**Ⅳ.적분법**

**2.정적분**

# 중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

**1** 함수 $f(x)$가 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt$일 때, $(f\circ f)(a)=\ln5$를 만족시키는 실수 $a$의 값은?[4점]

① ln11 ② ln13 ③ ln15
④ ln17 ⑤ ln19

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

**2** 실수 $t$에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\begin{cases}1-|x-t|, & (|x-t|\le 1)\\ 0, & (|x-t|>1)\end{cases}$이라 할 때, 어떤 홀수 $k$에 대하여 함수 $g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 $\alpha$를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1$, $\alpha_2$, ..., $\alpha_m$ ($m$은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다. |

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

**3** 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$\int_0^1 f(x)dx=2$, $\int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가 $F(x)=\int_0^x |f(x)|dx$ $(0\le x\le 1)$일 때,

$\int_0^1 f(x)F(x)dx$의 값은? [4점]

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$
④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

**4** 함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

| [보 기] |
|---|
| ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$ |
| ㄴ. $f'(a)>0$을 만족시키는 $a$가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다. |
| ㄷ. $f'(b)=0$을 만족시키는 $b$가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$에 적어도 하나 존재한다. |

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

**5** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.)
>
> (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[4점][2016(B) /수능 30]

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

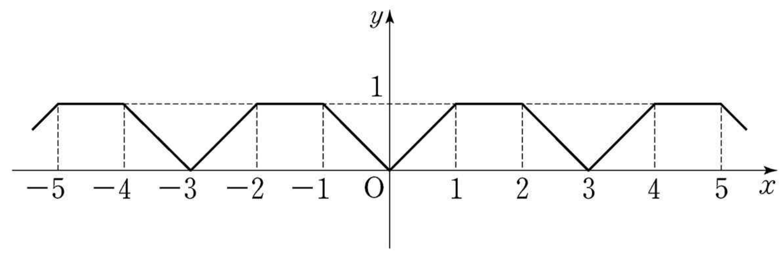
**6** 양수 $a$에 대하여 함수 $f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$의 최댓값이 32이다. 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

**7** 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} x, & (0 \le x < 1) \\ 1, & (1 \le x < 2) \\ -x+3, & (2 \le x < 3) \end{cases}$$ 이다.

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 13$일 때, 상수 $a$의 값은?[4점]




① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

**8** 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)dt$이다.

$f(1)=1$일 때, $\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx$의 값은? [4점]

① $2(\pi-2)$ ② $2\pi-3$ ③ $2(\pi-1)$
④ $2\pi-1$ ⑤ $2\pi$

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

**9** 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때,

$\int_0^1 xf(x)dx$의 값은?[3점]

① $e-2$　② $\frac{e-1}{2}$　③ $\frac{e}{2}$

④ $e-1$　⑤ $\frac{e+1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

**10** 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자.

미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

**11** 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분 $\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$의 값을 $k$라 하자.

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$ |
| ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다. |
| ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin \pi x$이면, $k=0$이다. |

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

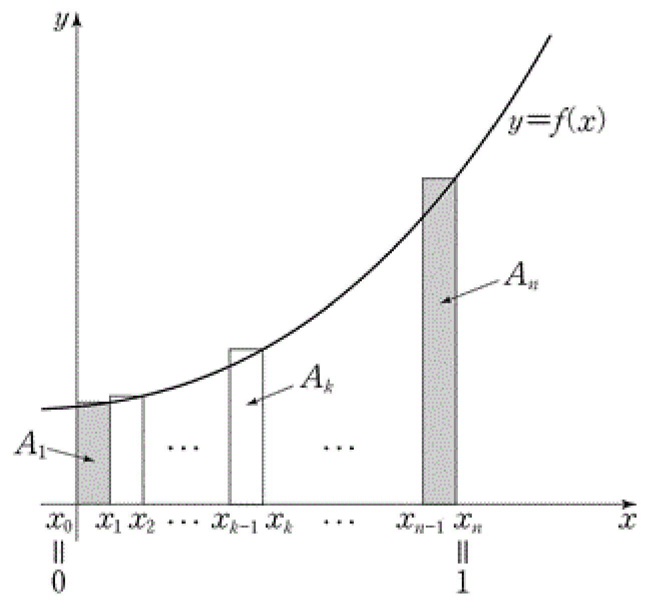
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

**12** 함수 $f(x)=x^2+ax+b\,(a\geq 0,\ b>0)$가 있다.

그림과 같이 2이상인 자연수 $n$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 1]$을 $n$등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=1$이라 하자.

닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 $A_k$라 하자. $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$




양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이 $A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

**13** 함수 $f(x)$를 $f(x)=\int_a^x \{2+\sin(t^2)\}dt$라 하자.

$f''(a)=\sqrt{3}a$일 때, $(f^{-1})'(0)$의 값은?(단, $a$는 $0<a<\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 상수이다.)[4점]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

**14** 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$\int_1^x f(t)dt = x^3 - 2ax^2 + ax$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.(단, $a$는 상수이다.)

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

**15** $1$보다 큰 실수 $a$에 대하여 $f(a) = \int_1^a \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$라 할 때, $f(a^4)$과 같은 것은?[3점]

① $4f(a)$ ② $8f(a)$ ③ $12f(a)$
④ $16f(a)$ ⑤ $20f(a)$

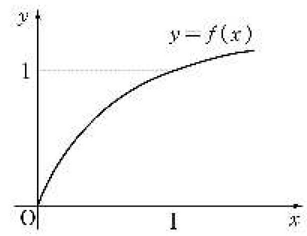
[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

**16** [이과]함수 $f(x) = x^3$의 그래프를 $x$축 방향으로 $a$만큼, $y$축 방향으로 $b$만큼 평행이동시켰더니 함수 $y = g(x)$의 그래프가 되었다.

$g(0) = 0$이고 $\int_a^{3a} g(x)dx - \int_0^{2a} f(x)dx = 32$일 때, $a^4$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

**17** 다음은 연속함수 $y = f(x)$의 그래프이다.




구간 $[0, 1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값 $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$와 같은 값을 갖는 것은?[4점]

① $\int_0^1 g(x)dx$ ② $\int_0^1 xg(x)dx$ ③ $\int_0^1 f(x)dx$
④ $\int_0^1 xf(x)dx$ ⑤ $\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx$

[난이도 : ★★★] [2004 학년도 대수능]

**18** 함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 $x$에 대하여

$f(x) - 2\int_0^x e^t f(t)dt = 1$이 성립한다.

이때, $f''(0)$의 값은?(단, $e$는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.)[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

**19** 두 함수 $f(x) = ax + b$와 $g(x) = e^x$가

$f(g(x)) = \int_0^x f(t)g(t)dt - xe^x + 3$을 만족할 때, $f(2)$의 값은?[3점]

① 4 ② 2 ③ 0
④ -4 ⑤ -4

[난이도 : ★★★] [2003 학년도 대수능]

**20** 5차 이하의 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a + f(0)b + f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$를 성립시키는 상수 $a, b$가 있다. $a, b$를 순서대로 나열한 것은?[3점]

① $\frac{4}{9}, \frac{10}{9}$ ② $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}$ ③ $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$
④ $\frac{7}{9}, \frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}, \frac{2}{9}$

[난이도 : ★☆☆] [2002 학년도 대수능]

**21** [공통]정적분 $\int_{0}^{1}(x+1)(x^2-x+1)dx$의 값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

① 1.23 ② 1.24 ③ 1.25
④ 1.26 ⑤ 1.27

[난이도 : ★★★] [2002 학년도 대수능]

