I.집합과 명제

2.명제

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 실수 x에 대한 두 조건 $p:(x-1)(x-4)=0$, $q:1<2x\le a$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

2 실수 x에 대한 두 조건 $p:|x-1|\le 3$, $q:|x|\le a$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

3 [공통]다음 순서로 선분 AB위에 점 E를 작도하여 보자.

(ⅰ)점 B에서 선분 AB에 수직인 직선을 그어 그 위에 $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$인 점 C를 잡는다.

(ⅱ)선분 AC위에 $\overline{CD}=\overline{CB}$인 점 D를 잡는다.

(ⅲ)선분 AB위에 $\overline{AE}=\overline{AD}$인 점 E를 잡는다.

그러면 점 E는 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$를 만족시킨다.

아래 증명은 이 성질을 증명한 것이다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=2\overline{BC}$이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{AC}=\overline{BC}$ 따라서 $\overline{AE}=\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{CD}=\overline{BC}$ $\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=\overline{BC}$이므로 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$

위의 빈칸 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[2점]

① 2, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $(3+\sqrt{5})$

② $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5}-1)$, $(\sqrt{5}+1)$

③ $\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

④ $\sqrt{5}$, $(\sqrt{5}-1)$, $(3-\sqrt{5})$

⑤ 3, 2, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

4 전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 두 명제 $p \to q$와 $q \to r$가 모두 참일 때, 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르면?[2점]

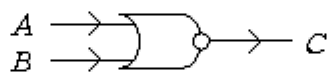
[보기]
ㄱ. $P \subset R$
ㄴ. $(P \cup Q) \subset R^c$
ㄷ. $(P^c \cap R^c) \subset Q^c$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

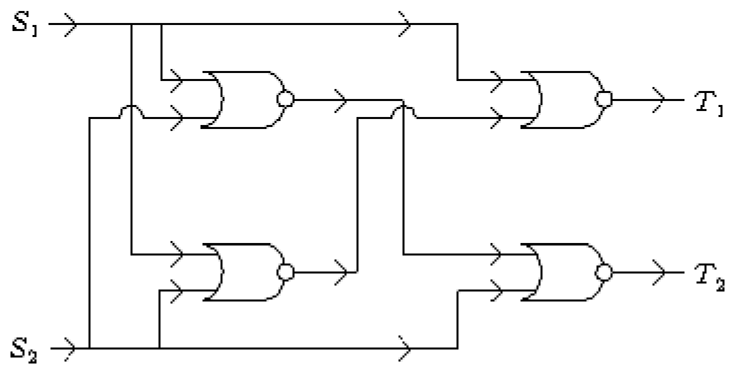
5 [공통][그림 1]의 연산장치는 입력값이 A와 B일 때, 출력값 C를 표에 주어진

것과 같이 결정한다. 이 연산장치 4개를[그림 2]와 같이 연결하였다.



[그림 1]

A	B	C
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



[그림 2]

출력값이 $T_1 = 1,\ T_2 = 0$이 되는 입력값 S_1, S_2를 다음 [보기]중에서 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $S_1 = 0,\ S_2 = 0$ ㄴ. $S_1 = 0,\ S_2 = 1$
ㄷ. $S_1 = 1,\ S_2 = 0$ ㄹ. $S_1 = 1,\ S_2 = 1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

6 [공통]다음은 자연수 m, n에 대해서 m^4+4^n이 소수이고 $m\neq 1$ 또는 $n\neq 1$이면, m은 홀수이고 n은 짝수임을 증명한 것이다.

> m이 짝수이거나 n이 홀수라 가정하자.
> (i) m이 짝수이면 $m=2j$ 꼴의 정수이고,
> $m^4+4^n=4\cdot(4j^4+4^{n-1})$이므로
> m^4+4^n은 [㈎]
> 이것은 가정에 모순이므로 m은 홀수이다.
> (ii) n이 홀수이면 $n=2k-1$ 꼴의 정수이다.
> $m^4+4^n=m^4+4^{2k-1}$은 다음과 같이 인수분해 된다.
> $m^4+4^{2k-1}=$ ([㈏]) $(m^2+m2^k+2\cdot 4^{k-1})$
> [㈏]이 수는 소수이므로 [㈏] $=1$ 또는 $m^2+m2^k+2\cdot 4^{k-1}=1$ 이다.
> 그런데, $m^2+m2^k+2\cdot 4^{k-1}>1$이므로 [㈏] $=1$이다.
> [㈏] = ([㈐])+ $4^{k-1}=1$로부터 $k=1, m=1$이다.
> 따라서, $m=1, n=1$이다.
> 이것은 가정에 모순이므로 n은 짝수이다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[3점]

① 소수가 아니다, $m^2-m2^k+2\cdot 4^{k-1}$, $m-2^{k-1}$
② 소수이다, $m^2-m2^k+2\cdot 4^{k-1}$, $m-2^{k-1}$
③ 소수가 아니다, $m^2-m2^{k+1}+5\cdot 4^{k-1}$, $m-2^k$
④ 소수이다 , $m^2-m2^{k+1}+5\cdot 4^{k-1}$, $m-2^k$
⑤ 소수가 아니다 , $m^2-m2^{k+2}+17\cdot 4^{k-1}$, $m-2^{k+1}$

[난이도 : ★☆☆] [2001 학년도 대수능]

7 [공통]다음은 $4k+3$꼴의 소수가 무수히 많음을 증명한 것이다.

(단, k는 음이 아닌 정수이다.)

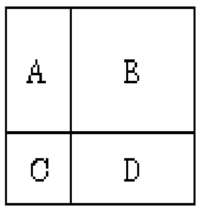
> $4k+3$꼴의 소수가 유한개 있다고 가정하고,
> 이것을 $3, 7, 11, 19, \cdots, p$라 하자.
> $n=4(3, 7, 11, 19, \cdots, p)+3$이라 하면,
> n은 $3, 7, 11, 19, \cdots, p$로㈎,
> n의 모든 소인수는 $4k+1$또는 $4k+3$꼴의 정수이고,
> $4k+1$꼴의 두 정수를 곱하면 ㈏꼴의 정수이다.
> 그러므로 n의 모든 소인수가 ㈏꼴이면, n도 ㈏꼴이다.
> 이것은 모순이므로 n은 ㈐꼴의 소인수 q를 갖는다.
> n은 q로 나누어 떨어지므로,
> q는 $3, 7, 11, 19, \cdots, p$가 아닌 소수이다.
> 즉 $3, 7, 11, 19, \cdots, p$가 아닌 $4k+3$꼴의 소수가 존재한다.
> 이것은 가정에 모순이다.
> 따라서, $4k+3$꼴의 소수는 무수히 많다.

위의 증명과정에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것을 순서대로 적으면?[2점]

① 나누어 떨어진다. $4k+1$, $4k+1$
② 나누어 떨어진다. $4k+3$, $4k+3$
③ 나누어 떨어지지 않는다. $4k+3$, $4k+1$
④ 나누어 떨어지지 않는다. $4k+1$, $4k+1$
⑤ 나누어 떨어지지 않는다. $4k+1$, $4k+3$

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

8 [공통]한 변의 길이가 1이 정사각형이 있다. 서로 수직인 임의의 두 직선을 이용하여 그림과 같이 네 개의 직사각형으로 나누었을 때, 이들의 넓이를 각각 A, B, C, D라 하자.



다음 [보기]중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

[보기]
Ⅰ. $A>\frac{1}{4}$이면 $C<\frac{1}{4}$이다.
Ⅱ. $A<\frac{1}{4}$이면 $D>\frac{1}{4}$이다.
Ⅲ. $A>\frac{1}{4}$이면 $D<\frac{1}{4}$이다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

9 [공통]다음은 1보다 큰 자연수 n에 대한 명제 " $\sqrt{n}$보다 작거나 같은 모든 소수가 n을 나누지 않으면, n은 소수이다."를 증명한 것이다.

결론을 부정하여 n이 소수가 아니라고 가정하면,
$n=lm$인 1보다 큰 자연수 l, m이 존재한다.
l을 나누는 한 소수를 p, m을 나누는 한 소수를 q라 하면,
pq는 lm을 나눈다. 그러므로 $pq<n$이다.
만약 $p>\sqrt{n}$이고 $q>\sqrt{n}$이면 $pq>\sqrt{n}\sqrt{n}=n$이므로 모순이다.
따라서, [㈎]이다.
즉, n의 약수 중에서 $\sqrt{n}$보다 작거나 같은 소수가 존재한다.
그런데 이것은 가정에 모순이므로 n은 소수이다.

위의 증명에서 ㈎ 에 알맞은 것은?

① $p\le\sqrt{n}$이거나 $q\le\sqrt{n}$
② $p\le\sqrt{n}$이고 $q\le\sqrt{n}$
③ $p\le\sqrt{n}$이거나 $q\ge\sqrt{n}$
④ $p\le\sqrt{n}$이고 $q\ge\sqrt{n}$
⑤ $p\ge\sqrt{n}$이거나 $q\ge\sqrt{n}$

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

10 [공통]다음은 명제 $3m^2-n^2=1$을 만족하는 [㈎]에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

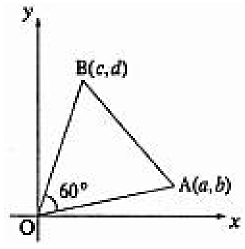
(생략)...
m, n이 정수이고 $3m^2=n^2+1$이므로 n^2+1은 3의 배수이다.
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여 $n=3k$이면
$n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$
$n=3k+1$이면 $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$
$n=3k+2$이면
$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$
이므로 n^2을 3으로 나눈 나머지는 0또는 1이다.
따라서, n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1또는 2이다.
..(생략)...

다음 중 위의 [㈎]에 가장 알맞은 것은?

① m, n중 적어도 하는 정수이다.
② m, n중 어느 것도 정수가 아니다.
③ m, n중 어느 것도 정수인 해가 적어도 하나 있다.
④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

11 다음은 명제 "좌표평면에서 세 꼭짓점의 좌표가 모두 유리수인 정삼각형이 존재하지 않는다."를 증명한 것이다.



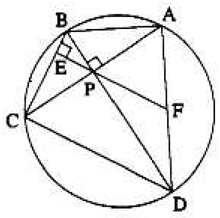
세 꼭짓점의 좌표가 모두 [㈎]인 정삼각형이 존재한다고 가정하자.
이 삼각형을 평행이동하여 아래 그림과 같이 한 꼭짓점이 좌표평면의
원점 O에 놓이도록 했을 때, 다른 꼭짓점을 각각 $A(a, b), B(c, d)$라 하면
a, b, c, d는 모두 [㈏]가 된다.
그런데 B는 A를 원점을 중심으로 60° 만큼 회전이동한 점이므로
$c=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ d=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$이다.
여기서 $b\neq 0$이면 c가 [㈐]가 되고 $b=0$이면 $a\neq 0$이므로 d가 [㈐]가 된다.
이는 가정에 모순이다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 유리수, 유리수, 무리수
② 무리수, 유리수, 무리수
③ 유리수, 무리수, 유리수
④ 유리수, 유리수, 유리수
⑤ 무리수, 유리수, 유리수

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

12 [공통]다음 그림에서 사각형 $ABCD$는 원에 내접하고 두 대각선 AC와 BD는 점 P에서 만나며 서로 수직이다. 또 점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E라고 하고 직선 PE와 변 AD가 만나는 점을 F라고 하자. 다음 중 여기에서 증명될 수 없는 것은?



① $\angle CBP = \angle PAD$ ② $\angle APF = \angle PAF$
③ $\angle FPD = \angle FDP$ ④ $\overline{AF} = \overline{FD}$
⑤ $\overline{AP} = \overline{AF}$

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

13 [공통]다음은 명제 " $x^2+y^2+z^2=1111$ 을 만족하는[가]" 에 대한에서 중간 부분을 적은 것이다.

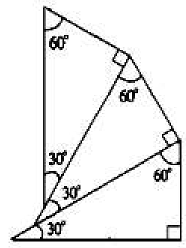
..생략... 정수 x, y, z를 각각 8로 나누면 나머지가 각각 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7중 하나이다. 따라서 x^2, y^2, z^2을 각각 8로 나누면 나머지가 0, 1, 4중 하나이다. 그러므로 $x^2+y^2+z^2$을 8로 나누었을 때, 나머지는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6중 하나이다. 그런데 1111을 8로 나누면 나머지가 7이다. ...생략...

다음 중 위의 [가]에 알맞은 것은?

① x, y, z중 적어도 하나는 정수이다.
② x, y, z중 어느 것도 정수가 아니다.
③ x, y, z가 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
④ x, y, z가 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
⑤ x, y, z가 모두 정수인 해는 없다.

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

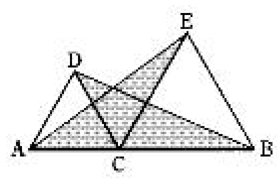
14 세 내각이 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 이고 서로 합동인 삼각형들이 있다. 평면 위에 다음 그림과 같이 이들 삼각형을 내각이 직각인 꼭짓점과 60° 인 꼭짓점이 일치되고 겹치지 않도록 빗변에 붙여 간다. 어느 삼각형도 서로 겹쳐지지 않을 때까지 되도록 많이 붙이려고 한다. 가장 많이 붙였을 때 이들 삼각형의 수는?



① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

15 [공통]아래 그림과 같이 선분 AB위에 한 점 C를 잡고 선분 AB의 위쪽에 두 정삼각형 ACD, BCE를 만들었다. 다음은 $\overline{AE}=\overline{DB}$임을한 것이다.



정삼각형 ACD에서 [㈎]...(1), 정삼각형 BCE에서 [㈏]...(2) 또, $\angle ACD = \angle ECB = 60^\circ$ 이므로 $\angle ACE = 60^\circ + \angle DCE = \angle DCB$...(3) (1), (2), (3)에서 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로 $\triangle ACE \equiv \triangle DCB$ 따라서, $\overline{AE}=\overline{DB}$이다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것은?

① $\overline{AC}=\overline{AD}$, $\overline{CE}=\overline{BE}$
② $\overline{AC}=\overline{DC}$, $\overline{CE}=\overline{BE}$
③ $\overline{AD}=\overline{CD}$, $\overline{CB}=\overline{BE}$
④ $\overline{AC}=\overline{AD}$, $\overline{CE}=\overline{CB}$
⑤ $\overline{AC}=\overline{DC}$, $\overline{CE}=\overline{CB}$

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

16 [공통]다음은 " p가 짝수, q가 홀수이면 방정식 $x^2+px-2q=0$은 정수 근을 갖지 않는다."는 것을 증명한 것이다.

> x가 [㈎]이면 x^2은 [㈎]이고 $px-2q$는 짝수이다.
> 따라서 $x^2+px-2q$가 [㈎]가 되므로 [㈏]이 될 수 없다.
> x가 [㈐]이면 x^2+px는 4의 배수이고 $2q$는 4의 배수가 아니다.
> 그런데 [㈑]이므로 모순이다.
> 따라서, 이 방정식은 정수 근을 갖지 않는다.

위의 증명에서 ㈎~㈑에 알맞은 것은?

① 짝수, 0, 홀수, $x^2+px=2q$
② 짝수, 이차식, 홀수, $2q$는 짝수
③ 정수, 0, 짝수, $x^2+px=2q$
④ 홀수, 이차식, 짝수, $2q$는 짝수
⑤ 홀수, 0, 짝수, $x^2+px=2q$

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

17 삼각형 ABC에 대한 명제 " $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$이다." 의 역, 이, 대우 중 참인 명제를 모두 적은 것은?

① 대우 ② 역, 이 ③ 이, 대우
④ 역, 대우 ⑤ 역, 이, 대우

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

18 [공통]다음은 조화평균에 관한 어떤 수학적 사실을 증명한 것이다.

> 양수 a, b, H에 대하여 적당한 실수 r가 존재하여
> $a=H+\frac{a}{r}$, $H=b+\frac{b}{r}$ ...i)가 성립한다고 하자.
> 그러면 $a\neq b$이고 $\frac{a-H}{a}=$ [㈎] ...ii)이므로 $H=$ [㈏] 이다.
> 역으로 $a\neq b$인 양수 a, b에 대하여 $H=$ [㈏] 이면
> 식 ii)가 성립하고 $\frac{a-H}{a}\neq 0$이다.
> ii)에서 $\frac{a-H}{a}=\frac{1}{r}$이라 놓으면 식 i)가 성립한다.
> 따라서, 양수 a, b, H에 대하여 적당한 실수 r가 존재하여 식 i)가 성립하기 위한 [㈐] 조건은 $a\neq b$이고 $H=$ [㈏] 이다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐ 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요충분
② $\frac{H-b}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 필요충분
③ $\frac{H-b}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 충분
④ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{2ab}{a+b}$, 필요
⑤ $\frac{b-H}{b}$, $\frac{ab}{a+b}$, 충분

[난이도 : ★★★] [1996 학년도 대수능]

19 [공통]세 개의 실근을 갖는 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근을 α, β, γ라 하자.

다음은 세 근의 절대값 중 적어도 하나는 $\frac{|a|}{3}$ 보다 크거나 같음을 증명한 것이다.

