I.다항식

3.인수분해

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2001 학년도 대수능]

1 [공통]다항식 $x^3+5x^2+10x+6$이 $(x+a)(x^2+4x+b)$로 인수분해 될 때, $a+b$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

2 [공통]$x=2-\sqrt{3}$, $y=2+\sqrt{3}$일 때, $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$의 값은?

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

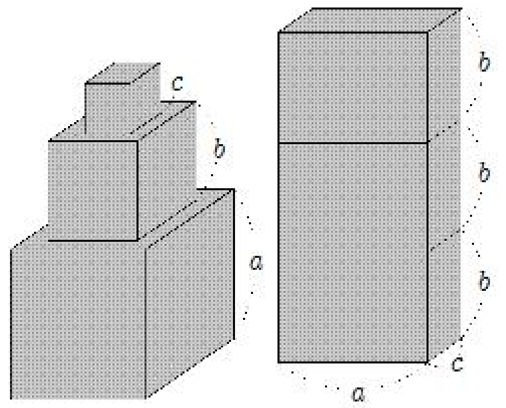
[난이도 : ★★☆] [2005년 09월 모의평가]

3 방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 하자.

자연수 n에 대하여 $f(n)$을 ω^n의 실수 부분으로 정의할 때, $\sum_{k=1}^{999}\left\{f(k)+\frac{1}{3}\right\}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 학력평가]

4 두 가지 모양의 케이크를 만들려고 한다. 그림과 같이 [케이크 A]는 모서리의 길이가 각각 a, b, c인 정육면체 세 개를 쌓아서 만들고, [케이크 B]는 세 모서리의 길이가 a, b, c인 직육면체 세 개를 쌓아서 만든다. 다음 [보기]에서 옳은 설명만을 있는 대로 고른 것은?(단, $a>b>c$)[4점]



[케이크 A]　[케이크 B]

<보기>

ㄱ. <케이크 A>가 <케이크 B>보다 높다.
ㄴ. <케이크 A>에서 밑면을 제외한 겉넓이는 $5a^2+4b^2+4c^2$이다.
ㄷ. <케이크 A>와 <케이크 B>의 부피를 같게 만들 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

5 다항식 x^3-5x^2+8x-4가 $(x+a)(x+b)^2$으로 인수분해될 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?[3점]

① -3　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2007년 11월 학력평가]

6 $a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3}$ 일 때, a^2+b^2 의 값은?[2점]

① 10 ② $6\sqrt{3}$ ③ 12
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

7 $\overline{AB}=c, \overline{BC}=a, \overline{CA}=b$ 인 삼각형 ABC에서
$a^3+a^2b+a(b^2-c^2)+b^3-bc^2=0$ 이 성립할 때, 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?[3점]

① 정삼각형
② $a=c$ 인 이등변삼각형
③ $b=c$ 인 이등변삼각형
④ $A=90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

8 다항식 $2x^3-7x^2+(3k+1)x-2$가 서로 다른 3개의 일차식을 인수로 가지고, 그 중 2개의 일차식이 다항식 x^2-3x+k의 인수일 때, 상수 k의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2007년 11월 학력평가]

9 $(x^2-x)(x^2+3x+2)-3$을 인수분해하면
$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 이다.

이때, $a+b+c+d$의 값은?(단, a, b, c, d는 상수이다.)[4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2007년 11월 학력평가]

10 다음은 방정식 $x^3+y^3=91$을 만족시키는 해 중에서 $xy<0$인 두 정수 x, y의 값을 구하는 과정의 일부이다.

> $x^3+y^3=91$의 좌변을 인수분해하면
> $(x+y)(x^2-xy+y^2)=91 \cdots$ ①
> 이때, $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+$ ([가]) $y^2>0$ 이므로
> ① 에서 $x+y$는 91의 양의 약수이다. ...②
> $x+y=k$라 놓으면
> ① 에서 $k(k^2-3xy)=91$ 이므로 $xy=\frac{1}{3}\left(k^2-\frac{91}{k}\right)$
> 따라서, x, y는 이차방정식 $t^2-kt+\frac{1}{3}\left(k^2-\frac{91}{k}\right)=0$의 두 실근이다.
> 판별식 $D=k^2-\frac{4}{3}\left(k^2-\frac{91}{k}\right)\geq 0$ 에서 $k^3\leq$ ([나]) $\times 91\cdots$ ③
> $xy<0$이고 ②, ③을 만족하는 k의 값은 ([다])이다.
> ...(생략)...