**22** [공통]다음은 정적분 $\int_{0}^{1}(x^2+1)dx$의 근사값의 오차의 한계를 구하는 과정의 일부이다.

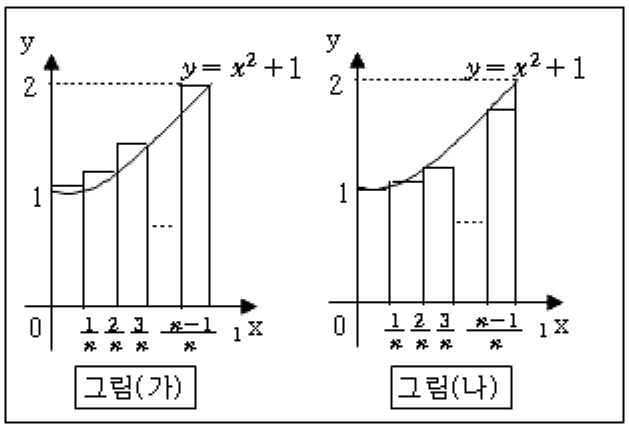



그림 ㈎, ㈏와 같이 닫힌 구간 $[0, 1]$을 $n$등분하여 얻은 $n$개의 직사각형들의 넓이의 합을 각각 $A, B$라 하자. $A-B \leq 0.15$가 되는 $n$의 최솟값은?[3점]

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

[난이도 : ★☆☆] [2001 학년도 대수능]

**23** 정적분 $\int_{e}^{e^2} \frac{3(\ln x)^2}{x} dx$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★☆☆] [1999 학년도 대수능]

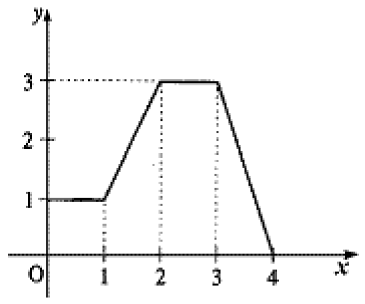
**24** 정적분 $\int_{0}^{1} x(1-x)dx$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

**25** 다음 그림은 $0 \le x \le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$의 값은?




① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

**26** 함수 $f(x)=a\cos(\pi x^2)$에 대하여

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1} f(t)dt = 3$$

일 때, $f(a)$의 값은? (단, $a$는 상수이다.) [4점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

**27** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 $y$절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 $t$에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$ 일 때,

$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

**28** $\int_1^e x(1-\ln x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}(e^2-7)$ ② $\frac{1}{4}(e^2-6)$ ③ $\frac{1}{4}(e^2-5)$

④ $\frac{1}{4}(e^2-4)$ ⑤ $\frac{1}{4}(e^2-3)$

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

**29** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\ (0<a<2\pi)$와

모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(x)=f(-x)$ |
| (나) $\int_x^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ |

닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 $b$, $c$에 대하여

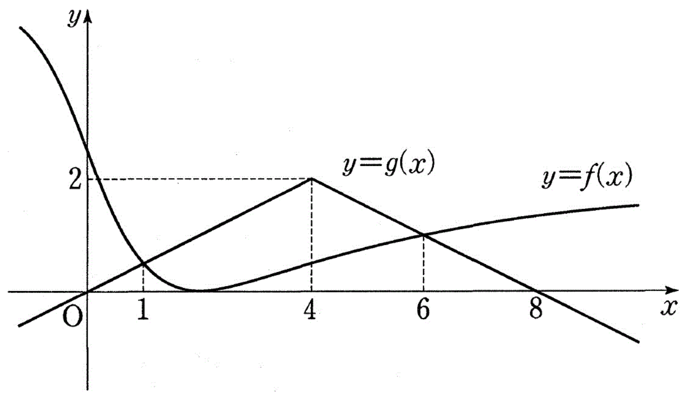
$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

**30** 함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의

그래프가 그림과 같다.




$0\le a\le 8$ 인 $a$에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의

최솟값은?[4점]

① $14-5\ln5$　② $15-5\ln10$　③ $15-5\ln5$
④ $16-5\ln10$　⑤ $16-5\ln5$

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

**31** 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$$

이고 $f'(2)=17$ 일 때, 상수 $a$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

**32** 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi\le x\le 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0\le x\le \frac{7}{2}\right)\end{cases}$$

라 하자.

닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 $x$에 대하여

$\int_a^x f(t)dt\ge 0$이 되도록 하는 실수 $a$의 최솟값을 $\alpha$, 최댓값을

$\beta$라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은?(단, $-\frac{7}{2}\pi\le\alpha\le\frac{7}{2}\pi$)[4점]

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{3}{2}\pi$　③ $\frac{5}{2}\pi$
④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ $\frac{9}{2}\pi$

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

**33** 정의역이 $\{x|0\le x\le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는

모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은

$p+\frac{q}{\ln2}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p, q$는 자연수이고, $\ln2$는 무리수이다.)[4점]

| |
|---|
| (가) $f(0)=1$ 이고 $f(8)\le 100$ 이다.<br>(나) $0\le k\le 7$ 인 각각의 정수 $k$에 대하여<br>$f(k+t)=f(k)\ (0<t\le 1)$<br>또는<br>$f(k+t)=2^t\times f(k)\ (0<t\le 1)$<br>이다.<br>(다)열린 구간 $(0, 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지<br>않은 점의 개수는 2이다. |

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

**34** 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가)모든 양의 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나)임의의 양의 실수 $t$에 대하여 세 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$, $(t+1,\ f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $t+\dfrac{1}{t}$이다.
> (다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

**35** 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_a^x f(t)dt=e^x+ax+a$$

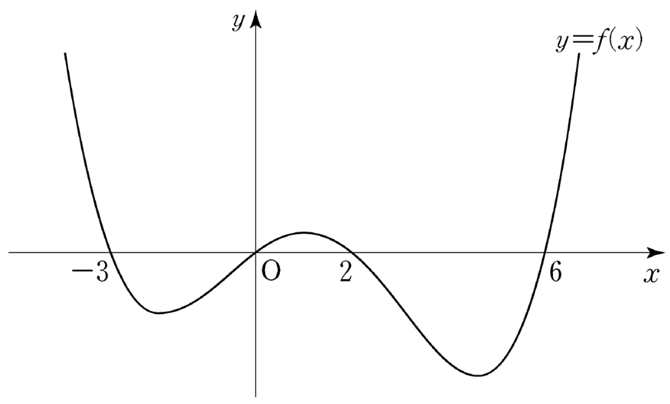
를 만족시킬 때, $f(\ln 2)$의 값은?(단, $a$는 상수이다.)[3점][2012년 6월]

① 1　　② 2　　③ $e$
④ 3　　⑤ $2e$

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

**36** 사차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(m+\frac{k}{n}\right)<0$을 만족시키는 정수 $m$의 개수는?[4점][2012년 6월]




① 3　　② 4　　③ 5
④ 6　　⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

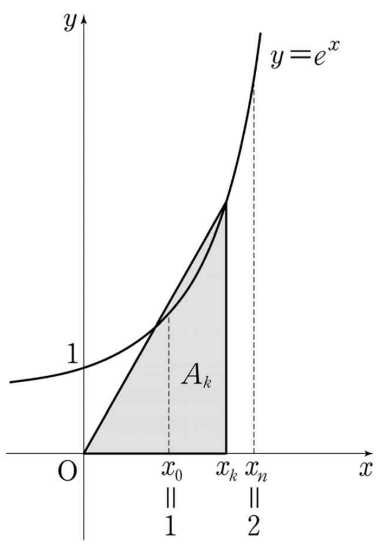
**37** 함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여 $F(x)=\displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt\ (x\geq 0)$일 때,

$F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 $a$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

**38** 함수 $f(x)=e^x$이 있다. 2이상인 자연수 $n$에 대하여 닫힌구간 $[1, 2]$를 $n$등분한 각 분제품?하는양 끝점도 포함)을 차례로 $1=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=2$라 하자.

세 점 $(0, 0)$, $(x_k, 0)$, $(x_k, f(x_k))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k(k=1, 2, \cdots, n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$의 값은? [4점]




① $\frac{1}{2}e^2-e$ ② $\frac{1}{2}(e^2-e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$

④ $e^2-e$ ⑤ $e^2-\frac{1}{2}e$

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

**39** 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\int_0^3 f(x)dx=3\int_0^1 f(x)dx$ |
| ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$ |
| ㄷ. $\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=\left\{\int_0^1 f(x)dx\right\}^2$ |

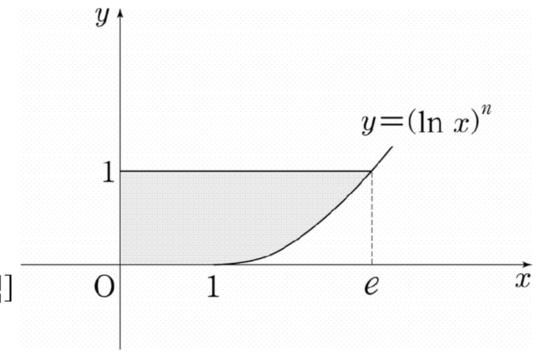
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

**40** 2이상의 자연수 $n$에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n(x\ge 1)$과 $x$축, $y$축 및 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_n$이라 하자.

