

II.함수

3.[보충]함수 방정식

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2005 학년도 대수능]

1 [공통]두 함수 $f(x)=[x^2]$ 과 $g(x)=[x]^2$ 에 대하여

다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

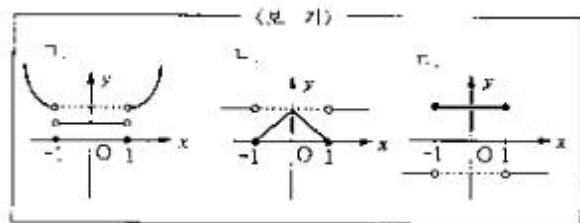
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2})$
ㄴ. x 가 정수이면 $f(x) = g(x)$ 이다.
ㄷ. $f(x) = g(x)$ 이면 x 는 정수이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2003 학년도 대수능]

2 다음 [보기]에 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 중에서 $f(x)=f(x^2)$ 을 만족하는 그래프를 모두 고른 것은?[2점]



- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

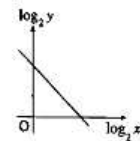
[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

3 [공통]좌표평면에서 다음 함수 중 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은?

- ① $y = |x|$ ② $y = x^2$ ③ $y = \sqrt{x}$
- ④ $y = x^3$ ⑤ $y = \frac{1}{x}$

[난이도 : ★★★] [1998 학년도 대수능]

4 $\log_2 x$ 와 $\log_2 y$ 사이의 관계가 다음 그림과 같은 모양일 때, x 와 y 사이의 관계를 옳게 나타 낸 것은?

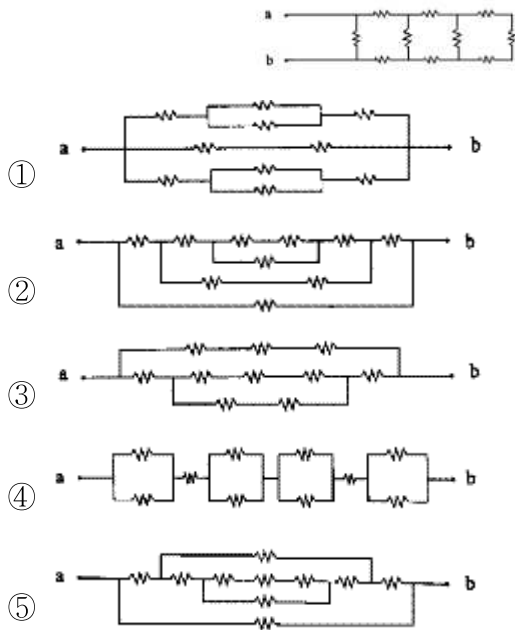


- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

[난이도 : ★★☆☆] [1998 학년도 대수능]

5 [공통]다음 그림은 동일한 저항 10개가 연결된 회로이다.

이 회로와 연결 상태가 같은 것은?

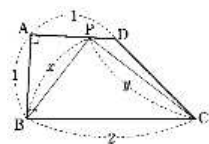


[난이도 : ★★☆☆] [1996 학년도 대수능]

6 [공통]다음 그림과 같은 사다리꼴 ABCD가 있다.

$\overline{AB} = \overline{AD} = 1, \overline{BC} = 2, \angle A$ 와 $\angle B$ 의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

윗변 AD에 임의의 점 P를 잡아 $\overline{PB} = x, \overline{PC} = y$ 라 할 때, 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르면?



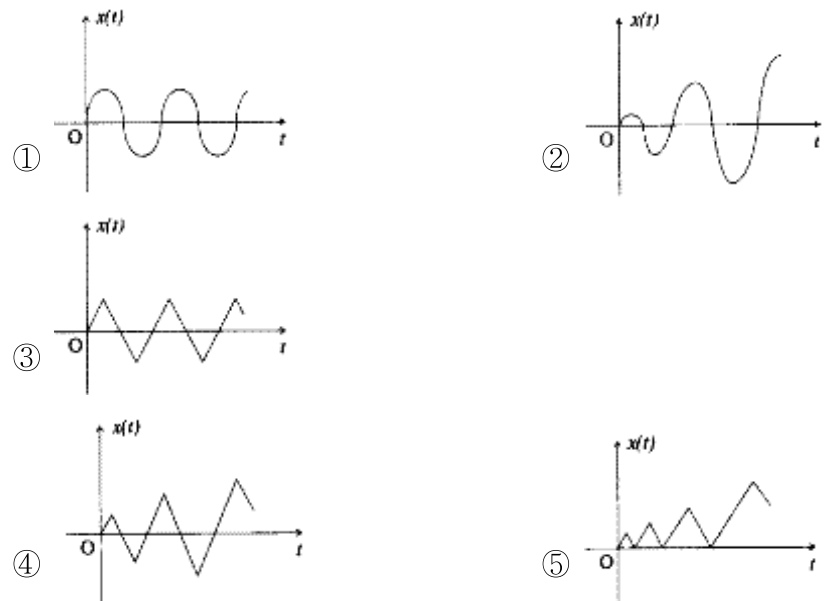
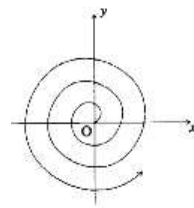
[보기]	
I. $xy \geq 2$ 이다.	
II. $xy = 2$ 이면, $\triangle PBC$ 는 직각삼각형이다.	
III. $xy \leq \sqrt{5}$ 이다.	