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{4}$, 3, 7
② $\frac{1}{4}$, 4, 7
③ $\frac{3}{4}$, 3, 1
④ $\frac{3}{4}$, 4, 1
⑤ $\frac{3}{4}$, 4, 7

[난이도 : ★★☆] [2006년 11월 학력평가]

11 x, y, z에 대한 다항식 $xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z-x)$의 인수는?[3점]

① $x-y$ ② $x-z$
③ $y-z$ ④ $x-y+z$
⑤ $x+y+z$

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

12 다항식 a^6-b^6의 약수를 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $a+b$ ㄴ. a^2+b^2 ㄷ. a^3+b^3

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

13 $x^2-xy-6y^2-x+8y-2$가 $(x+ay-2)(x+by+1)$으로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?[3점]

① -5 ② -1 ③ 1
④ 5 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

14 실수 x, y에 대하여 $x+y=3,\ x^2+xy+y^2=10$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

15 $x+1$이 다항식 ax^4+bx^3+cx-a의 인수일 때, 임의의 실수 a, b, c에 대하여 주어진 다항식의 인수가 반드시 될 수 있는 것은?[3점]

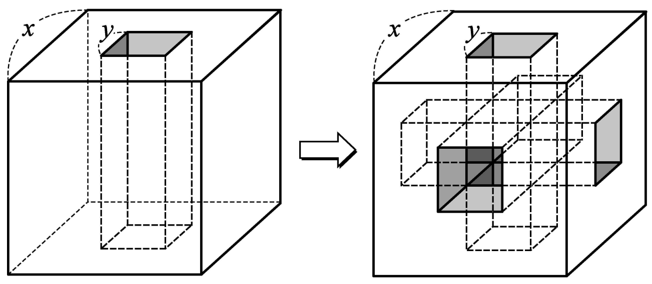
① $x+2$ ② x ③ $x-1$
④ $x-2$ ⑤ $x-3$

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 학력평가]

16 한 모서리의 길이가 x인 정육면체 모양의 나무토막이 있다.

[그림 1]과 같이 이 나무토막의 윗면의 중앙에서 한 변의 길이가 y인 정사각형모양으로 아랫면의 중앙까지 구멍을 뚫었다. 구멍은 정사각기둥 모양이고, 각 모서리는 처음 정육면체의 모서리와 평행하다.

이와 같은 방법으로 각 면에서 구멍을 뚫어 [그림 2]와 같은 입체를 얻었다.



[그림 1] [그림 2]

이때, [그림 2]의 입체의 부피를 x, y로 나타낸 것은?[4점]

① $(x-y)^2(x+2y)$ ② $(x-y)(x+2y)^2$ ③ $(x+y)^2(x-2y)$
④ $(x+y)(x-2y)^2$ ⑤ $(x+y)^2(x+2y)$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 5월 학력평가]

17 다음은 다항식 x^4+2x^2+9를 인수분해하는 과정이다.

$x^4+2x^2+9=x^4+6x^2+9-[㈎]x^2$
$(x^2+3)^2-[㈎]x^2$
$(x^2+3)^2-([㈏]x)^2$
$([㈏]x^2+x+3)(x^2-2x+3)$

위의 과정에서 ㈎, ㈏에 알맞은 수를 바르게 짝지은 것은?[2점]

① -4, -2 ② -4, 2 ③ -4, 4
④ 4, 2 ⑤ 4, -4

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

18 연속한 두 자연수의 제곱의 차와 그 두 수의 관계로 옳은 것은?[3점]

① 두 자연수의 제곱의 차는 두 자연수의 합과 같다.
② 두 자연수의 제곱의 차는 작은 자연수의 2배이다.
③ 두 자연수의 제곱의 차는 두 자연수의 차와 같다.
④ 두 자연수의 제곱의 차는 큰 자연수의 2배이다.
⑤ 두 자연수의 제곱의 차는 두 자연수의 곱과 같다.