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른




것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $1\le x\le e$일 때, $(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$이다. |
| ㄴ. $S_n < S_{n+1}$ |
| ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n(x\ge 1)$의 역함수를 $g(x)$라 하면 $S_n=\int_0^1 g(x)dx$이다. |

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

**41** 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?[4점][2011년 9월 평가원]

| |
|---|
| (가) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=1$ |
| (나) $\cos x\int_0^x f(t)dt=\sin x\int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ (단, $0\le x\le \frac{\pi}{2}$) |

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $1$

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

**42** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $t$에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

**43** 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$에 대하여 상수 $a$가 $f(a)=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx$의 값은?[3점]

① $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$ ② $\sqrt{e}-1$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{e}+1}{2}$ ⑤ $\sqrt{e}+1$

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

**44** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 양수 $x$에 대하여 $\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2 dt = 6\int_0^1 x^3(x-t)^2 dt$를 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=1$, $x$축, $y$축으로 둘러싸인 도형을 $x$축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $a\pi$라 할 때, $a$의 값을 구하시오.[4점]

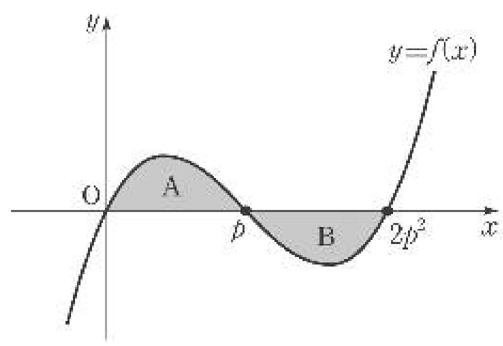
[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

**45** $\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$의 값은?[3점]

① $\pi$ ② $2\pi$ ③ $3\pi$
④ $4\pi$ ⑤ $5\pi$

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

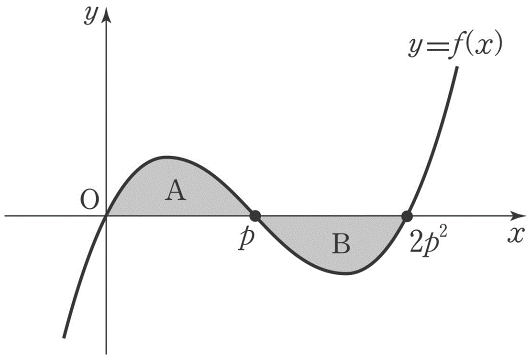
**46** 연속함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 이 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 두 부분 $A, B$의 넓이가 각각 $\alpha, \beta$일 때, 정적분 $\int_0^p xf(2x^2)dx$의 값은?(단, $p>\frac{1}{2}$)[4점]




① $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ② $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ ③ $\alpha+\beta$
④ $\frac{1}{4}(\alpha+\beta)$ ⑤ $\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$

[난이도 : ★★★] [2004년 09월 모의평가]

**47** 연속함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다. 이 곡선과 $x$축으로 둘러싸인 두 부분 $A$, $B$의 넓이가 각각 $\alpha$, $\beta$일 때, 정적분 $\int_0^p xf(2x^2)dx$의 값은? (단, $p>\frac{1}{2}$) [4점]




① $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$　② $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$　③ $\alpha+\beta$
④ $\frac{1}{4}(\alpha+\beta)$　⑤ $\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

**48** $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx$의 값은? [3점]

① $\sqrt{3}$　② 2　③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

**49** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=ae^{2x}-4x+b$$

를 만족시킬 때, $f(a)f(b)$의 값을 구하시오. (단, $a$, $b$는 상수이다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

**50** 함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

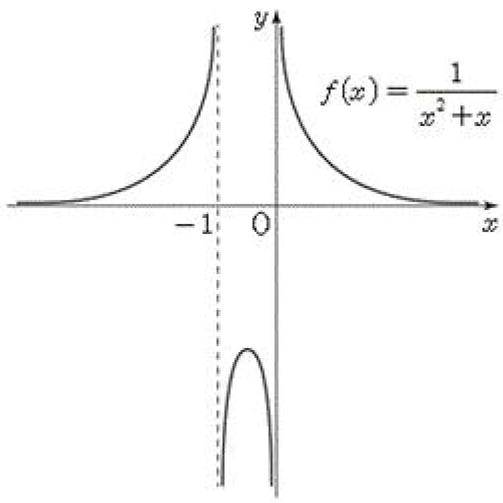
**51** 자연수 $n$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\int_1^x \frac{n-\ln t}{t}dt$$

의 최댓값을 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

**52** 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$의 그래프는 그림과 같다.




$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{\ln 9}{8}$　② $\frac{\ln 5}{4}$　③ $\frac{\ln 11}{8}$
④ $\frac{\ln 3}{2}$　⑤ $\frac{\ln 13}{8}$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

**53** 함수 $f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에 대하여

$$a=f(\pi-x)+f(x),\ \ b=\int_0^{\pi} f(x)dx$$

일 때, $a+\dfrac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

**54** 모든 실수 $x$에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가)모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다. |
| (나) $0\le x\le 1$일 때, $f(x)=\sin\pi x+1$이다. |
| (다) $1<x<2$일 때, $f'(x)\ge 0$이다. |

$\displaystyle\int_0^6 f(x)dx=p+\frac{q}{\pi}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, $p$, $q$는 정수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

**55** $\displaystyle\int_0^{10}(x+1)^2dx-\int_0^{10}(x-1)^2dx$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

**56** $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\cos 2x+6\cos^2\dfrac{x}{2}=1$의 서로 다른 모든 실근의 합은? [3점]

① $\pi$ ② $\dfrac{3}{2}\pi$ ③ $2\pi$
④ $\dfrac{5}{2}\pi$ ⑤ $3\pi$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

**57** 자연수 $n$에 대하여 함수 $f(n)=\displaystyle\int_1^n x^3e^{x^2}dx$라 할 때, $\dfrac{f(5)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① $e^{14}$ ② $2e^{16}$ ③ $3e^{16}$
④ $4e^{18}$ ⑤ $5e^{18}$

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

**58** 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(1)=2$ |
| (나) $\displaystyle\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx=-4$ |

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.(단, $f'(x)$는 연속함수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

**59** 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $f(x)$라 할 때, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

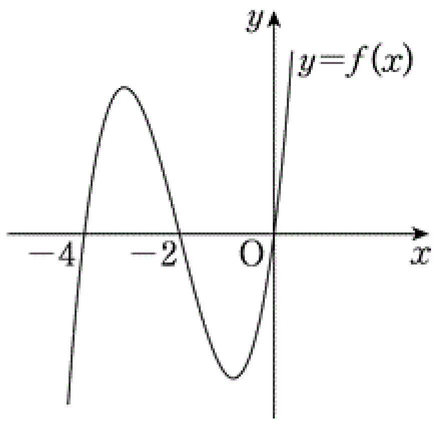
| |
|---|
| (가)모든 양수 $x$에 대하여 $f(x)+xf(x)=(2x+2)e^x$<br>(나) $f(1)=2e$ |

$f(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}e^3$ ② $\frac{1}{2}e^3$ ③ $e^3$
④ $2e^3$ ⑤ $4e^3$

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

**60** 함수 $f(x)=x(x+2)(x+4)$에 대하여




함수 $g(x)=\int_2^x f(t)dt$는 $x=\alpha$에서 극댓값을 갖는다.