- ① I ② III ③ I, III
 ④ II, III ⑤ I, II, III

[난이도 : ★★☆☆] [1996 학년도 대수능]

7 다음 그림과 같이 원점을 출발하여 나선형의 경로를 따라 일정한 속력으로 움직이는 물체가 있다.

이 물체의 시각 t에서의 x좌표를 x(t)라 할 때, t와 x(t)사이의 관계를 나타 낸 그래프의 개형은?



[난이도 : ★★☆☆] [1996 학년도 대수능]

8 어떤 산업에서 노동의 투입량을 x, 자본의 투입량을 y라 할때,

그 산업의 생산량 z는 다음과 같다. $z = 2x^\alpha y^{1-\alpha}$ (α 는 $0 < \alpha < 1$ 인 상수)자료에 의하면 1993년도의 노동 및 자본의 투입량은 1980년도 보다 각각 4배와 2배이고, 1993년도 산업생산량은 1980년도 산업생산량이 2.5배이다. 이 사실에 의해 상수 α 의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하면?(단, $\log_{10} 2 = 0.30$)

- ① 0.50 ② 0.33 ③ 0.25
 ④ 0.20 ⑤ 0.10

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

9 음이 아닌 정수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 음이 아닌 정수 n 과 $0 \leq k \leq 9$ 인 정수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0)=0$
- (나) $f(10n+k)=f(n)+k$

옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

- ㄱ. $f(100)=1$
- ㄴ. $(f \circ f)(999)=9$
- ㄷ. $f(n)$ 이 6의 배수이면 n 은 6의 배수이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆☆] [2010년 7월 학력평가]

10 [공통]실수 전체의 집합에서 양의 실수의 집합으로 대응되는 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(ab) = \{f(b)\}^a$ 을 만족할 때, $f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{6})$ 의 값은?(단, $f(1)=64$)[3점]

- ① 12 ② 13 ③ 14
- ④ 15 ⑤ 16

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 학력평가]

11 [공통]함수 $f(x)$ 가 음이 아닌 정수 n 에 대하여

$f(0)=0, f(10n+p)=f(n)+p$ 를 만족할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, p 는 9이하의 음이 아닌 정수)[4점]

[보기]

- ㄱ. $f(12)=3$
- ㄴ. $f(8 \times 123)=8f(123)$
- ㄷ. $f(100a+10b+c)=f(100c+10b+a)$ (단, a, b, c 는 9이하의 음이 아닌 정수)

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

12 [공통]0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여 정의된 함수 f 가

$2f(x)+3f(\frac{1}{x})=\frac{4}{x}$ 를 만족할 때, $f(2)$ 의 값은?[4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 학력평가]

13 이차 함수 $f(x)$ 가 $2f(x)+f(1-x)=3x^2$ 을 만족할 때,

[보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

[보기]

- ㄱ. $f(0)=-1$
- ㄴ. $f(x)$ 의 최소값은 3이다.
- ㄷ. 모든 x 에 대하여 $f(x)=f(-2-x)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

3.[보충]함수 방정식 중단원 기출문제

1) 답 : ②

[해설]

$$\neg. f(\sqrt{2}) = [2] = 2, g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2}) \text{ (참)}$$

ㄴ. $x = n$ (정수)이면

$$f(x) = [n^2] = n^2, g(x) = [n]^2 = n^2$$

$$\therefore f(x) = g(x) \text{ (참)}$$

ㄷ. (반례) $x = 0.5$ 일 때

$$f(x) = [0.5^2] = [0.25] = 0, g(x) = [0.5]^2 = 0^2 = 0 \text{ 으로}$$

$$f(x) = g(x) \text{ 이지만, } x \text{ 는 정수가 아니다.}$$

이상에서 옳은 것은 \neg , \neg 이다.

