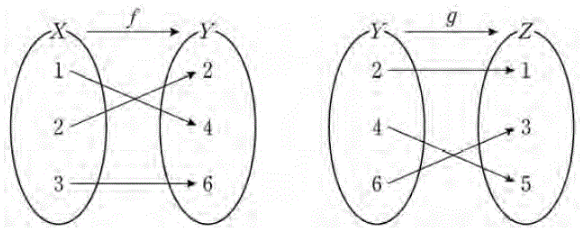
II.함수

1.함수

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2018 학년도 대수능]

1 그림은 두 함수 f : $X \to Y$, g : $Y \to Z$를 나타낸 것이다.

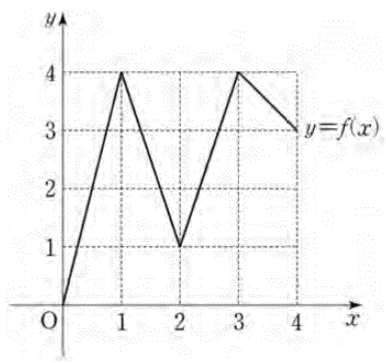


$(g \circ f)(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

2 그림과 같이 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



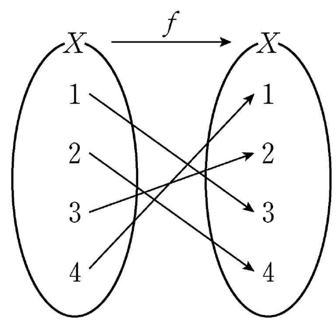
다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a, b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$) [4점]

X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하고 $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

3 그림은 함수 f : $X \to X$를 나타낸 것이다.



$f(2)+f^{-1}(2)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

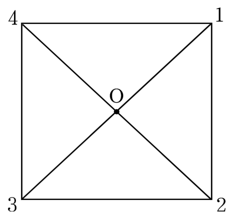
[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

4 [문과]함수 $y = |x^2+2x-1|$ 의 그래프와 직선 $y=1$과의 교점의 개수는? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

5 [공통]아래 그림과 같이 정사각형의 네 꼭짓점을 각각 $1, 2, 3, 4$라 하고, 두 대각선의 교점을 O라 하자. 이 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 90° 회전시키면 1은 2의 위치로, 2는 3의 위치로, 3은 4의 위치로, 4는 1의 위치로 이동한다. 이러한 꼭짓점 사이의 이동을 함수 f_1로 나타내면, $f_1(1)=2, f_1(2)=3, f_1(3)=4, f_1(4)=1$이다. 이와 같은 방법으로 이 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ 회전시켰을 때, 꼭짓점 사이의 이동을 나타내는 함수를 각각 f_1, f_2, f_3, f_4라 하자.다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, f^{-1}은 f의 역함수이다.)[3점]



[보기]
ㄱ. $f_2 \circ f_3 = f_4$
ㄴ. $f_1^{-1} = f_3$
ㄷ. $f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2004 학년도 대수능]

6 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에 대하여 $(f \circ f)(10)$의 값은?[2점]

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{9}{10}$ ③ $\dfrac{10}{9}$
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2004 학년도 대수능]

7 [공통]겨울철에 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느껴진다. 이와 같이 실제 느껴지는 온도를 체감온도라고 하며, 기온을 t, 풍속을 v, 복사량을 I라고 할 때 체감온도 T는 다음과 같다고 한다.

$$T=t-4\sqrt{v}+12I$$

어느 해의 대학수학능력시험 날, 어떤 지역의 오후의 기온은 오전보다 6도 상승했지만 오후의 풍속이 오전의 4배가 되어 체감온도는 변하지 않았다. 이 지역의 그날 오전의 풍속은?(단, 그날 오전과 오후의 복사량 I의 값은 같았다.)[3점]

① 3 ② 2.75 ③ 2.5
④ 2.25 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

8 [공통]한 평면에 서로 다른 n개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 수의 최솟값을 $f(n)$, 최댓값을 $g(n)$이라 하자. 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f(2)=3, g(2)=4$이다.
ㄴ. 모든 n에 대하여 $f(n)=n+1$이다.
ㄷ. 모든 n에 대하여 $g(n) \le f(n+1)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

9 [공통]함수 $f(x)=[x[x]]$ 에 대한 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=-1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다. ㄴ. 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x)\mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는 n 개다. ㄷ. 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x)\mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 이다.

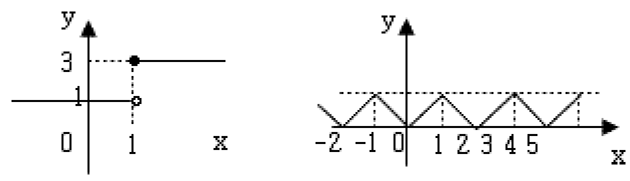
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2002 학년도 대수능]

10 [공통]삼차 함수 $f(x)=ax^3+b$ 의 역함수 f^{-1} 가 $f^{-1}(5)=2$ 를 만족시킬 때, $8a+b$ 의 값을 구하시오.[3점]

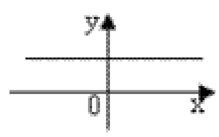
[난이도 : ★★☆] [2002 학년도 대수능]

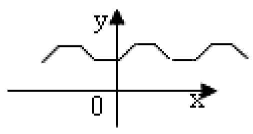
11 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 각각 아래 그림과 같다.

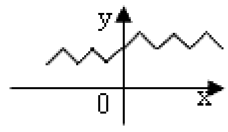


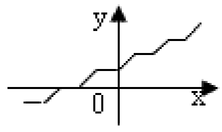
$y=f(x)$의 그래프 $y=g(x)$의 그래프

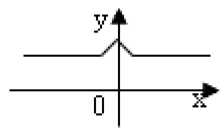
다음 중 $y=(g\circ f)(x)$ 의 그래프의 개형은 ?[3점]

①


②


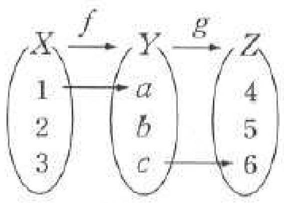
③


④


⑤


[난이도 : ★☆☆] [2001 학년도 대수능]

12 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$, $Z=\{4, 5, 6\}$ 에 대하여, 일대일 대응인 함수 $f: X\to Y$ 와 함수 $g: Y\to Z$ 가 $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$ 를 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은?[2점]



① a ② b
③ c ④ b, c 모두 가능하다.
⑤ a, b, c 모두 가능하다.

[난이도 : ★☆☆] [2000 학년도 대수능]

13 [공통]임의의 양의 실수 x에 대하여, x를 넘지 않는 소수의 개수를 $f(x)$라 하자.

예를 들면 $f\left(\frac{5}{2}\right)=1, f(5)=3$이다. 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르면?

[보기]
Ⅰ. $f(10)=4$ Ⅱ.임의의 실수 x에 대하여 $f(x)<x$이다. Ⅲ.임의의 양의 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$이다.

① Ⅰ ② Ⅰ, Ⅱ ③ Ⅰ, Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

14 [공통]함수 $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\frac{ax+b}{x+c}$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$는?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

15 [공통]모든 실수 x에 대하여 정의된 함수 $f(x)=[x]+[-x]$의 치역은?

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대정수이다.)

① $\{0, -1\}$ ② $\{1, -1\}$ ③ $\{0, 1\}$
④ $\{0, 1, -1\}$ ⑤ $\{0\}$

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

16 [공통]임의의 자연수 n에 대하여 n의 양의 약수들의 총합을 $f(n)$이라 하자.

예를 들면 $f(3)=4, f(4)=7$이다. 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고르면?

[보기]
Ⅰ. $f(10)=18$ Ⅱ. $f(n)=n+1$이면 n은 소수이다. Ⅲ.임의의 자연수 m, n에 대하여, $f(mn)=f(m)f(n)$이다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ
④ Ⅱ, Ⅲ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

17 [공통]수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 정수부분이 사용된다. 이 정수부분은 유색생물의 수가 X, 무색생물의 수가 Y일 때, $\frac{Y}{X+Y}\times 100(\%)$로 정의된다. 지난 달 수질검사에서 어떤 호수의 생물학적 정수부분은 $10(\%)$이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과 지난 달 에 비해 유색생물의 수는 2배, 무색생물의 수는 3배가 되었다. 이번달 이 호수의 생물학적 정수부분은 몇 퍼센트(%)인가?

① 약 14.3% ② 약 15.2% ③ 약 16.4%
④ 약 17.1% ⑤ 약 18.5%

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

18 [공통]함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{71}{5}-\frac{19}{15}x, & (x<12) \\ 1-2\log_3(x-9), & (x\geq 12) \end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $(g\circ g\circ g\circ g\circ g)(x)=-3$을 만족하는 x의 값을 구하여라.(단, $(g\circ g)(x)=g(g(x))$이다.)

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

19 [공통]함수 $y=\frac{x^2}{4}+a(x\ge 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$가 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 값의 범위는?

① $0\le a<1$　② $a\ge 0$　③ $a<1$
④ $0<a<2$　⑤ $a<2$

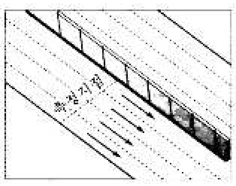
[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

20 다항식 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(g(x))=x$이고 $g(0)=1$일 때, $g(-1)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

21 하행 4개 차선으로 이루어진 고속도로를 차량들이 시속 $100km/$시이하, 차간거리를 $100m$이상 유지하며 달리고 있다. 한 시간 동안 도로 위의 한 점을 통과하는 하행 4개 차선의 차량을 모두 셀 때, 다음 중 통과 가능한 차량의 최대수는?(단, 차량의 길이는 무시한다.)



① 2000　② 4000　③ 6000
④ 8000　⑤ 10000

[난이도 : ★☆☆] [1996 학년도 대수능]

22 [공통]$f(x)=2x-1$이다. 함수 $g(x)$는 모든 함수 $h(x)$에 대하여 $(h\circ g\circ f)(x)=h(x)$를 만족시킨다. $g(3)$의 값은?

(단, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수이다.)

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

23 [공통]자연수 n을 $n=2^p\cdot k$(p는 음이 아닌 정수, k는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n)=p$라 하자. 예를 들면, $f(12)=2$이다.

다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르면?

[보기]
Ⅰ. n이 홀수이면 $f(n)=0$이다. Ⅱ. $f(8)<f(24)$이다. Ⅲ. $f(n)=3$인 자연수 n은 무한히 많다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅰ, Ⅱ
④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

[난이도 : ★★★] [1996 학년도 대수능]

24 어느 회사원의 연간소득은 Y원이다. 이 소득의 $a\%$에 대해서는 세금이 부과되지 않고 그 나머지 소득에 대해서만 $b\%$의 세금이 부과된다. 이 사람은 세금으로 납부하고 난 후의 소득 중 C원을 소비하고 나머지는 모두 저축한다. 이 사람의 연간 저축액 S원은?

① $S=\left(1-\frac{a}{100}-\frac{b}{100}\right)Y-C$

② $S=\left(1-\frac{a}{100}-\frac{b}{100}\right)Y+C$

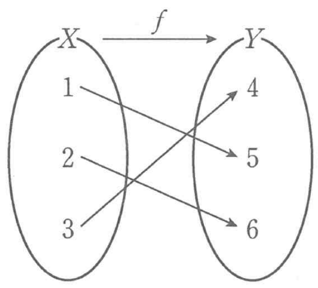
③ $S=\left(1-\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}+\frac{b}{100}\right)Y-C$

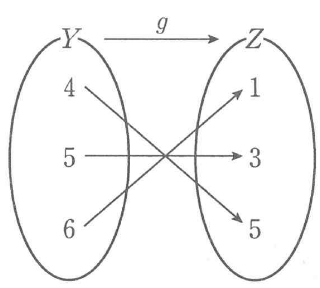
④ $S=\left(1+\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}-\frac{b}{100}\right)Y+C$

⑤ $S=\left(1+\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}-\frac{b}{100}\right)Y-C$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

25 그림은 두 함수 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 를 나타낸 것이다.





