2(x+q)+n-2q}{x+q}=2+\dfrac{n-2q}{x+q}$

이므로 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 방정식은

$x=-q$, $y=2$

$p=3$ 일 때 $f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-3}$ 에 대하여

$x_1=f(1)=-2n-1$

$x_2=f(5)=\dfrac{2n+5}{7}$

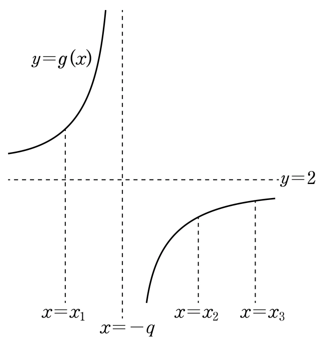
$x_3=f(3)=\dfrac{2n+3}{3}$

이라 하면 ㉠으로부터

$x_1<x_2<x_3$

이때 문제의 조건에서 $g(x_2)<g(x_3)<g(x_1)$ 이 성립해야 하므로

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1<-q<x_2$ 이고 $n-2q<0$ 이어야 한다.

즉 $-2n-1<-q<\dfrac{2n+5}{7}$ 이고 $q>\dfrac{n}{2}$ 이어야 하므로

$\dfrac{n}{2}<q<2n+1$

(i) $n=2l-1$ (l은 자연수)일 때 $\dfrac{2l-1}{2}<q<2(2l-1)+1$ 에서

$l-\dfrac{1}{2}<q<4l-1$ 이므로 $q=l$, $l+1$, $\cdots$, $4l-2$ 그러므로 정수 q의 개수는 $3l-1$

(ii) $n=2l$ (l은 자연수)일 때 $\dfrac{2l}{2}<q<2\times 2l+1$ 에서 $l<q<4l+1$

이므로 $q=l+1$, $l+2$, $\cdots$, $4l$ 그러므로 정수 q의 개수는 $3l$

(i), (ii)에 의하여 $a_{2l-1}=3l-1$, $a_{2l}=3l$ 따라서

$\sum\limits_{k=1}^{20}a_k=\sum\limits_{l=1}^{10}(a_{2l-1}+a_{2l})=\sum\limits_{l=1}^{10}(3l-1+3l)=\sum\limits_{l=1}^{10}(6l-1)$

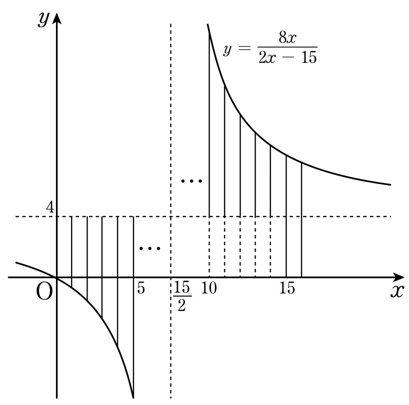
$=6\sum\limits_{l=1}^{10}l-\sum\limits_{l=1}^{10}1=6\times\dfrac{10\times 11}{2}-10=330-10=320$

42) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 유리함수의 그래프를 활용하여 주어진 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

곡선 $f(x)=4+\dfrac{60}{2x-15}$ 의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\dfrac{15}{2}, 4\right)$에 대해 대칭이므로

$f(7)+f(8)=8$, $f(6)+f(9)=8$,

$f(5)+f(10)=8$, $f(4)+f(11)=8$,

$f(3)+f(12)=8$, $f(2)+f(13)=8$,

$f(1)+f(14)=8$

에서 $\sum\limits_{n=1}^{14}a_n=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(14)=56$

또, $a_{15}=f(15)=8$

$a_{16}=f(16)=4+\dfrac{60}{2\times 16-15}=7+\dfrac{9}{17}<8$

$a_{17}=f(17)>4$ 이므로 $\sum_{n=1}^{16} a_n<73<\sum_{n=1}^{17} a_n$ 이다.

따라서 m의 최댓값은 16이다.

43) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하여 수열의 합을 구한다.

이차방정식의 두 근의 합 a_n은 근과 계수의 관계에 의해 a_n

$=\frac{2n^2-n}{n}=2n-1$

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}2k-\sum_{k=1}^{10}1=2\sum_{k=1}^{10}k-10$

$=2\times\frac{10\times11}{2}-10=100$

44) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 시그마의 정의를 이해하여 일반항을 구한다.

$a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k=19-17=2$

따라서 $a_{10}=2$

45) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$S_n=-n^2+6n$

$a_6=S_6-S_5$

따라서 $a_6=-5$

46) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 절댓값의 성질을 활용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m\right|<\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-m<\frac{1}{2}$

$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+n+\frac{1}{4}$ 에서

$-\frac{3}{4}<n^2+n-m<\frac{1}{4}$

m, n은 정수이므로 $n^2+n-m=0$이다.

m은 n^2+n이다. 즉, $a_n=n^2+n$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(k^2+k)=\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}$

$=55+15=70$이다.

47) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 활용하여 추론하기

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n+2^n)-\{(n-1)+2^{n-1}\}$

$=2^{n-1}+1\ (n\geq2)$

따라서 $a_6=33$

48) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}=\sum_{k=2}^{m}\{2(k+1)-3\}$

$=\sum_{k=2}^{m}(2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)-(2\times1-1)$

$=2\times\frac{m(m+1)}{2}-m-1$

$=m^2-1=48$

따라서 $m=7$

49) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 직각이등변삼각형을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{5(2\times4+4\times4)}{2}=60$

50) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum_{k=2}^{m}a_{k+1}=\sum_{k=2}^{m}\{2(k+1)-3\}$

$=\sum_{k=2}^{m}(2k-1)$

$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)-(2\times1-1)$

$=2\times\frac{m(m+1)}{2}-m-1$

$=m^2-1=48$

따라서 $m=7$

51) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 규칙을 추론하여 수열의 합을 구한다.

$1\leq n\leq15$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

$16\leq n\leq30$을 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개

⋮

$15(k-1)+1\leq n\leq15k$를 만족시키는 자연수 n 중 15와 서로소인 자연수 8개 ($k=1, 2, 3, \cdots$)

a_{16}은 $16\leq n\leq30$을 만족시키는 15와 서로소인 자연수 n 중 가장 큰 수이다.

$\sum_{n=1}^{16}a_n$은 1부터 30까지 자연수 중 15와 서로소인 자연수들의 합이다.

1부터 30까지 자연수 중에는 10개의 3의 배수, 6개의 5의 배수, 2개의 15의 배수가 있다.