2) 답 : ③

[해설]

① . 주어진 그래프에서 $x \geq 1$ 인 경우를 주목하여 보면

$$f(2) \neq f(4) \text{ 임을 알 수 있다.}$$

따라서, 주어진 함수 $f(x)$ 는 조건 $f(x) = f(x^2)$ 을 만족하지 않는다.

② . 주어진 그래프에서 $0 \leq x \leq 1$ 인 경우를 주목하여 보면

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \neq f\left(\frac{1}{4}\right) \text{ 임을 알 수 있다.}$$

따라서, 주어진 함수 $f(x)$ 는 조건 $f(x) = f(x^2)$ 을 만족하지 않는다.

③ . 주어진 그래프로부터 함수 $f(x)$ 의 식을 구하면

$$f(x) = \begin{cases} a, & (-1 \leq x \leq 1 \text{ 일 때}) \\ -a, & (x < -1 \text{ 또는 } 1 < x \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이로부터 $f(x^2)$ 을 구해 보면

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ 일 때, } 0 \leq x^2 \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x^2) = a$$

$$x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \text{ 일 때, } x^2 > 1 \text{ 이므로}$$

$$f(x^2) = -a$$

$$\therefore f(x) = f(x^2)$$

따라서, [보기] 중 조건 $f(x) = f(x^2)$ 을 만족하는 것은 ③ 뿐이다.

3) 답 : ④

[해설]

임의의 직선의 식을 $y = ax + b$ 라 하면

삼차방정식 $x^3 = ax + b$ 는 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

따라서, $y = x^3$ 의 그래프는 임의의 직선과 항상 만난다.

4) 답 : ⑤

[해설]

$\log_2 y = -a \log_2 x + b$ (단, $a > 0, b > 0$ 인 상수)라 하면

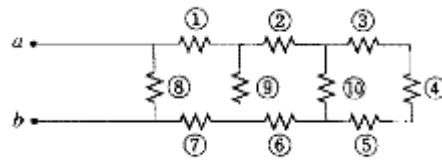
$$\log_2 y = \log_2 \frac{2^b}{x^a}$$

$$\therefore y = \frac{k}{x^a} \text{ (단, } k > 0 \text{ 이고 } k = 2^b)$$

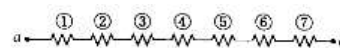
따라서, 그래프는 x^a 과 y 가 반비례한다.

5) 답 : ⑤

[해설]



우선 ⑧, ⑨, ⑩이 없다고 가정하고 회로를 구성하면

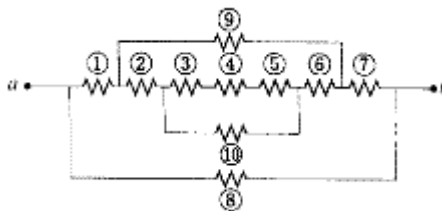


여기서 위 그림을 보면

⑧ 은 a 와 ① 사이의 점과 b 와 ⑦ 사이의 점을

⑨ 은 ① 와 ② 사이의 점과 ⑦ 과 ⑥ 사이의 점을

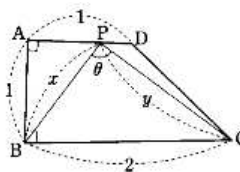
⑩ 은 ② 와 ③ 사이의 점과 ⑥ 과 ⑤ 사이의 점을 이으면 된다.



따라서 연결상태가 같은 회로는 ⑤이다.

6) 답 : ⑤

[해설]



$\triangle PBC$ 에서 $\angle BPC = \theta$ 라 하면

$$\triangle PBC \text{ 의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1 \text{ 이고,}$$

$$1 = \frac{1}{2} xy \sin \theta \dots \text{①}$$

$$\text{한편, 점 } P \text{ 가 } A \text{ 에 있을 때, } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{점 } P \text{ 가 } D \text{ 에 있을 때 } \angle BPC = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \sin \theta = 1$$

$$\therefore \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \sin \theta \leq 1 \dots \text{②}$$

$$\text{① 에서 } \sin \theta = \frac{2}{xy} \text{ 이므로 } \frac{2}{\sqrt{5}} \leq \frac{2}{xy} \leq 1$$

$$\therefore 2 \leq xy \leq \sqrt{5}$$

한편, $xy = 2$ 일 때는 ①에서 $\sin \theta = 1$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \triangle BCP$ 는 직각삼각형이다.