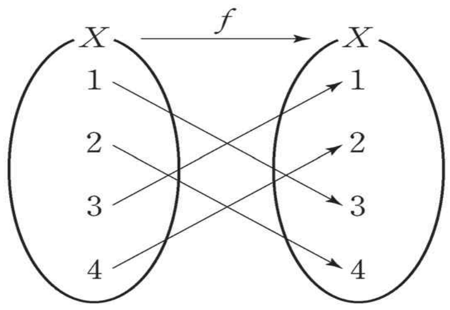
$(g\circ f)(3)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

26 그림은 함수 $f:X\to X$를 나타낸 것이다.

$f(2)+(f\circ f)(3)$의 값은? [3점]



① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

27 함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 $f^{-1}(5)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

28 세 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\log_2 x$에 대하여 $(f\circ g)(2)=(g\circ h)(2)$의 값은?[3점]

① 17　② 19　③ 21
④ 23　⑤ 25

[난이도 : ★★☆] [2010년 06월 모의평가]

29 세 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\log_2 x$에 대하여 $(f\circ g)(2)=(g\circ h)(2)$의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

[난이도 : ★★★] [2005년 09월 모의평가]

30 [공통]집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f: A\to A$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f 는 일대일 대응
(나) $f(1)=7$
(다) $k \ge 2$이면 $f(k) \le k$

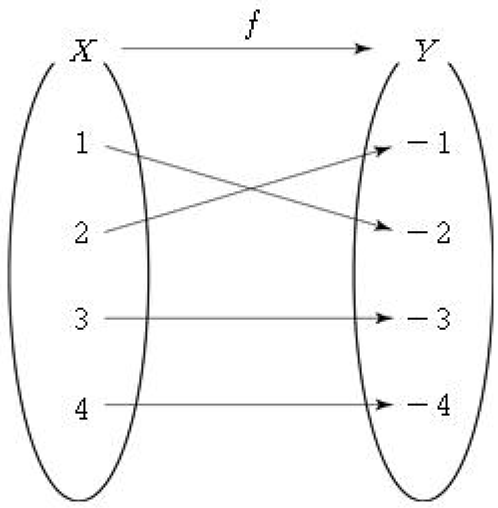
[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

31 두 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-3$, $g(x)=x+1$에 대하여 $(g\circ f)(3)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

32 그림은 함수 $f: X\to Y$ 를 나타낸 것이다.



$f(2)+f^{-1}(-3)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

33 무리함수 $f(x)=\sqrt{ax+b}+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 만날 때, $g(5)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

34 두 함수

$f(x)=x+a$,

$$g(x)=\begin{cases} x-2, & (x<2) \\ x^2, & (x\ge 2) \end{cases}$$

에 대하여 $(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

35 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to X$, $g : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=8$, $f(3) \neq 6$
> (나)함수 $(g \circ f)(x)$는 항등함수이다.
> (다)집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하다.

$(f \circ f \circ f)(7)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

36 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 함수 중에서

$f(1)+f(2)+f(3)-f(4)=3m$ (m은 정수)

를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

37 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여

집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수를 $f(x)$라 하자.

$f(2)=4$일 때, $f(1)+f(3)$의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

38 두 집합 $A=\{x | x$는 자연수$\}$, $B=\{0, 1, 2, 3\}$에 대하여

두 함수 $\begin{cases} f : A \to A \\ g : A \to B \end{cases}$가, $f(x)=mx$, $g(x)=$ (x를 4로 나눈 나머지)

이다. 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

39 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가)함수 f는 일대일대응이다.
> (나)집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $f(a) \neq a$이다.

$f(1)+f(4)=7$일 때, $f(1)+f^{-1}(1)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

40 두 함수

$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+6, & (x<0) \\ x+6, & (x \geq 0) \end{cases}$, $g(x)=x+10$에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y | y \geq 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

41 집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $\lvert f(x)+f(-x)\rvert=1$ 이다. (나) $x>0$이면 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

42 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : A\to A$를

$f(x)=\begin{cases} x+1\,(x\le 3) \\ 1,\ (x=4) \end{cases}$ 로 정의하자.

$f^1(x)=f(x),\ f^{n+1}(x)=f(f^n(x))\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $f^{2012}(2)+f^{2013}(3)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

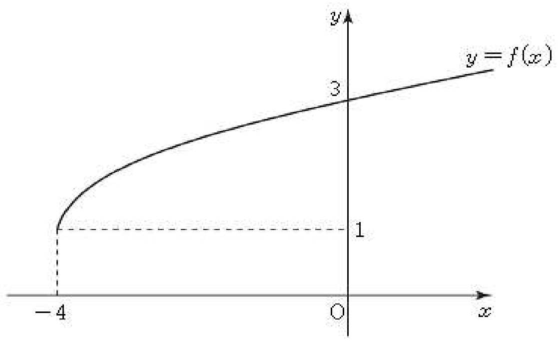
[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

43 좌표평면 위의 세 점 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(0, 6)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 내부에 점 P가 있다. 이때, $\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은? [3점]

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

44 그림은 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+a}+b$의 그래프이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $(p,\ q)$일 때, $p+q$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[3점]

① $3+\sqrt{15}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{21}$
④ $3+2\sqrt{6}$ ⑤ $3+3\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

45 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2},\ (x>3) \\ \sqrt{3-x}+a,\ (x\le 3) \end{cases}$ 일 때, 함수 f는 다음 조건을 만족시킨다.

(가)함수 f의 치역은 $\{y \mid y>2\}$이다. (나)임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\ne x_2$이면 $f(x_1)\ne f(x_2)$이다.

$f(2)f(k)=40$일 때, 상수 k의 값은?(단, a는 상수이다.)[4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2011년 3월 학력평가]

46 두 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, $g(x)=4x+2$에 대하여 $(g\circ f)(1)$의 값은?[2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

47 일차함수 $f(x)=2x+5$에 대하여 $f(1)+f(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

48 집합 $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오.[4점]

(가) 함수 f는 A에서 A로의 함수이다. (나) A의 모든 원소 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

49 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 n의 일의 자리의 수라 하자. 예를 들어 $f(125)=5$, $f(4797)=7$이다. $f(n)=f(n^2)$을 만족시키는 모든 $f(n)$의 값들의 합은?[4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

50 함수 $f(x)=2x+3$에 대하여 $(f\circ f\circ f)(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

51 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $Y=\{1,\ 3,\ 7,\ 9\}$로의 두 함수 f, g를 각각 $f(n)=$ (3^n의 일의 자릿수), $g(n)=$ (7^n의 일의 자릿수)로 정의할 때, $(f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f^{-1})(7)$의 값은?[3점]

① 4 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 16

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

52 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하는 두 함수 $f(n)$, $g(n)$이

$f(1)=2$, $g(n)=n+3$, $f(n+1)=(g\circ f)(n)$을 만족할 때,

$f(100)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

53 함수 $f(x)=\dfrac{5}{3}(x-2)$에 대하여 $f(5)+f(14)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

54 [공통]집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f의 역함수를 g라 할 때, $4g(1)+3g(2)+2g(3)+g(4)$의 최댓값은?[3점]

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

55 함수 $f(x)=x^2-6x\,(x\geq 3)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 (a, b)일 때, $10ab$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

56 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는?[4점]

(가) f는 일대일대응이다. (나) $f(f(1))=1$ (다) $f(2)-f(1)=2$

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

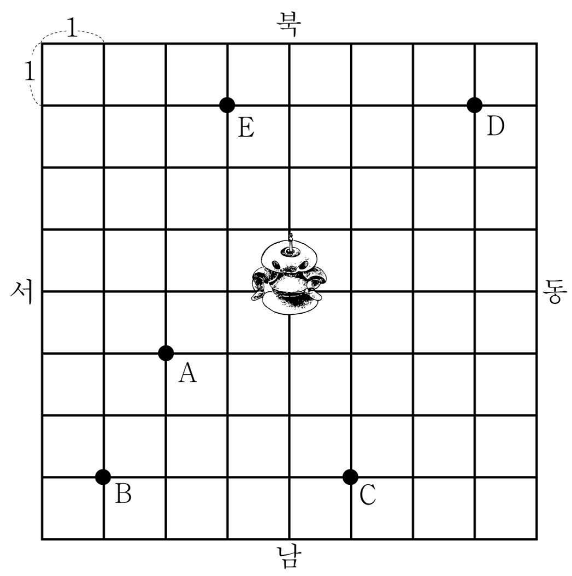
[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

57 [공통]그림과 같이 작은 정사각형의 한 변의 길이가 모두 1인 바둑판 모양의 길에 남쪽을 바라보는 로봇이 있다.

함수 $f(x)=\log_2(x+1)$의 함숫값은 로봇의 움직임을 결정하고, 로봇은 다음 규칙에 따라 움직인다.

(가)함숫값이 자연수인 경우 ・홀수이면 현재위치에서 시계방향으로 90° 만큼 회전한다. ・짝수이면 현재위치에서 시계반대방향으로 90° 만큼 회전한다. (나)함숫값이 자연수가 아닌 경우 ・현재 위치에서 앞으로 1만큼 이동한다.

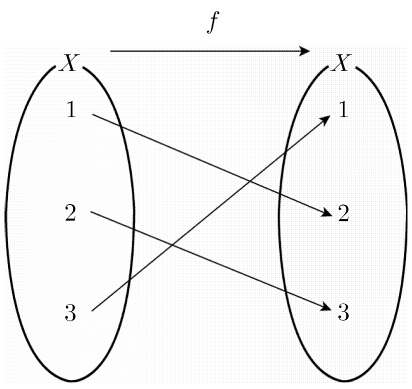
x에 10보다 작은 자연수를 1부터 차례로 입력하여 위와 같은 규칙으로 로봇이 움직일 때, 로봇의 최종 위치를 나타내는 점은?[3점]



① A ② B ③ C
④ D ⑤ E

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

58 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 그림과 같이 주어져 있다.



$f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 할 때, $f^{2010}(2)+f^{2011}(3)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 학력평가]

59 [공통]함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

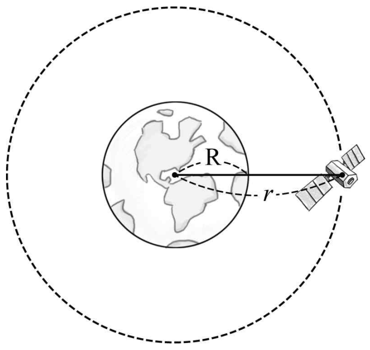
(가) $0 \le x \le 1$일 때, $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$
(나) $f(x)=f(-x)$
(다) $f(x)=f(x+2)$

함수 $g(x)=\dfrac{1}{6}\|x\|$에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 실근의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

60 케플러의 법칙에 의하면 지구의 질량이 $M kg$, 지구의 중심에서 인공위성까지의 거리가 rm일 때 인공위성이 지구 주위를 도는 주기 T는 $T=\sqrt{\dfrac{4\pi^2 r^3}{GM}}$ (단, G는 상수이고 주기의 단위는 초이다.)

이 성립한다고 한다.