따라서 $\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{30} n - \sum_{n=1}^{10} 3n - \sum_{n=1}^{6} 5n + \sum_{n=1}^{2} 15n$

$=240$

[다른 풀이]

$a_1 = 1\ 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 11$, $a_7 = 13$, $a_8 = 14$이고

$k\,(k = 1, 2, 3, \cdots, 14)$가 15와 서로소이면 $15+k$도 15와 서로소이므로

$a_9 = a_1 + 15$, $a_{10} = a_2 + 15$, $\cdots$, $a_{16} = a_8 + 15$

$\sum_{n=1}^{8} a_n = 1+2+4+7+8+11+13+14 = 60$

$\sum_{n=1}^{16} a_n = \sum_{n=1}^{8} a_n + \sum_{n=9}^{16} a_n$

$= 2\sum_{n=1}^{8} a_n + 15 \times 8$

$= 2 \times 60 + 120$

$= 240$

52) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 수열의 정의를 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

$a_m = 1$이므로 $m = 2^1 \times q\,(q$는 홀수$)$

$2m = 2^2 \times q$이므로 $a_{2m} = 2$

$\vdots$

따라서 $a_m + a_{2m} + a_{3m} + \cdots + a_{10m}$

$= 1+2+1+3+1+2+1+4+1+2 = 18$

53) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제 해결하기

점 $P_n(\sqrt{n}, n)$을 지나고 직선 $y = \sqrt{n}x$와 수직인 직선의 방정식은

$y = -\frac{1}{\sqrt{n}}(x - \sqrt{n}) + n$이므로

$Q_n((n+1)\sqrt{n}, 0)$, $R_n(0, n+1)$

$S_n = \frac{1}{2} \times (n+1)\sqrt{n} \times (n+1)$

[구하는 값] $= \sum_{n=1}^{5} \frac{2S_n}{\sqrt{n}}$

$= \sum_{n=1}^{5} \left\{ \frac{2}{\sqrt{n}} \times \frac{(n+1)^2\sqrt{n}}{2} \right\}$

$= \sum_{n=1}^{5} (n+1)^2$

$= \sum_{n=1}^{5} (n^2 + 2n + 1)$

$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 5 = 90$

54) 답 : 427

[해설]

[출제 의도] 주어진 함수의 그래프와 조건을 이해하여 수열의 합을 추측한다.

닫힌 구간 $[0, 2]$에서 함수 $g(x) = x + f(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x < 1) \\ 2x - 1 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

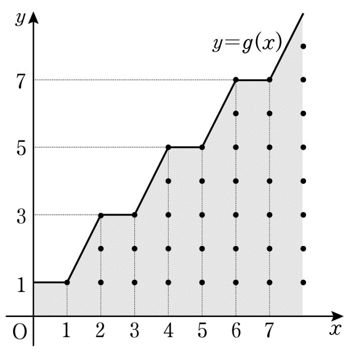
이고, 모든 실수 x에 대하여

$g(x+2) = (x+2) + f(x+2)$

$= x + 2 + f(x)$

$= g(x) + 2$

이므로 제1사분면에서 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는 그림에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점으로 나타내어진다. 또, $a = n$일 때 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $g(n)$과 같다. 따라서

$a_1 = g(1) + g(2) + g(3) = 1 + 3 + 3 = 7$,

$a_2 = g(2) + g(3) + g(4) = 3 + 3 + 5 = 11$,

$a_3 = g(3) + g(4) + g(5) = 3 + 5 + 5 = 13$,

$a_4 = g(4) + g(5) + g(6) = 5 + 5 + 7 = 17$,

$a_5 = g(5) + g(6) + g(7) = 5 + 7 + 7 = 19$,

$a_6 = g(6) + g(7) + g(8) = 7 + 7 + 9 = 23$,

$a_7 = g(7) + g(8) + g(9) = 7 + 9 + 9 = 25$,

$a_8 = g(8) + g(9) + g(10) = 9 + 9 + 11 = 29$

$\vdots$

여기서

$a_3 - a_1 = a_5 - a_3 = a_7 - a_5 = \cdots = 6$,

$a_4 - a_2 = a_6 - a_4 = a_8 - a_6 = \cdots = 6$

이므로

자연수 n에 대하여 a_{2n-1}과 a_{2n}을 추론하면

$a_{2n-1} = a_1 + 6(n-1) = 7 + 6(n-1) = 6n + 1$

$a_{2n} = a_2 + 6(n-1) = 11 + 6(n-1) = 6n + 5$

따라서

$\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{8} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{7} a_{2n}$

$= \sum_{n=1}^{8} (6n+1) + \sum_{n=1}^{7} (6n+5)$

$= \left(6 \times \frac{8 \times 9}{2} + 1 \times 8\right) + \left(6 \times \frac{7 \times 8}{2} + 5 \times 7\right)$

$= 427$

55) 답 : ⑤

[해설]
[출제 의도] 로그와 시그마의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a^{\log_5 16} = 16^{\log_5 a} = 2^{4\log_5 a}$ 이므로

$2^{4\log_5 a} = 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$

$\log_5 a = \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots$

$a_1 = 5^{\frac{1}{4}},\ a_2 = 5^{\frac{2}{4}},\ a_3 = 5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$

따라서 $\sum_{k=1}^{40} \log_5 a_k = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{40}{4}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{40(40+1)}{2} = 205$

56) 답 : ③

[해설]

$\sum_{n=1}^{10}(2n-3)$는 등차수열의 합이므로

$= \frac{10}{2}(-1+17) = 80$

57) 답 : 880

[해설]
[출제 의도] 수열의 합 계산하기

$$\sum_{k=1}^{10} 2k(k+1) = \sum_{k=1}^{10}(2k^2+2k)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{10} k^2 + 2\sum_{k=1}^{10} k$$
$$= 2 \times \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 2 \times \frac{10 \cdot 11}{2}$$
$$= 770 + 110 = 880$$

58) 답 : 30

[해설]
[출제 의도] 합의 기호를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a_n = 32\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$\log_2 a_k = \log_2 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 6-k$

$\sum_{k=1}^{11} |\log a_k| = \sum_{k=1}^{11} |6-k| = 30$

59) 답 : ④

[해설]
[출제 의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$x^2 - (n+1)x + n^2 = nx - n$

$x^2 - (2n+1)x + n(n+1) = 0$

$x = n,\ n+1$

$a_n b_n = n(n+1)$

$$\sum_{n=1}^{19} \frac{100}{n(n+1)} = 100\sum_{n=1}^{19}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 100\left(1 - \frac{1}{20}\right)$$
$$= 95$$

60) 답 : 16

[해설]
[출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 수열의 합에 관한 문제를 해결한다.