$g(\alpha)$의 값은? [4점]

① $-28$ ② $-29$ ③ $-30$
④ $-31$ ⑤ $-32$

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

**61** 함수 $f(x)=\sin\pi x$와 이차 함수 $g(x)=x(x+1)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\int_{g(x)}^{g(x+1)} f(t)dt$$

라 할 때, 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

**62** 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^3 f(x)dx$의 최솟값을 $m$이라 할 때, $4m$의 값을 구하시오. [4점]

| |
|---|
| (가) $f(0)=0$<br>(나)모든 실수 $x$에 대하여 $f'(2-x)=f'(2+x)$이다.<br>(다)모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq-3$이다. |

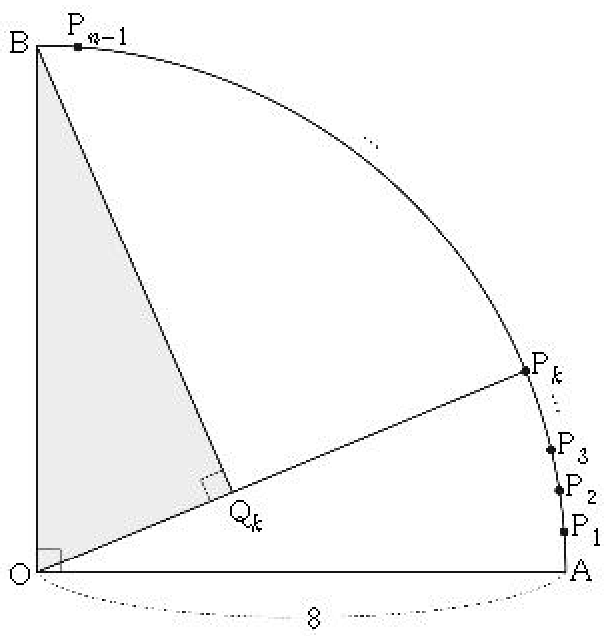
[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

**63** 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고, 반지름의 길이가 8인 부채꼴 $OAB$가 있다.

2 이상의 자연수 $n$에 대하여 호 $AB$를 $n$등분한 각 분점을 점 $A$에서 가까운 것부터 차례로 $P_1$, $P_2$, $P_3$, $\cdots$, $P_{n-1}$이라 하자.

$1 \le k \le n-1$인 자연수 $k$에 대하여 점 $B$에서 선분 $OP_k$에 내린 수선의 발을 $Q_k$라 하고, 삼각형 $OQ_kB$의 넓이를 $S_k$라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} S_k = \frac{\alpha}{\pi}$일 때, $\alpha$의 값을 구하시오. [4점]




[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

**64** 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(-x)=f(x)$ |
| (나) $f(x+2)=f(x)$ |
| (다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)\,dx=50$, $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)\,dx=2$ |

$\int_{-3}^{3}x^2 f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

**65** 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+1$위에 세 점 $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$이 있다.

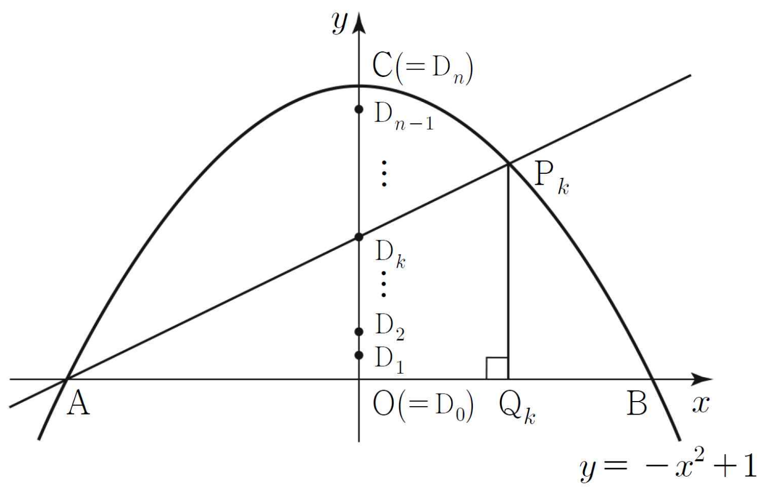
2이상의 자연수 $n$에 대하여 선분 $OC$를 $n$등분할 때, 양 끝점을 포함한 각 분점을 차례로 $O=D_0$, $D_1$, $D_2$, $\cdots$, $D_{n-1}$, $D_n=C$라 하자.

직선 $AD_k$가 곡선과 만나는 점 중 $A$가 아닌 점을 $P_k$라 하고,

점 $P_k$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $Q_k$라 하자.
$(k=1,2,\cdots,n)$

삼각형 $AP_kQ_k$의 넓이를 $S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\alpha$이다.

$24\alpha$의 값을 구하시오. [4점]




[난이도 : ★★☆] [2012년 4월 학력평가]

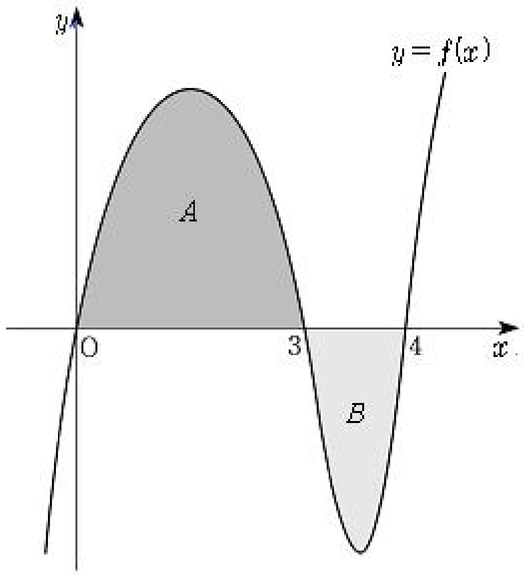
**66** 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(\sin x+1)dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

**67** 연속함수 $f(x)$의 그래프가 $x$축과 만나는 세 점의 $x$좌표는 $0, 3, 4$이다.

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 $x$축으로 둘러싸인 두 부분 $A$, $B$의 넓이가 각각 6, 2일 때, $\int_0^2 f(2x)dx$의 값은? [3점]




① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

**68** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은?(단, $a$는 상수이다.)[4점]

(가) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt = \{g(x)+a\}\sin x - 2$

(나) $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \cos x + 3$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

**69** 이차 함수 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$에서 두 상수 $\alpha$, $\beta$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha < 0 < \beta$
(나) $\alpha + \beta > 0$

이때, 세 정적분

$A=\int_\alpha^0 f(x)dx$, $B=\int_0^\beta f(x)dx$, $C=\int_\alpha^\beta f(x)dx$

의 값의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?[3점]

① $A<B<C$
② $A<C<B$
③ $B<A<C$
④ $C<A<B$
⑤ $C<B<A$

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

**70** $x$에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|dt = x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, $m^3+n^3$의 값을 구하시오.(단, $m$, $n$은 유리수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 월 학력평가]

**71** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}}$의 값은?[4점]

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[난이도 : ★★★] [2011년 월 학력평가]

**72** $\int_{0}^{1}(1+2e^{-x})dx-\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

**73** 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $f(0)=1,\ f(1)=2$<br>(나) $f'(x)>0,\ f''(x)>0$(단, $0<x<1$) |

옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,1)$에서 아래로 볼록하다. |
| ㄴ. $\int_{0}^{1}\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$ |
| ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_{0}^{1}\{f(x)\}^2dx$ |

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

**74** 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases}-2x+2, & (0\leq x<2)\\ -2e^{2-x}, & (x\geq 2)\end{cases}$이다.

양수 $a$에 대하여 $S(a)=\int_{0}^{a}|f(x)|dx$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}S(a)$의 값은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

**75** 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가)모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다.<br>(나) $\int_{1}^{\frac{3}{2}}f(2x)dx=7,\ \int_{1}^{\frac{4}{3}}f(3x)dx=1$ |

$\int_{2001}^{2012}f(x)dx$의 값은?[3점]

① 65 ② 71 ③ 82
④ 88 ⑤ 99

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

**76** $F'(x)=f(x)$인 이차 함수 $y=f(x)$와 임의의 두 실수 $a,\ c$에 대하여 서로 다른 두 점 $A(a,\ F(a)),\ B(a+c,\ F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기와 같은 값을 갖는 것은?[3점]

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{c}{n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$
③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+c+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(c+\frac{ak}{n}\right)\frac{1}{2n}$
⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}$

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

**77** 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=2$
> (나) $x>0$이면 $f'(x)>0$이다.

$2$이상인 자연수 $n$과 $1 \le k \le n$인 자연수 $k$에 대하여, 곡선 $y=f'(x)$와 세 직선 $x=\frac{k-1}{n}$, $x=\frac{k}{n}$, $y=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A_n(k)$라 하면

$n^3\{A_n(1)+A_n(2)+\cdots+A_n(k)\}=\frac{1}{2}k^3+2n^2k$가 성립한다.