> 결론을 부정하여 [(가)]를 가정하면
> $|\alpha|<\frac{|a|}{3}, |\beta|<\frac{|a|}{3}, |\gamma|<\frac{|a|}{3}$ 이다.
> 근과 계수와의 관계에서 $a=$ [(나)] 이므로
> $|a|\le|\alpha+\beta|+|\gamma|\le$ [(다)] $<\frac{|a|}{3}+\frac{|a|}{3}+\frac{|a|}{3}=|a|$ 이다.
> 그런데 이것은 모순이므로
> 절대값이 $\frac{|a|}{3}$ 보다 크거나 같은 근이 적어도 하나 존재한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 어떤 근의 절대값이 $\frac{|a|}{3}$ 보다 작다고, $-(\alpha+\beta+\gamma)$, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$

② 어떤 근의 절대값이 $\frac{|a|}{3}$ 보다 작거나 같다고, $\alpha+\beta+\gamma$, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$

③ 모든 근의 절대값이 $\frac{|a|}{3}$ 보다 작다고, $\alpha+\beta+\gamma$, $|\alpha+\beta+\gamma|$

④ 모든 근의 절대값이 $\frac{|a|}{3}$ 보다 작다고, $-(\alpha+\beta+\gamma)$, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$

⑤ 모든 근의 절대값이 $\frac{|a|}{3}$ 보다 작거나 같다고, $\alpha+\beta+\gamma$, $|\alpha+\beta+\gamma|$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

20 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p: x=a,$

$q: x^2-3x-4\le 0$

명제 $p\to q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

21 자연수 a에 대한 조건

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x-a+4>0$이다'

가 참인 명제가 되도록 하는 a의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

22 실수 x에 대한 세 조건

p : $|x|>4$

q : $x^2-9\le 0$

r : $x\le 3$

에 대하여 [보기]에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보 기]
ㄱ. $q \to r$
ㄴ. $p \to \sim q$
ㄷ. $r \to \sim p$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

23 두 조건 p, q의 진리집합이 각각

$P=\{2,\ 3,\ a^2\}$, $Q=\{4,\ a+1\}$

이다. 명제 $p \to q$의 역이 참일 때, 실수 a의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

24 실수 x에 대한 세 조건

$p: x(x-3)\le 0$

$q: x>4$

$r: |x-1|\le 2$

에 대하여 [보기]에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $p \to q$
ㄴ. $p \to r$
ㄷ. $r \to \sim q$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

25 a가 자연수일 때, 실수 x에 대한 두 조건

$p: |x|\ge a$,

$q: x(x-3)\le 0$

이 있다. p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a의 최솟값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

26 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B 에 대하여 두 명제

'집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.',

'집합 B 의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.'

가 있다. 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B 의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

27 실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

$p : x \geq a$

$q : 1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 7$이다.

명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 상수 a의 최솟값은?[3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

28 전체집합 $U=\{x|x는 8이하의 자연수\}$에 대하여 조건 '$p : x^2 \leq 2x+8$'의 진리집합을 P, 두 조건 q, r의 진리집합을 각각 Q, R라 하자.

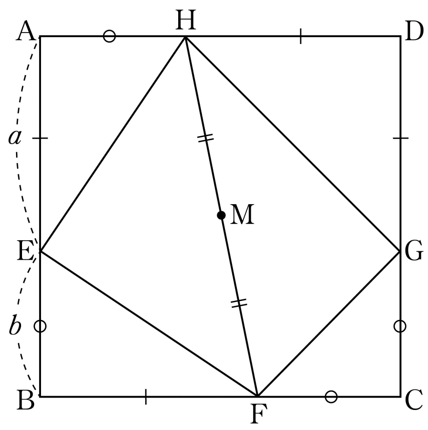
두 명제 $p \to q$와 $\sim p \to r$가 모두 참일 때,

두 집합 Q, R의 순서쌍 (Q, R)의 개수를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

29 두 양수 a, b에 대하여 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 $ABCD$의 네 변 AB, BC, DC, DA를 각각 $a : b$로 내분하는 점을 E, F, G, H라 하고, 선분 FH의 중점을 M이라 하자.

그림은 위의 설명과 같이 그린 한 예이다.



[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보 기]
ㄱ. $\overline{FM}=\overline{GM}$
ㄴ. $\triangle EFM \geq \triangle FGM$
ㄷ. $\overline{FH}=6\sqrt{2}$일 때, 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

30 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $p \to q$, $q \to \sim r$가 모두 참일 때, 항상 참인 명제는? [3점]

① $q \to p$ ② $p \to r$ ③ $r \to \sim p$
④ $\sim r \to p$ ⑤ $\sim q \to \sim r$

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

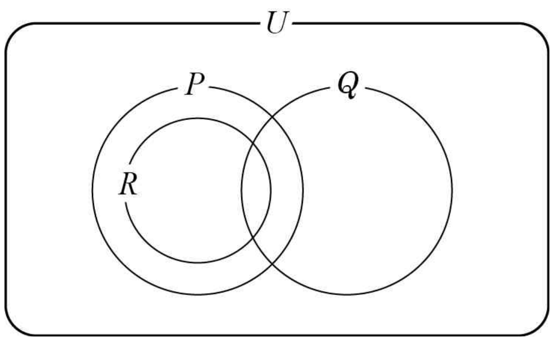
31 실수 x, y에 대하여 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

[보기]
ㄱ. $\begin{cases} p: \lvert x+3 \rvert = 2 \\ q: x = -1 \end{cases}$
ㄴ. $\begin{cases} p: \lvert x \rvert < 1 \\ q: x < 1 \end{cases}$
ㄷ. $\begin{cases} p: x^2 > y^2 \\ q: x > y > 0 \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

32 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합 P, Q, R의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같을 때, 다음 명제 중 항상 참인 것은? [3점]



① $p \to q$ ② $q \to r$
③ $r \to \sim q$ ④ $\sim r \to \sim p$
⑤ $\sim p \to \sim r$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

33 실수 x에 대하여 조건 p, q를 각각 $\begin{cases} p: \lvert x-1 \rvert < a \\ q: \lvert x+1 \rvert < 5 \end{cases}$라 하자. 조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닐 때, a의 최솟값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

34 전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 세 명제 $p \to q$, $\sim p \to q$, $\sim r \to p$가 모두 참일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. $P^c \subset Q$
ㄴ. $R - P^c = \phi$
ㄷ. $R^c \cap P^c \subset Q$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

35 다음은 $x>1$에 대하여 $\frac{x^2-x+4}{x-1}$의 최솟값을 구하는 과정이다.

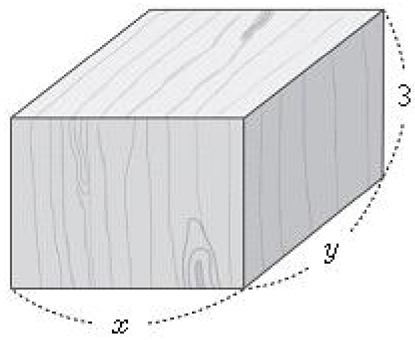
> $x>1$ 이므로 $x-1>0$ 이고
>
> $\frac{x^2-x+4}{x-1}=\boxed{(가)}+\frac{4}{x-1}+1$ 이므로
>
> $\frac{x^2-x+4}{x-1}\geq 2\sqrt{\boxed{(가)}\times\frac{4}{x-1}}+1$
>
> $=\boxed{(나)}$
>
> 단, $\boxed{(가)}=\frac{4}{x-1}$ 일 때, 등호가 성립한다.
>
> 따라서 $\frac{x^2-x+4}{x-1}$ 는 $x=\boxed{(다)}$일 때,
>
> 최솟값 $\boxed{(나)}$를 갖는다.

위의 과정에서(가)에 알맞은 식을 $f(x)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $f(2)+p+q$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

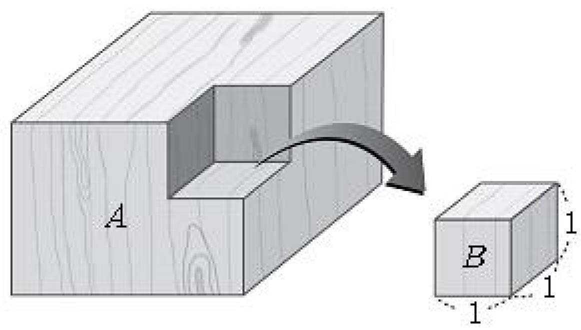
[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

36 [그림 1]과 같이 세 모서리의 길이가 각각 $x, y, 3$인 직육면체 모양의 나무토막이 있다.



[그림1]

[그림 1]의 나무토막의 한 모퉁이에서 모서리의 길이가 1인 정육면체 모양의 나무토막을 잘라내었더니 [그림 2]와 같이 나무토막 A와 나무토막 B로 나누어졌다.



[그림2]

A의 부피가 47일 때, A의 겉넓이의 최솟값을 구하시오.(단, $x>1, y>1$)[4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

37 $x>3$일 때, $x^2+\frac{49}{x^2-9}$의 최솟값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

38 $a>0,\ b>0$일 때, $\left(8a+\frac{3}{b}\right)\left(\frac{1}{2a}+3b\right)$의 최솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

39 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\,(a>0,\ b>0)$이 점 $A(2,\ 3)$을 지날 때, ab의 최솟값은?[3점]

① 18 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 30

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

40 실수 x에 대한 두 조건 $p:-1<x<a+1,\ q:|x-10|\geq 1$에 대하여, 명제 $p\to q$가 참이 되도록 하는 a의 최댓값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

41 전체집합 U에 대하여 세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하자. 세 명제 $p\to\ \sim q,\ \sim q\to r,\ q\to\ \sim r$가 모두 참일 때, 항상 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $P\cap Q=\phi$
ㄴ. $P\cap R=R$
ㄷ. $Q\cup R=U$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

42 전체집합 $U=\{x|x$는 실수 $\}$에 대하여 두 조건 $p,\ q$는 $\begin{cases}p: x^2-3ax+2a^2>0\\ q:-8<x\leq 18\end{cases}$이다. $\sim p$는 q이기 위한 충분조건일 때, 정수 a의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

43 두 조건 p와 q가 다음과 같이 주어졌다.

$p:|x-1|<3,\ q:a-1\leq x\leq b+2$

p가 q이기 위한 충분조건일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

44 자연수 n에 대하여 세 조건 $p,\ q,\ r$를 각각

$p: n\geq k$

$q: 2n-4\geq 3$

$r: n^2-19n\geq 20$

이라 하자. p는 q이기 위한 충분조건이고, p는 r이기 위한 필요조건일 때, 자연수 k의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

45 전체집합 U에서 정의된 조건 $p(x)$의 진리집합을 P, 조건 $q(x)$의 진리집합을 Q라 하자. '모든 $x \in U$에 대하여 $p(x)$ 또는 $\sim q(x)$'가 참일 때, P, Q의 관계로 항상 옳은 것은?(단, $\sim q(x)$는 조건 $q(x)$의 부정이다.)[3점]

① $P \cap Q^c = \phi$ ② $P^c \cap Q = \phi$
③ $P \cap Q = \phi$ ④ $P \cup Q = U$
⑤ $P = Q$

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

46 전체집합 $U = \{x | x$는 10이하의 자연수$\}$ 에서의 두 조건 $p : x$는 4의 약수이다, $q : 2x - 17 \leq 0$의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \subset X \subset Q$를 만족시키는 집합 X의 개수는?[3점]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

47 실수 x, y에 대하여 두 조건 p, q는
$p : x^2 + (y-1)^2 \leq 25$, $q : 3x + 4y + k \geq 0$이다.

조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건일 때, k의 최솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

48 실수 x, y에 대하여 두 조건 p, q는

$\begin{cases} p : x^2 + (y-1)^2 \leq 25 \\ q : 3x + 4y + k \geq 0 \end{cases}$ 이다.

조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건일 때, k의 최솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

49 전체집합 U에서 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자.

$p \rightarrow \sim q$이고, $\sim r \rightarrow q$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

(단, P, Q, R는 모두 공집합이 아니다.)[3점]

① $P \subset Q^c$ ② $P \subset R$ ③ $P \subset (R \cap Q^c)$
④ $R \subset P^c$ ⑤ $Q^c \subset R$

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 학력평가]

50 실수 x에 대한 두 조건

$p : -3 < x - a \leq 3$, $q : -1 \leq 2x - 5 < 19$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이 되는 모든 정수 a의 집합을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 학력평가]

51 실수 x, y에 대하여 $x > 0$, $xy(x+y+2) = 32$일 때, $(x+y)(y+2)$의 최솟값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 학력평가]

52 다음은 p가 5이상의 소수일 때, p^2-1은 24의 배수임을 증명한 것이다.

p는 5이상의 소수이므로 p는 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아니다. (i) p가 2의 배수가 아니므로 $p=2a+1$인 2이상의 어떤 정수 a가 존재한다. 따라서 $p^2-1=(p+1)(p-1)$에서 p^2-1은 항상[(가)]의 배수이다. (ii) p가 3의 배수가 아니므로 $p=3b+1$ 또는 $p=$ [(나)] 인 2이상의 어떤 정수 b가 존재한다. 따라서 $p^2-1=(p+1)(p-1)$에서 p^2-1은 항상[(다)]의 배수이다. (i), (ii)에 의해서 p^2-1은 24의 배수이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① 3, $3b-1$, 8
② 3, $3b-2$, 8
③ 8, $3b-1$, 8
④ 8, $3b-2$, 3
⑤ 8, $3b-1$, 3

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

53 두 조건 $\begin{cases} p : |x-1| \le 5 \\ q : x \le a+2 \end{cases}$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건일 때, 상수 a의 최솟값은? [3점]

① -6　② -4　③ 4
④ 6　⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

54 명제 '$x > \sqrt{2}$ 이면 $x \ge \sqrt{6}$ 이다. '는 거짓이다. 다음 중 이 명제가 거짓임을 보이는 예가 될 수 있는 것은?[3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $\sqrt{6}$　⑤ π

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

55 원소의 개수가 2개 이상인 집합

$V=\left\{(x,\ y) \middle| \begin{pmatrix} a-2, & -2 \\ b, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$에 대하여 양수 a, b의 곱 ab가 최대가 되는 a, b의 값을 각각 a_1, b_1이라고 하자.

$\begin{pmatrix} \alpha, & 2 \\ 1, & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$을 만족할 때, $\alpha+\beta$의 값은?[3점]

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

56 다음은 a, b, c가 정수일 때, $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 $f(0), f(1)$이 홀수이면 방정식 $f(x)=0$은 정수인 근을 갖지 않음을 증명한 것이다.

[증명]
방정식 $f(x)=0$이 정수인 근 α를 가진다고 가정하면 $f(\alpha)=0$이다. (i) $\alpha=2n$(n은 정수)일 때 $f(\alpha)=2(2an^2+bn)+$ [(가)] 위 등식에서 우변은 [(나)]가 되어 모순이다. (ii) $\alpha=2n+1$(n은 정수)일 때 $f(\alpha)=2(2an^2+2an+bn)+$ [(다)] 위 등식에서 우변은 [(나)]가 되어 모순이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 정수인 근을 갖지 않는다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $f(1)$ 짝수 $f(1)$
② $f(1)$ 짝수 $f(0)$
③ $f(0)$ 짝수 $f(0)$
④ $f(0)$ 홀수 $f(0)$
⑤ $f(0)$ 홀수 $f(1)$

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

57 실수 a, b, c에 대하여 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $p: a>0$이고 $b>0$ $q: a+b>0$이고 $ab>0$ ㄴ. $p: \lvert ab\rvert+\lvert bc\rvert=0$ $q: a=c=0$ ㄷ. $p: ab<0$ $q: \sqrt{a^2+2ab+b^2}<\sqrt{a^2-2ab+b^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 학력평가]

58 두 조건 $p: (x-2)^2=a$, $q: x=5$ 또는 $x=b$에 대하여 p는 q이기 위한 필요충분조건일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

59 다음 중 거짓인 명제는?

① $x=1$이면 $x^2=1$이다.
② $x=-\sqrt{2}$이면 $x^2=2$이다.
③ $x=2$이면 $x(x-2)=0$이다.
④ $x(x+1)=2$이면 x는 정수이다.
⑤ $x(x+2)=6$이면 x는 유리수이다.

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

60 [공통]조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?(단, a, b는 실수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $p: ab>0$ $q: a>0$이고 $b>0$ ㄴ. $p: a^2+b^2=0$ $q: ab=0$ ㄷ. $p: a+b\sqrt{2}=0$ $q: a=0$ 이고 $b=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

61 그림은 명제에 대한 수업 장면의 일부이다.

이 장면에서 참인 명제를 발표한 학생을 모두 고른 것은?[3점]

① 순희 ② 영희 ③ 순희, 철수
④ 철수, 영희 ⑤ 순희, 철수, 영희

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

62 [공통]다음은 $\log 2$가 무리수임을 증명한 것이다.

$\log 2$가 유리수라고 가정하자. $\log 2=\frac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)...①로 놓으면 $0<\log 2<1$이므로 [가]이다. ① 에서 $10^{\frac{n}{m}}=2$이므로 2㈏} 이때, [가]이므로 $2^{(나)}$은 [다]이고 5^n은 홀수가 되어 모순이다. 따라서 $\log 2$는 무리수이다.

위 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것은?[3점]

① $m>n$, $m-n$, 짝수 ② $m>n$, $n-m$, 홀수
③ $m>n$, m, 짝수 ④ $m<n$, $n-m$, 홀수
⑤ $m<n$, $m-n$, 짝수

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

63 전체집합 U가 유한집합일 때, U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 [보기]에서 p가 q이기 위한 충분조건인 것을 있는 대로 고른 것은?

(단, A, B는 공집합이 아니고, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.)[3점]

ㄱ. $p: n(A)\le n(B)$ $q: A\subset B$ ㄴ. $p: n(A-B)=0$ $q: n(A)=n(B)$ ㄷ. $p: A=B^c$ $q: A\cup B=U$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

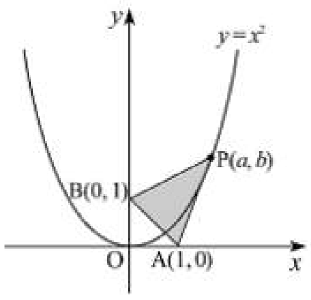
64 명제의 역이 참인 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점]

ㄱ. $x^3=1$이면 $x=1$이다. ㄴ. $x\ge 1$이고 $y\ge 1$이면 $x+y\ge 2$이다. ㄷ. 자연수 x, y에 대하여 x^2+y^2이 홀수이면 xy는 짝수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 12월 학력평가]

65 좌표평면 위에 두 점 $A(1,0)$, $B(0,1)$이 있다. 곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 점 $P(a,b)$에 대하여 삼각형 APB의 넓이가 $\frac{5}{2}$일 때, $a+b$의 값은?(단, $a>0$이다.)[3점]



① 5 ② 6 ③ 7
④ 4 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2008년 11월 학력평가]

66 실수 a, b, c, x, y, z에 대하여 부등식 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$은 항상 성립하고 등호는 $a:b:c=x:y:z$일 때 성립한다.

다음은 이 부등식을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이 p, q, r에 대하여 $(p+q+r)\left(\frac{1}{-p+q+r}+\frac{1}{p-q+r}+\frac{1}{p+q-r}\right)$의 최솟값을 구하는 과정이다.