지구의 반지름의 길이를 Rm라 할 때 지표면으로부터의 거리가 $\dfrac{R}{10}m$인 인공위성의 주기는 T_1이고, 지표면으로부터의 거리가 $\dfrac{aR}{10}m$인 인공위성의 주기는 T_2이다. $T_2=2\sqrt{2}\,T_1$이 성립할 때, 상수 a의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2009년 5월 학력평가]

61 [공통]두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

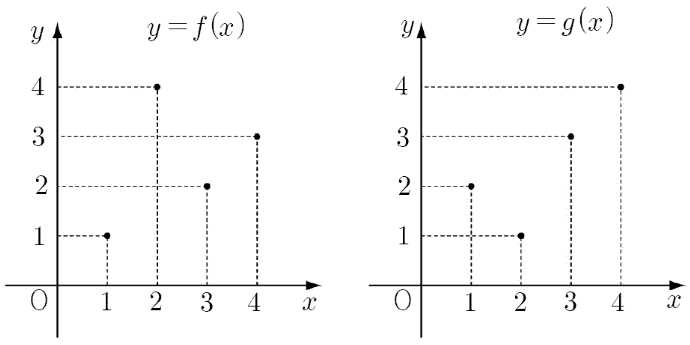
$f(x)=2x-1$, $f^{-1}(x)=g(2x+1)$일 때, $g(5)$의 값은?[3점]

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1

④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

62 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 집합 A에서 A로의 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때, $(g\circ f)(1)+(f\circ g)^{-1}(3)$의 값은?[3점]



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

63 집합 $X=\{2, 3, 6\}$에 대하여 집합 X에서 X로의 일대일 대응, 항등함수, 상수함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$라 하자. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+h(2)$의 값은?[3점]

(가) $f(2)=g(3)=h(6)$
(나) $f(2)f(3)=f(6)$

① 4 ② 5 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2009년 5월 학력평가]

64 [공통] 2이상의 자연수 n에 대하여 n의 양의 약수 중 1이 아닌 가장 작은 약수를 $f(n)$이라 하자. 2이상의 자연수 a, b에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(2a)=2$
ㄴ. $f(a^b)=f(a)$
ㄷ. $a<b$이고 a, b가 서로소이면 $f(ab)=f(a)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

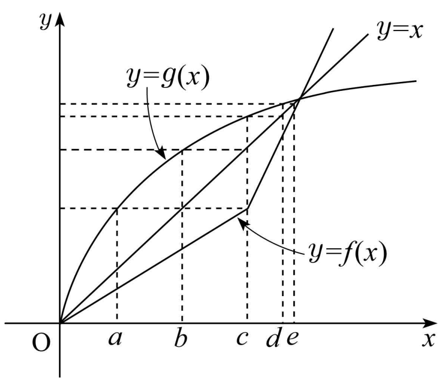
[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

65 함수 $f\left(\frac{2x+1}{3}\right)=\log_2(-6x+4)$에 대하여 $f^{-1}(4)$의 값은?[3점]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

66 그림은 $x\geq 0$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $g^{-1}(f(c))$의 값은?(단, g는 역함수가 존재하는 함수이다.)[3점]



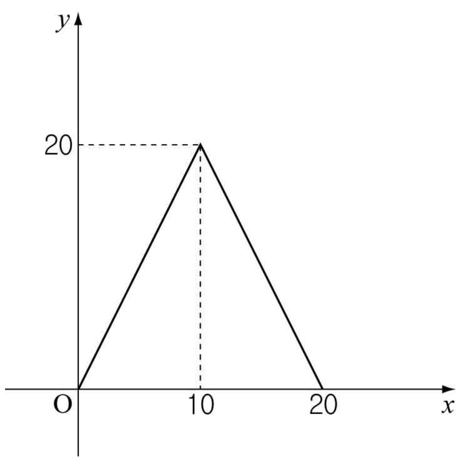
① a ② b ③ c
④ d ⑤ e

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

67 함수 $f(x)=x^2+3x+1$에 대하여 $(f\circ f)(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

68 그래프는 함수 $f(x)=\begin{cases}2x, & (0\le x<10)\\ -2x+40, & (10\le x\le 20)\end{cases}$을 나타낸 것이다.



이때, $\log_{\frac{1}{2}}f(x)<\log_{\frac{1}{2}}f(f(x))$를 만족하는 x에 대하여 모든 정수 x값의 합은?[3점]

① 45 ② 50 ③ 55
④ 60 ⑤ 65

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

69 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 두 함수 $f:X\to X,\ g:X\to X$가 있다.

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. f, g가 모두 항등함수이면 $g\circ f$는 항등함수이다. ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 f, g는 모두 일대일대응이다. ㄷ. $g\circ f$가 항등함수이면 f, g는 모두 항등함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

70 무리함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

71 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 함수 f가 $f:X\to X$일 때, $f(1)+f(-1)=0$이 되는 함수 f의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 9
④ 12 ⑤ 27

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

72 정의역이 $X=\{x\,|\,0\le x\le 2,\ x$는 실수$\}$인 함수 $f(x)=[x]$의 치역의 원소의 개수는?

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

73 [공통]집합 $X=\{-1,0,1\}$일 때,

$G=\{(x,y)|y=f(x),\ x\in x,\ y\in X\}$를 함수 $f:X\to X$의 그래프로 정의한다.

역함수가 존재하는 함수 f의 그래프를 [보기]에서 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $G_1=\{(-1,0),\ (0,0),\ (1,0)\}$
ㄴ. $G_2=\{(-1,\ -1),\ (0,0),\ (1,1)\}$
ㄷ. $G_3=\{(-1,0),\ (0,1),\ (1,\ -1)\}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

74 집합 $X=\{1,3\}$에서 실수 전체의 집합 Y로의 두 함수 $f(x)=ax^2+1,\ g(x)=4x+b$에 대하여 $f=g$일 때, $a+b$의 값은?(단, a,b는 상수이다.)

① -1　② -2　③ -3
④ -4　⑤ -5

[난이도 : ★★☆] [2008년 03월 학력평가]

75 두 함수 $f(x)=|x|-4,\ g(x)=\begin{cases}-x^2+4, & (x\ge 0)\\ x^2+4, & (x<0)\end{cases}$에 대하여

$g(f(k))=3$을 만족하는 실수 k의 값을 $\alpha,\beta\,(\alpha>\beta)$라 하자. 이때 $\alpha-\beta$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 12월 학력평가]

76 함수 f에 대하여 $f^2(x)=f(f(x)),\ f^3(x)=f\left(f^2(x)\right),\ \cdots$ 이라 정의하자. 이때 집합 $X=\{1,2,3\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 두 조건 $f(1)=3,\ f^3=I$(I는 항등함수)를 만족한다. 함수 f의 역함수를 g라 할 때, $g^{10}(2)+g^{11}(3)$의 값은?[4점]

① 4　② 5　③ 6
④ 3　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 학력평가]

77 일차함수 $f(x)=2x+a$에 대하여 $f^{-1}(4)=1,\ f^{-1}(8)=b$일 때, b의 값은?[3점]

① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

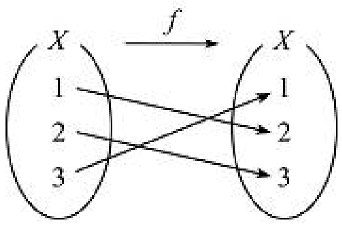
78 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$f(x)=5x+20,\ g(x)=\begin{cases}2x, & (x<25)\\ x+25, & (x\ge 25)\end{cases}$에 대하여

$f\left(g^{-1}(40)\right)+f^{-1}(g(40))$의 값을 구하시오.(단, f^{-1},g^{-1}는 각각 f,g의 역함수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

79 집합 $X=\{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$를 다음과 같이 정의한다.



$f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))(n=1, 2, 3, \cdots)$라 할 때, $f^{100}(1)-f^{200}(3)$의 값은?[4점]

① -2　② 2　③ -1
④ 1　⑤ 0

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

80 [공통]함수 $f(x)=x^2+x-2$에 대하여 $f(f(1))+f(f(-2))$의 값은?[3점]

① -4　② -2　③ 0
④ 2　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

81 두 함수 $f(x)=\sqrt{x-2}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(3)$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

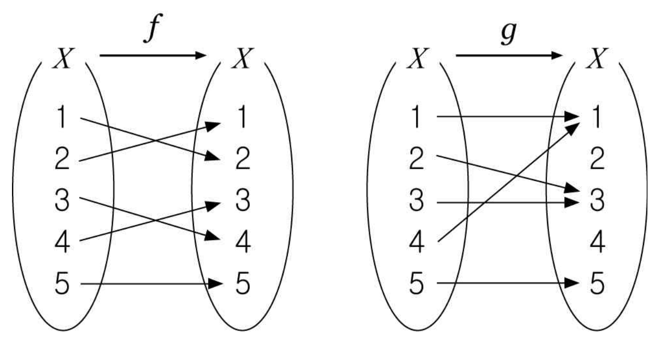
[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

82 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$일 때, 함수 $f: X \to X$에 대하여 $f(x)=-f(-x)$을 만족하는 함수 f의 개수는?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

83 두 함수 f, g가 그림과 같을 때, $g(x)=h(f(x))$를 만족하는 함수 h에 대하여 $g(f(4))+10h(1)$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★★] [2006년 3월 학력평가]

84 양의 실수 전체의 집합 X에서 X로의 일대일대응인 두 함수 f, g에 대하여 $f^{-1}(x)=x^2$, $(f \circ g^{-1})(x^2)=x$일 때, $(f \circ g)(20)$의 값은?(단, f^{-1}, g^{-1}는 각각 f, g의 역함수이다.)[4점]

① $2\sqrt{5}$　② $4\sqrt{10}$　③ 40
④ 200　⑤ 400

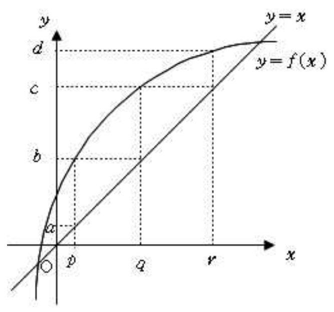
[난이도 : ★☆☆] [2005년 5월 학력평가]

85 함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$의 합성함수가

$\begin{cases}(f\circ g)(x)=\{g(x)\}^2+4 \\ (g\circ f)(x)=4\{g(x)\}^2+1\end{cases}$ 일때, $g(52)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2005년 3월 학력평가]

86 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프가 아래그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)^{-1}(d)$의 값을 구하면?[4점]



① 0 ② a ③ b
④ c ⑤ d

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

87 함수 $f(x)=x^2-2x+2\,(x\geq 1)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 두 교점 사이의 거리는?[3점]

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{5}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 학력평가]

88 [공통]집합 $X=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 함수 f가 $f:X\to X$라 할 때, $\{f(-1)+1\}\{f(1)-1\}\neq 0$을 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오.[3점]

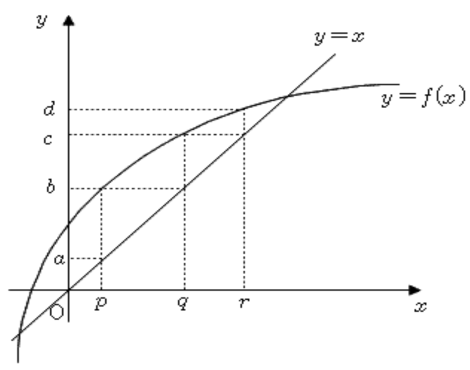
[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

89 [공통]두 함수 $f(x)=5^{3x}$, $g(x)=\frac{1}{3}\log_5 x$에 대하여 $f(g(5))$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

90 두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프가 그림과 같을 때, $(f\circ(f\circ f)^{-1})(d)$의 값은?[4점]



① 0 ② a ③ b
④ c ⑤ d

[난이도 : ★★★]

91 함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$의 합성함수가

$\begin{cases}(f\circ g)(x)=\{g(x)\}^2+4 \\ (g\circ f)(x)=4\{g(x)\}^2+1\end{cases}$ 일 때, $g(52)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 학력평가]

92 [공통]두 함수 $f(x)=2x-1,\ g(x)=x^2+1$에 대하여

$g\left(f^{-1}(-3)\right)$의 값을 구하시오.(단, f^{-1}는 f의 역함수)[3점]

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

93 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$에 대하여,

$f=f^1,\ f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3,\ \cdots,\ f\circ f^n=f^{n+1}$로 나타낼 때,

$f^{2005}(2)$를 구하는 과정이다.