곡선 $y=xf(x)$와 $x$축, $y$축, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

**78** 함수 $f(x)=e^x \sin\frac{\pi}{2}x$에 대하여

$S(t)=\int_0^t 2x\{f(t)-f(x)\}dx$일 때, $S'(2)$의 값은?[3점]

① $-2\pi e^2$ ② $-\pi e^2$ ③ $\pi e^2$
④ $2\pi e^2$ ⑤ $\pi^2 e^2$

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

**79** 모든 실수 $x$에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고 $-1 \le x \le 1$에서 다음과 같이 정의된다.

$f(x)=30x^2+15$

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(10+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

**80** 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 $x$에 대하여 (가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2$※$3$
> (나) $f(x)=1$
> (다) $g(x)=2\int_1^x f(t)dt$

$\int_0^3 3g(x)dx$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

**81** $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\right)$의 값은?[3점]

① $1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $2$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $4$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

**82** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}=\int_a^b \sqrt{x}\,dx$일 때, $a+b$의 값은?[3점]

① $0$ ② $1$ ③ $2$
④ $3$ ⑤ $4$

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

**83** 함수 $f_n(x)=\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$ 가 $\int_0^1 f_n{}'(x)dx=-n^3$ 을 만족

할 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $\cdots$ , $a_n$ 은 상수) [4점]

| [보 기] |
|---|
| ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}$ |
| ㄴ. $f_2(2)=3$ |
| ㄷ. $\int_0^{n+1}f_n(x)dx=2\int_0^{\frac{n+1}{2}}f_n(x)dx$ |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

**84** $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx\,(n=1,2,3,\cdots)$ 으로 정의할 때, 옳은

내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $a_1+a_3=\frac{1}{2}$ |
| ㄴ. $a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ |
| ㄷ. $\sum_{k=1}^{100}a_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{51}$ |

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

**85** 실수전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가

$f(x)=e^x-1+\int_0^x f(t)dt$ 를 만족할 때 다음 [보기]의 설명 중

옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $e$는 자연로그의 밑)[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $f(0)=0$ 이다. |
| ㄴ. $f'(0)=0$ 이다. |
| ㄷ. 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)>f(x)$ 이다. |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

**86** 자연수 $n$에 대하여 구간 $[0, \pi]$ 에서 두 곡선

$y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+1}\sin x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_n$ 이라

할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_k$ 의 값은 ?[3점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\pi$

# 정답 및 해설

**2.정적분**

## 중단원 기출문제

1) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 치환적분법과 로그의 적분법을 활용하여 실수 $a$의 값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}dt=\int_0^x \frac{e^t}{1+e^t}dt$에서 $1+e^t=s$로 놓으면

$e^t=\frac{ds}{dt}$이고, $t=0$일 때 $s=2$이고, $t=x$일 때 $s=1+e^x$이므로

$$f(x)=\int_2^{1+e^x}\frac{1}{s}dt$$
$$=[\ln s]_2^{1+e^x}$$
$$=\ln(1+e^x)-\ln 2$$
$$=\frac{\ln 1+e^x}{2}$$

$$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f\left(\frac{\ln 1+e^a}{2}\right)=\frac{\ln 1+e^{\frac{\ln 1+e^a}{2}}}{2}$$

이때, $e^{\frac{\ln 1+e^a}{2}}=\left(\frac{1+2^a}{2}\right)^{\ln e}=\frac{1+e^a}{2}$이므로

$$(f\circ f)(a)=\frac{\ln 1+e^{\frac{\ln 1+e^a}{2}}}{2}=\frac{\ln 1+\frac{1+e^a}{2}}{2}=\frac{\ln 3+e^a}{4}$$

한편, $(f\circ f)(a)=\ln 5$이므로 $\frac{\ln 3+e^a}{4}=\ln 5$

이때, $y=\ln x$는 일대일 함수이므로 $\frac{3+e^a}{4}=5 \Leftrightarrow e^a=17$

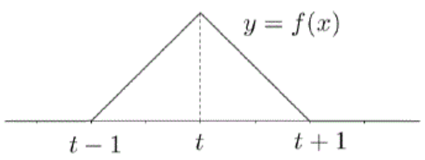
따라서 $a=\ln 17$

2) 답 : 21

[해설]

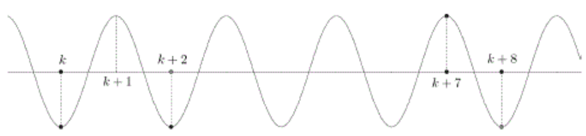
[출제 의도] 정적분으로 나타내어진 함수의 특성을 파악할 수 있는가?

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.




한편, 함수 $y=\cos(\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

홀수 $k$에 대하여 함수 $y=\cos(\pi x)$의 그래프는 다음과 같다.




한편, $x<t-1$ 또는 $x>t+1$일 때 $f(x)=0$이므로

닫힌 구간 $[a,b]$가 $(-\infty,t-1]$에 포함되거나 $[t+1,\infty)$에 포함되면

$\int_a^b f(x)\cos(\pi x)dx=0$ 이다.

따라서 $t$의 값을 증가시키면서 함수 $g(t)$를 구하면 다음과 같다.

( i ) $t+1\le k$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_k^{k+8}0\times\cos(\pi x)dx=0$

( ii ) $t-1\le k\le t+1$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_k^{t+1}f(x)\cos(\pi x)dx$

( iii ) $k\le t-1<t+1\le k+8$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{t-1}^{t+1}f(x)\cos(\pi x)dx$

( iv ) $t-1\le k+8\le t+1$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{t-1}^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx$

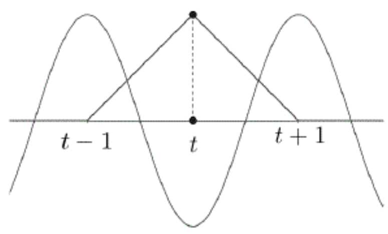
( v ) $t-1\ge k+8$일 때

$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_k^{k+8}=\times\cos(\pi x)dx=0$

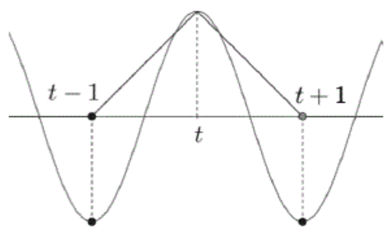
한편, 다음 그래프에서 함수 $\int_{t-1}^{t+1}f(x)\cos(\pi x)dx$는

$t$가 홀수일 때 극소이자 최소이고,

$t$가 짝수일 때 극대이자 최대임을 알 수 있다.




[ $t$가 홀수일 때]




[ $t$가 짝수일 때]

그런데,

$$\int_0^1(1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{\pi}(1-x)\sin(\pi x)\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(\pi x)dx$$
$$=0+\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{\pi^2}$$

이므로 $t$가 $k\le t-1<t+1\le k+8$인 홀수일 때

$$g(t)=\int_k^{k+8}f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{t-1}^{t+1}f(x)\cos(\pi x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(1-|x|)\cos(\pi x)dx=-2\int_0^1(1-x)\cos(\pi x)dx$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}$$

이고, $t$가 $k\le t-1<t+1\le k+8$인 짝수일 때

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{t-1}^{t+1} f(x)\cos(\pi x)dx$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x+t)\cos\{\pi(x+t)\}dx=\int_{-1}^{1}(1-\{x\})\cos(\pi x)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)dx=\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

그런데 $k$는 홀수이므로 함수 $g(t)$는 다음과 같이 극솟값을 갖는다.

(1) $t=k$에서 극솟값 $\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$

$=\int_{k}^{k+1} f(x)\cos(\pi x)dx=-\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)dx=-\frac{2}{\pi^2}$ 을 갖는다.

(2) $t=k+8$에서 극솟값

$\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{k+7}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$

$=-\int_{-1}^{0}(1+x)\cos(\pi x)dx=-\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)dx=-\frac{2}{\pi^2}$ 를 갖는다.