> $-p+q+r=l$, $p-q+r=m$, $p+q-r=n$이라 하면
> l, m, n은 모두 양수이다.
> $(p+q+r)\left(\frac{1}{-p+q+r}+\frac{1}{p-q+r}+\frac{1}{p+q-r}\right)$
> $=$ [(가)] $\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$
> $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(ax+by+cz)^2$을 이용하면
> [(가)] $\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\geq$ [(나)] 이고 등호는 $l=m=n$일 때 성립한다.
> 따라서 $(p+q+r)\left(\frac{1}{-p+q+r}+\frac{1}{p-q+r}+\frac{1}{p+q-r}\right)$의 최솟값은 [(나)]이다.

(가), (나)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?[4점]

① $l+m+n$, 6 ② $l+m+n$, 9
③ $2(l+m+n)$, 8 ④ $2(l+m+n)$, 16
⑤ $3(l+m+n)$, 18

[난이도 : ★★★] [2008년 12월 학력평가]

67 $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, 다음 [보기]에서 항상 성립하는 부등식을 모두 고른 것은?[4점]

> [보기]
> ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$
> ㄴ. $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$
> ㄷ. $a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

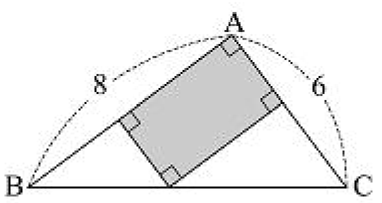
68 두 조건 p, q에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분인 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?(단, x, y는 실수이다.)[4점]

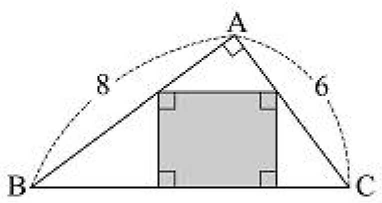
[보기]
ㄱ. $p: \|x\|+\|y\|=0$ $q: x^2+y^2=0$
ㄴ. $p: xy \neq 0$ $q: \|x\|+\|y\|>0$
ㄷ. $p: x<y$ $q: \|x-y\|>x-y$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 03월 학력평가]

69 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 내접하는 직사각형을 만들 때, [그림 1]과 같이 직사각형의 두 변이 삼각형의 변 위에 존재하는 경우와 [그림 2]와 같이 직사각형의 한 변만이 삼각형의 변 위에 존재하는 경우가 있다.





[그림 1]과 [그림 2]의 경우에 내접하는 직사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자.

[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. S_1의 최댓값은 12이다.
ㄴ. S_1이 최대일 때, 직사각형의 둘레의 길이는 14이다.
ㄷ. S_2의 최댓값과 S_1의 최댓값은 같다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2007년 11월 학력평가]

70 명제 "$a \le x \le a+2$이면 $-3 \le x \le 5$이다."가 참이 되게 하는 정수 a의 개수를 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

71 다음은 편지 내용의 일부분이다.

안녕하세요? 저는 제주도에 사는 희망이라고 해요. ㄱ. 제주도는 섬이랍니다. 제가 자랑하고 싶은 곳은 한라산이에요. ㄴ. 한라산은 아시아에서 가장 높은 산이랍니다. ㄷ. 한라산에는 예쁜 꽃들이 많아요. 날씨가 맑은 날에는 산 정상까지 보인답니다. ㄹ. 오늘은 날씨가 참 좋군요.

위의 밑줄 친 문장 중에서 명제인 것을 모두 고른 것은?[3점]

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

72 두 조건 $\begin{cases} p: -1<x<3 \\ q: |x|<a \end{cases}$에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 상수 a의 최솟값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

73 세 조건 p, q, r에 대하여 두 명제 $\sim q \to \sim p$, $r \to \sim q$가 모두 참일 때, 다음 [보기]에서 참인 명제를 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $p \to q$ ㄴ. $q \to r$ ㄷ. $r \to \sim p$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

74 전체집합 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라고 하자.

$P \cap Q = \phi$이고 $P \cup Q \neq U$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

(단, P, Q는 공집합이 아니다.)[3점]

① $p \Rightarrow q$　② $\sim p \Rightarrow q$　③ $q \Rightarrow p$
④ $q \Rightarrow \sim p$　⑤ $\sim p \Rightarrow \sim q$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

75 두 조건 a, b에 대하여 $<a, b>$를

$$<a,b> = \begin{cases} 1 & (a\text{가 } b\text{이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닐} \\ 0 & (a\text{가 } b\text{이기 위한 필요충분조건일때)} \\ -1 & (a\text{가 } b\text{이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닐} \end{cases}$$

으로 정의한다.

세 집합 A, B, X에 대하여 조건 p, q, r이 다음과 같을 때,

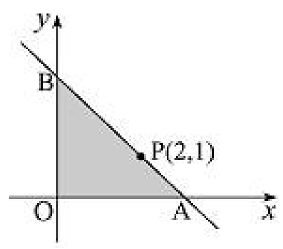
$p : X \subset (A \cap B)$ $q : X \subset (A \cup B)$ $r : X \subset A$ 또는 $X \subset B$

$<p, q> - 2<q, r> - 3<r, p>$ 의 값은?[3점]

① -6　② -4　③ 0
④ 4　⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

76 좌표평면 위에서 점 $P(2, 1)$을 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\,(a > 0, b > 0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은?(단, 점 O는 원점이다.)[4점]



① 2　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{2}$
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2007년 11월 학력평가]

77 다음 [보기]의 명제 중에서 참인 것을 모두 고르면?(단, a, b는 실수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $a<b<0$이면 $a^2>b^2$이다.
ㄴ. $a\ge 0$또는 $b\ge 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.
ㄷ. $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\ge\lvert a+b\rvert$이면 $a\ge 0$이고 $b\ge 0$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

78 다음 삼각형의 성질에 대하여 [가], [나]에 알맞은 것은?[3점]

삼각형 ABC가 정삼각형인 것은 $A=60^\circ$이기 위한 [가]조건이고 두 삼각형의 넓이가 같은 것은 두 삼각형이 합동이기 위한 [나]조건이다.

① 충분, 필요　② 충분, 필요충분　③ 필요, 충분
④ 필요, 필요　⑤ 필요, 필요충분

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

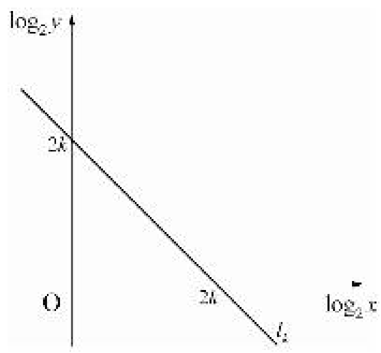
79 [공통]명제의 역이 항상 참인 것을 보기에서 모든 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. 자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2은 홀수이다.
ㄴ. 자연수 n에 대하여 n이 2의 배수이면 n은 4의 배수이다.
ㄷ. 실수 x, y에 대하여 $xy<0$이면 $x^2+y^2>0$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

80 그림에서 직선 l_k는 $\log_2 x$와 $\log_2 y$사이의 관계를 나타낸 그래프이다.



직선 l_k위의 임의의 점 $(\log_2 a, \log_2 b)$에 대하여, $a+b$의 최솟값을 A_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{100} A_k$의 값은?[4점]

① $2^{98}-4$　② $2^{99}-2$
③ $2^{100}-4$　④ $2^{101}-2$
⑤ $2^{102}-4$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

81 세 조건 p, q, r은 다음과 같다.

$p: \lvert x\rvert\le 2$
$q: x(x-3)<0$
$r: [x]^2-[x]-2\le 0$(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수)

세 명제 $p\to q$, $q\to r$, $r\to p$의 참, 거짓을 순서대로 나열하면?[4점]

① 참, 참, 참
② 거짓, 참, 참
③ 참, 거짓, 거짓
④ 거짓, 거짓, 참
⑤ 거짓, 참, 거짓

[난이도 : ★★★] [2007년 9월 학력평가]

82 $x+y=2$를 만족시키는 두 양수 x, y에 대하여 옳은 내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $xy \le 1$ ㄴ. $x^2+y^2 \ge 2$ ㄷ. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \le 1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

83 [공통]두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$b_n = \dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$, $(n \ge 1)$이 성립한다. 다음은 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건은 $\{b_n\}$이 등차수열임을 증명하는 과정이다.

수열 $\{a_n\}$을 첫째항 a, 공차 d인 등차수열이라 하면 $b_n = \dfrac{a+2(a+d)+3(a+2d)+\cdots+n\{a+(n-1)d\}}{1+2+\cdots+n}$ $= \dfrac{a(1+2+\cdots+n)+d\{2+3\cdot 2+\cdots+n\cdot(n-1)\}}{1+2+\cdots+n}$ $= a + \dfrac{2d\left\{[(가)]-\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$ $= a+[(나)]\cdot(n-1)$이므로 $\{b_n\}$은 공차가[(B)]인 등차수열이다. 역으로 $\{b_n\}$을 등차수열이라 하면 $b_{n+1} = \dfrac{a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)} + \dfrac{(n+1)a_{n+1}}{1+2+\cdots+(n+1)}$ $=[(다)]\cdot b_n + \dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\dfrac{2}{3}d$, $\dfrac{n}{n+2}$

② $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\dfrac{2}{3}d$, $\dfrac{n-1}{n+2}$

③ $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$, $\dfrac{3}{2}d$, $\dfrac{n}{n+2}$

④ $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$, $\dfrac{2}{3}d$, $\dfrac{n}{n+2}$

⑤ $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}$, $\dfrac{3}{2}d$, $\dfrac{n+1}{n+2}$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 3월 학력평가]

84 언어영역 3문항, 수리영역 4문항, 외국어영역 3문항, 사회탐구영역 2문항이 있다.

A, B, C, D네 사람에게 3문항씩 각각 다른 영역의 문항을 서로 중복되지 않게 나누어 풀게 하였다. 다음은 네 사람이 푼 문항을 조사한 결과의 일부이다.

A는 언어영역과 수리영역 1문항씩을 풀었다.
? B는 외국어영역 1문항을 풀었다.
? C는 사회탐구영역 1문항을 풀었다.
? D는 수리영역과 외국어영역 1문항씩을 풀었다.

만일 C가 언어영역 문항을 풀었다고 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?[3 점]

① A는 외국어영역 문항을 풀었다.
② A는 사회탐구영역 문항을 풀었다.
③ B는 사회탐구영역 문항을 풀었다.
④ D는 언어영역 문항을 풀었다.
⑤ D는 사회탐구영역 문항을 풀었다.

[난이도 : ★☆☆] [2006년 11월 학력평가]

85 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 원소 전체의 집합을 각각 P, Q라고 하자.

$Q \subset P$일 때, 항상 참인 명제는?(단, $P \neq Q,\ Q \neq \phi$)[2점]

① $p \rightarrow q$
② $p \rightarrow \sim q$
③ $q \rightarrow \sim p$
④ $\sim q \rightarrow p$
⑤ $\sim p \rightarrow \sim q$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 10월 학력평가]

86 실수 전체의 집합에서 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[2점]

[보기]
ㄱ. $p : x > 0,\ y > 0,\quad q : xy > 0$
ㄴ. $p : x < 1,\quad q : -2 \leq x < 0$
ㄷ. $p : x+y$가 유리수 $\quad q : x, y$는 모두 유리수

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

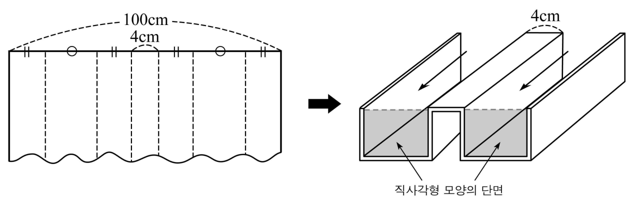
[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 학력평가]

87 두 조건 $\begin{cases} p : a \leq x \leq 3 \\ q : x \geq -2a-6 \end{cases}$에 대하여 명제 $p \rightarrow q$가 참이 되도록 하는 상수 a의 최솟값은?[3점]

① -3 ② $-\frac{5}{2}$ ③ -2
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

88 그림과 같이 폭이 $100cm$인 긴 양철판을 접어서 두 줄기로 물이 가득 차서 흘러가도록 하려고 한다.



물이 흘러가는 방향에 수직으로 자른 단면이 서로 합동이고 한 변이 없는 두 개의 직사각형 모양이 되도록 할 때, 두 직사각형의 넓이의 합의 최댓값을 acm^2라 하자. a의 값을 구하시오.

(단, 양철판의 두께는 무시한다.)[4 점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

89 다음 [보기]의 명제 중 참인 명제를 모두 고른 것은?[2점]

[보기]
ㄱ. 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert=0$이다.
ㄴ. $x=1$이면 $x^2=1$이다.
ㄷ. 이등변삼각형이면 정삼각형이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

90 a, b, c가 실수일 때, p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3 점]

[보기]
ㄱ. $p: a>0,\ q: a^2>0$
ㄴ. $p: ac=bc,\ q: a=b$
ㄷ. $p: a\neq 0$ 또는 $b\neq 0,\ q: a^2+b^2>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 11월 학력평가]

91 다음은 "2006보다 작은 자연수 n에 대하여 2006과 n이 서로소이면 2006과 $2006-n$도 서로소이다."를 증명한 것이다.

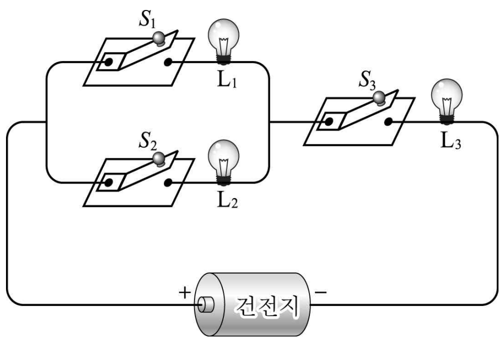
증명
"2006과 $2006-n$이[(가)]"라고 가정하면 2006과 $2006-n$은[(나)]이상의 공약수가 존재한다. $2006=at$, $2006-n=bt$ (a, b, t는 자연수, $t\geq 2$)라 하면 $n=$ ([(다)]) $\times t$이므로 t는 2006과 n의 공약수이다. 이것은 "2006과 n이 서로소이다."에 모순이므로 2006과 $2006-n$도 서로소이다.

위의 증명에서 (가)~(다)를 바르게 짝지은 것은?[3점]

① 서로소이다. 2 $a+b$
② 서로소이다. 3 $a-b$
③ 서로소가 아니다. 2 $a+b$
④ 서로소가 아니다. 2 $a-b$
⑤ 서로소가 아니다. 3 $a+b$

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

92 그림과 같은 스위치 회로에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

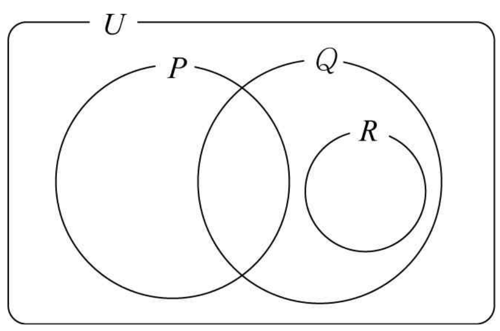


[보기]
ㄱ. 스위치 S_1, S_2, S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_1이 켜지기 위한 필요조건이다.
ㄴ. 스위치 S_2와 S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_3가 켜지기 위한 충분조건이다.
ㄷ. 스위치 S_2또는 S_3가 닫히는 것은 전구 L_2와 L_3가 모두 켜지기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

93 전체집합 U에서 세 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R이라 하면 세 집합 P, Q, R사이의 포함관계는 그림과 같다. 다음 명제 중 참인 것은?[3점]



① $q \to r$　② $\sim q \to p$
③ (p이고 q)$\to r$　④ (p또는 q)$\to q$
⑤ $p \to \sim r$

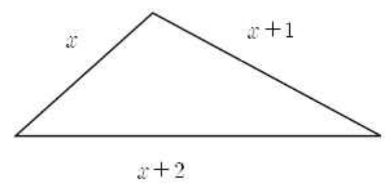
[난이도 : ★★★] [2006년 9월 학력평가]

94 이차방정식 $x^2-2x+a=0$ (a는 실수)이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{4}{a-1}$의 최솟값은?[4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

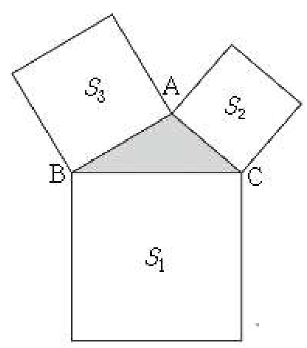
[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

95 세 수 $x, x+1, x+2$가 둔각삼각형의 세 변의 길이가 될 x값의 범위와 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 같을 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

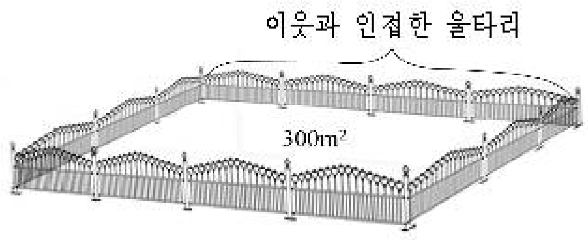
96 그림과 같이 둘레의 길이가 12인 $\triangle ABC$의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3라 하자. $S_1+S_2+S_3$의 값이 최소가 될 때, $\triangle ABC$의 넓이는?[4점]



① 6　② $4\sqrt{3}$　③ 8
④ $6\sqrt{3}$　⑤ 10

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 학력평가]

97 주영이는 이웃과 인접한 땅에 울타리를 설치하는 데 울타리로 둘러싸인 땅은 넓이가 $300m^2$인 직사각형 모양이 되게 하려고 한다. 울타리의 설치 비용은 $1m$당 1만 원이고, 이웃과 인접한 한 쪽 울타리의 설치 비용은 이웃과 절반씩 나누어 내기로 한다. 이때, 울타리를 설치하는 데 주영이가 지불해야 할 최소 비용은[ ]만 원이다.[ ]안에 알맞은 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2005년 3월 학력평가]

98 다음은 문장을 식으로 나타낸 것이다. 옳지 않은 것은?[2점]

① 자동차가 시속 $70km$로 x시간 동안 달린 거리는 $70xkm$이다.