> $f^1(x)=\dfrac{1}{1-x}$
>
> $f^2(x)=\dfrac{1}{1-f^1(x)}=$ [(가)], $f^3(x)=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=$ [(나)], …
>
> 따라서 $f^n(x)=$ [(다)] 이다.
>
> $\therefore f^{2005}(2)=f(2)=-1$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?(단, $x\neq 0,\ x\neq 1$)[4점]

① $\dfrac{x-1}{x}$ x $f^{n+3}(x)$

② $\dfrac{x-1}{x}$ x $f^{n+2}(x)$

③ $\dfrac{x-1}{x}$ $-x$ $f^{n+3}(x)$

④ $\dfrac{1-x}{x}$ x $f^{n+3}(x)$

⑤ $\dfrac{1-x}{x}$ $-x$ $f^{n+2}(x)$

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

94 두 곡선 $y=\sqrt{x-1}+1,\ x=\sqrt{y-1}+1$은 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점 사이의 거리를 구하면?[3점]

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{5}$ ③ 2

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

정답 및 해설

1.함수

중단원 기출문제

1) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 값을 구할 수 있는가?

$f(2)=2$ 이므로 $g(f(2))=g(2)=1$

2) 답 : ②

[해설]

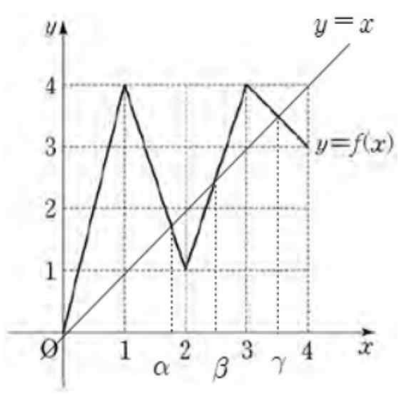
[출제 의도] 합성함수에 관련된 주어진 그래프를 이용하여 이해할 수 있는가?

$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$ 에서

$f(f(a))=f(a)$, $f(f(b))=f(b)$

이때, $f(a)=k$ 라 하면 $f(k)=k$

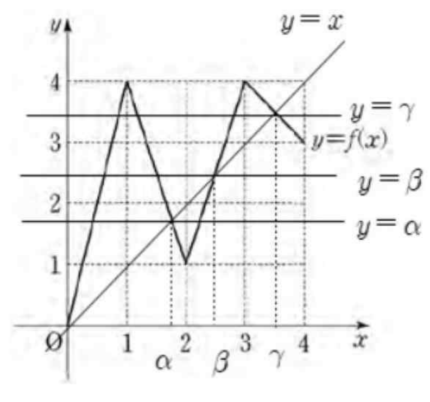
그러므로 k는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표이다.



이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의

x좌표를 위의 그림과 같이 α, β, γ $(0<\alpha<\beta<\gamma)$라 하자.

이제, $f(x)$의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$인 경우를 나타내면 다음과 같다.



(ⅰ) $f(x)=0$인 경우 x의 값은 0이다.

(ⅱ) $f(x)=\alpha$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha$는 그림과 같이세 점에서 만난다.

이때, $x\neq\alpha$인 값을 x_1, x_2 $(x_1<\alpha<x_2)$라 하면 x의 값은

x_1, α, x_2이다.

(ⅲ) $f(x)=\beta$인 경우

함수 $y=f(x)$인 그래프와 직선 $y=\beta$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

이때, $x\neq\beta$인 값을 y_1, y_2 $(y_1<y_2<\beta)$라 하면 x의 값은

y_1, y_2, β이다.

(ⅳ) $f(x)=\gamma$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\gamma$는 그림과 같이 네 점에서 만난다.

이때, $x\neq\gamma$인 값을 z_1, z_2, z_3 $(z_1<z_2<z_3<\gamma)$라 하면

x의 값은 z_1, z_2, z_3, γ이다.

이때, 함수 $g(x)=f(f(x))$가 집합 X에서 X로의 함수이어야 하므로

다음 각 경우로 나눌 수 있다.

① $f(x)$의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$의 값 중 서로 다른 두 값을 갖도록 a, b를 정하는 경우

이 경우 $f(x)=0$, $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, $f(x)=\gamma$인 x의 값은

각각 $0, \alpha, \beta, \gamma$이어야 한다.

즉, 두 수 a, b는 $0, \alpha, \beta, \gamma$에서 서로 다른 두 수를 택해야 하므로

집합 X의 개수는 ${}_4C_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

② $f(x)$의 값이 $0, \alpha, \beta, \gamma$의 값 중 하나의 값만 갖도록 a, b를 정하는 경우

$f(x)=0$일 때는 두 수 a, b를 결정할 수 없다.

$f(x)=\alpha$일 때는 두 수 a, b는 x_1, α, x_2 중 α를 반드시 포함하여

두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는 2이다.

$f(x)=\beta$인 경우 두 수 a, b는 y_1, y_2, β 중 β를 반드시 포함하여

두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는 2이다.

$f(x)=\gamma$인 경우 두 수 a, b는 z_1, z_2, z_3, γ 중 γ를 반드시 포함하여

두 수를 택해야 하므로 집합 X의 개수는 3이다.

그러므로 집합 X의 개수는 7이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 집합 X의 개수는 $6+7=13$

3) 답 : ⑤

[해설]

$f^{-1}(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$f(2)+f^{-1}(2)=4+3=7$

4) 답 : ⑤

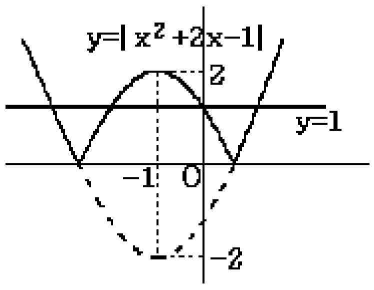
[해설]

$x^2+2x-1=(x+1)^2-2$ 이므로

$y=|x^2+2x-1|$ 의 그래프는 $y=(x+1)^2-2$ 의 그래프의 x축 아래 부분을

x축에 대하여 대칭이동한 것으로 오른쪽과 같다.

그러므로 직선 $y=1$과의 교점의 개수는 4 이다.



[*answ] ⑤

5) 답 : ④

정답 및 해설

[해설]

ㄱ. $f_2 \circ f_3$는 270° 회전 후 다시 180° 회전한 것이므로

결국 450°, 곧 90° 회전시킨 것과 같다.

$\therefore\ f_2 \circ f_3 = f_1$ (거짓)

ㄴ. f_1^{-1}은 -90° 회전이고, f_3은 270° 회전이므로

$f_1^{-1} = f_3$ (참)

ㄷ. $f_1 \circ f_3$은 270° 회전 후 90° 회전했으므로

결국 360° 회전한 셈이다.

$f_3 \circ f_1$은 90° 회전 후 270° 회전했으므로

역시 360° 회전한 것이다.

$\therefore\ f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

6) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에 10을 대입하면

$$f(10)=\frac{10+1}{10-1}=\frac{11}{9}$$

$$\therefore\ (f \circ f)(10)=f(f(10))=f\left(\frac{11}{9}\right)$$

$$=\frac{\frac{11}{9}+1}{\frac{11}{9}-1}=\frac{\frac{20}{9}}{\frac{2}{9}}=10$$

7) 답 : ④

[해설]

오전의 체감 온도를 $T_1 = t_1 - 4\sqrt{v_1}+12I_1$라 놓으면

오후의 체감 온도 T_2는 $t_2 = t_1+6,\ v_2 = 4v_1,\ I_2 = I_1$에서

$$T_2 = t_1+6-4\sqrt{4v_1}+12I_1 = t_1+6-8\sqrt{v_1}+12I_1$$

$T_1 = T_2$에서 $t_1 - 4\sqrt{v_1}+12I_1 = t_1+6-8\sqrt{v_1}+12I_1$

$$4\sqrt{v_1}=6,\ \sqrt{v_1}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ v_1 = \frac{9}{4}=2.25$$

8) 답 : ③

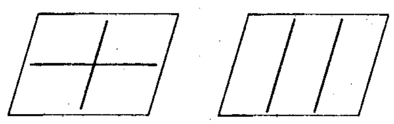
[해설]

아래에서

① 그림에서 서로 다른 2개의 직선을 그려서 나누어진 영역의 최솟값은 3,

최댓값은 4이므로

$f(2)=3,\ g(2)=4$ ∴ 참

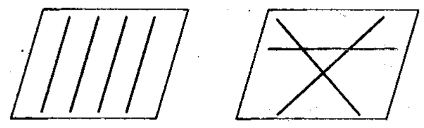


② 그림에서 서로 다른 n개의 직선을 그어 나누어진 수가 최소가 되려면

n개의 직선을 모두 평행하게 그어야 하므로

이때 나누어진 직선의 수는 $n+1$개이다.

즉 $f(n+1)=n+1$ ∴ 참

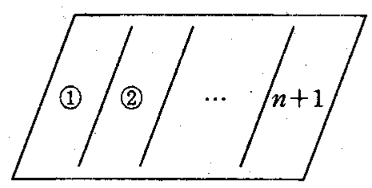


③ 그림에서 $f(4)=5,\ g(3)=7$이므로

$g(3)>f(4)$

따라서 모든 n에 대하여 $g(n)\le f(n+1)$이 성립하는 것은 아니다.

∴ 거짓



9) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=[x[x]]$이므로

ㄱ. $x \ge 0$일 때, $[x]\ge 0$이므로 $x[x]\ge 0$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]\ge 0$

$x<0$일 때, $[x]<0$이므로 $x[x]>0$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]\ge 0$

∴ 옳다.

ㄴ. $n \le x < n+1$일 때, $[x]=n$

또 $n^2 \le x[x] < n^2+n$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]=n^2$ 또는 n^2+1 또는 n^2+n-1

즉, $n(\{f(x)|n \le x < n+1\})=n$

∴ 옳다.

ㄷ. $-n \le x < -n+1$, (n은 자연수 일 때)

또 $n^2 \ge x[x] > n^2-n$

$\therefore\ f(x)=[x[x]]=n^2-n,\ n^2-n+1,\ n^2-1,\ n^2$

즉, $n(\{f(x)|-n \le x < -n+1\})=n+1$

∴ 옳다.

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

10) 답 : 5

[해설]

역함수의 성질에서

$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

즉 $f^{-1}(5)=2$이면, $f(2)=5$이다.

따라서, $f(x)=ax^3+b$에서

$f(2)=8a+b=5$

11) 답 : ①

[해설]

$y=(g \circ f)(x)=g(f(x))$이고 $y=f(x)$의 그래프를 보면

[1] $x<1$일 때,

$f(x)=1$이므로

$y=(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=1$

[2] $1 \le x$일 때,

$f(x)=3$이므로

$y=(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3)=1$

이상에서 모든 x에 대하여 $y=(g \circ f)(x)=1$이다.

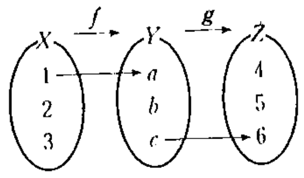
즉, 그래프는 ①과 같다.

12) 답 : ③

[해설]

$f(1)=a$ 이므로

$f(3)=b$ 이거나 $f(3)=c$



여기에서 $f(3)=b$ 이면

$f(2)=c$ ($\because$ f가 일대일 대응)

이때, $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(c)=6$ (모순)

$\therefore$ $f(3)=c$

13) 답 : ②

[해설]

ㅣ. 10이하의 소수는 2, 3, 5, 7이므로 $f(10)=4$

ㅣㅣ. $f(x)<[x]\le x$ 이므로 $f(x)<x$

ㅣㅣㅣ. $x=2$ 인 경우 $f(3)=2,\ f(2)=1,\ f(3)\ne f(2)$

따라서 옳은 것은 ㅣ, ㅣㅣ 이다.