$64 = 2^6$ 이므로 $[\log_2 64] = 6$

$3^3 = 27 < 64 < 3^4 = 81$ 이므로 $[\log_3 64] = 3$

$4^3 = 64$ 이므로 $[\log_4 64] = 3$

$5^2 = 25 < 64 < 5^3 = 125$ 이므로 $[\log_5 64] = 2$

$6^2 = 36 < 64 < 6^3 = 216$ 이므로 $[\log_6 64] = 2$

그러므로 $\sum_{n=2}^{6} [\log_n 64] = 16$

61) 답 : 11

[해설]
[출제 의도] 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해한다.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n}\{k^2 - (k^2+k)\}$$
$$= (n+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

따라서 $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 78,\ n^2 + 3n - 154 = 0$

$(n-11)(n+14) = 0$

$\therefore\ n = 11$ ($\because$ n은 자연수)

62) 답 : ③

[해설]
[출제 의도] $\sum$의 성질을 이용하여 $\sum$로 나타내어진 방정식의 해를 구한다.

$\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$ 에서

$x^2 + \sum_{k=1}^{n}(x-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$

$x^2 + \sum_{k=1}^{n}\{(x-k)^2 - (x+k)^2\} = 0$

$x^2 - \sum_{k=1}^{n} 4kx = 0,\ x^2 - 4x\sum_{k=1}^{n} k = 0$

$x^2-4x\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=0$

$x\neq 0$ 이므로 $x=2n(n+1)=a_n$

$\therefore\ a_{10}=20\cdot 11=220$

63) 답 : 20

[해설]

[출제 의도] 합의 기호의 성질 이해하기

$\displaystyle\sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_{3k}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}$ 이고

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_{3k-2}=a_1+\sum_{k=1}^{9}a_{3k+1}$ 을 만족한다.

따라서, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_{3k}=21-a_1$

$\therefore$ 20

64) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 합과 일반항과의 관계를 이해하고, 수열의 합을 구한다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}=n^2+n$ 을 전개하면

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n\ \cdots$ ㉠

㉠에 의해 2 이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n}=(n-1)^2+(n-1)\ \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서

$\dfrac{a_n}{n+1}=n^2+n-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n$

$\therefore\ a_n=2n(n+1)\ (n=2,3,4,\cdots)$

한편 ㉠에서 $\dfrac{a_1}{2}=1^2+1,\ a_1=4$

$\therefore\ a_n=2n(n+1)\ (n=1,2,3,\cdots)$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)$$
$$=\frac{5}{11}$$

65) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열 추론하기

ㄱ. $2^{a_n}=2^{a+(n-1)d}=2^a\cdot 2^{(n-1)d}=2^a\cdot(2^d)^{(n-1)}$ 이므로

`2^{:a_{n}:}`는 공비가 2^d 인 등비수열 ∴ 참

ㄴ. $S_{2n}-S_{2n-1}=a_{2n}=a+(2n-1)d=a+d+(n-1)\cdot(2d)$ 이므로

`{S_{2n}-S_{2n-1}}`는 공차가 $2d$ 인 등차수열

∴ 참

ㄷ. $\dfrac{2^{a_{n+1}}}{4^{a_n}}=2^{(-a+d)+(n-1)(-d)}=2^{(-a+d)}\cdot(2^{-d})^{(n-1)}$ 이므로

`{{:2^{:a_{n+1}:}:} / {:4^{:a_{n}:}:}}`는 공비가 2^{-d} 인 등비수열

∴ 참

66) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 수열의 합의 성질 추론하기

10개의 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 중에 1의 개수를 p, -1의 개수를 q라 하면

(가)에 의해

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k^3=p-q,\ \sum_{k=1}^{10}a_k^2=\sum_{k=1}^{10}a_k^4=p+q$

(나)에 의해 $p-q+p+q=10$ 이므로 $p=5$

(다)에 의해 $(p-q)(p+q)=16$ 이므로 $q=3$

따라서, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{3^k}$ 이 최대가 되는 수열은

$1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, -1, -1, -1$ 이므로

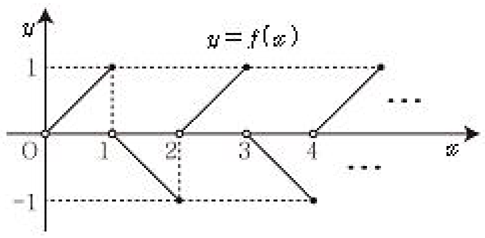
홀수 번째 항들의 합은 ∴ $1+1+1+0+(-1)=2$

67) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성 이해하기

[해설] $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



직선 l_n과 함수 $y=f(x)$의 그래프와의 교점을 구해보면

$a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=2,\ a_5=2,\ a_6=3,\ a_7=3,\ \cdots$이므로

구하는 값은 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=0+1+1+2+2+3+3+4+4+5=25$

68) 답 : 670

[해설]

[출제 의도] 계차수열을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

블록을 n층으로 쌓았을 때, 전체블록의 수를 b_n,

한 면도 보이지 않는 블록의 수를 c_n이라고 하면

$b_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$c_1=c_2=0,\ c_3=1^2=b_1,\ c_4=1^2+2^2=b_2$

$c_5=1^2+2^2+3^2=b_3$ 이므로

$c_{n+2}=b_n$ 이다.

$a_n=b_n-c_n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (b_n - c_n)$$
$$= \sum_{n=1}^{10} b_n - \sum_{n=1}^{10} c_n = \sum_{n=1}^{10} b_n - \sum_{n=1}^{8} b_n$$
$$= b_9 + b_{10} = 285 + 385 = 670$$

69) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n+2(n \geq 2)$

$S_1 = 5$이므로 $a_1 = 5$

따라서 $a_1 + a_6 = 5 + 2 \times 6 + 2 = 19$

70) 답 : 65

[해설]

[출제 의도]수열의 합을 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_n = {}_{n+2}C_3 = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$ 이다.

$n=1$일 때, $a_1 = S_1 = 1$이고

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= \dfrac{(n+2)(n+1)n}{6} - \dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}$

$= \dfrac{n(n+1)}{2}$

이므로

$n \geq 1$일 때, $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 이다.