(3) $t=k+2$에서

극솟값 $\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx=\int_{k+1}^{k+3} f(x)\cos(\pi x)dx$

$=-\int_{-1}^{1}(1+x)\cos(\pi x)dx=-2\int_{0}^{1}(1-x)\cos(\pi x)dx=-\frac{4}{\pi^2}$ 를 갖는다.

(4) $t=k+4$, $+6$에서도 (3)과 마찬가지로 극솟값 $-\frac{4}{\pi^2}$ 를 갖는다.

이상에서

$\alpha_1=k$, $\alpha_2=k+2$, $\alpha_3=k+4$, $a_4=k+6$, $\alpha_5=k+8$

이고,

$$g(\alpha_1)=g(\alpha_8)=-\frac{2}{\pi^2}$$

$$g(\alpha_2)=g(\alpha_3)=g(\alpha_4)=-\frac{4}{\pi^2}$$

이다.

이때 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=5k+20=45$ 이므로

$k=5$

또,

$$\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{5} g(\alpha_i)=-\frac{1}{\pi^2}(2+4+4+4+2)=-\frac{16}{\pi^2}$$

따라서

$$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)=5-\pi^2\times\left(-\frac{16}{\pi^2}\right)=5+16=21$$

3) 답 : ③

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[0, 1]$에서 $x$축과 만나는 점의 $x$좌표를 $k$라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_1$,

곡선 $y=f(x)$와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_2$라 하자.

$\int_{0}^{1} f(x)dx=2$에서 $-S_1+S_2=2$ …㉠

$\int_{0}^{1}|f(x)|dx=2\sqrt{2}$에서 $S_1+S_2=2\sqrt{2}$ …㉡

㉠, ㉡에서

$S_1=\sqrt{2}-1$, $S_2=\sqrt{2}+1$

$i)$ $0\le x\le k$인 경우

$$F(x)=\int_{0}^{x}(-f(t))dt=-f(x)$$

$\int_{0}^{k} f(x)F(x)dx$에서 $F(x)=s$라면

$x=0$일 때, $s=0$, $x=k$일 때, $s=\sqrt{2}-1$,

$F'(x)\frac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_{0}^{k} f(x)F(x)dx$$

$$=\int_{0}^{\sqrt{2}-1}(-s)ds$$

$$=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_{0}^{\sqrt{2}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2=-\frac{3}{2}+\sqrt{2}$$

$ii)$ $k\le x\le 1$인 경우

$F(x)=(\sqrt{2}-1)\int_{k}^{x} f(t)dt$이므로

$F'(x)=f(x)$

$\int_{k}^{1} f(x)F(x)dx$에서 $F(x)=s$라면

$x=k$일 때, $s=\sqrt{2}-1$

$x=1$일 때, $S=2\sqrt{2}$

$F'(x)\frac{dx}{ds}=1$이므로

$$\int_{k}^{1} f(x)F(x)dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} sds$$

$$=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$$

$$=4-\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2=4-\frac{3}{2}+\sqrt{2}=\frac{5}{2}+\sqrt{2}$$

$i)$에서

$$\int_{0}^{1} f(x)F(x)dx$$

$$=\int_{9}^{k} f(x)F(x)dx+\int_{k}^{1} f(x)F(x)dx$$

$$=1+2\sqrt{2}$$

4) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $0<x<\sqrt{\pi}$에서 $e^{-x}>0$, $\sin(x^2)\ge 0$이고 $\sin 0=\sin\pi=0$이므로

$f(\sqrt{\pi})=e^{-\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}\sin(t^2)dt>0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=-e^{-x}\int_0^x\sin(t^2)dt+e^{-x}\sin(x^2)$

$f'(0)=-e^{-0}\int_0^0\sin(t^2)dt+e^{-0}\sin 0^2=0$

$f'(\sqrt{\pi})=-e^{-}\sqrt{\pi}\int_0$

$=-f(\sqrt{\pi})<0$

함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \sqrt{\pi}]$에서 연속이고 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 미분가능하므로

평균값 정리에 의하여 $f(a)=\dfrac{f(\sqrt{\pi})-f(0)}{\sqrt{\pi}-0}>0$를

만족시키는 $a$가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 $a\,(0<a<\sqrt{\pi})$에 대하여

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ \sqrt{\pi}]$에서 연속이고

$f'(a)>0,\ f'(\sqrt{\pi})<0$이므로

사잇값 정리에 의해 $f'(b)=0$이 되는 $b$가 열린 구간 $(0,\ \sqrt{\pi})$에서

적어도하나 존재한다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) 답 : 35

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질과 연속함수의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

(나)에 주어진 등식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=0\ \ldots$ ㉠

(나)에 주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sqrt{4-2f(x)}$

$\therefore\ \{f'(x)\}^2=4-2f(x)$ (단, $f'(x)\geq 0,\ f(x)\geq 2$)...㉡

$x\leq b$일 때

$f'(x)=2a(x-b)$이므로 ㉡에서

$4a^2(x-b)^2=4-2\{a(x-b)^2+c\}\ \ldots$ ㉢

㉢이 $x\leq b$인 모든 실수 $x$에 대하여 성립하므로

$4a^2=-2a$이고 $4-2c=0$이다.

$\therefore\ a=-\dfrac{1}{2},\ c=2$

따라서 $x\leq b$일 때

$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-b)^2+2$

이때 $b<0$이면 $f(b)=2$이고 ㉠에서 $f(0)=0$이므로

모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이라는 ㉡의 조건에 모순이다.

$\therefore\ b\geq 0$

㉠에서 $f(0)=0$이므로

$f(0)=-\dfrac{1}{2}b^2+2=0$

$\therefore\ b^2=4$

$\therefore\ b=2\,(\because b\geq 0)$

이때 ㉡에서 $f'(x)\geq 0$이고 $f(x)\leq 2$이므로

$x>b$일 때 $f(x)=2$이다.

따라서

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(x-2)^2+2\,(x\leq 2)\\ 2\,(x>2)\end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}[\text{중간계산}] &=\int_0^6 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx\\ &=\int_0^2\left\{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2\right\}dx+\int_2^6 2dx\\ &=\left[-\frac{1}{6}(x-2)^3+2x\right]_0^2+\left[2x\right]_2^6\\ &=\left(4-\frac{8}{6}\right)+(12-4)\\ &=12-\frac{4}{3}=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ p+q=3+32=35$

6) 답 :

[해설]

$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

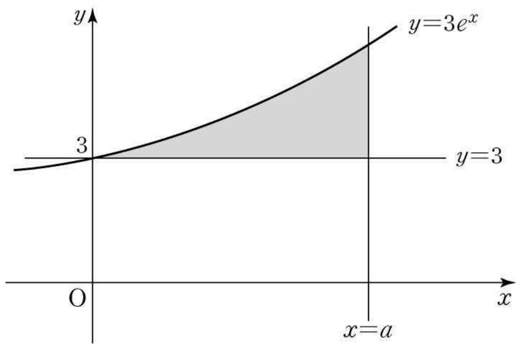
$f'(x)=(a-x)e^x$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다

$f(a)=\int_0^a(a-t)e^t dt=\left[(a-t)e^t\right]_0^a-\int_0^a(-e^t)dt$

$=-a-\left[-e^t\right]_0^a=-a-(-e^a+1)$

$e^a-a-1=32\ldots$(ㄱ)




따라서, 구하는 넓이는

$\int_0^a(3e^x-3)dx=\left[3e^x-3x\right]_0^a=3e^a-3a-3$

$=3(e^a-a-1)=96$ ( ∵ (ㄱ) )

7) 답 : ①

[해설]

곡선 $y=f(x)$는 $y$축에 대하여 대칭이므로 기함수이다.

그래서 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx=13$

$\therefore\ \int_0^a f(x)dx=\dfrac{13}{2}$

한편, 곡선 $y=f(x)$는 모든 $x$에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족하므로

주기가 3인 주기함수이고, $\int_0^3 f(x)dx=2$이므로

$\int_0^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=\int_6^9 f(x)dx=2$이다.