② 밑변의 길이가 acm, 높이가 bcm인 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}abcm^2$이다.

③ 정가 x원인 물건을 25%할인하여 살 때의 금액은 $\frac{3}{4}x$원이다.

④ 농도 $x\%$인 소금물 $300g$속에 녹아 있는 소금의 양은 $3xg$이다.

⑤ 5명이 a원씩을 내서 b원인 선물을 사고 남은 돈은 $5a+b$원이다.

[난이도 : ★☆☆] [2005년 11월 학력평가]

99 x, y가 실수일 때, 다음 중 참인 명제는?[2점]

① $x^2=1$이면 $x=1$이다.

② $x^2>1$이면 $x>1$이다.

③ x가 9의 배수이면 x는 3의 배수이다.

④ $x+y\geq 2$이면 $x\geq 1$이고 $y\geq 1$이다.

⑤ $x+y$가 짝수이면 x, y는 모두 짝수이다.

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

100 다음 [보기]에서 p가 q이기 위한 충분조건인 것을 모두 고른 것은?(단, x, y는 실수)[3점]

[보기]
ㄱ. $p: x=0$이고 $y=0$, $q: x+y\sqrt{2}=0$
ㄴ. $p: x>0$이고 $y>0$, $q: xy>0$
ㄷ. $p: x+y>2$, $q: x>1$이고 $y>1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 학력평가]

101 명제 "$ab\neq 6$이면 $a\neq 2$또는 $b\neq 3$이다."의 역, 이, 대우 중 참인 명제를 모두 고른 것은?[3점]

① 역 ② 이 ③ 대우
④ 역, 이 ⑤ 역, 이, 대우

[난이도 : ★★☆] [2005년 11월 학력평가]

102 세 조건 p, q, r이 $\begin{cases} p: a^2+b^2+c^2=0 \\ q: |a|+|b|+|c|=0 \\ r: (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \end{cases}$ 일 때,

p는 q이기 위한 [(가)]조건, p는 r이기 위한 [(나)]조건이다.

(가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은?(단, a, b, c는 실수이다.)[3점]

① 필요, 충분 ② 충분, 필요
③ 충분, 필요충분 ④ 필요충분, 충분
⑤ 필요충분, 필요

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 학력평가]

103 다음 [보기]에서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건인 것을 모두 고른 것은?(단, x, y는 실수이고 α, β는 복소수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $\begin{cases} p: x^2-y^2=0 \\ q: x-y=0 \end{cases}$
ㄴ. $\begin{cases} p: x^2+y^2=0 \\ q: x+y=0 \end{cases}$
ㄷ. $\begin{cases} p: \alpha^2+\beta^2=0 \\ q: \alpha+\beta=0 \end{cases}$

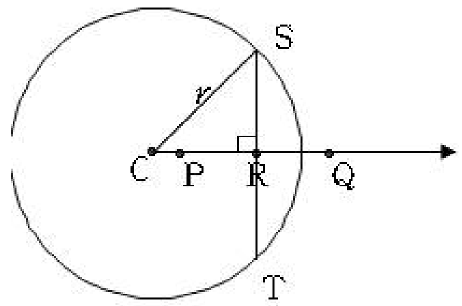
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 학력평가]

104 반지름의 길이가 r인 원 내부의 한 점을 P, 선분 OP(O는 원의 중심)의 P방향으로의 연장선 위에 $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$이 성립하는 점을 Q라 하자.

선분 PQ의 중점을 R이라 할 때, R의 위치가 원의 외부에 있음을 증명한 것이다.

점 R이 원의 내부에 있다고 가정할 때, 점 R을 지나고 선분 PQ에 수직인 현을 ST라고 하자.



$\overline{OP}=\overline{OR}-\overline{RP}$, $\overline{OQ}=$ [(가)]

따라서 $r^2=\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=\left(\overline{OR}-\overline{RP}\right)$[(가)]

$=\overline{OR}^2-\overline{RP}^2$

=[(나)] $-\left(\overline{PS}^2-\overline{RS}^2\right)$

$=r^2-\overline{PS}^2$

그러므로 선분 PS의 길이는 0이다.

이것은 점 P와 S는 같은 점이라는 뜻이고, 점 P가 원 내부의 점이라는 사실에 모순이다.

따라서 점 R은 원 밖의 점이다.

$\overline{OR}=\dfrac{\overline{OP}+\overline{OQ}}{2}>$ [(다)]

따라서 $\overline{OR}>r$이므로 점 R은 원 밖의 점이다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 ?[4점]

① $\overline{OR}+\overline{RP}$, $r^2+\overline{RS}^2$, $\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{PQ}}$
② $\overline{OR}+\overline{RP}$, $r^2-\overline{RS}^2$, $\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$
③ $\overline{OR}+\overline{RQ}$, $r^2+\overline{RS}^2$, $\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OR}}$
④ $\overline{OR}+\overline{RQ}$, $r^2+\overline{RS}^2$, $\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$
⑤ $\overline{OR}+\overline{RQ}$, $r^2-\overline{RS}^2$, $\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OR}}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 학력평가]

105 두 실수 x, y에 대하여 ㈎, ㈏에 알맞은 것은?[3점]

ㄱ. $x \geq 1$이고 $y \geq 1$는 $xy \geq 1$이기 위한 [㈎]조건이다.
ㄴ. $x^2+y^2=0$은 $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=0$이기 위한 [㈏]조건이다.

① 충분, 필요 ② 필요, 충분
③ 필요, 필요충분 ④ 충분, 필요충분
⑤ 필요, 충분 필요

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 학력평가]

106 두 집합 A, B에 대하여 다음 중 $(A \cup B)-(A \cap B)=\phi$이기 위한 필요충분조건인 것은?[3점]

① $A=B$ ② $A \subset B$ ③ $B \subset A$
④ $A \cap B=\varnothing$ ⑤ $A \cup B=\varnothing$

[난이도 : ★★★] [2005년 10월 학력평가]

107 5명의 학생 A, B, C, D, E가 K대학교에 지원하여 그 중 1명이 합격하였다.

학생들은 다음과 같이 이야기하였고 그 중 1명이 거짓말을 하였다.

합격한 학생은 누구인가?[4점]

A:" B는 합격하지 않았다. "
B:" 합격한 사람은 D이다. "
C:" 내가 합격하였다. "
D:" B의 말은 거짓말이다. "
E:" 나는 합격하지 않았다. "

① A ② B ③ C
④ D ⑤ E

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 학력평가]

108 다음은 A, B, C, D네 사람의 컴퓨터 활용능력시험 결과이다.

㈎ 1, 2, 3급에 각각 1명, 2명, 1명이 합격했다.
㈏ A와 B는 다른 급수에 합격했다.
㈐ A와 C는 다른 급수에 합격했다.
㈑ D는 세 사람과 다른 급수에 합격했다.

위 사실로부터 얻을 수 있는 추론 중 항상 옳은 것은?[4점]

① A는 1급에 합격했다.
② B는 2급에 합격했다.
③ A는 3급에 합격했다.
④ C는 1급에 합격했다.
⑤ D는 3급에 합격했다.

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

109 다음의 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p이기 위한 필요조건, p는 r이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a, b를 정할 때, a의 최솟값을 m, b의 최댓값을 M이라 하자.

이때, $\lvert M-m\rvert$의 값을 구하시오.[4점]

또는
$q: x \leq a$
$r: x \geq b$

[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

110 "정수 a, b가 홀수일 때, 방정식 $x^2+2ax+2b=0$은 유리수 해를 갖지 않음"을 증명한 것이다.

> (ⅰ) 정수 x에 대하여 x가 홀수이면 x^2은 홀수이고, $2ax+2b$는 짝수이다.
> 따라서, $x^2=-(2ax+2b)$를 만족하는 홀수 x는 존재하지 않는다.
> x가 짝수이면 x^2+2ax는 2의 배수이고 [(가)]이다.
> $2b$는 2의 배수이지만 [(가)]가 아니다.
> 따라서, $x^2+2ax=-2b$를 만족하는 짝수 x는 존재하지 않는다.
> (ⅱ) 정수가 아닌 유리수 x에 대하여 $x^2+2ax+2b=0$을 변형하면 $(x+a)^2=a^2-2b$이고, $(x+a)^2$은 정수가 아닌 유리수이다.
> 그런데 a^2-2b는 [(나)]이므로 모순이다.
> ∴ (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 a, b가 홀수일 때, 방정식 $x^2+2ax+2b=0$은 유리수 해를 갖지 않는다.

위 증명에서 (가), (나)에 들어갈 내용을 바르게 짝지은 것은? [4점]

① 3의 배수, 정수
② 4의 배수, 유리수
③ 4의 배수, 정수
④ 6의 배수, 유리수
⑤ 6의 배수, 정수

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

111 교지 편집부원 A, B, C는 철수, 영수, 미래, 나래가 일 년 동안 읽은 책의 권수를 조사하여 많이 읽은 순으로 아래와 같이 순위를 적어 놓았다.

그런데, 실제 순위와 비교하였더니 세 사람이 조사한 순위는 각각 1개씩만 맞았다고 한다.

실제 순위를 1위부터 차례대로 나열한 것은?

(단, 철수, 영수, 미래, 나래의 순위는 모두 다르다.)[4점]

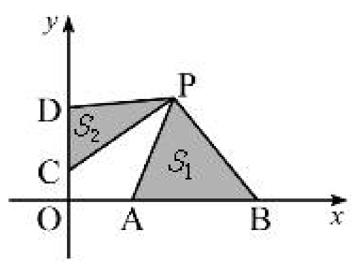
> A:철수는 1위, 영수는 3위
> B:미래는 1위, 나래는 4위
> C:나래는 2위, 철수는 3위

① 미래, 나래, 영수, 철수
② 미래, 영수, 철수, 나래
③ 나래, 미래, 철수, 영수
④ 철수, 미래, 영수, 나래
⑤ 철수, 나래, 영수, 미래

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

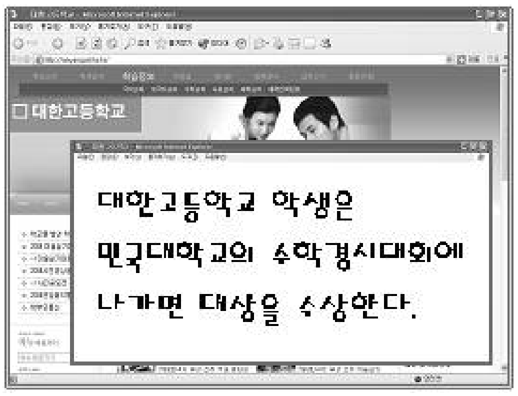
112 좌표평면에서 제 1사분면 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 $a+2b=10$이 성립한다.

x축 위의 두 점 $A(2, 0), B(6, 0)$과 y축 위의 두 점 $C(0, 1), D(0, 3)$에 대하여 ABP, CDP의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1과 S_2의 곱 S_1S_2의 최댓값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

113 어느 해 대한고등학교는 "민국대학교 수학경시대회에서의 대상 입상자가 본교 학생이다. "라는 사실을 홍보하기 위해 다음과 같은 내용을 학교 홈페이지에 게재하였다.



실제의 사실과 게재된 내용 사이의 오류를 설명할 수 있는 명제로 가장 적절한 것은?[3점]

① $p \to q$가 참이면 $q \to p$도 참이다.
② $p \to q$가 참이면 $\sim p \to \sim q$도 참이다.
③ $p \to q$가 참이면 $\sim q \to \sim p$도 참이다.
④ $p \to q$가 참이라 하여 $q \to p$가 반드시 참은 아니다.
⑤ $p \to q$가 참이라 하여 $p \to \sim q$가 반드시 참은 아니다.

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 학력평가]

114 [공통]다음은 $0 < m < n$인 자연수 m, n에 대하여 기약분수 $\frac{m}{n}$이 소수점 아래 셋째 자리까지의 유한소수가 되기 위한 조건을 구하는 과정의 일부이다.

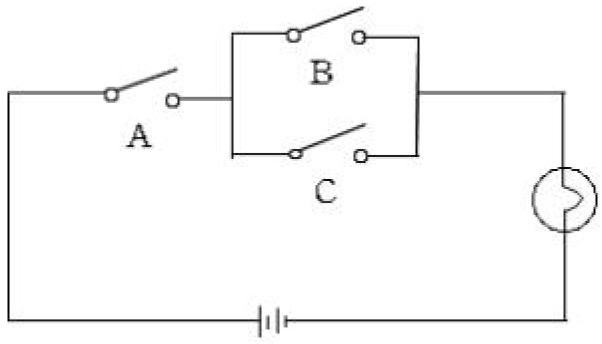
> 기약분수 $\frac{m}{n}$이 소수점 아래 셋째 자리까지의 유한소수라 할 때, $\frac{m}{n}$을 [가]배 하면 정수가 된다. 이 정수를 k라 하면 $\frac{m}{n} \times$ [가] $= k$이다.
> 이때, m과 n은 서로소이므로, n은 [가]의 약수이다.
> 따라서 n을 소인수분해하면 $n =$ [나]와 같이 된다.
> ...(이하 생략)...

위의 과정에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것은?[3점]

① $m\ 5^{\alpha}\ (\alpha = 0, 1, 2, 3)$
② $m\ 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}\ (\alpha = 0, 1, 2, 3,\ \beta = 0, 1, 2, 3)$
③ $10^3\ 2^{\alpha}\ (\alpha = 0, 1, 2, 3)$
④ $10^3\ 5^{\alpha}\ (\alpha = 0, 1, 2, 3)$
⑤ $10^3\ 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}\ (\alpha = 0, 1, 2, 3,\ \beta = 0, 1, 2, 3)$

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

115 그림과 같은 회로도에 [보기]의 명제가 참이면 닫히고 거짓이면 열리는 세 개의 스위치 A, B, C가 있다. 불이 켜지는 것은?[3점]



[보기]

p : $x>2$이면 $x>1$이다.
q : $x^2-x=0$이면 $x=1$이다.
r : $|x|<y$이면 $y<0$이다.
s : $xy=0$이면 $xyz=0$이다.(단, x, y, z는 모두 실수)

① p, q, r ② p, r, s ③ q, r, s
④ r, p, q ⑤ s, r, q

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 학력평가]

116 두 명제 $p \to \sim q$와 $\sim r \to q$가 참일 때, 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?(단, $\sim p$는 p의 부정이다.)[3점]

① $q \to \sim p$ ② $q \to \sim r$
③ $\sim q \to r$ ④ $p \to r$
⑤ $\sim r \to \sim p$

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

117 두 조건 p, q를 각각 만족하는 원소들의 집합 P, Q에 대하여 $P-Q=\phi$, $P \cup Q=U$가 성립할 때, 다음 [보기]에서 항상 참인 명제를 모두 고른 것은(단, U는 ϕ이 아닌 전체집합, $P \subset U$, $Q \subset U$, $P \neq Q$)[3점]

[보기]

ㄱ. $p \to q$
ㄴ. $\sim p \to q$
ㄷ. $q \to p$
ㄹ. $q \to \sim p$

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

118 a, b가 실수일 때, 다음 [보기]중에서 $|a|+|b|=0$이 성립하기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은?[2점]

[보기]

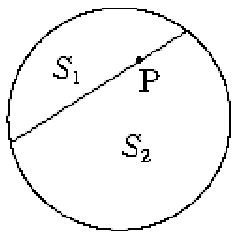
ㄱ. $a^2+b^2=0$
ㄴ. $a+b\sqrt{2}=0$
ㄷ. $a+b=0$
ㄹ. $a+bi=0$(단, $i=\sqrt{-1}$)

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

[난이도 : ★★★] [2004년 11월 학력평가]

119 그림과 같이 넓이가 4π인 원의 내부에 임의의 점 P가 있다.

이 점 P를 지나는 현에 의해 만들어지는 두 활꼴의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $4S_1^2+S_2^2$의 최소값은?[4점]



① $12\pi^2$ ② $\frac{64}{5}\pi^2$ ③ $13\pi^2$

④ $\frac{66}{5}\pi^2$ ⑤ $20\pi^2$

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 학력평가]

120 두 조건 $\begin{cases} p: x^2+x-2 \le 0 \\ q: (x+k)(x+k-8) < 0 \end{cases}$에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 k의 개수는?[4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

정답 및 해설

2.명제

중단원 기출문제

1) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 두 조건에 대하여 조건을 만족시키는 최솟값을 구할 수 있는가?

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{1, 4\}$

$Q=\left\{x \middle| \frac{1}{2}< x \le \frac{a}{2}\right\}$

이때, p가 q이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$

따라서 $4 \le \frac{a}{2}$에서 $a \ge 8$이므로 구하는 최솟값은 8이다.

2) 답 : ④

[해설]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x \mid |x-1| \le 3\}$

$=\{x \mid -3 \le x-1 \le 3\}$

$=\{x \mid -2 \le x \le 4\}$ ...①

또, a가 자연수이므로

$Q=\{x \mid |x| \le a\}$

$=\{-a \le x \le a\}$ ...②

한편, p가 q이기 위한 충분조건 즉, $p \Rightarrow q$ 이므로

$P \subset Q$이어야 한다.

그러므로 ①, ②에서 $-a \le -2$이고 $a \ge 4$

$a \ge 2$이고 $a \ge 4$

따라서, $a \ge 4$이므로 자연수 a의 최솟값은 4이다.