$\sum_{k=1}^{10} (a_{k+1} - a_k)$

$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{11} - a_{10})$

$= a_{11} - a_1$

$= 66 - 1 = 65$

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{10} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{10} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{10} a_k$

$= \sum_{k=1}^{11} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k - a_1$

$= S_{11} - S_{10} - S_1$

$= {}_{13}C_3 - {}_{12}C_3 - {}_3C_3$

$= {}_{12}C_2 - {}_3C_3 = 65$

[참고]

$n \geq 1$이고 $1 \leq k \leq n$일 때,

${}_{n+1}C_k = {}_nC_k + {}_nC_{k-1}$

71) 답 : 85

[해설]

$a_{11} = 3$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 55$이므로

$\sum_{k=1}^{10} b_k = (a_1 - a_2) + (2a_2 - 2a_3) + \cdots + (10a_{10} - 10a_{11})$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} - 10a_{11} = 55$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 85$

72) 답 : ④

[해설]

$\sum_{k=1}^{99} \log\left(\sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i(i+1)}\right) = \sum_{k=1}^{99} \log\left(\dfrac{k}{k+1}\right)$

$= \dfrac{\log 1}{2} + \dfrac{\log 2}{3} + \dfrac{\log 3}{4} + \cdots + \dfrac{\log 99}{100}$

$= \log\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \cdots \dfrac{98}{99} \cdot \dfrac{99}{100}\right) = -2$

73) 답 : ④

[해설]

$d(A, P_n) = |1-n| + |0-2^n|$ 이다.

$\sum_{n=1}^{10} d(A, P_n) = \sum_{n=1}^{10} (-1+n+2^n) = 2^{11} + 43$

74) 답 : 120

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열에 관한 문제 해결하기

a_n부터 a_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면

1, 1, 2, 2, 0, 0

이므로

S_n

부터

S_{n+5}

까지의 항의 값을

3

으로 나눈 나머지를 나열하면

1, 2, 1, 0, 0, 0이다.(단, $n = 6k-5$, k는 자연수)

따라서 $40 \times 3 = 120$

75) 답 : ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열, 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = n$, $b_n = 2^n$

$\sum_{k=1}^{20} a_k b_k = \sum_{k=1}^{20} k \cdot 2^k = S$라 하면

$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 20 \cdot 2^{20} \cdots$①

$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + 20 \cdot 2^{21} \cdots$②

① − ② 을 하면

$-S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{20} - 20 \cdot 2^{21}$

$= \dfrac{2(2^{20}-1)}{2-1} - 20 \cdot 2^{21}$

$= -19 \cdot 2^{21} - 2$

$S = \sum_{k=1}^{20} a_k b_k = 19 \cdot 2^{21} + 2$

76) 답 : ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열,
수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n = n,\ b_n = 2^n$

$\sum_{k=1}^{20} a_k b_k = \sum_{k=1}^{20} k \cdot 2^k = S$라 하면

$S = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + 20\cdot 2^{20} \cdots ①$

$2S = 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \cdots + 20\cdot 2^{21} \cdots ②$

① − ② 을 하면

$$-S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{20} - 20\cdot 2^{21}$$
$$= \frac{2(2^{20}-1)}{2-1} - 20\cdot 2^{21}$$
$$= -19\cdot 2^{21} - 2$$
$$S = \sum_{k=1}^{20} a_k b_k = 19\cdot 2^{21} + 2$$

77) 답 : 570

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성을 찾고 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n = k$ (k는 자연수)라 하면

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$$
$$k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}$$

그런데 n은 자연수이므로 $a_n = k$을 만족하는

n은 $k^2 - k + 1$부터 $k^2 + k$까지 모두 $2k$개다. 즉,

$a_1 = a_2 = 1$

$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 2$

$a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = a_{11} = a_{12} = 3$

⋮

$a_{73} = a_{74} = \cdots = a_{90} = 9$

$$\sum_{n=1}^{90} a_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + \cdots + 9\cdot 18$$
$$= \sum_{k=1}^{9} k\cdot 2k = 2\sum_{k=1}^{9} k^2$$
$$= 2\times\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} = 570$$

[참고]

두 정수 a, b ($a < b$)에 대하여

$a < n < b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a - 1$

$a \le n < b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a$

$a < n \le b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a$

$a \le n \le b$을 만족시키는 정수 n의 개수는 $b - a + 1$

78) 답 : ②

[해설]

$3^{\frac{1}{n(n+1)}} = 3^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$ 이므로

$$P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_{2010}$$
$$= 3^{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2010}-\frac{1}{2011}\right)} = 3^{1-\frac{1}{2011}} = 3^{\frac{2010}{2011}} \text{ 이다.}$$

따라서 $k = \frac{2010}{2011}$ 이다.

79) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합을 이해하기

$a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 3,\ a_4 = 4,\ a_5 = 2,\ \cdots$이므로

자연수 n에 대하여 $a_{n+4} = a_n$이고

$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 10$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{2010} a_k = 502\times(2+1+3+4)+2+1$

$502\times 10 + 2 + 1 = 5023$

80) 답 : 149

[해설]

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{43}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{43}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{40}{129} = \frac{20}{129} = \frac{q}{p}$$

따라서 $p + q = 149$

81) 답 : 30

[해설]

이차방정식 $x^2 - 33x + n(n+1) = 0$의 두 근이 α_n, β_n이므로 근과 계수와의 관계로부터

$\alpha_n + \beta_n = 33,\ \alpha_n\beta_n = n(n+1)$이다.

따라서, $\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n\beta_n} = \frac{33}{n(n+1)} = 33\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right) = 33\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$= 33\left(1-\frac{1}{11}\right) = 30 \text{ 이다.}$$

82) 답 : ④

[해설]

$a_n = \frac{\log\{n+1\}}{n}$ 이므로

$$[\text{구하는 값}] = \sum_{k=50}^{m} a_k$$
$$= \frac{\log 51}{50} + \frac{\log 52}{51} + \cdots + \frac{\log\{m+1\}}{m}$$
$$= \frac{\log\{m+1\}}{50} = \frac{\log 49}{25}$$
$$\therefore\ m = 97$$

83) 답 : 12

[해설]

$$S_n = \{1+2+3+\cdots+(2^n-1)+2^n\} - \{2+4+6+\cdots+(2^n-2)+2^n\}$$

$$=\frac{2^n(1+2^n)}{2}-\frac{2^{n-1}(2+2^n)}{2}$$

$$=2^{n-1}(2^n-2^{n-1})=4^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{S_n}=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$$

84) 답 : 7

[해설]

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\{k^2+(2n+1)k+n^2+n\}=\frac{n(n+1)(7n+2)}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=7$$

85) 답 : 6

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합을 이용하여 문제 해결하기

$S=1+3\cdot 3+5\cdot 3^2+\cdots+11\cdot 3^5$ ⋯①

$3S=3+3\cdot 3^2+\cdots+9\cdot 3^5+11\cdot 3^6$ ⋯②이다.