$\therefore \int_0^9 f(x)dx=6$

즉, $\int_0^a f(x)dx=\int_0^9 f(x)dx+\int_9^a f(x)dx=6+\int_9^a f(x)dx=\frac{13}{2}$

이므로

$\int_9^a f(x)dx=\frac{1}{2}$ 이다.

그런데 곡선 $y=f(x)$는 모든 $x$에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_9^{10} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$,

$\therefore a=10$

8) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 주어진 조건과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x=1} f(t)dt$ ········· ㉠

㉠의 양변을 ?에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$이므로 $f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$

$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=\pi^2\int_0^1 x\times\frac{2}{\pi}f'(x)dx=2\pi\int_0^1 xf'(x)dx$

$\int_0^1 xf'(x)dx$에서 $u=x$, $v'=f'(x)$로 놓으면 $u'=1$, $v=f(x)$이므로

$\int_0^1 xf'(x)dx=[xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$

한편, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(1)=1$에서 $f(-1)=-1$이다.

$-1=f(-1)=\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(t)dt$에서 $\int_0^1 f(t)dt=\frac{2}{\pi}$

$\therefore \pi^2\int_0^1 xf(x+1)dx=2\pi\times f(1)-\int_0^1 f(x)dx$

$=2\pi\times\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=2(\pi-2)$

9) 답 : ④

[해설]

$f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)dt$에서 $\int_0^1 tf(t)dt=a$라 하면

$f(x)=e^{x^2}+a$이므로

$a=\int_0^1 t\cdot f(t)dt=\int_0^1 t\left(e^{t^2}+a\right)dt$

$=\int_0^1\left(t\cdot e^{t^2}+at\right)dt=\left[\frac{1}{2}e^{t^2}+\frac{1}{2}at^2\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$을 풀면 $\therefore a=e-1$

10) 답 : 24

[해설]

$f(x)=3(x-1)^2+5\ldots$①

$F(x)=\int_0^x f(t)dt\ldots$②

$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)\ldots$③이라고 하자

ⅰ)③의 양변을 미분하면 $F'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2}F'(x)$

이 식에 $x=2$를 대입하면 $F'(g(2))g'(2)=\frac{1}{2}F'(2)\ldots$①

ⅱ)②의 양변을 미분하면

$F'(x)=f(x)=3(x-1)^2+5=3x^2-6x+8$

이 식에 $x=2$를 대입하면 $F'(2)=8$ ⋯ⓐ

ⅲ)③의 식에 $x=2$를 대입하면 $F(g(2))=\frac{1}{2}F(2)\ldots$②

ⅳ)①을 ②에 대입하여 적분을 하면

$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\{3(t-1)^2+5\}dt$

$=\int_0^x\left(3t^2-6t+8\right)dt=x^3-3x^2+8x\ldots$③

ⅴ)③의 식에 ②를 적용하면

$\{g(2)\}^3-3\{g(2)\}^2+8\{g(2)\}=\frac{1}{2}\cdot\{2^3-3\cdot2^2+8\cdot2\}=6$

$g(2)=t$를 치환하면

$t^3-3t^2+8t=6$이며 정리하면

$t^3-3t^2+8t-6=0$

$(t-1)(t^2-2t+6)=0$이며 정리하면

$t=1,\ g(2)=1$

ⅵ) $F'(g(2))=F'(1)=5$ ⋯ⓑ

ⅶ)ⓐ와 ⓑ를 ①에 대입하면 $5\cdot g'(2)=4,\ g(2)'=\frac{4}{5}$

$\therefore 30p=24$

11) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $x=1-t$로 치환하면

$\begin{cases} dx=-dt \\ x=0\Rightarrow t=1 \\ x=1\Rightarrow t=0 \end{cases}$

(주어진 식)

$\int_0^1 f(x)\cdot g'(1-x)dx-\int_0^1 g(x)\cdot f'(1-x)dx$

$=\int_0^1 f(x)\cdot g'(1-x)dx+\int_1^0 f'(t)\cdot g(1-t)dt$

$=\int_0^1\{f(x)\cdot g'(1-x)-f'(x)\cdot g(1-x)\}dx$

$=-\int_0^1\{f'(x)\cdot g(1-x)-f(x)\cdot g'(1-x)\}dx\ldots$①

$=-k$ ∴ 참

ㄴ. ①에서

$k=\int_0^1\{f(x)\cdot g(1-x)'\}dx$

$=[f(x)\cdot g(1-x)]_0^1$

$=f(1)\cdot g(0)-f(0)\cdot g(1)=0$

$\therefore\ k=0$ ∴ 참

ㄷ. ㄴ으로부터

$$k=\int_0^1 \{f(x)\cdot g(1-x)'\}dx$$
$$=[f(x)\cdot g(1-x)]_0^1$$
$$=f(1)\cdot g(0)-f(0)\cdot g(1)$$
$$=\ln 2\cdot \sin 0-\ln 1\cdot \sin\pi$$
$$=0$$ ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

12) 답 : 14

[해설]

열린 구간 $[0,1]$을 $n$등분하므로

$x_k=\frac{k}{n}$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$이다.

$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$ 이므로 좌변을 계산하면

$$\frac{1}{n}\times f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\times f\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

$$>\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{a}{n}+2b+a+1=7+\frac{1}{n^2}$$

$\therefore\ a=0,\ b=3$

$\therefore\ f(x)=x^2+3$

$$[\text{구하는 값}]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}8\cdot\frac{k}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 8xf(x)dx=\int_0^1 8x(x^2+3)dx$$
$$=[2x^4+12x^2]_0^1=14$$

13) 답 : ④

[해설]

$f(x)=\int_a^x\{2+\sin(t^2)\}dt$의 양변을 미분하면

$$f'(x)=2+\sin(x^2)$$
$$f''(x)=2x\cos x^2$$
$$f'(a)=2a\cos(a^2)=\sqrt{3}a$$

$$\therefore\ \cos(a^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow a=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

다시 $f^{-1}(x)=y$라 놓으면

$$x=f(y)=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{y}\{2+\sin(t^2)\}dt\ ...(*)$$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2+\sin(y^2)}$$

(*)에서

$$x=0\Leftrightarrow\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{y}\{2+\sin(t^2)\}dt=0\Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$$

$$\therefore\ (f^{-1})'(0)=\frac{1}{2+\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$$

14) 답 : 16

[해설]

양변에 $x=1$대입하면 $1-2a+a=0$

$\therefore\ a=1$

양변을 미분하면 $f(x)=3x^2-4x+1$

$\therefore\ f(3)=16$

15) 답 : ②

[해설]

$$f(a)=\int_1^a\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$$

$\sqrt{\ln x}=t$라 하면 $\ln x=t^2$

$x=1\to t=0$

$x=a\to t=\sqrt{\ln a}$

$\frac{1}{x}dx=2tdt$

$$f(a)=\int_0^{\sqrt{\ln a}}2t^2dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\ln a}}$$
$$=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(a^4)=\frac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=8f(a)$$

16) 답 : 16

[해설]

$f(x)=x^3$의 그래프를 $x$축 방향으로 $a$만큼,

$y$축 방향으로 $b$만큼 평행이동시키면

$g(x)=(x-a)^3+b$의 그래프가 된다.