14) 답 : ②

[해설]

$f(x)=y=\dfrac{x-1}{x-2}$ 의 역함수를 구하기 위해 x, y를 서로 바꾸면

$$x=\frac{y-1}{y-2}\Rightarrow x(y-2)=y-1$$

$$\Rightarrow xy-2x=y-1$$

$$\Rightarrow (x-1)y=2x-1$$

$$\Rightarrow y=\frac{2x-1}{x-1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

$\therefore$ $a=2,\ b=-1,\ c=-1$

$\therefore$ $a+b+c=0$

15) 답 : ①

[해설]

임의의 정수 n에 대하여 $n\le x<n+1$ 이면 $[x]=n$

$-n-1<-x\le -n$ 에서 $-n-1<-x<-n$ 이면

$[-x]=-n-1$, $-x=-n$ 이면 $[-x]=-n$

$n<x<n+1$ 일 때, $f(x)=n+(-n-1)=-1$

$x=n$ 일 때, $f(x)=n+(-n)=0$

따라서, $f(x)$의 치역은 $\{0,\ -1\}$

16) 답 : ③

[해설]

ㅣ. 10의 약수: 1, 2, 5, 10

$f(10)=1+2+5+10=18$

ㅣㅣ. $f(n)=n+1$ 이면 n의 약수가 $1, n$뿐이므로 n은 소수이다.

ㅣㅣㅣ. $m=n=3$ 일 때, $f(3)=4,\ f(9)=1+3+9=13$

$\therefore$ $f(9)\ne f(3)f(3)$

17) 답 : ①

[해설]

지난 달의 유색 생물의 수를 X, 무색 생물의 수는 Y라 하면

$$\frac{Y}{X+Y}\times 100=10$$

따라서 $\dfrac{Y}{X+Y}=\dfrac{1}{10}$ 에서 $X=9Y$

한편, 이달의 유색 생물의 수는 $2X$, 무색 생물의 수는 $3Y$이므로

이번 달의 생물학적 정수부분은

$$\frac{3Y}{2X+3Y}\times 100=\frac{3Y}{2\cdot 9Y+3Y}\times 100=\frac{1}{7}\times 100 \fallingdotseq 14.3\%$$

18) 답 : 18

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{71}{5}-\dfrac{19}{15}x, & (x<12)\\ 1-2\log_3(x-9), & (x\ge 12)\end{cases}\quad\cdots ①$$

$f(x)$의 역함수를 $g^{-1}(x)=f(x)\ldots$②

② 에서 $f^{-1}(x)=g(x)$ 이므로 $g^{-1}(x)=f(x)$

$(g\circ g\circ g\circ g\circ g)(x)=-3$ 에서

$x=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(-3)$

$=(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(-3)=(f\circ f\circ f\circ f)(18)$

$=(f\circ f\circ f)(-3)$

$=(f\circ f)(18)=f(-3)=18$

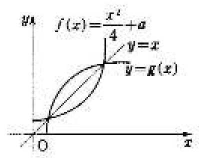
19) 답 : ①

[해설]

함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수이므로 직선 $y=x$와 대칭이다.

따라서, $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 교점은

$y=f(x)$와 $y=x$와의 교점과 같다.



곧, $\dfrac{x^2}{4}+a=x$가 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$x^2-4x+4a=0$ 에서

$$\frac{D}{4}=4-4a>0$$

$\therefore$ $a<1$

그런데 $x\ge 0$ 이므로 음이 아닌 실근을 갖기 위해서는 $a\ge 0$ 이어야 한다.

$\therefore$ $0\le a<1$

20) 답 : ⑤

[해설]

$g(g(x))=x,\ g(0)=1$ 에서 $g(g(0))=0,\ g(1)=0$

$g\circ g$는 항등함수이므로

$g=g^{-1}$ 즉, $g(x)$는 $y=x$의 그래프에 대칭인 함수이다.

따라서, 두 점 $(0, 1), (1, 0)$ 을 지나고 직선 $y=x$에 대칭인 함수는

두 점을 지나는 직선, 즉 일차함수이다.

$\therefore$ $g(x)=-x+1$

$\therefore$ $g(-1)=2$

정답 및 해설

21) 답 : ②

[해설]

$100km$의 구간에 $100m$의 간격으로 4대씩 서 있다고 생각한다.

1개 차선의 대수는 $\frac{100000}{100}=1000$차선이 4개이므로

$1000\times4=4000$

22) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=2x-1$

$(h\circ g\circ f)(x)=h(x)$이므로

$h(g(f(x)))=h(x)$

$f(x)=2x-1$에서 $h(g(2x-1))=h(x)\rightarrow g(2x-1)=x$

$x=2$로 놓으면 $g(3)=2$

23) 답 : ④

[해설]

$n=2^p\cdot k$에서

ⅰ) n이 홀수이면 k가 홀수이므로 2^p이 홀수

$\therefore\ p=0$ 즉, $f(n)=0$

ⅱ) $f(8)=f(2^3\cdot1)=3,\ f(24)=f(2^3\cdot3)=3$

$\therefore\ f(8)=f(24)$

ⅲ) $f(n)=3$에서 $n=2^3\cdot k$홀수인 k는 무한하므로

n은 무한히 존재한다.

24) 답 : ⑤

[해설]

비과세 소득은 $Y\times\frac{a}{100}$원이고

나머지 금액 $Y\left(1-\frac{a}{100}\right)$에 대한 $b\%$의 세금을 납부하고 남은 금액은

$Y\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)$원이다.

$\therefore\ S=Y\times\frac{a}{100}+Y\left(1-\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)-C$

$=\left(1+\frac{a}{100}\cdot\frac{b}{100}-\frac{b}{100}\right)Y-C$

25) 답 : ⑤

[해설]

$f(3)=4$ 이므로

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=5$

26) 답 : ⑤

[해설]

$f(2)=4$, $f(3)=1$ $f(1)=3$이고

$f(2)+(f\circ f)(3)=4+f(1)=4+3=7$

27) 답 : ④

[해설]

$f^{-1}(5)=k$라고 하면 $f(k)=5$

$f(k)=2k-3=5\Leftrightarrow k=4$

$\therefore\ f^{-1}(5)=4$

28) 답 : ①

[해설]

$g(2)=4,\ h(2)=1$이므로

$f(g(2))=f(4)=16,\ g(h(2))=g(1)=1$

$\therefore\ (f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)=17$

29) 답 : ①

[해설]

$g(2)=4$, $h(2)=1$ 이므로

$f(g(2))=f(4)=16$, $g(h(2))=g(1)=1$

$\therefore\ (f\circ g)(2)+(g\circ h)(2)=17$

30) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]순열과 조합

$f(1)=7$이고, 함수 f는 일대일 대응이므로

$X=\{2,3,4,5,6,7\}$에서 $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$으로의 일대일 대응의 개수를 구하면 된다.

$k\geq2$이면 $f(k)\leq k$이므로 각 경우를 구해 보면

2에 대응되는 수는 1 또는 2 중에 하나를 선택하는 경우이므로

${}_2C_1$

3에 대응되는 수는 3보다 작거나 같은 수 중에서 2에 대응되는 수를 제외한

나머지 두 개의 숫자에서 한 개를 선택해야 하므로 ${}_2C_1$

마찬가지로 4, 5, 6인 경우를 생각하면 각각의 경우의 수는 모두 ${}_2C_1$ 가지이고,

7에 대응되는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에 대응된 수를 제외한 수(한 개)이다.

이때, 위의 사건이 동시에 일어나므로 구하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times1=2\times2\times2\times2\times2=32$ (가지)

31) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 함숫값을 구한다.

두 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}-3$, $g(x)=x+1$에서

$f(3)=\sqrt{3+1}-3=-1$

$g(-1)=0$

따라서 $(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(-1)=0$

32) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 역함수 이해하기

$f(2)=-1$, $f^{-1}(-3)=3$이므로

$f(2)+f^{-1}(-3)=-1+3=2$

33) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 역함수의 성질을 이용하여 역함수의 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

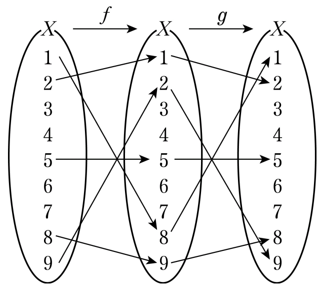
곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 점 $(1,\ 3)$에서 만나므로

$f(1)=3$이고 $g(1)=3$이다.
이때 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로
$g(1)=3$에서 $f(3)=1$
$f(1)=\sqrt{a+b}+1=3$에서
$a+b=4$ …… ㉠
$f(3)=\sqrt{3a+b}+1=1$에서
$3a+b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡에 의해
$a=-2$, $b=6$
그러므로 $f(x)=\sqrt{-2x+6}+1$
$g(5)=k$라 하면 $f(k)=5$이므로
$f(k)=\sqrt{-2k+6}+1=5$에서 $\sqrt{-2k+6}=4$
$-2k+6=16$
$k=-5$
따라서 $g(5)=-5$

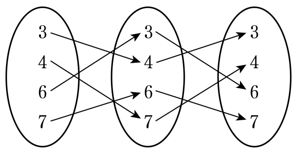
34) 답 : 3
[해설]
[출제 의도] 합성함수의 값 추론하기
$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(-2)=-2+a$
$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(a)$
(i) $a<2$일 때 $g(a)=a-2$이므로
$(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=-2+a+a-2=10$에서 $a=7$이므로
조건에 맞지 않는다.
(ii) $a\ge 2$일 때 $g(a)=a^2$이므로
$(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=-2+a+a^2=10$에서 $a=-4$ 또는 $a=3$
$a\ge 2$이므로 $a=3$
(i), (ii)에 의하여 $a=3$

35) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 항등함수와 상수함수의 뜻을 이해하여 함수를 추론한다.
함수 $f:X\to X$가 일대일 대응이 아니라고 가정하면
합성함수 $g\circ f:X\to X$는
일대일 대응이 아니게 되므로 항등함수도 아니다.
이런 경우 조건 (나)를 만족시키지 않게 되므로
함수 f는 일대일 대응이어야 한다.
마찬가지 이유로 함수 g도 일대일 대응이다.
두 일대일 대응 f, g에 대하여
$\sum_{n=1}^{9} f(n)=1+2+\cdots+9=45$,
$\sum_{n=1}^{9} g(n)=1+2+\cdots+9=45$이므로
$\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9} f(n)+\sum_{n=1}^{9} g(n)=45+45=90$
조건 (다)에서 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하므로
$f(x)+g(x)=k$ (k는 상수)라 하자.
$\sum_{n=1}^{9}\{f(n)+g(n)\}=\sum_{n=1}^{9} k=9k$이므로
$9k=90$에서 $k=10$

모든 $x\in X$에 대하여
$f(x)+g(x)=10$ …㉠
조건 (가)에서
$f(1)=8$이므로 조건 (나)에 의하여
$g(8)=1$
$g(8)=1$이므로 ㉠에 의하여
$f(8)=9$
$f(8)=9$이므로 조건 (나)에 의하여
$g(9)=8$
$g(9)=8$이므로 ㉠에 의하여
$f(9)=2$
$f(9)=2$이므로 조건 (나)에 의하여
$g(2)=9$
$g(2)=9$이므로 ㉠에 의하여
$f(2)=1$
$f(2)=1$이므로 조건 (나)에 의하여
$g(1)=2$
$f(5)=a$라 하면
조건 (나)에 의하여
$g(a)=5$
$g(a)=5$이면 ㉠에 의하여
$f(a)=5$
$f(a)=5$이면 조건 (나)에 의하여
$g(5)=a$
이때 $10=f(5)+g(5)=a+a=2a$이므로
$a=5$
즉 $f(5)=5$이고 ㉠에 의하여 $g(5)=5$
이상의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



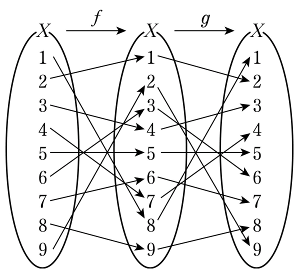
조건 (가)에 의하여 $f(3)\ne 6$이므로
(i) $f(3)=3$이면 조건 (나)에 의하여
$g(3)=3$
㉠에 의하여 $g(3)=7$이므로이 경우는 불가능하다.
(ii) $f(3)=7$이면 조건 (나)에 의하여
$g(7)=3$
$g(7)=3$이면 ㉠에 의하여 $f(7)=7$
함수 f가 일대일 대응이 아니게 되므로 이 경우는 불가능하다.
(iii) $f(3)=4$이면 조건 (나)에 의하여 $g(4)=3$
$g(4)=3$이면 ㉠에 의하여 $f(4)=7$
$f(4)=7$이면 조건 (나)에 의하여 $g(7)=4$
$g(7)=4$이면 ㉠에 의하여 $f(7)=6$
$f(7)=6$이면 조건 (나)에 의하여 $g(6)=7$
$g(6)=7$이면 ㉠에 의하여 $f(6)=3$
$f(6)=3$이면 조건 (나)에 의하여 $g(3)=6$
(iii)의 대응을 그림으로 표현하면 다음과 같다.