3) 답 : ④

[해설]

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}$

$=\sqrt{4\overline{BC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{5}\,\overline{BC}$ ㈎

$\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CD}=\sqrt{5}\,\overline{BC}-\overline{BC}=(\sqrt{5}-1)\overline{BC}$ ㈏

$\overline{EB}=\overline{AB}-\overline{AE}=2\overline{BC}-(\sqrt{5}-1)\overline{BC}=(3-\sqrt{5})\overline{BC}$

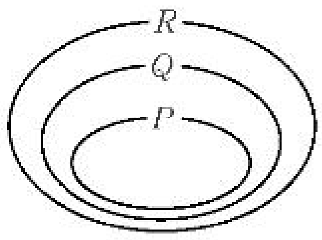
4) 답 : ③

[해설]

p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하면

$p \to q$가 참에서 $P \subset Q$,

$q \to r$이 참에서 $Q \subset R$ 즉, $P \subset Q \subset R$이므로



ㄱ. 참

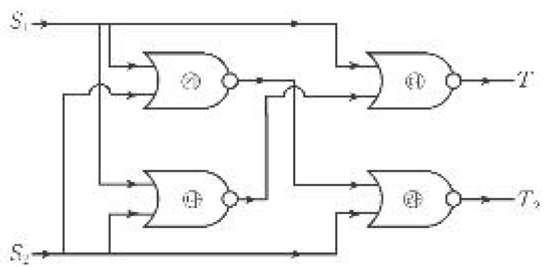
ㄴ. 거짓

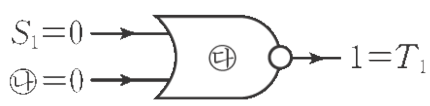
ㄷ. $(P \cup R) \supset Q$에서 $(P \cup R)^c \subset Q^c$

즉, $(P^c \cap R^c) \subset Q^c$

5) 답 : ②

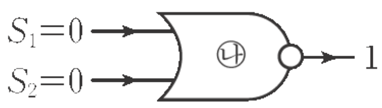
[해설]

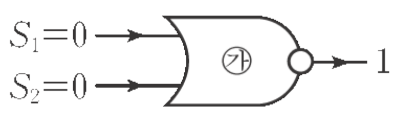


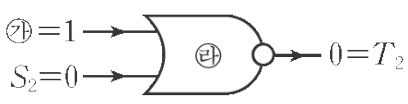


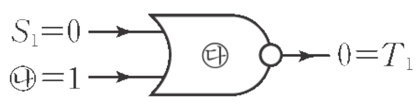
$T_1=1$이려면 ㉰로 입력되는 입력값은 모두 0이어야 한다. ∴ $S_1=0$

한편, ⅰ) $S_2=0$을 대입하면





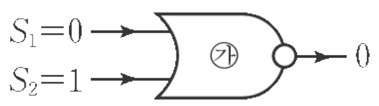


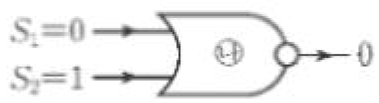


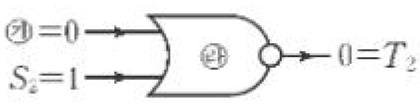
∴ $S_2 \ne 0$

ⅱ) $S_2=1$을 대입하면, 같은 방법으로

정답 및 해설







$\therefore \ S_2=1$

6) 답 : ①

[해설]

$m^4+4^n=4\cdot(4j^4+4^{n-1})$이므로 소수가 아니다. … ㉮

또 $m^4+4^{2k-1}=(m^2)^2+4(4^{k-1})^2$

$(m^2)^2+4(4^{k-1})^2+4\cdot m^2\cdot 4^{k-1}-4\cdot m^2\cdot 4^{k-1}$

$=(m^2+2\cdot 4^{k-1})^2-(2\cdot m\cdot 2^{k-1})^2$

$=(m^2-m\cdot 2^k+2\cdot 4^{k-1})(m^2+m\cdot 2^k+2\cdot 4^{k-1})$… ㉯

또 $m^2-m\cdot 2^k+2\cdot 4^{k-1}=(m-2^{k-1})^2+4^{k-1}=1$이다. … ㉰

7) 답 : ⑤

[해설]

㉮ n은 $3, 7, 11, 19$, …, p의 배수가 아니므로 n은 $3, 7, 11, 19$, …, p로

[나누어 떨어지지 않는다.]

㉯ $4k+1$꼴의 두 정수를 $4m_1+1, 4m_2+1$ (m_1, m_2는 음이 아닌 정수)라 하면

이 두 정수의 곱은

$(4m_1+1)(4m_2+1)=4(4m_1m_2+m_1+m_2)+1$이므로

[$4k+1$]꼴이다.

㉰ n의 모든 소인수는 $4k+1$꼴 또는 $4k+3$꼴의 정수인데

앞에서 n의 모든 소인수가 $4k+1$꼴이면 모순이므로

n은 [$4k+3$]꼴의 소인수를 갖는다.

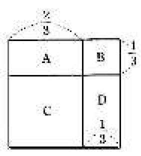
8) 답 : ③

[해설]

Ⅰ.거짓다음 그림과 같이 잡으면

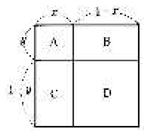
$A=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}>\frac{1}{4},\ C=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}>\frac{1}{4}$

Ⅱ.



거짓 $A=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}<\frac{1}{4},\ D=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}<\frac{1}{4}$

Ⅲ.



참

$A=xy>\frac{1}{4},\ D=(1-x)(1-y)=1-(x+y)+xy$

산술기하평균에서 $x+y\geq 2\sqrt{xy}$이므로

$D\leq 1-2\sqrt{A}+A=(\sqrt{A}-1)^2<\frac{1}{4}\left(\because A>\frac{1}{4}\right)$

9) 답 : ①

[해설]

$p>\sqrt{n}$이고 $q>\sqrt{n}$이면 $pq>n$이므로

가정 " p, q는 $\sqrt{n}$보다 작거나 같은 소수" 에 모순이다.

즉, " $p>\sqrt{n}$이고 $q>\sqrt{n}$ " 이면 모순이므로

㉮에 들어갈 것은 " $p>\sqrt{n}$이고 $q>\sqrt{n}$ "의 부정이다.

$\therefore\ p\leq\sqrt{n}$이거나 $q\leq\sqrt{n}$

10) 답 : ⑤

[해설]

$3m^2-n^2=1$을 만족하는 이 m, n정수인 해는 없다.

귀류법을 쓰면 m, n이 정수이고 $3m^2=n^2+1$이므로

n^2+1은 3의 배수이다...①

한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,

$n=3k$이면 $n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$

$n=3k+1$이면 $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$이면

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$이므로

n^2을 3으로 나눈 나머지는 0또는 1이다.

따라서, n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1또는 2이다...②

그러므로 ①, ②에 의하여 모순이다.

따라서, $3m^2-n^2=1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

11) 답 : ①

[해설]

ⅰ) [㉮]유리수

ⅱ)세 꼭짓점의 좌표가 모두 유리수일 때 한 꼭짓점이 원점에 오도록 평행이동하면 다음 꼭짓점의 좌표도 모두 유리수가 된다. ∴ [㉯]유리수

ⅲ)점 $B(c, d)$는 점 $A(a, b)$를 원점을 중심으로

60° 만큼 회전이동한 점이므로

$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ, & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ, & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1, & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3}, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a-\sqrt{3}b \\ \sqrt{3}a+b \end{pmatrix}$

$\therefore\ c=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ d=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$

$c=\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b$에서 $b=0$일 때 a가 유리수이므로 c는 유리수가 되고,

$b \neq 0$일 때 $\frac{\sqrt{3}}{2}b$는 무리수이고 $\frac{1}{2}a$는 유리수이므로 c는 무리수가 된다.

$d = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b$에서 $b = 0$이면

$d = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이고 a는 0이 아닌 유리수이므로 d는 무리수가 된다.

∴ [㈐]무리수

12) 답 : ⑤

[해설]

① $\angle CBP$와 $\angle PAD$는 호 CD에 대한 원주각이므로 같다.

② $\triangle EBP$와 $\triangle EPC$는 서로 닮음이므로

$\angle EBP = \angle EPC$...①

또한 ①에 의하여 $\angle EBP = \angle PAF$...②

$\angle EPC = \angle APF$(∴ 맞꼭지각)

①, ②에 의하여 $\angle EPC = \angle PAF$...③

③, ④에 의하여 $\angle APF = \angle AFP$...④

③ $\angle BCP = \angle FDP$(∴ 호 AB에 대한 원주각)...①

$\angle BCP = \angle EPC = 90^\circ$ 이고 $\angle APF + \angle FPD = 90^\circ$

$\angle EPC = \angle FDP$

$\angle BCP = \angle APF$...②

①, ②에 의하여 $\angle FPD = \angle FDP$

④ ②에 의하여 $\triangle PAF$는 이등변삼각형이므로 $\overline{AF} = \overline{PF}$

③ 에 의하여 $\overline{PF} = \overline{FD}$

∴ $\overline{AF} = \overline{FD}$

⑤ (거짓)

13) 답 : ⑤

[해설]

x, y, z가 정수일 때 $x^2 + y^2 + z^2 = 1111$에서

$x^2 + y^2 + z^2$을 8로 나누었을 때의 나머지는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6중 하나이고

1111을 8로 나누면 나머지가 7이므로

주어진 명제의 등식이 성립하지 않는다.

따라서 주어진 x, y, z가 모두 정수인 해는 없다.

14) 답 : ④

[해설]

위의 그림에서 붙여 나가는 직각삼각형의 빗변이 선분 AB와 이루는 각의

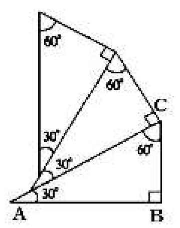
크기가 차례로 $30^\circ, 30^\circ \times 2, 30^\circ \times 3, \ldots$이 되므로

직각삼각형을 n개 붙였을 때 n번째의 빗변과 선분 AB가 이루는

각의 크기는 $30^\circ \times n \leq 360^\circ$

∴ $n \leq 12$

따라서, 12개까지 붙일 수 있다.



15) 답 : ⑤

[해설]

$\triangle ACD$가 정삼각형이므로 $\overline{AC} = \overline{DC}$...㈎

$\triangle BCE$가 정삼각형이므로 $\overline{CE} = \overline{CB}$...㈏

16) 답 : ⑤

[해설]

x가(홀수)이면 x^2은(홀수)이고(∵ $x = 2n-1$일 때, $x^2 = 4n^2 - 4n + 1$)

$px - 2q$는 짝수이다.

따라서, $x^2 + px - 2q$가(홀수)가 되므로 (0)이 될 수 없다.(∵ x^2은 홀수 $px - 2q$는 짝수)

x가(짝수)이면 $x^2 + px$는 4의 배수이고 $2q$는 반드시 4의 배수 아니다.

그런데 $(x^2 + px = 2q)$이므로 모순이다.

(∵ 좌변은 4의 배수, 우변은 반드시 4의 배수가 아니다.)

따라서, 이 방정식은 정수근을 갖지 않는다.

17) 답 : ⑤

[해설]

원래: $\overline{AB} = \overline{AC} \to \angle B = \angle C$

역 $\angle B = \angle C \to \overline{AB} = \overline{AC}$

이 $\overline{AB} \neq \overline{AC} \to \angle B \neq \angle C$

대우 $\angle B \neq \angle C \to \overline{AB} \neq \overline{AC}$

18) 답 : ①

[해설]

$a = H + \frac{a}{r},\ H = b + \frac{b}{r}$...i)

$a - H = \frac{a}{r}$이므로 $\frac{a-H}{a} = \frac{1}{r}$

$H - b = \frac{b}{r} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{H-b}{b}$

∴ $\frac{a-H}{a} = \frac{H-b}{b}$ ... ㈎

$ab - bH = aH - ab \Rightarrow (a+b)H = 2ab$

$H = \frac{2ab}{a+b}$ ... ㈏

㈐ 필요충분조건

19) 답 : ④

[해설]

결론 "세 근의 절대값 중 적어도 하나는 $\frac{|a|}{3}$보다 크거나 같다."를 부정하면

㈎ 는 "모든 근의 절대값이 $\frac{|a|}{3}$보다 작다." 이다.

또, 근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta + \gamma = -a$이므로

㈏ 는 $[-(\alpha + \beta + \gamma)]$이다.

$|a| = |\alpha + \beta + \gamma| \leq |\alpha + \beta| + |\gamma| \leq |\alpha| + |\beta| + |\gamma|$

$< \frac{|a|}{3} + \frac{|a|}{3} + \frac{|a|}{3} = |a|$에서

㈐ 는 $[\,|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\,]$ 이다.

20) 답 : ④

[해설]

$p \to q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다.

조건 p의 범위는 $x^2-3x-4 \leq 0$이며 정리하면

$(x-4)(x+1) \leq 0$이며 정리하면

$-1 \leq x \leq 4$ 이다.

a의 범위는 $-1 \leq a \leq 4$ 이다.

따라서 a의 최댓값은 4이다.

21) 답 : ④

[해설]

모든 양의 실수 x에 대하여 $x-a+4>0$이려면

$-a+4 \geq 0$을 만족해야 한다.

따라서 자연수 a의 개수는 4

22) 답 : ②

[해설]

p : $|x|>4 \Leftrightarrow x<-4$ 또는 $x>4$

q : $x^2-9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

r : $x \leq 3$

이므로 참인 것은 ㄱ, ㄴ

[다른 풀이]

$p: x>4$, $x<-4$ $\sim p: -4 \leq x \leq 4$

$q: -3 \leq x \leq 3$ $\sim q: x>3$ 또는 $x<-3$

$r: x \leq 3$ $\sim r: x>3$

ㄱ. $q \to r$ (참)

ㄴ. $p \to \sim q$ (참)

ㄷ. $r \to \sim p$: $x \leq 3$은 $-4 \leq x \leq 4$에 속하지 않으므로 (거짓)

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄴ이다.

23) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 명제가 참이 되도록 하는 실수의 값을 구한다.

명제 $p \to q$의 역이 참이므로 명제 $q \to p$가 참이다.

그러므로 $Q \subset P$ 가 성립해야 한다.

$4 \in Q$ 이므로 $4 \in P$ 이어야 한다.

$a^2=4$, 즉 $a=2$ 또는 $a=-2$

(ⅰ) $a=-2$일 때 $P=\{2,\ 3,\ 4\}$, $Q=\{-1,\ 4\}$이므로 $Q \not\subset P$

(ⅱ) $a=2$일 때 $P=\{2,\ 3,\ 4\}$, $Q=\{3,\ 4\}$이므로 $Q \subset P$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=2$

24) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 명제를 활용하여 추론하기

실수 x에 대한 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면

$P=\{x|0 \leq x \leq 3\}$, $Q=\{x|x>4\}$, $R=\{x|-1 \leq x \leq 3\}$

ㄱ. P는 Q의 부분집합이 아니므로 $p \to q$는 거짓이다.

ㄴ. $P \subset R$이므로 $p \to r$는 참이다.

ㄷ. $Q^c=\{x|x \leq 4\}$이고 $R \subset Q^c$이므로 $r \to \sim q$는 참이다.

따라서 참인 명제는 ㄴ, ㄷ

25) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 충분조건이 되도록 하는 자연수의 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.

두 조건 p, q에 대한 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$p \to \sim q$가 참이면 이 명제의 대우인 $q \to \sim p$도 참이므로

$Q \subset P^C$이어야 한다.

$P=\{x||x| \geq a\}$이므로

$P^C=\{x||x|<a\}=\{x|-a<x<a\}$

$Q=\{x|x(x-3) \leq 0\}=\{x|0 \leq x \leq 3\}$

그러므로 $\{x|0 \leq x \leq 3\} \subset \{x|-a<x<a\}$에서

$-a<0$이고 $a>3$이어야 하므로 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4

[다른 풀이]

두 조건 p, q에 대한 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P=\{x||x| \geq a\}=\{x|\ x \leq -a$ 또는 $x \geq a\}$,

$Q=\{x|x(x-3) \leq 0\}=\{x|0 \leq x \leq 3\}$

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이면 $P \subset Q^C$이어야 한다.

$Q^C=\{x|\ x<0$ 또는 $x>3\}$에서

$-a<0$이고 $a>3$이어야 하므로 $a>3$

따라서 자연수 a의 최솟값은 4

26) 답 : 28

[해설]

[출제 의도] 명제가 참이 되도록 하는 부분집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 $x^2-3x<0$의 진리집합을 P 라 하면

$x(x-3)<0$에서 $0<x<3$이므로

$P=\{1,\ 2\}$

명제 ' 집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.' 가 참이 되기 위해서는 집합 A가 집합 P의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

그러므로 $A=\{1\}$ 또는 $A=\{2\}$ 또는 $A=\{1,\ 2\}$이다.

명제 ' 집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x \in A$이다.'

가 참이 되기 위해서는 $A \cap B \neq \varnothing$이어야 한다.

(ⅰ) $A=\{1\}$인 경우집합 B는 1을 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이므로 집합 B 의 개수는 $2^3=8$

(ⅱ) $A=\{2\}$인 경우집합 B는 2를 원소로 갖는 집합 U 의 부분집합이므로 집합 B 의 개수는 $2^3=8$

(ⅲ) $A=\{1,\ 2\}$인 경우집합 B는 1 또는 2를 원소로 갖는 집합 U 의부분집합이다.

ⅲ-가) 1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는 집합 B 의 개수는 $2^2=4$

ⅲ-나) 2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는 집합 B 의 개수는 $2^2=4$

정답 및 해설

iii-다) 1, 2를 모두 원소로 갖는 집합 B의 개수는 $2^2=4$
따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는 $8+8+(4+4+4)=28$

27) 답 : ④
[해설]
[출제 의도] 명제와 조건 이해하기
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x|x \geq a\}$
$Q=\{x|1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 7\}$

명제 $p \to q$가 참이므로 $P \subset Q$ 에서 $a \geq 7$

따라서 a의 최솟값은 7

28) 답 : 256
[해설]
[출제 의도] 명제와 진리집합의 관계를 이해하여 두 진리집합의 개수를 구하는 문제를 해결한다.
$x^2 \leq 2x+8$에서 $(x+2)(x-4) \leq 0$이므로 $-2 \leq x \leq 4$
$P \subset U$이므로 $P=\{1, 2, 3, 4\}$
명제 $\sim p \to r$가 참이므로 대우명제인 $\sim r \to p$도 참이다. 그러므로 $\sim r \Rightarrow p$에서 $R^c \subset P$, $p \Rightarrow q$에서 $P \subset Q$
집합 Q는 집합 P를 포함하므로 가능한 집합 Q의 개수는 2^4이다.
ⅰ) $n(R^c)=0$인 경우
$R^c=\phi$이므로 $R=U$이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.
ⅱ) $n(R^c)=1$인 경우
$R^c=\{1\}$이면 $R=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.
R^c이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 4$이다.
ⅲ) $n(R^c)=2$인 경우
$R^c=\{1, 2\}$이면 $R=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.
R^c이 $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 6$이다.
ⅳ) $n(R^c)=3$인 경우
$R^c=\{1, 2, 3\}$이면 $R=\{4, 5, 6, 7, 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.
R^c이 $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$인 경우도 가능한 집합 Q의 개수는 각각 2^4씩 이다.
그러므로 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 4$이다.
ⅴ) $n(R^c)=4$인 경우
$R^c=\{1, 2, 3, 4\}$이면 $R=\{5, 6, 7, 8\}$이다.
이때 순서쌍 (Q, R)의 개수는 $2^4 \times 1$이다.