7) 답 : ②

[해설]

일정한 속력으로 움직이는 동점의 x 좌표는 y 축을 경계로 좌우에서 부호가 간헐적으로 바뀐다.

정답 및 해설

또, t 가 증가하면 나선형의 크기가 점점 증가함에 따라 x 좌표의 변화량도 점점 커진다.

또, 동점이 x 축을 통과할 때 $\frac{dx}{dt}=0$ 이므로

조건을 만족하는 그래프는 ②번이다.

8) 답 : ②

[해설]

1980년도의 노동, 자본, 생산량을 각각 x, y, z 라고 하면

$z=2x^\alpha y^{1-\alpha}$ 이고 1993년도의 노동, 자본, 생산량은 각각 $4x, 2y, 2 \cdot 5z$ 이므로

$$2 \cdot 5z = 2(4x)^\alpha (2y)^{1-\alpha} = 4^\alpha \cdot 2^{1-\alpha} \cdot (2x^\alpha y^{1-\alpha})$$

$$z = 2x^\alpha y^{1-\alpha} \text{이므로 } 2 \cdot 5 = 4^\alpha \cdot 2^{1-\alpha}$$

$$\frac{5}{2} = 2^{1+\alpha} \Rightarrow 5 = 2^{2+\alpha} \Rightarrow \log 5 = (2+\alpha)\log 2$$

$$\alpha + 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \text{에서 } \alpha = \frac{\log 5}{\log 2} - 2 = \frac{1 - \log 2}{\log 2} - 2 = \frac{1 - .30}{0.30} - 2 = \frac{1}{3}$$

≈ 0.33

9) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 뜻을 알고 추론하기

$n = a_m \times 10^m + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0$ 일 때,

$$f(a_m \times 10^m + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0)$$

$$f(a_m \times 10^{m-1} + \dots + a_2 \times 10 + a_1) + a_0$$

$$f(a_m \times 10^{m-2} + \dots + a_2) + a_1 + a_0$$

⋮

$$a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

$$\therefore f(n) = a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

ㄱ. $f(100) = 1$ (참)

ㄴ. $(f \circ f)(999) = f(27) = 9$ (참)

ㄷ. (반례) $n = 15$ 일 때, $f(n) = 6$ 이지만 n 은 6의 배수가 아니다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

10) 답 : ③

[해설]

$$f(1) = f\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 = 64, f\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

$$f(1) = f\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3 = 64, f\left(\frac{1}{3}\right) = 4$$

$$f(1) = f\left(6 \times \frac{1}{6}\right) = \left\{f\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^6 = 64, f\left(\frac{1}{6}\right) = 2$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{6}\right) = 14$$

11) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 성질 이해하기

$$\text{ㄱ. } f(12) = f(10 \times 1 + 2) = f(1) + 2$$

$$= f(10 \times 0 + 1) + 2 = f(0) + 1 + 2$$

$$= 1 + 2 = 3 \text{ (참)}$$

$$\text{ㄴ. } f(8 \times 123) = f(984) = 21,$$

$$8f(123) = 8(1 + 2 + 3) = 48 \text{ (거짓)}$$

$$\text{ㄷ. } f(100a + 10b + c) = f(10a + b) + c = a + b + c$$

$$f(100c + 10b + a) = f(10c + b) + a = c + b + a$$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12) 답 : ④

[해설]

$$2f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x} \dots \text{①}$$

① 식에 x 대신에 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = 4x \dots \text{②}$$

$$\text{②} \times 3 - \text{①} \times 2 \text{하면 } 5f(x) = 12x - \frac{8}{x} \text{이므로}$$

$$\therefore f(x) = \frac{12}{5}x - \frac{8}{5x}$$

$$\therefore f(2) = 4$$

13) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 정의된 함수를 이해하고 문제 해결하기

$$2f(x) + f(1-x) = 3x^2 \dots \text{①}$$

① 에 x 대신에 $1-x$ 를 대입하면,

$$2f(1-x) + f(x) = 3(1-x)^2 \dots \text{②}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$= (x+1)^2 - 2$$

그러므로

$$\text{ㄱ. } f(0) = -1$$

$$\text{ㄴ. } f(x) \text{의 최소값은 } -2$$

ㄷ. 대칭축이 $x = -1$ 이므로 $f(x) = f(-2-x)$ 가 성립한다.