따라서

$(f \circ f \circ f)(7) = f(f(6)) = f(3) = 4$

[참고] 함수 f와 g는 다음과 같다.



36) 답 : 209

[해설]

출제 의도] 순열과 조합을 활용하여 문제 해결하기

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을 각각 $A=\{1,\ 4\}$, $B=\{2,\ 5\}$, $C=\{3\}$이라 하자.

(i) $f(4)=3$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$(k는 자연수)이므로 집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3!\times2\times2=24$
3	0	0	$2^3=8$
0	3	0	$2^3=8$
0	0	3	$1^3=1$

$\therefore\ 24+8+8+1=41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$(k는 자연수)이므로 집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3\times2=6$
2	1	0	$3\times2^2\times2=24$
0	2	1	$3\times2^2=12$

$\therefore\ 2\times(6+24+12)=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$(k는 자연수)이므로 집합 A, B, C의 원소 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3\times2^2\times2=24$
2	0	1	$3\times2^2=12$
0	1	2	$3\times2=6$

$\therefore$

$2\times(24+12+6)=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

【 다른 풀이 】

(i) $f(4)=3$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 2)$, $(3,\ 3,\ 3)$, $(4,\ 4,\ 4)$, $(5,\ 5,\ 5)$와 $(1,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 5)$, $(2,\ 5,\ 5)$와 $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$이고, 각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는

$5\times\frac{3!}{3!}+4\times\frac{3!}{2!}+4\times3\neq41$

(ii) $f(4)=1$ 또는 $f(4)=4$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 4,\ 4)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 5,\ 5)$, $(4,\ 4,\ 5)$와 $(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 5)$, $(2,\ 3,\ 5)$이고, 각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는 $8\times\frac{3!}{2!}+3\times3\neq42$

$\therefore\ 42\times2=84$

(iii) $f(4)=2$ 또는 $f(4)=5$인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은 $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 5,\ 5)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 5)$, $(3,\ 4,\ 4)$, $(4,\ 5,\ 5)$와 $(1,\ 2,\ 5)$, $(1,\ 3,\ 4)$, $(2,\ 4,\ 5)$이고, 각 순서쌍을 이루는 수들을 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$이 되도록 나열하는 방법의 수는 $8\times\frac{3!}{2!}+3\times3\neq42$

$\therefore\ 42\times2=84$

따라서 구하는 함수의 개수는 $41+84+84=209$

37) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 일대일함수의 정의를 이해하여 조건에 맞는 함숫값을 구한다.

함수 $f(x)$가 일대일함수이고 $f(2)=4$이므로

4가 아닌 집합 Y의 서로 다른 두 원소 a, b에 대하여

$f(1)=a$, $f(3)=b$로 놓을 수 있다.

$f(1)+f(3)$의 최댓값은 $a+b$의 최댓값과 같다.

그런데 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$일 때 $a+b$가 최대이다.

따라서 $f(1)+f(3)$의 최댓값은 5이다.

38) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

함수 $g(x)$는 자연수 x를 4로 나눈 나머지이므로 함수 $g(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

i) $m=1$인 경우, 함수 $f(x)=x$이므로

합성함수 $(g\circ f)(x)=g(x)$이다.

그러므로 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은

$\{0, 1, 2, 3\}$이다.

ii) $m=2$인 경우, 함수 $f(x)=2x$이므로

합성함수 $(g\circ f)(x)=$ ($2x$를 4로 나눈 나머지) 이다.

그런데 $2x$가 2의 배수이고 2의 배수를 4로 나눈 나머지는 0 또는 2이므로

합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 2\}$이다.

iii) $m=3$인 경우, 함수 $f(x)=3x$이므로

합성함수 $(g\circ f)(x)=$ ($3x$를 4로 나눈 나머지)

이다.

그런데 $3x$는 3의 배수이고 3의 배수를 4로 나눈 나머지는 0, 1, 2, 3이므로 합성함수

$(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$이다.

iv) $m=4$인 경우, 함수 $f(x)=4x$이므로

합성함수 $(g\circ f)(x)=$ ($4x$를 4로 나눈 나머지)

이다.

그런데 $4x$가 항상 4의 배수이므로 4로 나눈 나머지는 0이다.

즉, 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

이처럼 m이 4의 배수가 아닌 경우에는 치역의 원소의 개수가 2이상이다.

하지만 $m=4, 8, 12, 16, \cdots$ 과 같이 m이 4의 배수인 경우에는 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역은 $\{0\}$이다.

따라서 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은 4이다.

39) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 성질 이해하기

조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역은 $X=\{1, 2, 3, 4\}$이고

조건 (나)와 $f(1)+f(4)=7$에 의하여

$f(1)=4$, $f(2)=1$, $f(3)=2$, $f(4)=3$

따라서 $f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

40) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 성질을 이해하여 주어진 식의 미정계수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

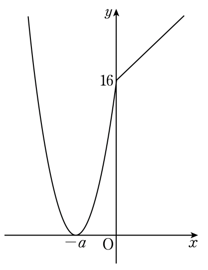
합성함수 $(g\circ f)(x)=\begin{cases} x^2+2ax+16, & (x<0) \\ x+16, & (x\ge 0)\end{cases}$이다.

$a\le 0$이면 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y \mid y\ge 16\}$이므로

문제의 치역과 달라 $a>0$이어야 한다.

$y=x^2+2ax+16$의 꼭짓점의 x좌표가 음수이므로

합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y \mid y\ge 0\}$이기 위해서는 꼭짓점의 y좌표가 0이다.



$y=x^2+2ax+16=(x+a)^2+16-a^2$ 에서

$16-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 4$

$a>0$이므로 $a=4$

41) 답 : 64

[해설]

[출제 의도] 곱의 법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구한다.

함수 f가 집합 $X=\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수라고 하자.

$|f(x)+f(-x)|=1$

$\Leftrightarrow$ $f(x)+f(-x)=1$ 또는 $f(x)+f(-x)=-1$이므로

$x>0$ 인 X의 원소 x에 대하여 다음이 성립한다.

i) $f(x)=1$일 때, $f(-x)=-2$

ii) $f(x)=2$일 때

$f(-x)=-3$ 또는 $f(-x)=-1$

iii) $f(x)=3$일 때, $f(-x)=-2$

따라서 $f(1)$과 $f(-1)$을 대응시키는 경우의 수는 4이고,

$f(2)$와 $f(-2)$를 대응시키는 경우의 수와

$f(3)$와 $f(-3)$을 대응시키는 경우의 수는 각각 4이므로

조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 $4\times4\times4=64$이다.

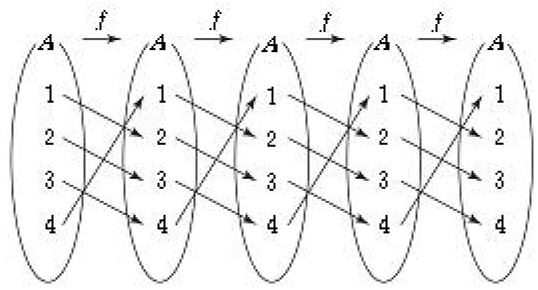
42) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 값 추론하기

주어진 함수의 정의에 따라 대응관계를 나타내면

그림과 같다.



$f^4(x)=x$이므로

$f^{2012}(2)=f^{4\times503}(2)=2$

$f^{2013}(3)=f^{4\times503+1}(3)=f^1(3)=4$

따라서 $f^{2012}(2)+f^{2013}(3)=2+4=6$

43) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 두 점 사이의 거리 구하기

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{OP}^2+\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=(x^2+y^2)+\{(x-3)^2+y^2\}+\{x^2+(y-6)^2\}$

$=3x^2-6x+3y^2-12y+45$

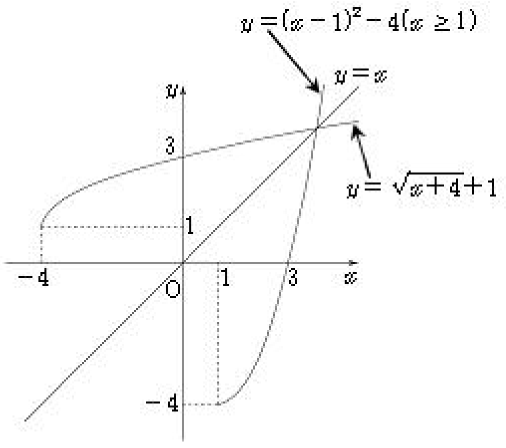
$=3(x-1)^2+3(y-2)^2+30$

따라서 $x=1, y=2$일 때, 최솟값은 30

44) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 무리함수의 그래프의 성질 이해하기



그림에서 $a=4, b=1$이므로

$f(x)=\sqrt{x+4}+1$이고 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)=(x-1)^2-4$ $(x\ge 1)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

$(x-1)^2-4=x,\ x^2-3x-3=0$

$\therefore\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\ \because\ x\ge 1)$

$\therefore\ (p,\ q)=\left(\dfrac{3+\sqrt{21}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$

따라서 $p+q=3+\sqrt{21}$

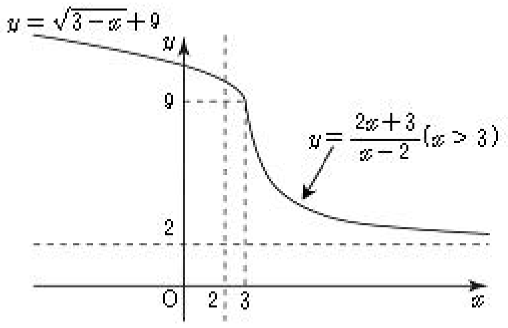
45) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질을 알고 문제 해결하기

(가)에서 치역이 $\{y|y>2\}$이고,

(나)에서 함수 f는 일대일함수이므로 주어진 함수의 그래프는 그림과 같다.



$f(3)=9$이므로 $a=9$

$f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$

$f(2)f(k)=10f(k)=40$

$\therefore\ f(k)=4$

$\dfrac{2k+3}{k-2}=4$

$2k+3=4k-8$

따라서 $k=\dfrac{11}{2}$

46) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)=-2$

47) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]일차함수의 함숫값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=2x+5$에서 $f(1)+f(2)=7+9=16$

48) 답 : 25

[해설]

[출제 의도]조건을 만족하는 함수의 개수를 구할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x)$가 집합 A의 모든 원소 x에 대하여

$f(-x)=-f(x)$를 만족하므로

$f(-2)=-f(2),\ f(-1)=-f(1),\ f(0)=0$이다.

$f(-2)$와 $f(-1)$이 될 수 있는 값은 각각 5가지이므로

함수 f의 개수는 $5\times 5=25$이다.

49) 답 : ①

[해설]

$f(n)=f(n^2)$을 만족하는 $f(n)$의 값은 $0,1,5,6$이므로

모든 $f(n)$의 값들의 합은 12이다.