ⅰ)~ⅴ)에 의해서 순서쌍 (Q, R)의 개수는
$2^4+4 \times 2^4+6 \times 2^4+4 \times 2^4+2^4=16 \times 2^4=256$이다.

29) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도] 절대부등식을 이용하여 도형의 성질을 추론한다.
ㄱ.삼각형 GDH와 삼각형 FCG는 직각이등변삼각형이므로
각 FGH는 직각이다. 또, 문제에서 점 M은 선분 FH의 중점이므로
세 점 F, G, H는 중심이 M인 한 원 위에 있다.
그러므로 $\overline{FM}=\overline{GM}$이다. (참)
ㄴ.삼각형 AEH와 삼각형 BFE가 합동이므로
$\angle AEH+\angle BEF=90^\circ$ 이고, 삼각형 EFH는 직각이등변삼각형이다.
즉, $\overline{EF}=\overline{EH}=\sqrt{a^2+b^2}$
그러므로 삼각형 EFH의 넓이는 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$이다.
선분 EM은 삼각형 EFH를 이등분하므로
삼각형 EFM의 넓이는 $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$이다.
또한 삼각형 FGH는 직각삼각형이므로 넓이는 ab이고
삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이다.
그러므로 $\frac{1}{4}(a^2+b^2) \geq \frac{1}{4}(2ab)=\frac{1}{2}ab$ (참)
ㄷ.선분 FH는 직각이등변삼각형 EFH의 빗변이므로 길이는 $\sqrt{2} \times \sqrt{a^2+b^2}$
문제에서 $\overline{FH}=6\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2} \times \sqrt{a^2+b^2}=6\sqrt{2}$에서 $a^2+b^2=36$이다.
그런데 삼각형 FGM의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이고
$36=a^2+b^2 \geq 2ab$이므로 $\frac{1}{2}ab \leq 9$
그러므로 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다. (참)

30) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 명제의 참과 거짓 추론하기
명제 $p \to q$, $q \to \sim r$가 모두 참이므로 명제 $p \to \sim r$가 참.
참인 명제의 대우도 항상 참이므로
$\therefore$ $r \to \sim p$도 항상 참.

31) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 필요조건과 충분조건 이해하기
조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 되지 않으려면 $Q \subset P, P \neq Q$이어야 한다.
ㄱ. $P=\{-5, -1\}, Q=\{-1\}$이므로
$Q \subset P$ (참)
ㄴ. $P=\{x|-1<x<1\}$이므로 $P \subset Q$이다.(거짓)
ㄷ. $x=-2, y=1$은 P에 속하지만 Q에 속하지 않고,
Q에 속한 모든 x, y는 P에 속한다. (참)

32) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 명제와 진리집합 사이의 관계 이해하기

주어진 벤 다이어그램에서 두 집합 P, R의 포함관계는 $R \subset P$이다.

따라서 $P^c \subset R^c$ 이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$이 참이다.

33) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 명제의 필요조건과 충분조건 이해하기

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때,

$P = \{x| -a+1 < x < a+1\}$

$Q = \{x| -6 < x < 4\}$

조건 p가 조건 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아니므로

$Q \subset P,\ P \neq Q$

$a+1 \ge 4,\ -a+1 \le -6$이므로 $a \ge 7$

$\therefore$ a의 최솟값은 7

34) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 명제의 역, 이, 대우를 이해하여 추론하기

$p \Rightarrow q$이므로 $P \subset Q \cdots$①

$\sim p \Rightarrow q$이므로 $P^c \subset Q \cdots$②

$\sim r \Rightarrow p$이므로 $R^c \subset P \cdots$③

① , ②에서 $P \cup P^c \subset Q$이므로 $U = Q \cdots$ ④

① , ③에서 $R^c \subset P \subset Q$

ㄱ. ②에서 $P^c \subset Q$이다. (참)

ㄴ. (반례) $P = \{1, 2\},\ R = \{2, 3\},\ Q = \{1, 2, 3\}$일 때,

$R - P^c = R \cap P = \{2\} \neq \phi$ (거짓)

ㄷ. ④에서 $R^c \cup P^c \subset Q$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

35) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 절대부등식을 이용하여 유리식의 최솟값 추론하기

$x > 1$ 이므로 $x-1 > 0$ 이고

$\dfrac{x^2-x+4}{x-1} = [x-1] + \dfrac{4}{x-1} + 1$ 이므로

$\dfrac{x^2-x+4}{x-1} \ge 2\sqrt{[x-1] \times \dfrac{4}{x-1}} + 1 = [5]$

단, $[x-1] = \dfrac{4}{x-1}$ 일 때, 등호가 성립한다.

따라서 $\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$는 $x =$ [3] 일 때,

최솟값 [5]를 갖는다.

$f(x) = x-1,\ p = 5,\ q = 3$

$\therefore$ $f(2) + p + q = 9$

36) 답 : 80

[해설]

[출제 의도] 절대부등식을 활용하여 문제 해결하기

(A의 부피) $= 3xy - 1 = 47$ $\therefore$ $xy = 16$

(A의 겉넓이) $= 2(xy + 3x + 3y) = 32 + 6(x+y)$

산술평균, 기하평균의 관계에 의하여

$32 + 6(x+y) \ge 32 + 12\sqrt{xy} = 80$ (단, 등호는 $x = y = 4$일 때 성립한다.)

따라서 A의 겉넓이의 최솟값은 80

37) 답 : 23

[해설]

[출제 의도] 절대부등식을 이용하여 유리식의 최솟값 계산하기

$x^2 - 9 > 0$이므로

$$x^2 + \frac{49}{x^2-9} = (x^2-9) + \frac{49}{x^2-9} + 9$$

$$\ge 2\sqrt{(x^2-9) \times \frac{49}{x^2-9}} + 9 = 23$$

따라서 $x = 4$일 때 최솟값은 23이다.

38) 답 : 25

[해설]

$$\left(8a + \frac{3}{b}\right)\left(\frac{1}{2a} + 3b\right) = 4 + 24ab + \frac{3}{2ab} + 9 = 13 + 24ab + \frac{3}{2ab}$$

$ab > 0$이므로 $\dfrac{24ab + \dfrac{3}{2ab}}{2} \ge \sqrt{24ab \times \dfrac{3}{2ab}} = 6$

즉, $24ab + \dfrac{3}{2ab} \ge 12$ (단, 등호는 $ab = \dfrac{1}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore$ 최솟값은 25이다.

39) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]산술평균과 기하평균의 대소관계를 이용하여 식의 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

직선 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1\ (a > 0,\ b > 0)$이 점 $A(2, 3)$을 지나므로

$\dfrac{2}{a} + \dfrac{3}{b} = 1$

$a > 0,\ b > 0$이므로 $\dfrac{\dfrac{2}{a} + \dfrac{3}{b}}{2} \ge \sqrt{\dfrac{6}{ab}}$

양변을 제곱하여 정리하면 $ab \ge 24$

(단, 등호가 성립하는 경우는 $a = 4,\ b = 6$일 때이다.)

$\therefore$ ab의 최솟값은 24

40) 답 : 8

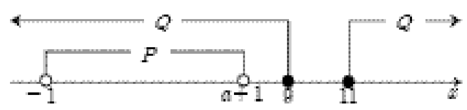
[해설]

[출제 의도]명제가 참이 되도록 하는 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P = \{x| -1 < x < a+1\},\ Q = \{x| x < 9 \text{또는} x > 11\}$

$P \subset Q$이므로



$a + 1 \le 9$이다.

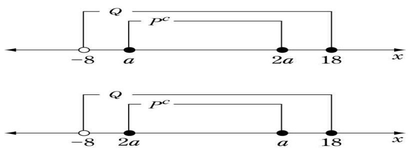
$\therefore$ a의 최댓값은 8

41) 답 : ④

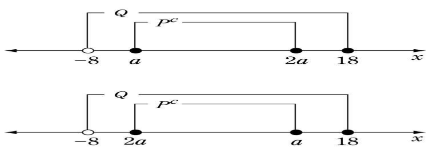
정답 및 해설

[해설]
$p \to \sim q \Leftrightarrow r$이므로 $P \subset Q^c = R$이다.
ㄱ. $P \subset Q^c$이므로 $P \cap Q = \phi$(참)
ㄴ. $P \subset R$이므로 $P \cap R = P$(거짓)
ㄷ. $Q^c = R$이므로 $Q \cup R = U$(참)
∴ ㄱ, ㄷ

42) 답 : 13
[해설]
조건 $\sim p$의 진리집합 P^c과 조건 q의 진리집합 Q에 대하여
$\sim p$는 q이기 위한 충분조건이므로
$P^c \subset Q$
ⅰ) $a \geq 0$일 때, $P^c = \{x | a \leq x \leq 2a\}$



$-8 < a,\ 2a \leq 18$
∴ $0 \leq a \leq 9$
따라서 정수 a의 개수는 10이다.
ⅱ) $a < 0$일 때, $P^c = \{x | 2a \leq x \leq a\}$



$-8 < 2a,\ a \leq 18$
∴ $-4 < a < 0$
따라서 정수 a의 개수는 3이다.
∴ ⅰ), ⅱ)에 의해 정수 a의 개수는 13

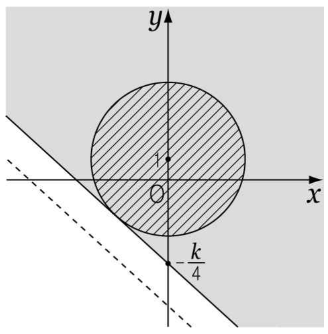
43) 답 : ④
[해설]
조건 p를 만족하는 진리집합을 P,
조건 q를 만족시키는 진리집합을 Q라 하면,
$P = \{x||x-1| < 3\}$
$= \{x| -2 < x < 4\}$
$Q = \{x | a-1 \leq x \leq b+2\}$이다.
이때, p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이다.
$a-1 \leq -2$에서 $a \leq -1$이므로
a의 최댓값 -1, $b+2 \geq 4$에서 $b \geq 2$이므로 b의 최솟값은 2이다.
따라서 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은 1

44) 답 : 17
[해설]
[출제 의도]조건과 진리집합 사이의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하면
$2n-4 \geq 3$, $n \geq \dfrac{7}{2}$에서 $Q = \{4, 5, 6, 7, \cdots\}$
$n^2 - 19n - 20 \geq 0$, $(n+1)(n-20) \geq 0$에서
$R = \{20, 21, 22, 23, \cdots\}$
p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
p는 r이기 위한 필요조건이므로 $R \subset P$
∴ $R \subset P \subset Q$
$P = \{n | n \geq k,\ n$은 자연수 $\}$에서 $k = 4, 5, 6, \cdots, 20$
따라서 자연수 k의 개수는 17

45) 답 : ②
[해설]
조건 '$p(x)$또는 $\sim q(x)$'의 진리집합은 $P \cup Q^c$이므로
모든 x에 대하여 주어진 조건이 참이면 $P \cup Q^c = U$이다.
$(P \cup Q^c)^c = U^c$이므로 드모르간의 법칙에 의하여
$P^c \cap Q = \phi$이다.

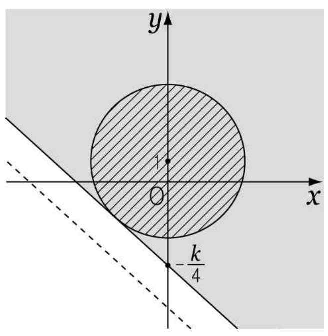
46) 답 : ④
[해설]
전체집합 U에서
$P = \{1, 2, 4\}$, $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
$P \subset X \subset Q$이므로 집합 X는 집합 Q의 부분집합 중 1, 2, 4를 원소로 가지는 집합이다.
따라서, 집합 X의 개수는 $2^{8-3} = 32$(개)이다.

47) 답 : 21
[해설]
조건 p와 조건 q의 진리집합이 나타내는 영역을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이 될 때, k의 값의 범위는 $k \geq 21$이다.(단, 등호가 성립하는 것은 직선 $3x+4y+k=0$이 원 $x^2+(y-1)^2=25$에 접할 때이다.)
∴ k의 최솟값은 21이다.

48) 답 : 21
[해설]
조건 p와 조건 q의 진리집합이 나타내는 영역을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



따라서 조건 p는 조건 q이기 위한 충분조건이 될 때,
k의 값의 범위는 $k \geq 21$이다.
(단, 등호가 성립하는 것은 직선 $3x+4y+k=0$이 원
$x^2+(y-1)^2=25$에 접할 때이다.)

$\therefore$ k의 최솟값은 21이다.

49) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]조건과 진리집합 사이의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$p \to \sim q$에서 $P \subset Q^c$

$\therefore$ $Q \subset P^c$

$\sim r \to q$에서 $R^c \subset Q$

$\therefore$ $Q^c \subset R$

$P \subset Q^c$, $Q^c \subset R$에서 $P \subset R$

$P \subset Q^c$, $P \subset R$에서 $P \subset (R \cap Q^c)$

따라서 ①, ②, ③, ⑤는 옳다.

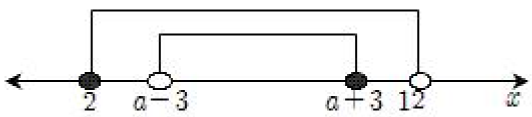
$P \subset R$과 $R \subset P^c$이 모두 성립하려면

$P = \phi$이어야하므로 ④는 옳지 않다.

50) 답 : 26

[해설]

$\{x | a-3 < x \le a+3\}$ $\subset$ $\{x | 2 \le x < 12\}$이 성립하도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$$\begin{cases} a-3 \ge 2 \\ a+3 < 12 \end{cases}$$

$\therefore$ $5 \le a < 9$

따라서, 만족하는 정수는 $5, 6, 7, 8$이므로 합은 26이다.

51) 답 : 16

[해설]

$$\begin{aligned}(x+y)(y+2) &= xy+2x+y^2+2y \\ &= y(x+y+2)+2x \\ &= \frac{32}{x}+2x \qquad \because\ x>0 \\ &\ge 2\sqrt{\frac{32}{x}2x} = 16\end{aligned}$$

(단, 등호는 $x=4$일 때 성립한다)

52) 답 : ⑤

[해설]

p는 5이상의 소수이므로 p는 2의 배수가 아니고 3의 배수도 아니다.

(i) p가 2의 배수가 아니므로

$p=2a+1$인 2이상의 어떤 정수 a가존재한다.

따라서 $\begin{aligned}&p^2-1=(p+1)(p-1)\\&=(2a+2)(2a)=4a(a+1)\end{aligned}$

에서 $a(a+1)$은 연속하는 두 자연수의 곱이므로 2의 배수이다.

따라서 p^2-1은 항상 8의 배수이다.

(ii) p가 3의 배수가 아니므로

$p=3b+1$또는 $p=3b-1$인 2이상의 어떤 정수 b가 존재한다.

따라서 $p^2-1=(p+1)(p-1)$에서 $p^2-1=(3b+2)(3b)$

또는 $p^2-1=3b(3b-2)$이므로 p^2-1은

항상 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의해서 p^2-1은 24의 배수이다.

53) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]충분조건을 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

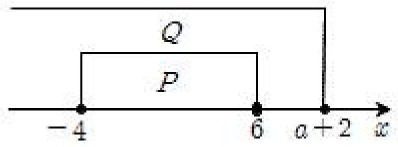
$P=\{x||x-1| \le 5\}=\{x|-4 \le x \le 6\}$,

$Q=\{x|x \le a+2\}$이다.

이때, p는 q이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q$이므로

아래 그림과 같이 $a+2 \ge 6 \cdots$①이어야 한다.

[?]



① 의 식을 풀면, $a \ge 4$이다.

따라서 상수 a의 최솟값은 4이다.

54) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]명제가 거짓임을 보이는 예를 찾을 수 있는가를 묻는 문제이다.

반례는 가정인 $x > \sqrt{2}$를 만족하지만

결론인 $x \ge \sqrt{6}$을 만족하지 않는 것이어야 한다.

즉 $\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$이어야 한다.

보기 중에서 $\sqrt{2} < x < \sqrt{6}$인 x의 값은 2뿐이다.

55) 답 : ③

[해설]

$a-2+2b=0$이므로 $a+2b=2$

$1=\dfrac{a+2b}{2} \ge \sqrt{2ab} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \ge ab$, 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$

등호는 $a=2b$일 때 성립

즉, $\begin{cases} a+2b=2 \\ a-2b=0 \end{cases}$이므로 $\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha=1, \beta=-2$

$\therefore$ $\alpha+\beta=-1$

56) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]귀류법을 이용하여 방정식이 정수인 근을 갖지 않음을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

㈎ $f(0)$

㈏홀수

㈐ $f(1)$

57) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]실수의 성질을 이용하여 필요충분조건 이해하기

ㄱ. 필요충분조건

ㄴ. $|ab|+|bc|=0$이면 $a=c=0$또는 $b=0$

p는 q이기 위한 필요조건

ㄷ. $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=|a+b|$이고

$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=|a-b|$

a와 b의 부호가 다르면 $|a+b|<|a-b|$

$|a+b|<|a-b|$이면 $|a+b|^2<|a-b|^2$이므로

$ab<0$ $\therefore$ 필요충분조건

58) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]필요충분조건 이해하기

조건 $p: x^2-4x+4-a=0$

조건 $q: x=5$또는 $x=b$

p는 q이기 위한 필요충분조건이므로

$5+b=4,\ 5b=4-a$

$a=9,\ b=-1$

$\therefore$ $a+b=8$

59) 답 : ⑤

[해설]

명제의 참, 거짓 판별하기

$x(x+2)=6$은 $x^2+2x-6=0$이므로

이차방정식의 근의 공식에서 $x=-1\pm\sqrt{7}$이다.

따라서 x는 무리수이다.

60) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $p: ab>0$이면 $q: a>0,\ b>0$(거짓)

$q: a>0,\ b>0$이면 $p: ab>0$(참)$\therefore$ 필요조건

ㄴ. $p: a^2+b^2=0$이면 $q: ab=0$(참)

$q: ab=0$이면 $p: a^2+b^2=0$(거짓)$\therefore$ 충분조건

ㄷ. $p: a+b\sqrt{2}=0$이면 $q: a=0,\ b=0$(거짓)

(반례) $a=2,\ b=-\sqrt{2}$일 때

$a+b\sqrt{2}=0$이지만 $a\neq0,\ b\neq0$

$q: a=0,\ b=0$이면 $p: a+b\sqrt{2}=0$(참)$\therefore$ 필요조건

61) 답 : ①

[해설]

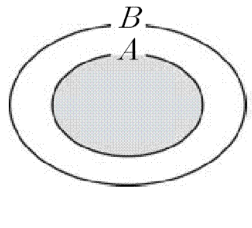
○ 영희(거짓)

(반례) $a=-2$이면 $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-2)^2}=2$

○ 철수(거짓)

(반례) 2의 배수 6은 4의 배수가 아니다.

○ 순희(참)



62) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] log2가 무리수임을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

log2가 유리수라고 가정하자.

$\log 2=\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 자연수)

으로 놓으면

$0<\log 2<1$이므로 $m>n$이다. ...㉮

$\log 2=\dfrac{n}{m} \Leftrightarrow 10^{\frac{n}{m}}=2$

양변을 m제곱하면 $2^m=10^n$

양변을 2^n으로 나누면 $2^{m-n}=5^n$ …㉯

이때 $m-n>0$이므로

2^{m-n}은 짝수이고 ...㉰

5^n은 홀수가 되어 모순이다.

따라서 log2는 무리수이다.

63) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]집합과 관련된 명제에서 충분조건을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 명제 $p \to q$가 거짓이다.

(반례) $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4,5\}$

$\therefore$ 충분조건이 아니다.

ㄴ. 명제 $p \to q$가 거짓이다.

(반례) $A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$

$\therefore$ 충분조건이 아니다.

ㄷ. 명제 $p \to q$는 참이다.

(증명) $A=B^c$이면, $A\cup B=B^c\cup B=U$

$\therefore$ 충분조건이다.

따라서 p가 q이기 위한 충분조건인 것은 ㄷ이다.

64) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]명제의 참과 거짓 구별하기

ㄱ. 역: $x=1$이면 $x^3=1$이다.(참)

ㄴ. 역: $x+y\geq2$이면 $x\geq1$이고 $y\geq1$이다.(거짓)

[반례] $x=0,\ y=3$

ㄷ. 역:자연수 x, y에 대하여 xy가 짝수이면 x^2+y^2은 홀수이다.

(거짓)[반례] $x=2,\ y=4$

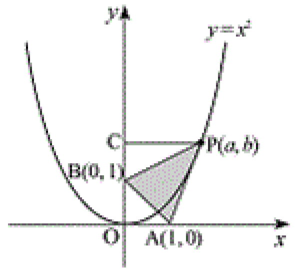
65) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]이차 함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 P에서 x축과 평행한 직선을 그어서 y축과 만나는 점을 C라 하면 $C(0, b)$이고,

점 $P(a, b)$는 곡선 $y=x^2$위의 점이므로 $b=a^2$이다.



삼각형 APB의 넓이를 S라 하면

$S=\square OAPC-(\triangle OAB+\triangle BPC)$

$=\dfrac{1}{2}(1+a)b-\left\{\dfrac{1}{2}\times1\times1+\dfrac{1}{2}(b-1)a\right\}$

$=\dfrac{1}{2}b+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}$

한편 $S=\frac{5}{2}$ 이므로

$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

정리하면 $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=2$

$b=a^2=2^2=4$

$\therefore\ a+b=2+4=6$

66) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]절대부등식을 이용하여 최솟값 추론하기

[해설] $-p+q+r=l\cdots$①, $p-q+r=m\cdots$②, $p+q-r=n\cdots$③

① , ②, ③ 세 식을 더하면 $p+q+r=l+m+n$

$(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

$=\left\{(\sqrt{l})^2+(\sqrt{m})^2+(\sqrt{n})^2\right\}\left\{\left(\sqrt{\frac{1}{l}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2\right\}$

$\geq (1+1+1)^2=9$

등호는 $l=m=n$일 때 성립한다.

따라서 최솟값은 9이다.

67) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]여러 가지 절대부등식을 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{a+b}{ab}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{ab(a+b)}$

$\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$ (등호는 $a=b$일 때 성립)(참)

ㄴ. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=a+b+2\sqrt{ab}-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (참)

ㄷ. $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$

각 변끼리 더하면

$2(a+b+c)\geq 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$\therefore\ a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$ (등호는 $a=b=c$일 때 성립)(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

68) 답 : ③

[해설]

ㄱ. 실수의 성질에 의하여 $|x|+|y|=0$이면 $x=0$이고 $y=0$

$x^2+y^2=0$이면 $x=0$이고 $y=0$이므로

p는 q이기 위한 필요충분조건

ㄴ. $p\rightarrow q$(참)

$xy\neq 0$이면 $x\neq 0$이고 $y\neq 0$이므로 $|x|+|y|>0$이다.

$q\rightarrow p$(거짓) (반례) $x=0$이고 $y=1$

따라서, p는 이기 위한 충분조건

ㄷ. $p\rightarrow q$(참)

$x<y$이면 $x-y<0$이므로 $|x-y|>x-y$

$q\rightarrow p$(참)

$|x-y|>x-y$이므로 $x-y<0\ \therefore\ x<y$

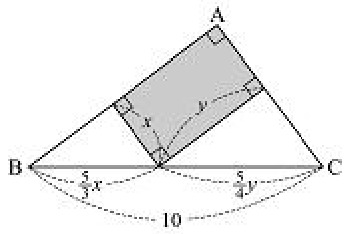
따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건

69) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 x, y라고 하면



$S_1=xy$이고, 닮음비에 의해 $\overline{BC}=\frac{5}{3}x+\frac{5}{4}y=10$

$\therefore\ 4x+3y=24$

산술 • 기하평균에서 $24=4x+3y\geq 2\sqrt{4x\times 3y}$ (단, 등호는 $4x=3y$일 때 성립)

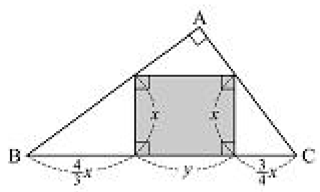
$12\geq\sqrt{12xy}\Leftrightarrow 12xy\leq 144\Leftrightarrow S_1=xy\leq 12$

따라서 S_1의 최댓값은 12이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $4x=3y=12$, 즉 $x=3$, $y=4$일 때 S_1이 최대이다.

따라서 S_1이 최대일 때 직사각형의 둘레의 길이는 14이다. (참)

ㄷ. 그림과 같이 직사각형의 두 변의 길이를 x, y라고 하면 $S_2=xy$이고, 닮음비에 의해



$\frac{4}{3}x+y+\frac{3}{4}x=10$에서

$16x+12y+9x=120$, $25x+12y=120$

$120=25x+12y\geq 2\sqrt{25x\times 12y}=10\sqrt{12xy}$

(단, 등호는 $25x=12y$일 때 성립)

$\sqrt{12xy}\leq 12\Leftrightarrow 12xy\leq 144\Leftrightarrow S_2=xy\leq 12$

따라서 S_1의 최댓값과 S_2의 최댓값은 같다. (참)

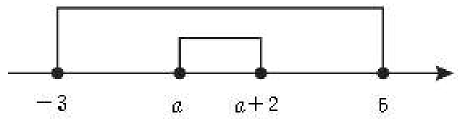
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

70) 답 : 7

[해설]

[출제 의도]명제의 참, 거짓과 집합의 포함관계 이해하기

[해설] $a\geq -3$이고 $a+2\leq 5$이므로 $-3\leq a\leq 3$이다.



부등식을 만족하는 정수 a는 7개이다.

71) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]명제의 뜻 이해하기

문장이나 식 중에서 참, 거짓을 판별할 수 있는 것이 명제이다.

ㄱ은 참인 명제이고, ㄴ은 거짓인 명제이다.

$\therefore$ ㄱ, ㄴ

72) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]충분조건과 필요조건 이해하기

$p: -1 < x < 3$

$q: -a < x < a$

p가 q이기 위한 충분조건이기 위해서는

$-a \leq -1$이고 $a \geq 3$이므로 $a \geq 3$

$\therefore$ a의 최솟값은 3

73) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]명제의 참·거짓과 대우를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 조건에서

ㄱ. $\sim q \rightarrow \sim p$이므로 $p \rightarrow q$ $\therefore$ 참

ㄴ. $r \rightarrow \sim q$이므로 $q \rightarrow \sim r$

여기서 $q \rightarrow r$는 반드시 참이라 할 수 없다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. $r \rightarrow \sim q$이고 $\sim q \rightarrow \sim p$이므로 $r \rightarrow \sim p$ $\therefore$ 참

따라서 참인 명제는 ㄱ, ㄷ이다.

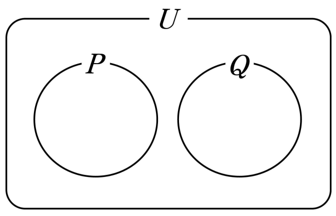
74) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]집합의 포함 관계를 파악하여 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$P \cap Q = \phi$이고 $P \cup Q \neq U$에서 두 집합 P, Q사이의 관계를

나타내면 벤 다이어그램과 같다.



$\therefore$ $Q \subset P^c, P \subset Q^c$

$\therefore$ $q \rightarrow \sim p, p \Rightarrow \sim q$

따라서 옳은 것은 ④이다.

75) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]필요조건과 충분조건 이해하기

p: $X \subset (A \cap B)$

q: $X \subset (A \cup B)$

r: $X \subset A$ 또는 $X \subset B$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $< p, q \geq 1$

q가 r이기 위한 필요조건이므로 $< q, r \geq -1$

r가 p이기 위한 필요조건이므로 $< r, p \geq -1$

$\therefore$ $< p, q > -2 < q, r > -3 < r, p \geq 6$

76) 답 : ④

[해설]

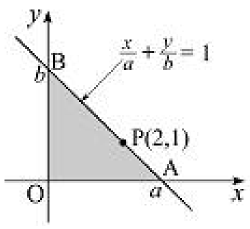
[출제 의도]산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 점 A와 점 B는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$의 x절편, y절편이므로

$A(a, 0), B(0, b)$이다.

따라서 $\triangle OAB$의 넓이 S는

$S = \frac{1}{2}ab \cdots$ ①



또, 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$가 $P(2, 1)$을 지나므로

$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1 \cdots$ ②

$\frac{2}{a}>0, \frac{1}{b}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$1=\frac{2}{a}+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{b}}=2\sqrt{\frac{2}{ab}}$$

$1 \geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$ 의 양변을 제곱하면 $1 \geq \frac{8}{ab}$

$\therefore$ $ab \geq 8$

$\therefore$ $S=\frac{1}{2}ab \geq 4$

따라서 $\triangle OAB$의 넓이 S의 최솟값은 4이다.

77) 답 : ③

[해설]

|출제 의도|명제의 참, 거짓 구별하기

|해설|ㄱ. $a < b < 0$이면 $a^2 > b^2$이다.(참)

ㄴ. $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.(참)

ㄷ. $|a|+|b| \geq |a+b|$이면 $a \geq 0$이고 $b \geq 0$이다.(거짓)

(반례) $|3|+|-4| \geq |3-4|$이 성립하지만 $3 \geq 0$이고 $-4 \leq 0$

78) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]충분조건과 필요조건 이해하기

삼각형 ABC가 정삼각형인 것은 $A=60^\circ$이기 위한 충분조건이다.

두 삼각형의 넓이가 같은 것은 두 삼각형이 합동이기 위한 필요조건이다.

79) 답 : ③

[해설]

ㄱ.(역)자연수 n에 대하여 n^2이 홀수이면 n이 홀수이다.

(증명) n이 홀수가 아니라고 가정하면

$n=2k$(k는 자연수)로 놓을 수 있다.

이때, $n^2=4k^2=2(2k^2)$이므로 n^2은 짝수이다.

이것은 n^2이 홀수라는 가정에 모순이 된다. $\therefore$ 참

ㄴ.(역)자연수 n에 대하여 n이 4의 배수이면 n은 2의 배수이다.

(증명) n이 4의 배수이면 $n=4k$(k는 자연수)로 놓을 수 있다.

이때, $n=4k=2(2k)$이므로 n은 2의 배수이다. $\therefore$ 참

ㄷ.(역)실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2>0$이면 $xy<0$이다.

(반례) $x=1,\ y=1$이라 하면

$x^2+y^2=2>0$이지만 $xy>0$이다. ∴ 거짓

80) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]로그함수의 관계를 이해하고 최솟값 구하기

l_k의 직선의 방정식은 $\log_2 x+\log_2 y=2k$이므로,

$\log_2 a+\log_2 b=2k$이고, $ab=2^{2k}$이다.

$a>0,\ b>0$이므로,

$a+b\ge 2\sqrt{ab}=2^{k+1}=A_k$

따라서, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}2^{k+1}=\frac{4(2^{100}-1)}{2-1}=2^{102}-4$

81) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]명제의 참, 거짓 이해하기

$p: |x|\le 2$에서 ∴ $-2\le x\le 2$

$q:\ x(x-3)<0$에서 ∴ $0<x<3$

$r: [x]^2-[x]-2\le 0,\ ([x]-2)([x]+1)\le 0$

$-1\le[x]\le 2,\ [x]=-1,\ 0,\ 1,\ 2$

∴ $-1\le x<3$

따라서 $p\to q$는 거짓, $q\to r$는 참, $r\to p$는 거짓

82) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 값의 범위를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\dfrac{x+y}{2}\ge\sqrt{xy}$ 에서 $xy\le 1$

ㄴ. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2xy$에서

$xy\le 1$이므로 $x^2+y^2\ge 2$

ㄷ. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{2}{xy}\ge 2$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

83) 답 : ①

[해설]

$2+3\cdot 2+\cdots+n(n-1)$

$=2(2-1)+3(3-1)+\cdots+n(n-1)$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2-(1+2+3+\cdots+n)$

$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}$

∴ ㈎ $=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\frac{2d\left\{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}}{n(n+1)}$$

$=2d\left\{\dfrac{2n+1}{6}-\dfrac{1}{2}\right\}$

$=\dfrac{2d(2n+1-3)}{6}=\dfrac{2}{3}d(n-1)$

∴ ㈏ $=\dfrac{2}{3}d$

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+(n+1)}$$

$=\dfrac{1+2+\cdots+n}{1+2+\cdots+(n+1)}\cdot\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$

$=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}\cdot b_n$

$=\dfrac{n}{n+2}\cdot b_n$

∴ ㈐ $=\dfrac{n}{n+2}$

[참고]

주어진 증명을 완성하면 다음과 같다.

$b_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}b_n+\dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$

$\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)b_n+\dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$

$b_n-\dfrac{2}{n+2}b_n+\dfrac{2}{n+2}a_{n+1}$

∴ $b_{n+1}-b_n=\dfrac{2}{n+2}(a_{n+1}-b_n)\ldots$①

그런데, 등차수열 의 첫째항을 a', 공차를 d'이라 하면

$b_{n+1}-b_n=d'$이므로 ①에서

$d'=\dfrac{2}{n+2}(a_{n+1}-b_n)$

∴ $a_{n+1}=\dfrac{d'}{2}(n+2)+b_n$

$\dfrac{d'}{2}(n+2)+a'+(n-1)d'$

$\left(a'+\dfrac{3}{2}d'\right)+\dfrac{3}{2}d'(n-1)$

따라서 수열 $\{a_{n+1}\}$은

$a_2=a'+\dfrac{3}{2}d'$이고 공차가 $\dfrac{3}{2}d'$인 등차수열이다.

그런데, $a_1=b_1=a'$이므로 수열 은 첫째항이 a', 공차가 $\dfrac{3}{2}d'$인 등차수열이다.

84) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]논리적 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

네 사람은 수리영역 문항을 각각 1문항씩 풀어야 하며,

C가 언어영역을 풀었다고 할 때, 네 사람이 푼 문항을 표로 나타내면 다음과 같다.

	언어	수리	외국어	사탐	계
A	○	○	☆		3
B		○	○		3
C	○	○		○	3
D		○	○		3
계	3	4	3	2	12

B와 D는 언어영역 문항을 풀 수도 있고 사회탐구영역 문항을 풀 수도 있다.

따라서 ' A는 외국어영역 문항을 풀었다. ' 가 참이다.

85) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]명제의 참 거짓 판별하기

[해설] $Q \subset P$이므로 명제 $q \to p$는 항상 참이다.

따라서, 명제의 대우 $\sim p \to \sim q$도 항상 참이다.

86) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]명제의 조건 판별하기

ㄱ. ' $x>0, y>0$ ' 는 ' $xy>0$ ' 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. ' $x<1$ ' 은 ' $-2 \le x < 0$ ' 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. $x=1+\sqrt{2}, y=1-\sqrt{2}$ 일 때, $x+y$는 유리수이지만 x, y는 모두 유리수가 아니다.

따라서 ' $x+y$가 유리수' 는 ' x, y는 모두 유리수' 이기 위한 필요조건이지만

충분조건은 아니다.

∴ ㄴ, ㄷ

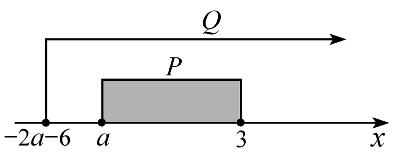
87) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문항이다.

조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면

다음과 같이 수직선으로 나타낼 수 있다.



$-2a-6 \le a$

∴ $a \ge -2$

따라서 상수 a의 최솟값은 -2이다.