① − ② 하면

$$-2S=1+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^5+11\cdot 3^6$$

$$=1+2\cdot\left\{\frac{3(3^5-1)}{3-1}\right\}+11\cdot 3^6$$

$$S=1+5\cdot 3^6$$

따라서 $\log_3\frac{S-1}{5}=6$

86) 답 : ③

[해설]

(ⅰ) n이 홀수인 경우 $a_n=(n+2)^2-2(n+2)+1$

$n=2k-1$이면 $a_{2k-1}=4k^2$

(ⅱ) n이 짝수인 경우 $a_n=(n+2)^2-2(n+2)$

$n=2k$이면 $a_{2k}=4k^2+4k$

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}(8k^2+4k)=500$$

87) 답 : ②

[해설]

$a_n=S_n-S_{n-1}\,(n\geq 2)$

$$\therefore\ a_{10}=S_{10}-S_9=2^9-19=493$$

88) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]진법을 활용한 수열의 합 계산하기

자연수 n을 2진법으로 나타내면

$1_{(2)},\ 10_{(2)},\ 11_{(2)},\ 100_{(2)},\ 101_{(2)},\ 110_{(2)},\ \cdots$

$\{a_n\}$은 $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots$

$$\sum_{k=1}^{30}ka_k=1+3+5+\cdots+29=225$$

89) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질을 이해하기

$$(\text{준식})=\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=2}^{12}k^2+\sum_{k=3}^{12}k^2+\cdots+\sum_{k=12}^{12}k^2$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+12^3$$

$$=\sum_{k=1}^{12}k^3=6084$$

90) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 합 추론하기

$1\cdot 4+2\cdot 8+3\cdot 12+\cdots+9\cdot 36$

$$=\sum_{k=1}^{9}4k^2=4\cdot\frac{9\cdot 10\cdot 19}{6}=1140$$

91) 답 : 128

[해설]

$2^m\leq n<m+1$에서 $2^{m+1}\leq 2n<2^{m+2}$이므로 $a_{2n}=(m+1)^2$

$a_n+a_{2n}=m^2+(m+1)^2=2m^2+2m+1\geq 100$이므로

$m(m+1)\geq\frac{99}{2}$ 이다.

따라서 $m\geq 7$이고 n의 최솟값은 $2^7=128$이다.

92) 답 : 420

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합 문제 해결하기

$nx>0,\ \frac{n}{x}>0$이므로

$nx+\frac{n}{x}\geq 2\sqrt{n^2}=2n$이다.

$f_n(x)=nx+\frac{n}{x}\ \geq 2n$(단, 등호는 $x=1$일 때, 성립한다.)

$$\sum_{n=1}^{20}f_n(x)\geq\sum_{n=1}^{20}2n=420$$

93) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]주어진 수열의 특징을 이해하고 합 구하기

ㄱ. $m=2$일 때, $a_5=\left[\frac{5}{2}\right]=2$이다.(참)

ㄴ. $m=3$일 때,

$\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{3}\right]=3\sum_{k=1}^{32}k+33+33=1650$이다.(거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{mn}\left[\frac{k}{m}\right]=m\sum_{k=1}^{n-1}k+n=\frac{n(mn-m+2)}{2}$ (참)

94) 답 : 55

[해설]

[출제 의도]등차수열의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\{a_n\},\ \{b_n\}$이 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$$
$$= \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} + \frac{10(b_1 + b_{10})}{2}$$
$$= 5\{(a_1 + b_1) + (a_{10} + b_{10})\} = 500$$
$$\therefore\ a_{10} + b_{10} = 55$$

95) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등차수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\left[\frac{a}{n}\right] = 1$ 에서 A_n 의 원소는 $\frac{n}{n}, \frac{n+1}{n}, \cdots, \frac{2n-1}{n}$ 이다.

$$P_n = \frac{1}{n}\{n + (n+1) + \cdots + (2n-1)\}$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+2n-1)}{2} = \frac{3n-1}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{20} P_k = \sum_{k=1}^{20} \frac{3k-1}{2} = \frac{1}{2}\left(3\sum_{k=1}^{20} k - 20\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(3 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - 20\right) = 305$$

96) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]급수의 뜻을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$n \geq 2$ 일 때 $S_n - a_n = S_{n-1}$ 이므로

$$S_n - a_n = S_{n-1} = \frac{n+3}{n+2}\ (n \geq 2)$$

[구하는 값]= $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 1$

97) 답 : 20

[해설]

[출제 의도]약수와 배수를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수열의 일반항(n번째)을 a_n 이라 하면

$a_n = \frac{100-n}{n}$ (단, $1 \leq n \leq 99$)이다.

$a_n = \frac{100-n}{n} = \frac{100}{n} - 1$ 이므로

n이 $100 = 2^2 5^2$ 의 약수일 때 $\frac{100}{n}$ 은 자연수가 된다.

따라서 자연수 a_n 의 총합은 다음과 같다.

$$(1+2+2^2)(1+5+5^2) - 9 = 208$$

98) 답 : 271

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성 파악하기

x, y 의 좌표가 모두 정수인 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$x=1$ 일 때, 0개,

$x=2$ 일 때, 1개,

$x=3$ 일 때, 1개,

$x=4$ 일 때, 2개,

…

를 차례로 나열하면

0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, …이다.

$$\therefore\ 2\sum_{k=1}^{9}(2k-1) + \sum_{k=1}^{9}(2k) + 19 = 271$$

그러므로 a는 271이다.

99) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]자연수의 합을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 수열은 3의 배수를 함께 생각하면

1, 2 ⋯ 4, 5 ⋯ ⋯, 44, ⋯

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = \sum_{k=1}^{45} k - \sum_{k=1}^{15} 3k = \frac{45 \times 46}{2} - 3 \times \frac{15 \times 16}{2} = 675$$

100) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] $\sum$ 의 성질 이해하여 값 구하기

[해설] $\sum_{k=1}^{10} \frac{k^3}{k^2-k+1} + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{k^2-k+1}$

$$= \sum_{k=1}^{10}\left\{\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k^2-k+1}\right\} - 1$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(k+1) - 1 = 64$$

101) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙을 이해하여 그 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{a_n\}$ 은 1, 11, 111, 1111, 11111, ⋯

이때, a_n 을 3으로 나눈 나머지는 차례로 다음과 같다.

1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, ⋯

따라서 $\sum_{n=1}^{30} b_n = \sum_{n=1}^{10} 3 = 30$ 이다.

102) 답 : 48

[해설]

[출제 의도]상용로그의 정수부분과 가수에 대한 문제 해결하기

상용로그 $\log A$ 의 지표 n과 가수 α가 방정식 $4x^2 - 13x + \beta = 0$ 의 두 근이므로

$\log A = n + \alpha = \frac{13}{4}$ 이다.

n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로, $n = 3, \alpha = \frac{1}{4}$ 이다.