50) 답 : 37

[해설]

[출제 의도]합성함수의 함숫값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=2x+3$에서 $f(2)=7,\ f(7)=17$이므로

$(f\circ f\circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(7))=f(17)=37$

51) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]함수와 역함수의 뜻을 이해하고 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 함수 $f,\ g$의 정의에 의해서

$f(1)=3,\ f(2)=9,\ f(3)=7,\ f(4)=1$

$g(1)=7,\ g(2)=9,\ g(3)=3,\ g(4)=1$

$g^{-1}(1)=4,\ f^{-1}(7)=3$이므로

$(f\circ g^{-1})(1)+(g\circ f^{-1})(7)=f(g^{-1}(1))+g(f^{-1}(7))$

$=f(4)+g(3)=1+3=4$

52) 답 : 299

[해설]

$f(1)=2,\ f(n+1)=g(f(n))=f(n)+3$

$f(n+1)-f(n)=3$이므로

$f(n)=2+3(n-1)=3n-1$

$\therefore\ f(100)=299$

53) 답 : 25

[해설]

[출제 의도]주어진 함수의 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

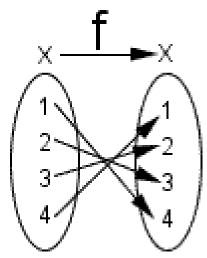
$x=5$를 대입하면, $f(5)=\dfrac{5}{3}\times 3=5$

$x=14$를 대입하면, $f(14)=\dfrac{5}{3}\times 12=20$

$\therefore\ f(5)+f(14)=5+20=25$

54) 답 : ③

[해설]
X에서 X로의 함수 f의 역함수가 g이므로
두 함수 f, g는 모두 일대일 대응이 된다.
즉, $g(1), g(2), g(3), g(4)$는 X의 원소 1, 2, 3, 4와 하나씩 대응된다.
따라서 $4g(1)+3g(2)+2g(3)+g(4)$의 최댓값은
$g(1)=4,\ g(2)=3,\ g(3)=2,\ g(4)=1$일 때 이므로
최댓값은 30이다.



55) 답 : 490
[해설]
[출제 의도]역함수를 이해하고 문제 해결하기
함수 $y=x^2-6x\,(x\geq 3)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점은
함수 $y=x^2-6x\,(x\geq 3)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.
그러므로 이차 함수 $y=x^2-6x$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면
$x^2-6x=x$
$\Leftrightarrow x^2-7x=0$
$\Leftrightarrow x(x-7)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x=7$이다.
그런데 $x\geq 3$이므로 $x=7$이다.
따라서 $a=b=7$이므로 $10ab=490$

56) 답 : ①
[해설]
(1) $f(1)=1$이면 $f(2)=3$이므로 $4\neq 24$
(2) $f(1)=3$이면 $f(3)=1,\ f(2)=5$이므로 $3\neq 6$
(3) $f(1)=4$이면 $f(4)=1,\ f(2)=6$이므로 $3\neq 6$
(4) $f(1)=2$ 또는 $f(1)=5$ 또는 $f(1)=6$이면 주어진 조건을 만족하는 함수 f는 존재하지 않는다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는 36이다.

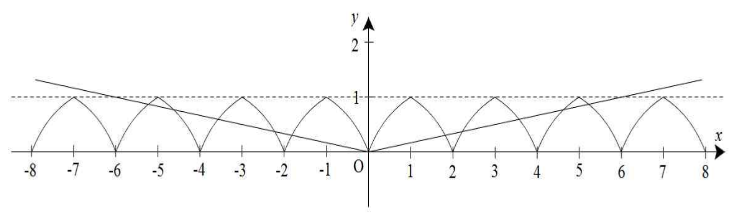
57) 답 : ②
[해설]

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1	$\log_2 3$	2	$\log_2 5$	$\log_2 6$	$\log_2 7$	3	$\log_2 9$	$\log_2 10$
움직임	서	$+1$	남	$+1$	$+1$	$+1$	서	$+1$	$+1$

위의 표에 의해서 로봇의 최종위치는 B이다.

58) 답 : 3
[해설]
[출제 의도]함수의 합성을 이해하고 문제 해결하기
$f(1)=2,\ f(2)=3,\ f(3)=1$이므로,
$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$이다.
같은 방법으로
$f^3(2)=2,\ f^3(3)=3$이므로
$f^3(x)=x$이다.
그러므로 $f^3=I$(항등함수)이므로
$f^{2010}(2)=\left(f^3\right)^{670}(2)=I(2)=2,$
$f^{2010}(3)=f\left(\left(f^3\right)^{670}(3)\right)=f(I(3))=f(3)=1$이다.
따라서, $f^{2010}(2)+f^{2011}(3)=2+1=3$

59) 답 : 11
[해설]



위의 그림에서 교점은 11개이다.

60) 답 : 12
[해설]
[출제 의도]타교과와 관련된 수학적 내용을 이해하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.
지표면에서 거리가 $\dfrac{R}{10}(m)$인 인공위성은
지구 중심에서 거리가 $\left(1+\dfrac{1}{10}\right)R(m)$이므로
주기 T_1은 $T_1=\sqrt{\dfrac{4\pi^2\left(\dfrac{11}{10}R\right)^3}{GM}}$
지표면에서 거리가 $\dfrac{aR}{10}(m)$인 인공위성은 지구 중심에서
거리가 $\left(1+\dfrac{a}{10}\right)R(m)$이므로
주기 T_2는 $T_2=\sqrt{\dfrac{4\pi^2\left\{\left(\dfrac{a+10}{10}\right)R\right\}^3}{GM}}$
$T_2=2\sqrt{2}\,T_1$에서 $T_2^2=8T_1^2$
$\left(\dfrac{a+10}{10}\right)^3=8\times\left(\dfrac{11}{10}\right)^3$
$(a+10)^3=22^3 \Leftrightarrow a+10=22$
$\therefore\ a=12$

61) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]역함수의 정의 이해하기
$g(5)=f^{-1}(2)=k$라 하면
$f(k)=2$이므로 $k=\dfrac{3}{2}$
$\therefore\ g(5)=\dfrac{3}{2}$

62) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]합성함수와 역함수를 이해하기
두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프로부터

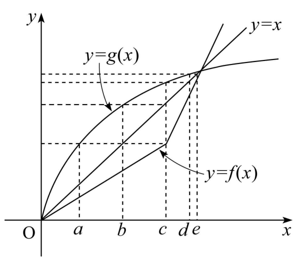
$f(1)=1,\ g(1)=2,\ g^{-1}(4)=4,\ f^{-1}(3)=4$이다.
그러므로 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=2$이고
$(f\circ g)^{-1}(3)=(g^{-1}\circ f^{-1})(3)=g^{-1}(f^{-1}(3))$
$g^{-1}(4)=4$이다.
따라서 $(g\circ f)(1)+(f\circ g)^{-1}(3)=2+4=6$

63) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]일대일 대응, 항등함수, 상수함수를 이해하기
$g(x)$가 항등함수이므로 $g(3)=3$이고
$f(2)=h(6)=3$이다.
한편, $f(x)$가 일대일 대응이고 $f(2)=3$이므로
$f(2)f(3)=f(6)$이 성립하려면 $f(3)=2$이어야 한다.
또한 $h(x)$가 상수함수이므로 $h(2)=3$이다.
따라서 $f(3)+h(2)=2+3=5$

64) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]약수와 배수의 성질을 이용하여 추론하기
ㄱ. $2a$의 1이 아닌 가장 작은 양의 약수는 2이므로 $f(2a)=2$ ∴ 참
ㄴ. a^b은 a의 거듭제곱이고, a는 a^b의 약수이므로 $f(a^b)=f(a)$ ∴ 참
ㄷ.(반례) $a=3,\ b=4$일 때,
$f(3\times4)=f(12)=2\neq3=f(3)$ ∴ 거짓

65) 답 : ①
[해설]
$\dfrac{2x+1}{3}=t$라 하면 $x=\dfrac{3t-1}{2}$이므로
$f(t)=\log_2(-9t+7)$
$f^{-1}(4)=a$라 하면
$\log_2(-9a+7)=4$이며 로그의 정의에서
$-9a+7=2^4,\ a=-1$
$\therefore\ f^{-1}(4)=-1$

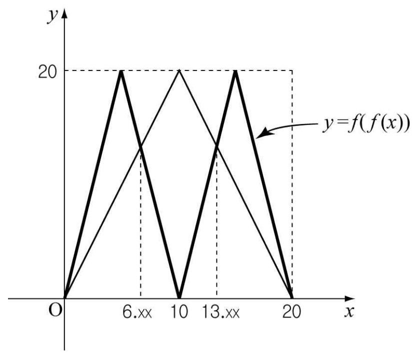
66) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 주어진 그래프에서 함숫값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



위의 그래프에서 $f(c)=b$이므로
$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$
$g^{-1}(b)=k$라 하면 $g(k)=b$이다.
주어진 그래프에서 $g(a)=b$이므로 $k=a$
즉, $g^{-1}(b)=a$이다.

67) 답 : 155
[해설]
[출제 의도]합성함수의 함숫값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$f(2)=11$이므로
$(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(11)=155$

68) 답 : ④
[해설]

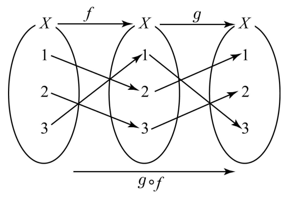


$f(x)=\begin{cases}2x, & (0\le x<10)\\ -2x+40, & (10\le x\le20)\end{cases}$

$f(f(x))=\begin{cases}4x, & (0\le x<5)\\ -4x+40, & (5\le x<10)\\ 4x-40, & (10\le x<15)\\ -4x+80, & (15\le x\le20)\end{cases}$

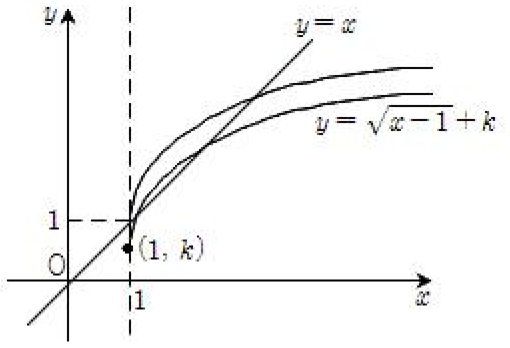
$f(x)>f(f(x))$를 만족하는 정수 x값은 $7,8,9,$ $10,11,12,13$이고 이중 10은 $\log_{\frac{1}{2}}f(f(x))$의 진수가 0이 되게 하는 값이므로 제외
따라서 모든 정수 x값의 합은 60

69) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]항등함수의 성질을 이용하여 합성함수의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.
ㄱ. 모든 $x\in X$에 대하여 $f(x)=g(x)=x$이므로
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=x$
∴ $g\circ f$는 항등함수(참)
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면
모든 $x\in X$에 대하여 $g(f(x))=x$
즉 f의 역함수는 g이고 g의 역함수는 f이다.
f,g는 모두 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
ㄷ.[반례]다음에서 $g\circ f$가 항등함수이지만
f,g는 모두 항등함수가 아니다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

70) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]무리함수의 그래프를 이해하기
무리함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면
아래 그림과 같이 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프는 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.



위 그림에서 $y=\sqrt{x-1}+k$의 그래프가 직선 $y=x$와 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값은 1이다.

71) 답 : ③

[해설]

<출제 의도> 함수의 뜻과 그 그래프

$f(1)+f(-1)=0$이므로 다음의 3가지 경우가 가능하다.

 ⅰ) $f(1)=1,\ f(-1)=-1$인 경우

 ⅱ) $f(1)=-1,\ f(-1)=1$인 경우

 ⅲ) $f(1)=0,\ f(-1)=0$인 경우

ⅰ), ⅱ), ⅲ)각각의 경우에 대하여 $f(0)$이 취할 수 있는 함숫값은 $-1,\ 0,\ 1$이다.

 따라서 9개의 함수가 가능하다.