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 학력평가]

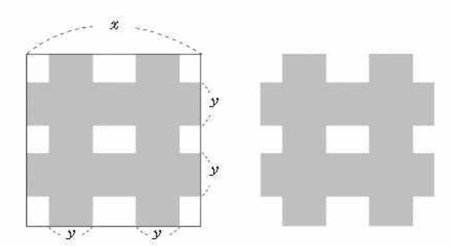
19 $a^3-a^2c-ab^2+b^2c$의 인수인 것은?[3점]

① $a+c$ ② $a-c$ ③ $b+c$
④ $b-c$ ⑤ a^2+b^2

[난이도 : ★★☆] [2005년 11월 학력평가]

20 [그림 1]은 한 변의 길이가 x인 정사각형 모양의 흰색 종이 위에 두 변의 길이가 x, y인 직사각형 4개를 수직 또는 평행하게 그려 색칠한 것이다.

[그림 2]는 [그림 1]에서 색칠한 부분만을 오려 낸 것일 때, 색칠한 부분의 넓이는?(단, $x>2y$이다.)[3점]



① $4x(x-y)$ ② $4y(x-y)$ ③ $4x(x+y)$
④ $4y(x+y)$ ⑤ $4(x^2-y^2)$

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

21 세 실수 a, b, c에 대하여

$a+b+c=1$, $ab+bc+ca=-5$, $a^3+b^3+c^3=25$일 때, abc의 값은?[4점]

① -9 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

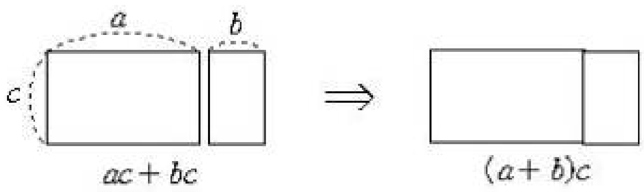
22 $x+y=3$, $xy=1$일 때, x^3+y^3의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

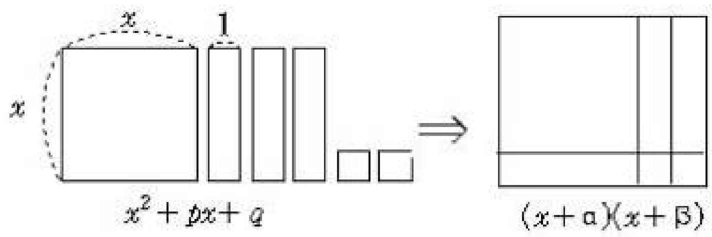
23 (그림 1)은 대수막대를 이용하여 다항식의 인수분해를 나타낸 것이다.

(그림 2)에서 $\alpha+\beta$의 값은?[3점]

(그림 1)



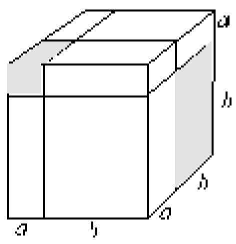
(그림 2)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 학력평가]

24 한 모서리의 길이가 $(a+b)$인 정육면체에서 한 모서리의 길이가 a인 정육면체와 한 모서리의 길이가 b인 정육면체를 각각 잘라내었을 때, 남은 부분의 부피를 a, b에 대한 식으로 나타내면?[3점]



① $3ab$ ② $2a^2b^2$ ③ $3ab(a+b)$
④ $2(a^3+b^3)$ ⑤ $3ab(a^2+b^2)$

정답 및 해설

3.인수분해

중단원 기출문제

1) 답 : 7

[해설]

$x^3+5x^2+10x+6$을 인수분해하기 위하여 상수항의 양수인 $\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$을

차례로 대입하여 그 값이 0이 되는 때를 찾으면 $x=-1$일 때임을 알 수 있다.

조립제법으로 몫과 나머지를 구하면

$x^3+5x^2+10x+6=(x+1)(x^2+4x+6)$과 같이 인수분해가 된다.

이것과 $(x+a)(x^2+4x+b)$를 비교하면

$a=1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=7$

[별해]

$x^3+5x^2+10x+6=(x+a)(x^2+4x+b)$

$=x^3+(4+a)x^2+(4a+b)x+ab$

양변의 계수를 비교하면

$\therefore\ 4+a=5,\ 4a+b=10,\ ab=6$

$\therefore\ a=1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=7$

2) 답 : ④

[해설]

$x=2-\sqrt{3},\ y=2=\sqrt{3}$에서

$x+y=4,\ xy=1$

[구하는 값] $=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$

$=\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=14$

3) 답 : 332

[해설]

[출제 의도]수열

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$에서 한 허근이 ω이므로

$\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore\ \omega=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

이때, $f(n)$은 ω^n의 실수 부분이고,

$\omega^3=-1,\ \ \omega^2=\omega-1$

이므로 $f(n)$을 차례로 구하면

$\omega=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$이므로 $f(1)=\dfrac{1}{2}$