[구하는 값]= $\sum_{k=1}^{30}\left[\frac{400\alpha}{n^k}\right] = \sum_{k=1}^{30}\left[\frac{100}{3^k}\right]$

$$= \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{3^2}\right] + \left[\frac{100}{3^3}\right] + \left[\frac{100}{3^4}\right] + 0 + \cdots$$
$$= 48$$

103) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]부분분수로 표현된 수열의 합 구하기

[해설] $a_n = 3n - 1$ 이므로

$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{3k-1} \times \frac{1}{3k+2}$ 이다.

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32}\right) = \frac{5}{32}$$

104) 답 : 98

[해설]

$$a_n = 23 \times \frac{1}{100} + 23 \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + 23 \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots + 23 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n$$
$$= \frac{\frac{23}{100}\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99}\left(1 - 10^{-2n}\right)$$

$\therefore\ a = 99,\ b = 1,\ c = -2$

$\therefore\ a + b + c = 98$

105) 답 : 30

[해설]

[출제 의도]수열의 성질을 이해하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$30a_{30} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29})$$
$$= a_{30} + (a_{30} - a_1) + (a_{30} - a_2) + \cdots + (a_{30} - a_{29})$$
$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + \cdots + 30 \times \frac{1}{30} = 30$$

106) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열의 일반항을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

도형 S_1의 넓이는 12개의 합동인 작은 정삼각형의 넓이의 합과 같고, 작은 정삼각형의 한 변의 길이는 2이므로

S_1의 넓이는 $12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = 12\sqrt{3}$

또한, S_n과 S_{n+1}은 닮은 도형이고 닮음비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.

따라서 S_{10}의 넓이는

$12\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 = 3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$ 이다.

107) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합 구하기

그래프가 지나는 정사각형 내부에 있는 수들의 합을 S라 하면

$$S = (1 + 2 + 3 + \cdots + 109) - (2 + 6 + 12 + \cdots + 90)$$
$$= \sum_{k=1}^{109} k - \sum_{k=1}^{9} (k + k^2) = 5665$$

108) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]로그함수의 성질 이해하기

$P_n(n,\ \log_3 n),\ P_{n+1}(n+1,\ \log_3(n+1))$

$$g(n) = \frac{\log_3(n+1) - \log_3 n}{n+1-n} = \log_3 \frac{n+1}{n}$$

$$[\text{구하는 값}] = \sum_{k=1}^{80} g(k) = \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \cdots + \log_3 \frac{81}{80}$$
$$= \log_3\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{81}{80}\right)$$
$$= \log_3 81 = 4$$

109) 답 : 130

[해설]

[출제 의도]수열의 합에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$a_k = k^2 + k$라 하자.

$\sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$이고 $\sum_{k=2}^{11} (k^2 + k) = a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}$이므로

$$c = \sum_{k=2}^{11} (k^2 + k) - \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) = a_{11} - a_1 = 11^2 + 11 - 1^2 - 1 = 130$$

110) 답 : 15

[해설]

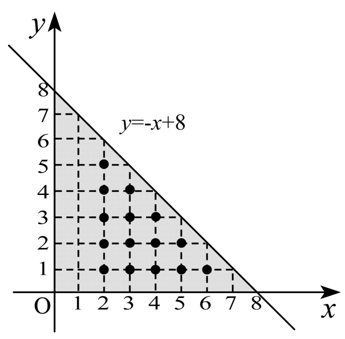
[출제 의도] 로그가 정의되기 위한 조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

밑의 조건에서 $x > 0,\ x \neq 1$ ... ㉠

진수 조건에서 $8 - x - y > 0$ ...㉡

그림에서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는

자연수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 15개이다.



111) 답 : 45

[해설]

[출제 의도]부등식의 영역을 만족시키는 자연수 해의 개수를 $\sum$를 이용하여 구하기

$y = 2x$와 $y = x + n$의 교점의 좌표는 $(n,\ 2n)$

$x = k$ (단, $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)일 때

자연수의 y의 개수는 $(k+n) - 2k = n - k$

$$\therefore\ a_{10} = \sum_{k=1}^{10} (10 - k) = 45$$

112) 답 : 131

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=1}^{21} a_k = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots + (a_{20} + a_{21})$$
$$= 1 + 4 + 6 + \cdots + 22 = 1 + \frac{10(4+22)}{2} = 131$$

113) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 기본성질 추론하기

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{n(n+1)}$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}l\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (참)

114) 답 : 27

[해설]

[출제 의도]부분분수를 이용한 수열의 합 계산하기

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\left(\overline{A_nP_n}\right)^2}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{11}\right)$$

$$=\frac{5}{22}$$

따라서, $p+q=27$

115) 답 : 103

[해설]

[출제 의도] 자연수의 거듭제곱의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=1}^{6}(k^2+2)=\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}+2\times 6=103$$

116) 답 : 301

[해설]

[출제 의도]수열의 합과 일반항과의 관계를 이용하여 부분분수의 합 구하기

[해설] $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$ ($n\geq 2$)

$a_1=S_1=1$이므로 $a_n=2n-1$ ($n\geq 1$)

$$\frac{1}{a_na_{n-1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{199}-\frac{1}{201}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{201}\right)=\frac{100}{201}$$

$\therefore\ m+n=301$

117) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항을 이용하여 수열의 합 구하기

$a_n=n(n+x-1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{10}a_n=330+55x=880$$

$\therefore\ x=10$

118) 답 : 50

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기

2007^n을 5로 나눈 나머지는 2007^n의 일의 자리 수를 5로 나눈 나머지와 같으므로

2007^1을 5로 나눈 나머지는 2이고,

2007^2을 5로 나눈 나머지는 4이고,

2007^3을 5로 나눈 나머지는 3이고,

2007^4을 5로 나눈 나머지는 1이다.

따라서 $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=3,\ a_4=1$이고

이 네 개의 수가 순서대로 반복 된다.