72) 답 : ③

[해설]

함수의 뜻과 그래프

 ⅰ) $0 \le x < 1$인 경우 $f(x)=0$

 ⅱ) $1 \le x < 2$인 경우 $f(x)=1$

 ⅲ) $x=2$인 경우 $f(x)=2$

  그러므로 $f(x)$의 치역의 원소의 개수는 3개이다.

73) 답 : ④

[해설]

역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응이다.

ㄱ은 상수함수이므로 일대일 대응이 아니고, ㄴ, ㄷ은 일대일 대응이다.

74) 답 : ①

[해설]

함수의 뜻과 그래프

$\begin{cases} f(1)=a+1=4+b=g(1) \\ f(3)=9a+1=12+b=g(3) \end{cases}$이므로

 연립방정식 $\begin{cases} a-b=3 \\ 9a-b=11 \end{cases}$을 풀면 $a=1,\ b=-2$

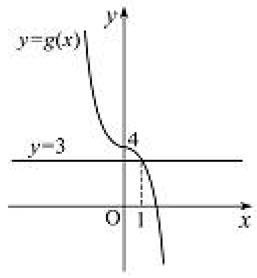
  $\therefore\ a+b=-1$

75) 답 : 10

[해설]

[출제 의도] 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$y=g(x)$의 그래프를 그려 보면,



$g(f(k))=3$이므로 $f(k)>0$이고 $-\{f(k)\}^2+4=3$

 $\therefore\ f(k)=1$

$f(k)=|k|-4=1$

 $\therefore\ k=\pm 5$

따라서 $\alpha=5,\ \beta=-5$이다.

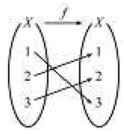
$\therefore\ \alpha-\beta=10$

76) 답 : ②

[해설]

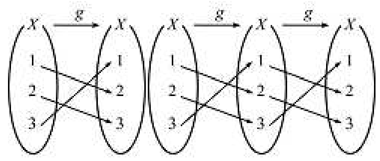
[출제 의도]합성함수와 역함수의 성질을 이용하여 함숫값을 추론하여 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f^3=I$이므로 $f(1)=3$이면, $f(3)=2,\ f(2)=1$



함수 f의 역함수 g에 대하여 $g^3=I$이므로

 $g^{10}=g,\ g^{11}=g^2$



 $\therefore\ g^{10}(2)+g^{11}(3)=g(2)+g^2(3)=3+2=5$

77) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]역함수의 함숫값 계산하기

$f^{-1}(4)=1$이므로 $f(1)=4$

 $f(1)=a+2=4$ $\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2x+2$

 $f^{-1}(8)=b$이므로 $f(b)=8$,

  $f(b)=2b+2=8$

   $\therefore\ b=3$

78) 답 : 129

[해설]

[출제 의도]합성함수와 역함수를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=5x+20$에서 $f(x)$의 역함수는

 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{5}x-4$

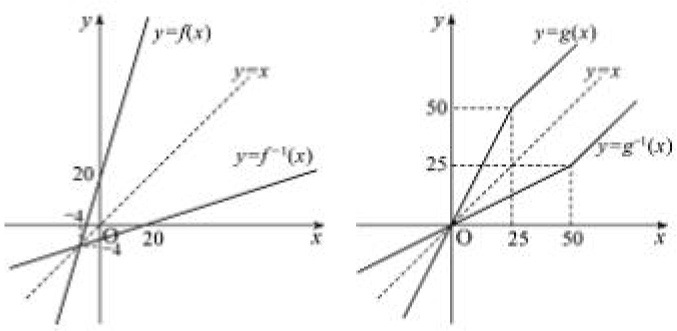
$g(x)=\begin{cases} 2x, & (x<25) \\ x+25, & (x \ge 25) \end{cases}$에서 $g(x)$의 역함수는

 $g^{-1}(x)=\begin{cases} 2x\,(x \le 50) \\ x-25\,(x \ge 50) \end{cases}$

  $\therefore\ f(g^{-1}(40))+f^{-1}(g(40))$

 $=f\left(\dfrac{1}{2}\cdot 40\right)+f^{-1}(40+25)$

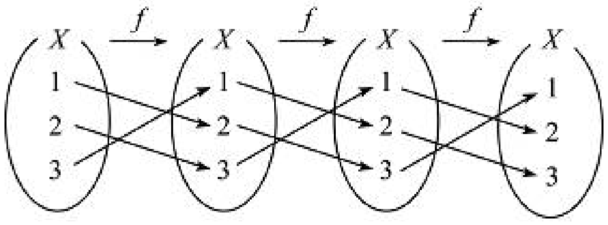
$=f(20)+f^{-1}(65)=120+9=129$



79) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]합성함수의 성질을 이용하여 함수값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 대응관계를 이용하여 합성함수의 값을 구하면

$f^3(1)=f(f(f(1)))=f(f(2))=f(3)=1$

같은 방법으로 $f^3(2)=2,\ f^3(3)=3$이다.

$\therefore\ f^3(x)=x$

$f^{100}(x)=\left(f^{3\cdot 33}\circ f\right)(x)=f(x),\ f^{200}(x)=\left(f^{3\cdot 66}\circ f^2\right)(x)=f^2(x)$

$\therefore\ f^{100}(1)=f(1)=2$

$f^{200}(3)=f^2(3)=f(f(3))=f(1)=2$

$\therefore\ f^{100}(1)-f^{200}(3)=2-2=0$

80) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]합성함수의 값 구하기

$f(x)=(x-1)(x+2)$에서

$f(1)=0,\ f(-2)=0,\ f(0)=-2$이고,

$f(f(1))=f(f(-2))=f(0)$이다.

$\therefore\ f(f(1))+f(f(-2))=2f(0)=-4$

81) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]함수의 합성 이해하기

$f(x)=\sqrt{x-2},\ g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 일 때,

$(g^{-1}\circ f)(3)=g^{-1}(f(3))$

$=g^{-1}(1)$

$g^{-1}(1)=k$라 하면, $g(k)=1$이므로

$g(k)=\dfrac{1}{k-1}=1$이고, $\therefore\ k=2$

따라서, $(g^{-1}\circ f)(3)=2$

82) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]조건을 만족하는 함수의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x=0 : f(0)=-f(-0)\ \therefore\ f(0)=0$

1)가지

2)가지

3)가지

$\therefore$ 3(가지)

83) 답 : 33

[해설]

[출제 의도]정의된 함수를 이용하여 함수값구하기

$g(f(4))=g(3)=3$

$g(2)=h(f(2))$에서 $h(1)=3$

그러므로 $g(f(4))+10h(1)=33$

84) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]역함수와 합성함수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$f^{-1}(x)=x^2$에서 $f(x^2)=x\cdots$ ①

$(f\circ g^{-1})(x^2)=x$에서 $f(g^{-1}(x^2))=x\cdots$ ②

f는 일대일 대응이므로 ①, ② 에서 $g^{-1}(x^2)=x^2$

$\therefore\ g(x^2)=x^2$

따라서 $g(20)=20,\ f(20)=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$이므로

$(f\circ g)(20)=f(g(20))=f(20)=2\sqrt{5}$

85) 답 : 13

[해설]

[출제 의도]함수의 합성을 이해하여 문제 해결하기

$f(g(x))=\{g(x)\}^2+4$이므로

$f(x)=x^2+4$이다.

$g(x)=ax+b\,(a\neq 0)$라고 하면

$g(f(x))=a\{x^2+4\}+b\cdots$①

$4\{g(x)\}^2+1=4\{ax+b\}^2+1\cdots$②

이때 ①=②에서 $a\{x^2+4\}+b=4\{ax+b\}^2+1$이 x의 항등식이므로

각 항의 계수를 비교하면

$a=4a^2,\ 8ab=0,\ 4a+b=4b^2+1$.

이를 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4},\ b=0$이므로

$g(x)=\dfrac{1}{4}x\ \therefore\ g(52)=13$

[정답] 13

86) 답 : ②

[해설]

$r=c,\ q=b,\ p=a$이므로

$(f\circ f\circ f)^{-1}(d)=\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)\left(f^{-1}(d)\right)$

$=\left(f^{-1}\circ f^{-1}\right)(r)=f^{-1}\left(f^{-1}(c)\right)$

$=f^{-1}(q)=f^{-1}(b)=p=a$

87) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]역함수를 이해하고 활용하기

$y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 $y=x$가 지난다.

그러므로 $y=x^2-2x+2,\ y=x$를 연립하여 교점을 찾으면

$(1, 1)$, $(2, 2)$이다.
두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다.

88) 답 : 12
[해설]
【출제 의도】 함수의 뜻을 알고 함수의 개수 구하기
$f(-1) \neq -1$, $f(1) \neq 1$이므로
X의 원소 $-1, 0, 1$에 대응할 수 있는 경우의 수가 각각 $2, 3, 2$가지이다.
$\therefore\ 2 \times 3 \times 2 = 12$
(별해)
함수 f의 개수는 모두 27개이다.
i) $f(-1)=-1$인 함수의 개수는 9개
ii) $f(1)=1$인 함수의 개수는 9개
iii) $f(-1)=-1$, $f(1)=1$인
함수의 개수는 3개이다.
$\therefore\ 27-(9+9-3)=12$

89) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]함수의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
문제의 조건:
$f(x)=5^{3x}$, $g(x)=\dfrac{1}{3}\log_5 x$

구하는 값$=f(g(5))=f\left(\dfrac{1}{3}\log_5 5\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=5^{3\times\frac{1}{3}}=5$

90) 답 : ④
[해설]
【출제 의도】 합성함수와 함수의 그래프를 이해하고 역함수의 값 찾기
$r=c$, $q=b$, $p=a$이므로
$$\begin{aligned}\left(f \circ (f \circ f)^{-1}\right)(d) &= \left(f \circ f^{-1} \circ f^{-1}\right)(d)\\ &= f^{-1}(d)\\ &= c\end{aligned}$$

91) 답 : 13
[해설]
[출제 의도] 함수의 합성을 이해하여 문제 해결하기
$f(g(x))=\{g(x)\}^2+4$ 이므로
$f(x)=x^2+4$이다.
$g(x)=ax+b\,(a \neq 0)$라고 하면
$g(f(x))=a\{x^2+4\}+b \ldots$㉠
$4\{g(x)\}^2+1=4\{ax+b\}^2+1 \ldots$㉡
이때 ㉠=㉡에서 $a\{x^2+4\}+b=4\{ax+b\}^2+1$이
x의 항등식이므로 각 항의 계수를 비교하면
$$\begin{cases} a=4a^2 \\ 8ab=0 \\ 4a+b=4b^2+1 \end{cases}.$$
이를 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4}, b=0$ 이므로
$g(x)=\dfrac{1}{4}x$
$\therefore\ g(52)=13$
[정답] 13

92) 답 : 2
[해설]
【출제 의도】 합성함수의 함수값 구하기
$f^{-1}(-3)=k$라 놓으면
$f(k)=-3$이므로 $k=-1$이다.
그러므로 $g\left(f^{-1}(-3)\right)=g(-1)=2$

93) 답 : ①
[해설]
$f^2(x)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{x-1}{x}$ 이고,
$f^3(x)=\dfrac{1}{1-f^2(x)}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x$이다.
그러므로 $f^n(x)=f^{n+3}(x)$이다.
$\therefore\ f^{2005}(2)=f(2)=-1$

94) 답 : ⑤
[해설]
$y=\sqrt{x-1}+1$과 $x=\sqrt{y-1}+1$은 서로 $y=x$에 대하여 대칭이므로
두 함수는 서로 역함수가 된다.
그리고 $y=\sqrt{x-1}+1$은 증가함수이므로
구하는 교점은 $y=\sqrt{x-1}+1$과 $y=x$의 교점과 일치한다.
그러므로 $\sqrt{x-1}+1=x$
$\therefore\ x-1=(x-1)^2$
$\therefore\ x=1$ 또는 2이며 두 교점은 $(1, 1)$, $(2, 2)$이므로
두 점 사이의 거리는 $\sqrt{2}$이다.