$\omega^2=\omega-1$이므로 $f(2)=-\dfrac{1}{2}$

$\omega^3=-1$이므로 $f(3)=-1$

$\omega^4=\omega^3\omega=-\omega$이므로 $f(4)=-f(1)=-\dfrac{1}{2}$

$\omega^5=\omega^3\omega^2=-\omega^2$이므로 $f(5)=-f(2)=\dfrac{1}{2}$

$\omega^6=(\omega^3)^2=1$이므로 $f(6)=-f(3)=1$

$\omega^7=(\omega^3)^2\omega=\omega$이므로 $f(7)=f(1)$

$\vdots$

따라서, $f(n)$은 주기가 6인 함수이고,

$f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$

$\therefore\ \sum_{k}=1^{999}\left\{f(k)+\dfrac{1}{3}\right\}=\sum_{\{k\}=1}^{999}f(k)+\sum_{\{k\}=1}^{999}\dfrac{1}{3}$

$=166\sum_{\{k\}=1}^{6}f(k)+f(997)+f(998)+f(999)$

$+999\cdot\dfrac{1}{3}$

$=16\cdot0+f(1)+f(2)+f(3)+333$

$=0+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-1\right)+333$

$=332$

4) 답 : ②

[해설]

ㄱ.(반례) $a=4,\ b=3,\ c=1$ (거짓)

ㄴ. $(5a^2-b^2)+(5b^2-c^2)+5c^2=5a^2+4b^2+4c^2$ (참)

ㄷ.(케이크 A의 부피)-(케이크 B의 부피)

$=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}>0$ (거짓)

5) 답 : ①

[해설]

$x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$이므로

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

6) 답 : ⑤

[해설]

|출제 의도|다항식의 값 계산하기

$a+b=4,\ ab=1$이므로

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\times1=14$

7) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]다항식의 인수분해 활용하기

$a^3+a^2b+a(b^2-c^2)+b^3-bc^2=0$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a^2+b^2-c^2=0$

$c^2=a^2+b^2$

따라서, $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

8) 답 : ⑤

[해설]

정답 및 해설

[출제 의도]다항식의 인수분해 활용하기

$2x^3-7x^2+(3k+1)x-2=(x^2-3x+k)(ax-b)$이므로

$a=2,\ b=\dfrac{2}{k}$이다.

$-7x^2=-\left(\dfrac{2}{k}+6\right)x^2$이므로 $k=2$

[별해] $2x^3-7x^2+(3k+1)x-2=0$의

세 근을 α, β, γ라 하면,

$x^2-3x+k=0$의 두 근을 α, β로 둘 수 있다.

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{7}{2}$, $\alpha+\beta=3$이므로 $\gamma=\dfrac{1}{2}$

$\alpha\beta\gamma=1$, $\alpha\beta=k$이므로 $k=2$

9) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]인수분해하기

$(x^2-x)(x^2+3x+2)-3$

$=x(x-1)(x+1)(x+2)-3$

$=(x^2+x)(x^2+x-2)-3$

$x^2+x=A$로 치환하면

(준식) $=A(A-2)-3=(A+1)(A-3)$

$=(x^2+x+1)(x^2+x-3)$

따라서 $a+b+c+d=0$

10) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]고차방정식의 해 구하는 과정 이해하기

$x^3+y^3=91$의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=91 \cdots$①

이때, $x^2-xy+y^2=x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+\dfrac{3}{4}y^2$

$=\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)y^2>0$

① 에서 $x+y$는 91의 양의 약수이다. …②

$x+y=k$라 놓으면

① 에서 $k(k^2-3xy)=91$이므로 $xy=\dfrac{1}{3}\left(k^2-\dfrac{91}{k}\right)$

따라서, x, y는 이차방정식

$t^2-kt+\dfrac{1}{3}\left(k^2-\dfrac{91}{k}\right)=0$의 두 실근이다.

판별식 $D=k^2-\dfrac{4}{3}\left(k^2-\dfrac{91}{k}\right)\geq 0$

$3k^2-4k^2+4\times 91\geq 0$

$k^3\leq$ ([4])$\times 91 \cdots$③

주어진 조건과 ②, ③ 을 만족하는 k의 값은 [1]이다.

11) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]다항식의 인수분해 하기

[해설] $xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z-x)$

$=(y+z)x^2+(y^2-z^2)x-yz(y+z)$

$=(y+z)\{x^2+(y-z)x-yz\}$

$=(y+z)(x+y)(x-z)=(x+y)(y+z)(x-z)$

12) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]인수분해를 이용하여 약수 구하기

$a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

따라서 중 약수는 $a+b,\ a^3+b^3$

13) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]이차식의 인수분해하기

$x^2-xy-6y^2-x+8y-2$

$=x^2-(y+1)x-(6y^2-8y+2)$

$=x^2-(y+1)x-(3y-1)(2y-2)$

$=(x+2y-2)(x-3y+1)$

$\therefore\ a=2,\ b=-3$즉, $a+b=-1$

14) 답 : 36

[해설]

[출제 의도]곱셈공식을 활용하여 식의 값 구하기

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=10$

$xy=-1$

$\therefore\ x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=36$

15) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]인수정리 이해하기

다항식 $f(x)=ax^4+bx^3+cx-a$라 하면

$x+1$이 $f(x)$의 인수이므로

$f(-1)=a-b-c-a=0$,

즉 $b+c=0$

$f(1)=a+b+c-a=0$

$\therefore\ x-1$은 반드시 $f(x)$의 인수이다.

16) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]주어진 입체의 부피를 다항식으로 나타내고

이를 인수분해할 수 있는가를 묻는 문항이다.

구하는 입체의 부피는 원래의 정육면체의 부피에서 구멍 부분의 부피를 빼면 된다.

구멍 부분의 부피는 밑면이 한 변의 길이가 y인 정사각형이고 높이가 x인 정사각기둥 3개의 부피에서 중복된 부분인 한 모서리의 길이가 y인 정육면체의 부피를 두 번 빼면 된다.

따라서 구멍 부분의 부피가 $3xy^2-2y^3$이므로

구하는 입체의 부피는 $x^3-(3xy^2-2y^3)=x^3-3xy^2+2y^3$이다.

$x=y$일 때 이 식의 값이 0이 되므로 $x-y$가 인수이다.

조립제법에 의하여 인수분해하면

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
	1	1	-2	0

$\therefore\ x^3-3xy^2+2y^3=(x-y)(x^2+xy-2y^2)$

$=(x-y)^2(x+2y)$

17) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]인수분해하기

$x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2$

$=(x^2+3)^2-4x^2$

$=(x^2+3)^2-(2x)^2$

$=(x^2+3+2x)(x^2+3-2x)$

$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

[정답]④

18) 답 : ①

[해설]

【출제 의도】 인수분해 성질 활용하기

연속한 두 자연수를 n, $n+1$이라 하면

$(n+1)^2-n^2=(n+1+n)(n+1-n)$

$=2n+1$

$=n+(n+1)$

19) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]다항식의 인수분해하기

$a^3-a^2c-ab^2+b^2c$

$=a^2(a-c)-b^2(a-c)$

$=(a-c)(a^2-b^2)$

$=(a-c)(a+b)(a-b)$

20) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 다항식의 사칙연산을 이해하고 인수분해하기

직사각형 1개의 넓이는 xy, 서로 겹친 부분의 넓이는 y^2

각각 4개씩이므로

$4xy-4y^2=4y(x-y)$

[정답]②

21) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]곱셈공식을 이해하고, 이를 문제 해결에 활용하기

문제의 조건:

a, b, c는 실수

$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=-5,\ a^3+b^3+c^3=25$

구하는 값 $=a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}$

$25-3abc=1\cdot\{1^2-3\cdot(-5)\}$이므로, $abc=3$이다.

[정답]⑤

22) 답 : 18

[해설]

[출제 의도]인수분해 활용하기

$x+y=3,\ xy=1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=18$

정답: 18

23) 답 : ③

[해설]

x^2+px+q

$=x^2+3x+2$

$=(x+1)(x+2)$

$=(x+\alpha)(x+\beta)$

$\therefore\ \alpha+\beta=3$

[정답]③

24) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]입체도형의 부피를 식으로 나타내어 간단한 인수분해를 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

한 모서리의 길이가 $(a+b)$인 정육면체의 부피는 $(a+b)^3$이고,

한 모서리의 길이가 a와 b인 정육면체의 부피는 각각 a^3, b^3이므로

남은 부분의 부피는

$(a+b)^3-a^3-b^3=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-a^3-b^3$

$=3a^2b+3ab^2$

$=3ab(a+b)$