따라서 $a_{4n}=a_{4\cdot 1}=a_{4\cdot 2}=a_{4\cdot 3}=\cdots=1$이므로

$$100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{4n}}{3^n}=100\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=100\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)=50$$

119) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]도형을 이용하여 수열의 합 추론하기

㈎ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

㈏ $n(n+1)$, ㈐ $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

120) 답 : 36

[해설]

[출제 의도]합의 기호 $\sum$의 성질 이해하기

[해설](준식) $=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k+3\times 10=36$

121) 답 : ④

[해설]

$a_1=2,\ 3a_1=6$을 5로 나눈 나머지는 1이므로

$a_2=1$, 같은 방법으로 $a_3=3,\ a_4=4,\ a_5=2$

$a_6=1,\ \cdots,\ a_{13}=a_1=2,\ a_{40}=a_4=4$이므로

$\therefore\ a_{13}+a_{40}=2+4=6$

122) 답 : 160

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합을 구하기

$$\sum_{k=1}^{10}(2k+5)=2\times\frac{10(10+1)}{2}+5\times 10=160$$

123) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]로그의 성질을 이용하여 수열의 합 구하기

$$\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}\log_{10}(1.23\times 10^{k+1})$$

$$=\sum_{k=1}^{9}(-1)^{k-1}(\alpha+k+1)$$
$$=(\alpha+2)-(\alpha+3)+(\alpha+4)-\cdots+(\alpha+10)$$
$$=6+\alpha$$

124) 답 : 5

[해설]

[출제 의도]급수의 합 구하기

$$2^a\times3^b=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}=2^{-2}\times3^1$$
$$\therefore\ a^2+b^2=5$$

125) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]합의 기호를 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

구하는 값 $=\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2-2\sum_{k=1}^{10}(k+2)+\sum_{k=1}^{10}3$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{(k+1)^2-2(k+2)+3\}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\frac{10\times11\times21}{6}=385$$

126) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등차수열의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(준식) $=\dfrac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_3}}{a_1-a_3}+\dfrac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_5}}{a_3-a_5}+\cdots+\dfrac{\sqrt{a_{59}}-\sqrt{a_{61}}}{a_{59}-a_{61}}$

$$=\frac{1}{10}\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{61}}\right)=\frac{1}{10}\left(\sqrt{400}-\sqrt{100}\right)=1$$

127) 답 : 440

[해설]

$[\log_{k+1}x]=1$에서 $1\le\log_{k+1}x<2$

$\therefore\ k+1\le x<(k+1)^2$

이를 만족하는 자연수의 개수가 a_k이다.

$a_1\to2\le x<4$:2개

$a_2\to3\le x<9$:6개

$a_3\to4\le x<16$:12개

$a_4\to5\le x<25$:20개

⋮

$\{a_k\}$ 2, 6, 12, 20 ... 의 계차수열을 찾으면

$\{b_k\}$ 4, 6, 8 ...

이때, $a_{k+1}-a_k=b_n$라 하면,

b_n은 첫째항이 4이고, 공차가 2인 등차수열이므로

$b_n=4+2(n-1)$

$$\therefore\ a_k=2+\sum_{n=1}^{k-1}(2n+2)$$
$$=2+2\cdot(k-1)\cdot\frac{k}{2}+2(k-1)=k^2+k$$

따라서, $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(k^2+k)$

$$=10\cdot11\cdot\frac{21}{6}+10\cdot\frac{11}{2}$$
$$=385+55=440$$

128) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $3^3=27$이므로 $a_3=7$(참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{5}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

$4+6+6+6+0=22$(참)

ㄷ. $13^{13}=(10+3)^{13}$이므로 13^{13}의 일의 자리수와

3^{13}의 일의 자리수는 서로 같고,

$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81,\ 3^5=243,\ \cdots$

3, 9, 7, 1, 3, ⋯

3

이와 같은 방법 으로 23^{23}의 일의 자리수는 7이다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

129) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합을 구하기

m행 n열에 있는 수는 항상 $20(m-1)+n$의 꼴로 나타낼 수 있다.

이때, 각각의 행 또는 열에 중복되거나 빠지지 않게 각 행마다 하나의 수를 택하면

$m-1$과 n은 1, 2, 3, ⋯, 20의 값들을 중복되지 않게 모두 한 번씩 취하게 된다.

따라서 선택된 20개의 수들의 합은

[구하는 값] $=\sum_{m=1}^{20}20(m-1)+\sum_{n=1}^{20}n$

$$=\sum_{m=1}^{20}20m+\sum_{n=1}^{20}n-400$$
$$=20\times\frac{20\times21}{2}+\frac{20\times21}{2}-400$$
$$=4010$$

130) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질을 이해하고 수열에 관한 문제 해결하기

$\sum_{n=1}^{100}n$의 일의 자리수는 0이므로

$\sum_{n=1}^{100}(n!+n)$의 일의 자리수는 $\sum_{n=1}^{100}n!$의 일의 자리수와 같다.

그런데 $\sum_{n=1}^{100}n!$의 일의 자리수는 $1!+2!+3!+4\neq33$의 일의 자리수와 같으므로 3이다.

[정답]②

131) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비수열의 뜻을 알고 문제 해결하기

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot (2^{2n-1} + 2^{2n+1}) \cdot 2 = \frac{5}{2} \cdot 2^{2n} \geq 320$$

$2^{2n} \geq 2^7$ 에서 $n \geq 3.5$ 이므로 n의 최솟값은 4

[정답]①

132) 답 : 130

[해설]

[출제 의도] Σ의 공식을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(준식) $= \sum_{k=1}^{10} (k^2+k+1) - \sum_{k=1}^{10} (k^2-k-1)$

$$= \sum_{k=1}^{10} (2k+2) = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 2 \times 10 = 130$$

133) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]합을 $\sum$를 이용하여 표현하기

$$\left(<50> - <\frac{50}{2}>\right) + \left(<\frac{50}{2}> - <\frac{50}{2^2}>\right) + \ldots$$

$$\cdots + \left(<\frac{50}{2^{n-1}}> - <\frac{50}{2^n}>\right)$$

$$= <\frac{50}{2} - \frac{1}{2}> + <\frac{50}{2^2} - \frac{1}{2}> + \cdots <\frac{50}{2^n} - \frac{1}{2}>$$

$$= \sum_{k=1}^{n} <\frac{50}{2^k} - \frac{1}{2}>$$

$$\therefore \ pq = 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -25$$

134) 답 : 216

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고 이를 활용하기

준 식 $= \sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 - 4 - \sum_{k=1}^{10} (k-1)^2 = -4 + \sum_{k=1}^{10} 4k$

$= -4 + 4 \cdot 55 = 216$

[정답] 216

135) 답 : 400

[해설]

[출제 의도]계차수열의 일반항 구하기

$a_1 = 5,\ a_2 = a_1 + 2 \times 4,\ a_3 = a_2 + 3 \times 4,\ \cdots$

$a_n = a_{n-1} + 4n$

$\therefore \ a_{100} - a_{99} = 400$

136) 답 : 142

[해설]

[출제 의도] $\sum$를 써서 수열의 합을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=1}^{5} (2^k + 5k + 1) = \sum_{k=1}^{5} 2^k + \sum_{k=1}^{5} 5k + \sum_{k=1}^{5} 1$$

$$= \frac{2(2^5-1)}{2-1} + 5 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + 5$$

$$= 62 + 75 + 5 = 142$$

137) 답 : 201

[해설]