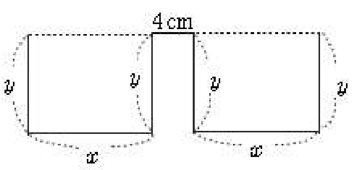
88) 답 : 576

[해설]

[출제 의도]산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

물이 흐르는 단면 중 한쪽 직사각형의 가로의 길이를 xcm,

세로의 길이를 ycm라고 하면



$2x+4y+4=100$에서 $2x+4y=96$

$x0, y0$이므로(산술평균) ≥ (기하평균)에서

$$\frac{2x+4y}{2} \ge \sqrt{2x \cdot 4y} = 2\sqrt{2}\sqrt{xy}$$

$$\therefore \sqrt{xy} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{96}{2}$$

이때, $xy \le \frac{24^2}{2}$이므로 $2xy \le 24^2 = 576$

따라서 구하는 두 직사각형의 넓이의 합 $2xy$의 최댓값은 576이다.

89) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]명제의 참, 거짓 판별하기

' ㄷ' 의 명제 ' 이등변삼각형이면 정삼각형이다. ' 는 거짓이다.

90) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]필요조건과 충분조건을 이해하고 주어진 명제에서 필요조건을 찾는 문제이다.

ㄱ. $a>0$이면 $a^2>0$이다.

그러나 ' $a^2>0$이면 $a>0$ ' 는 거짓

(반례: $(-2)^2=4$)

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

ㄴ. ' $ac=bc$이면 $a=b$는 거짓`

(반례: $a=1, b=2, c=0$)

그러나 ' $a=b$이면 $ac=bc$ ' 는 참이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

ㄷ. $a \ne 0 b \ne 0$이면 $a^2+b^2>0$이다.

또, $a^2+b^2>0$이면 ' $a \ne 0 b \ne 0$ ' 이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건이 아닌 것이다.

91) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]약수와 배수의 성질을 활용하여 서로소 관계 이해하기

[해설]귀류법을 이용하여 증명하고자 하므로

' 2006과 $2006-n$이[서로소가 아니다.]' 라고 가정하면

2006과 $2006-n$은[2]이상의 공약수가 존재한다.

$2006=at, 2006-n=bt$ (a, b, t는 자연수, $t \ge 2$)라 하면

$n=([a-b]) \times t$이므로 t는 2006과 n의 공약수이다.

이것은 ' 2006과 n이 서로소이다.' 에 모순이므로

2006과 $2006-n$도 서로소이다.

92) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]명제의 충분조건, 필요조건, 필요충분조건 판단하기

ㄱ. 스위치 S_1, S_2, S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_1이 켜지기 위한 충분조건이다.

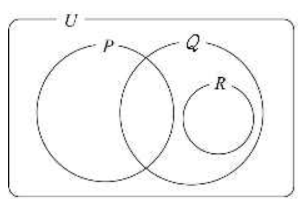
ㄴ. 스위치 S_2와 S_3가 모두 닫히는 것은 전구 L_3가 켜지기 위한 충분조건이다.

ㄷ. 스위치 S_2또는 S_3가 닫히는 것은 전구 L_2와 L_3가 모두 켜지기 위한 필요조건이다.

93) 답 : ⑤

[해설]

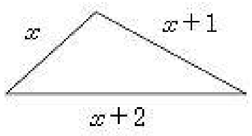
[출제 의도]명제 이해하기



① $Q \not\subset R$이므로 $q \not\Rightarrow r$ 이다.

② $Q^c \not\subset P$이므로 $\sim q \not\Rightarrow p$이다.
③ $(P\cap Q)\not\subset R$이므로 (p이고 q)$\not\Rightarrow r$이다.
④ $(P\cup R)\not\subset Q$이므로 (p또는 r)$\not\Rightarrow q$이다.
⑤ $P\subset R^c$이므로 $p\to\sim r$이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

94) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문항이다.
$x^2-2x+a=0$이 허근을 가지므로
$\frac{D}{4}=1-a<0$에서 $a-1>0$이다.
산술평균과 기하평균의 관계에서
$a-1+\frac{4}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1)\times\frac{4}{(a-1)}}=4$
(단, 등호는 $a=3$일 때 성립한다.)
따라서 $a-1+\frac{4}{a-1}$의 최솟값은 4이다.

95) 답 : 25
[해설]
[출제 의도]이차부등식 이해하기


세변의 길이가 삼각형이 되려면
$x+(x+1)>x+2$이므로 $x>1\cdots$ ①
주어진 삼각형이 둔각삼각형이 되려면
$(x+2)^2>x^2+(x+1)^2$이므로 $-1<x<3\cdots$ ②
① , ②에 의해 $1<x<3$
그러므로 $x^2+ax+b<0$의 해가 $1<x<3$이다.
$a=-4,\ b=3$
$\therefore\ a^2+b^2=25$

96) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]절대부등식의 성질 이해하기
[해설] $\triangle ABC$에서 $\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b,\ \overline{AB}=c$라 하면
$S_1=a^2,\ S_2=b^2,\ S_3=c^2$이고,
$a+b+c=12$이다.
여기에서 $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2=12^2$이 성립한다.
$\frac{a}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c}{1}$ ($a=b=c=4$)일 때,
$a^2+b^2+c^2$의 값이 최소이므로
$\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$

97) 답 : 60
[해설]
[출제 의도]실생활과 관련된 부등식 문제의 해결 능력을 측정한다.
가로의 길이를 $x(m)$, 세로의 길이를 $y(m)$라 하면,
총비용 $=x+\frac{1}{2}x+2y$
$\frac{3}{2}x+2y$
$\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}x\cdot 2y}$
$2\sqrt{3xy}$
$2\sqrt{900}$
60(만원)
따라서, 주영이가 지불해야 할 최소 비용은 60만원이다.

98) 답 : ⑤
[해설]
【출제 의도】문자를 사용하여 식으로 나타내기
① (거리)=(시간) × (속력)이므로: $70x$
② (삼각형의 넓이) $=\frac{1}{2}$ × (밑변) × (높이)이므로:
$\frac{1}{2}ab$
③ 할인할 금액은 $\frac{25}{100}x=\frac{1}{4}x$이므로 살 때의 금액은: $\frac{3}{4}x$
④ (소금의 양)=(소금물) × (농도)이므로:
$300\times\frac{x}{100}=3x$
⑤ 5명이 a원씩 내면 $5a$(원), b원의 선물을 사고남은 돈: $5a-b$

99) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 명제의 뜻을 알고 참, 거짓 판별하기
[해설] ① $x^2=1$이면 $x=1$또는 $x=-1$:거짓
② $x^2>1$이면 $x<-1$또는 $x>1$:거짓
④ 반례) $x=3,\ y=-1$:거짓
⑤ (홀수) + (홀수)(짝수):거짓[정답]③

100) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]명제의 필요, 충분조건 이해하기
ㄱ. $x=0,\ y=0 \Rightarrow x+y\sqrt{2}=0$ ($\leftarrow$의 반례 : $x=\sqrt{2},\ y=-1$)
ㄴ. $x>0,\ y>0 \Rightarrow xy>0$ ($\leftarrow$의 반례 : $x=-1,\ y=-1$)
ㄷ. $x+y>2 \Leftarrow x>1,\ y>1$ ($\rightarrow$의 반례 : $x=-1,\ y=4$)
∴ ㄱ, ㄴ 충분조건, ㄷ 필요조건

101) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]명제의 역, 이, 대우 구하고, 참, 거짓 판별하기
명제) $ab\neq6$이면 $a\neq2$또는 $b\neq3$이다. ∴ 참
대우) $a=2$이고 $b=3$이면 $ab=6$이다.
∴ 참
역) $a\neq2$또는 $b\neq3$이면 $ab\neq6$이다.
(반례) $a=1,\ b=6$ ∴ 거짓
이) $ab=6$이면 $a=2$이고 $b=3$이다.
(반례) $a=1,\ b=6$ ∴ 거짓

정답 및 해설

102) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 필요조건과 충분조건, 필요충분조건 구별하기

$p: a^2+b^2+c^2=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

$q: |a|+|b|+|c|=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$

$r: (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c$ 이므로

$p \Leftrightarrow q,\ p \rightarrow r$

$\therefore$ p는 q이기 위한 필요충분조건, p는 r이기 위한 충분조건

[정답]④

103) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]실수와 복소수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.(반례) $x=1,\ y=-1$이면 $x^2-y^2=0$이지만 $x-y\neq 0$이다.

따라서 명제 $p \rightarrow q$는 참이 아니다.

ㄴ. $x^2\geq 0,\ y^2\geq 0$이므로 $x^2+y^2=0$이면 $x=y=0$

따라서 $x+y=0$이므로 명제 $p \rightarrow q$는 참이다.

ㄷ.(반례) $\alpha=1,\ \beta=i$이면 $\alpha^2+\beta^2=1^2+i^2=1-1=0$이지만 $\alpha+\beta=1+i\neq 0$이다.

따라서 명제 $p \rightarrow q$는 참이 아니다.

이상에서 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건인 것은 ㄴ이다.

104) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]귀류법을 이용하여 완성형 증명하기

$\overline{OQ}=\overline{OR}+\overline{RQ}=\overline{OR}+\overline{RP}$

$r^2=(\overline{OR}-\overline{RP})(\overline{OR}+\overline{RP})=\overline{OR}^2-\overline{RP}^2$

$(r^2-\overline{RS}^2)-(\overline{PS}^2-\overline{RS}^2)$

(피타고라스 정리에 의해)

$\overline{OR}=\dfrac{\overline{OP}+\overline{OQ}}{2}>\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OQ}}$

(산술평균과 기하평균에 의해)

105) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]명제의 필요충분조건 판단하기

ㄱ. $x\geq 1,\ y\geq 1$이면 $xy\geq 1$은 성립.

(반례) $x=-2,\ y=-3$일 때, $xy\geq 1$는 성립하지만,

$x\geq 1,\ y\geq 1$가 성립하지 않으므로 충분조건

ㄴ. $x^2+y^2=0$에서 $x^2\geq 0,\ y^2=0$이므로

$x=y=0$이고, $|x|+|y|=0$에서 $|x|\geq 0,\ |y|\geq 0$이므로

$x=y=0$이다.

$\therefore$ 필요충분조건

106) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]집합의 연산을 이해하고 필요충분조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$(A\cup B)-(A\cap B)=\phi$

$\Leftrightarrow (A\cup B)\subset (A\cap B)$

$\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B$ ($\because$ $(A\cap B)\subset (A\cup B)$)

$\Leftrightarrow (A-B)\cup(B-A)=\phi$

$\Leftrightarrow A-B=\phi$이고 $B-A=\phi$

$\Leftrightarrow A\subset B$이고 $B\subset A$

$\Leftrightarrow A=B$

107) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]명제의 참, 거짓 판단하기 B와 D는 서로 상반된 이야기를 하고 있다.

만일, B가 참이고 D가 거짓이라면 합격자는 C, D가 된다.

합격자는 1명이어야 하므로 모순이다.

따라서, B는 거짓이고 합격자는 C이다.

108) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]추론을 통하여 논리적 결과 얻기

D는 다른 세 사람과 서로 다른 급수이므로 1급 이거나 3급이다.

A는 B, C와 서로 다른 급수이므로,

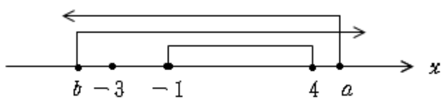
D가 1급 인 경우 A는 3급이고, D가 3급인 경우 A는 1급이어야 한다.

따라서 B, C는 2급이다.

109) 답 : 7

[해설]

[출제 의도]필요조건과 충분조건을 이해하고, 문제에 활용하기



q는 p이기 위한 필요조건이므로 $4\leq a$이다.

$\therefore$ a의 최솟값은 4이다.

p는 r이기 위한 충분조건이므로 $b\leq -3$이다.

$\therefore$ b의 최댓값은 -3이다.

따라서, $|M-m|=|(-3)-4|=7$이다.

구하는 값은 7

110) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]정수의 성질을 이용하여 증명하기

[해설] $x=2m$이면 $x^2+2ax=4m^2+4am=4m(m+a)$이므로

2의 배수이며 4의 배수이고

$b=2n+1$이면 $2b=4n+2$이므로

2의 배수이나 4의 배수가 아니다.(단, m, n은 정수)

a^2-2b는 정수의 곱셈과 빼셈이므로 정수이다.

111) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]명제의 뜻을 알고 참, 거짓 판별하기

1) A가 조사한 순위에서 ' 철수가 1위' 라는 것이 맞았다면,

B의 조사에서는 나래가 4위이다.

또 영수는 3위가 아니므로 2위이고 미래가 3위이다.

그런데, 이 경우 C가 조사한 순위는 모두 틀리게 된다.

따라서, 모순이 되므로 A가 조사한 순위 중에는 영수가 3위라는 것만 맞다.

2) A가 조사한 순위에서 영수가 3위라는 것이 맞으므로,

C가 조사한 순위에서 철수는 3위가 될 수 없다

(왜냐하면 순위가 같아지기 때문이다).

따라서 나래는 2위가 된다.

그러므로 B의 조사에서는 나래가 4위가 될 수 없으므로

미래가 1위가 된다.

∴ 1위는 미래, 2위는 나래, 3위는 영수, 4위는 철수이다.

[정답]①

112) 답 : 25

[해설]

[출제 의도]절대부등식을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1=\frac{1}{2}\times 4\times b=2b,\ S_2=\frac{1}{2}\times 2\times a=a$이므로

$S_1+S_2=a+2b=10$

이때 $S_1>0,\ S_2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$10=S_1+S_2\geq 2\sqrt{S_1S_2}$ (단, 등호는 $S_1=S_2$일 때 성립)

$\sqrt{S_1S_2}\leq 5$이므로 $S_1S_2\leq 25$

따라서 S_1S_2의 최댓값은 25이다.

113) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]명제의 역 이해하기

$p\rightarrow q$가 참이라 하여 $q\rightarrow p$가 반드시 참인 것은 아니다. 정답:④

114) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]약수와 배수를 이용하여 완성형의 문제를 해결할 수 있다.

$\frac{m}{n}$이 소수점 아래 셋째 자리까지의 유한소수이므로,

10^3배를 하면 정수가 된다.

n은 $10^3=2^3\cdot 5^3$의 약수이므로,

소인수분해하면 $2^\alpha\cdot 5^\beta(\alpha=0,1,2,3,\ \beta=0,1,2,3)$과 같다.

115) 답 : ②

[해설]

불이 켜지려면 A는 반드시 닫혀야하고 B와 C는 병렬 회로이므로 둘 중 하나만 닫혀도 된다.

따라서, A가 참이고 B,C둘 중 적어도 하 나가 참이어야 한다.

p,s:참, q,r:거짓이므로 불이 켜지는 것 은 ②이다.

[정답]②

116) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]명제의 참과 거짓 및 역, 이, 대우에 대한 이해력을 측정하는 문제이다.

명제 $p\rightarrow\sim q$가 참이므로 대우 $q\rightarrow\sim p$도 참이다.

또, 명제 $\sim r\rightarrow q$가 참이므로 대우 $\sim q\rightarrow r$도 참이다.

한편 $p\rightarrow\sim q$와 $\sim q\rightarrow r$가 참이므로 $p\rightarrow r$도 참이고,

대우 $\sim r\rightarrow\sim p$도 참이다.

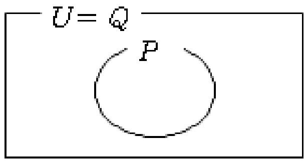
그런데 $\sim r\rightarrow q$가 참이라고 해서 역 $q\rightarrow\sim r$가 항상 참이라고는 말할 수 없다.

117) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]필요조건과 충분조건 이해하기

$P-Q=\phi,\ P\cup Q=U$이고 $P\neq Q$이므로 $P\subset Q,\ Q=U$이다.



ㄱ. $p\rightarrow q$(참)

ㄴ. $\sim p\rightarrow q$(참)

ㄷ. $q\rightarrow p$(거짓)

ㄹ. $q\rightarrow\sim p$(거짓)

정답:①

118) 답 : ②

[해설]

$|a|\geq 0,\ |b|\geq 0$이므로

$|a|+|b|=0\Leftrightarrow a=0,\ b=0$

ㄱ. a,b가 실수이므로

$a^2+b^2=0\Leftrightarrow a=0,\ b=0$

ㄴ. $a=0,\ b=0\Rightarrow a+b\sqrt{2}=0$이지만

$a=\sqrt{2},\ b=-1$일 때도 $a+b\sqrt{2}=0$이므로

$a+b\sqrt{2}=0\nrightarrow a=0,\ b=0$

ㄷ. $a=0,\ b=0\Rightarrow a+b=0$이지만

$a=1,\ b=-1$일 때도 $a+b=0$이므로

$a+b=0\nrightarrow a=0,\ b=0$

ㄹ. a,b가 실수이므로

$a+bi=0\Leftrightarrow a=0,\ b=0$

∴ 필요충분조건은 ㄱ, ㄹ

[정답]②

119) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]절대부등식을 이해하고 활용하기

절대부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$에 의하여

$\{(2S_1)^2+(S_2)^2\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2\right\}\geq\left\{\frac{1}{2}(2S_1)+S_2\right\}^2$

$(4S_1^2+S_2^2)\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)\geq(S_1+S_2)^2$

$\frac{5}{4}(4S_1^2+S_2^2)\geq(4\pi)^2\ (\because S_1+S_2=4\pi)$

$4S_1^2+S_2$

따라서 최소값은 $\frac{64}{5}\pi^2$이다.

[다른 풀이]

$S_1+S_2=4\pi$이므로 $S_2=4\pi-S_1$이다.

그러므로 $4S_1^2+S_2^2=4S_1^2+(4\pi-S_1)^2$

$=5\left(S_1-\frac{4\pi}{5}\right)^2+\frac{64}{5}\pi^2$

∴ $4S_1^2+S_2^2$의 최소값은 $\frac{64}{5}\pi^2$ 정답:②

120) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 문제를 해결하는 능력을 측정하는 문제이다.

$x^2+x-2=(x+2)(x-1)\le 0$에서

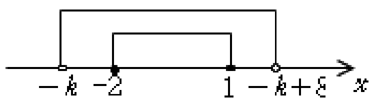
$-2\le x\le 1$

$(x+k)(x+k-8)<0$에서 $-k<-k+8$이므로

$-k<x<-k+8$

그런데 p는 q이기 위한 충분조건이려면

$-k<-2$이고 $-k+8>1$이어야 한다.



즉, $k>2$이고 $k<7$

$\therefore\ 2<k<7$

따라서 정수 k는 $3, 4, 5, 6$의 4개이다.