[출제 의도]부분분수를 이용한 수열의 합 구하기

$y = \frac{1-x}{x}$, $y = k$의 교점의 x좌표 $f(k) = \frac{1}{k+1}$

$y = \frac{1}{x}$, $y = k$의 교점의 x좌표 $g(k) = \frac{1}{k}$

따라서 $\sum_{k=1}^{100} f(k)g(k) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$

$$= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{100}{101}$$

$\therefore \ a + b = 201$

138) 답 : 27

[해설]

【출제 의도】수열의 일반항을 이용하여 수열의 합 구하기

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n = n^3 - n$ ... $CL21$

$a_1 + 2a_2 + 3a_3 +$

$\ldots + (n-1)a_{n-1} = (n-1)^3 - (n-1)$... $CL22$

$CL21 -$ $CL22$ 에서

$na_n = n^3 - n - \{(n-1)^3 - (n-1)\}$

3n(n-1)` $(n \geq 1)$

따라서 $a_n = 3(n-1)$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 0이고, 공차가 3인 등차수열이므로

$\therefore a_{10} = 27$

139) 답 : 80

[해설]

[출제 의도]수열의 합에 관한 계산 능력을 측정한다.

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + 2) = 3\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2 = 3 \cdot 20 + 20 = 80$$

140) 답 : 396

[해설]

[출제 의도] Σ의 뜻과 성질을 이해하고 활용하기

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{6} a_i b_j\right) = \sum_{i=1}^{6} \left(a_i \sum_{j=1}^{6} b_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \left(a_i \left(2 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} - 36\right)\right)$$

$$= 6\sum_{i=1}^{6} a_i = 6\left\{\frac{2(2^6-1)}{2-1} - 60\right\}$$

$$= 396$$

[정답]396

141) 답 : 340

[해설]

[출제 의도]계차수열의 일반항을 이용하여 수열의 합 구하기
모든 자연수 k에 대하여 두 점 P, Q를 지나는 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}=2k$$

$$f(k+1)-f(k)=2k$$

$\{f(k)\}$는 $f(1)=1$, 계차가 $2k$인 계차수열이다.

따라서 $f(k)=f(1)+\sum_{t=1}^{k-1}2t$

$$=k^2-k+1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}f(k)=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+10=340$$

142) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 합에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문항이다.

$$x^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2-\sum_{k=1}^{n}(x-k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{(x+k)^2-(x-k)^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}4kx=4x\sum_{k=1}^{n}k=4x\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore x=4\cdot\frac{n(n+1)}{2}=2n(n+1)$$

143) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 표현 및 급수에 관한 이해력을 측정한다.

4^n을 10으로 나눈 나머지는 4^n의 일의 자리수이므로

$a_1=4,\ a_2=6,\ a_3=4,\ a_4=6,\ \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}=0.464646\cdots=\frac{0.46}{1-0.01}=\frac{46}{99}$$

144) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]조건을 만족하는 수열의 일반항을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

다음과 같이 자연수를 나열하여 3의 배수와 5의 배수를 지우고 남는 수가 수열 $\{a_n\}$의 각 항이므로

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	···				

$a_{n+8}=a_n+15$

$\therefore a_{100}=a_4+15\times12=187$

145) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질을 이용하여 최댓값 찾아내기

㈎ 19, ㈏ 13^2, ㈐ 18

[정답]②

146) 답 : ③

[해설]

S_n는 가로가 1, 세로가 $\frac{2}{n(n+1)}$인 직사각형의 넓이

$$\therefore S_n=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{100}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{200}{101}$$

[정답]③

147) 답 : 6

[해설]

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)+\sum_{k=2}^{n}(-k^2+4k-1)=82$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)+\sum_{k=1}^{n}(-k^2+4k-1)-2=82$$

$$\sum_{k=1}^{n}4k=2n(n+1)=84$$

$$\therefore n=6$$

[정답] 6

148) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]조건을 만족하는 자연수의 개수를 구하고 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

처음 수와 마지막의 수의 합, 두 번째 수와 끝에서 두 번째 수의 합, … 이 모두 5555이고 나열된 네 자리 자연수는 모두 24개이므로

구하는 모든 수의 총합은 $5555\times12=66660$

149) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]로그를 이용하여 수열의 합을 구할 수 있다.

$f(x)=x+\log_{10}x$이므로

$$\sum_{n=1}^{100}[f(n)]=[f(1)]+[f(2)]+\cdots+[f(100)]$$

$$=[1+\log_{10}1]+[2+\log_{10}2]+\cdots+[100+\log_{10}100]$$

$$=(1+\cdots+100)+([\log_{10}1]+\cdots+[\log_{10}100])$$

$$=5050+(0\times9+1\times90+2\times1)=5142$$

150) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 정의를 알고 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(주어진 식) $=3^2+4^2+5^2+\cdots+12^2$

$$=\frac{12\times13\times25}{6}-(1^2+2^2)=645$$

151) 답 : 465

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 합 구하기

$$=-1+2^2-3^2+4^2+\cdots-29^2+30^2$$

(준식) $=(2^2-1)+(4^2-3^2)+\cdots+(30^2-29^2)$

$$=1+2+3+\cdots+30=465$$

[정답]465

152) 답 : 165

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질을 이용하여 식 계산하기

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$ 이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$

(준식) $=\sum_{k=1}^{5}(k^2+7k+1)=165$

[정답]165

153) 답 : 240

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열에서 일반항 구하기

$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)$ 이므로

$\therefore\ a_{15}=15\times16=240$

[정답]240

154) 답 : 330

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질을 이용하여 식을 계산할 수 있다.

$\sum_{k=1}^{10}(k^2+3k-10)-\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k-10)$

$=\sum_{k=1}^{10}\{(k^2+3k-10)-(k^2-3k-10)\}$

$=\sum_{k=1}^{10}6k=330$

155) 답 : 255

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성을 추론하여 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$b_n=2^{n-1}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{8}b_k=\sum_{k=1}^{8}2^{k-1}=255$

156) 답 : 5

[해설]

[출제 의도]무리식 계산하기

$f(x)=\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}$ 이므로

$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})$ 이다.

준식 $=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{121}-\sqrt{119})\}$

$\frac{1}{2}(-1+11)=5$

정답: 5

157) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 합을 구할 수 있다.

$a_2+a_1=b_2-b_1$

$a_3+a_2=b_3-b_2$

$\cdots$

$a_{10}+a_9=b_{10}-b_9$

위의 식을 변끼리 더하면

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{10})-a_1-a_{10}=b_{10}-b_1$

$\therefore\ a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{1}{2}(a_1-b_1+a_{10}+b_{10})=15$