$g(0)=-a^3+b=0$이므로

$b=a^3$ $\cdots$ ①

한편, 그래프의 평행이동에 의해

$\int_a^b g(x)dx=\int_{a-c}^{b-c}g(x+c)dx$가 성립함을 이용하면

$$\int_a^{3a}g(x)dx=\int_a^{3a}\{(x-a)^3+b\}dx$$
$$=\int_0^{2a}(x^3+b)dx$$

$$\therefore\ \int_0^{2a}(x^3+b)dx-\int_0^{2a}x^3dx=\int_0^{2a}bdx$$
$$=2ab=32\cdots ②$$

① , ②에서 $2ab=2a^4=32$이므로

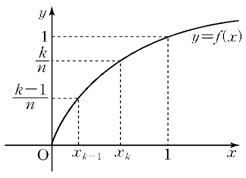
$a^4=16$

17) 답 : ③

[해설]

아래 그림에서

# 정답 및 해설




$f(x_k)=\frac{k}{n} \Leftrightarrow g\left(\frac{k}{n}\right)=x_k$

$f(x_{k-1})=\frac{k-1}{n} \Leftrightarrow g\left(\frac{k-1}{n}\right)=x_{k-1}$ 이므로

$x_k-x_{k-1}=\triangle x$ 로 놓고 주어진 식의 값을 구하면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\cdot f(x_k)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

18) 답 : ③

[해설]

$f(x)-2\int_0^x e^t f()dt=1 \cdots$ ①

① 의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)-0=1 \Leftrightarrow f(0)=1 \cdots$ ②

① 의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)-2e^x f(x)=0$

$\therefore\ f'(x)=2e^x f(x) \cdots$ ③

③ 의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f''(x)=2e^x f(x)+2e^x f'(x)$

$=2e^x f(x)+2e^x\{2e^x f(x)\}$

$=2e^x f(x)(1+2e^x)$

$\therefore\ f''(0)=2e^0 f(0)(1+2e^0)=2\cdot1\cdot1(1+2\cdot1)$=6

19) 답 : ①

[해설]

주어진 식 $f(g(x))=\int_0^x f(t)g(t)dt-xe^x+3$의 양변을

$x$에 대하여 미분하면,

$f'(g(x))g'(x)=f(x)g(x)-(1+x)e^x$

이때, 두 함수 $f(x)=ax+b,\ g(x)=e^x$ 을 대입하면,

$a\,e^x\ =(ax+b)\ e^x-(1+x)\ e^x$

$=((a-1)x+(b-1))e^x\ e^x$

$\therefore\ a-1=0,\ a=b-1$ 즉 $a=1,\ b=2$

따라서, $f(2)=1\cdot2+2=4$이다.

20) 답 : ②

[해설]

5차 이하의 모든 다항식 $f(x)$에 대하여

$\int_{-1}^1 f(x)dx=f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a+f(0)b+f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)a$ 이 성립하고,

또한 적분구간이 대칭구간이므로,

$f(x)$가 우함수인 경우에 대해서 생각해보면,

$f(x)=x^2$일 때도 주어진 식이 성립하여야 한다.

따라서 주어진 식에 대입하면,

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x^2dx=\frac{2}{3}\ =\frac{3}{5}a+0\cdot b+\frac{3}{5}a\ =\frac{6}{5}a$$

$\therefore\ a=\frac{5}{9}$

또한 $f(x)=1$일때도 성립해야 하므로, 주어진 식에 대입하면

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 1dx=2=a+b+a=\frac{10}{9}+b$$

$\therefore\ b=\frac{8}{9}$

21) 답 : ③

[해설]

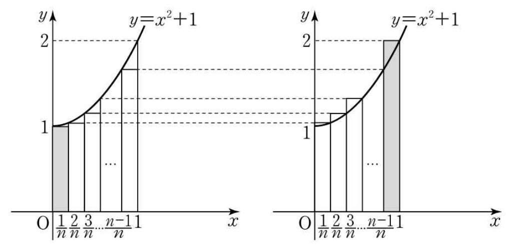
$$\int_0^1(x+1)(x^2-x+1)dx=\int_0^1(x^3+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}=1.25$$

22) 답 : ②

[해설]




위 그림에서 알 수 있듯이 $A-B$는 그림 ㈎의 가장 큰 직사각형의 넓이와

그림 ㈏의 가장 작은 직사각형의 넓이의 차와 같다.

따라서

$A-B\ =\frac{1}{n}\cdot f(1)-\frac{1}{n}\cdot f(0)$

$=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}\le 0.15$

$\therefore\ n\ge 6.6666\ldots$

즉, 구하는 $n$의 최솟값은 7이다.

23) 답 : ⑤

[해설]

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}dx=dt$

$e\le x\le e^2 \to 1\le t\le 2$ 이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{3(\ln x)^2}{x}dx=\int_1^2 3t^2dt$$

$=[t^3]_1^2$

$=8-1$

$=7$

24) 답 : ⑤

[해설]

$$\int_0^1 x(1-x)dx=\int_0^1(x-x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

25) 답 : ④

[해설]

$2x+1=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$

$2dx=dt,\ dx=\frac{1}{2}dt$

[구하는 값] $=\int_0^1 f(2x+1)dx$

$$=\int_1^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_1^2(2t-1)dt+\int_2^3 3dt\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left([t^2-t]_1^2+[3t]_2^3\right)=\frac{1}{2}(2+3)=\frac{5}{2}$$

26) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면,

준식은

[구하는 값] $=\lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2+1}{x}F(x+1)-F(1)\right\}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{(x^2+1)\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\{(x^2+1)\}\times F'(1)$$
$$=f(1)$$
$$=a\cos\pi$$

$a\cos\pi=3$

$\therefore\ a=-3$

$\therefore\ f(x)=-3\cos(\pi x^2)$

$f(-3)=-3\cos9\pi=3$

27) 답 : 16

[해설]

$g(t)$는 접선의 $y$절편이므로

$y=f(t)$의 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로 $g(t)=-tf'(t)+f(t)\ldots$①

주어진 조건에서

$$g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{1+t^2}$$

양변을 적분하면

(좌변)$=\int_0^x(g(t+1)-g(t))dt=\int_0^x g(t+1)dt-\int_0^x g(t)dt$

$$=\int_1^{x+1}g(t)dt-\int_0^x g(t)dt$$
$$=\int_0^{x+1}g(t)dt-\int_0^x g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt$$
$$=\int_x^{x+1}g(t)dt-\int_0^1 g(t)dt$$

(우변) $=\int_0^x\frac{2t}{1+t^2}dt=[\ln(1+t^2)]_0^x=\ln(1+x^2)$

$h(x)=\int_x^{x+1}g(t)dt=\ln(1+x^2)+\int_0^1 g(t)dt\ldots$㉠ 이라 하자.

$$\int_0^1 g(t)dt=\int_0^1(-tf'(t)+f(t))dt=\int_0^1(-tf'(t))dt+\int_0^1 f(t)dt$$
$$=[-tf(t)]_0^1+2\int_0^1 f(t)dt$$
$$=-f(1)+2\int_0^1 f(t)dt=-4-\frac{\ln17}{8}-\frac{\ln10}{2}$$

$$\int_{-4}^4 g(t)dt=\int_{-4}^4(-tf'(t)+f(t))dt=\int_{-4}^4(-tf'(t))dt+\int_{-4}^4 f(t)dt$$
$$=[-tf(t)]_{-4}^4+2\int_{-4}^4 f(t)dt$$
$$=-4f(4)-4f(-4)+2\int_{-4}^4 f(t)dt$$
$$=-2\left(2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(t)dt\right)\ \ldots㉡$$

한편 ㉠ 에서

$$\int_{-4}^4 g(t)dt$$
$$=h(-4)+h(-3)+h(-2)+h(-1)+h(0)+h(1)+h(2)+h(3)$$
$$=\ln17+\ln10+\ln5+\ln2++\ln2+\ln5+10+8\int_0^1 g(t)dt$$
$$=\ln17+4\ln10-32-\ln17-4\ln10=-32\ \ldots㉢$$

따라서 ㉡=㉢에서

$$-2\left(2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(t)dt\right)=-32$$
$$\therefore\ \left(2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^4 f(t)dt\right)=16$$

28) 답 : ⑤

[해설]

$x=f'(x),\ 1-\ln x=g(x)$라 하면

$$\int_1^e f'(x)g(x)dx=[f(x)g(x)]_1^e-\int_1^e f(x)g'(x)dx$$

임을 이용하자.

$$\int_1^e x(1-\ln x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)+\int_1^e\frac{1}{2}xdx$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}\ =\frac{1}{4}(e^2-3)$$

29) 답 : 83

# 정답 및 해설

[해설]

$\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 의 양변을 미분하면

$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ …㉠

위의 식에 $x$ 대신에 $-\frac{a}{2}$ 를 대입하면

$f(x)=f(-x)$ 이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)=0$

$\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\in\frac{a}{2}=0$

$\tan\frac{a}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{a}{2}=\frac{5}{6}\pi$ ( $\because$ $0<a<2\pi$ )

$\therefore$ $a=\frac{5}{3}\pi$

(나)식에 $x=-\frac{a}{2}$ 을 대입하면

$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\left[\frac{b}{3}\sin 3x+\frac{c}{5}\sin 5x\right]_{0}^{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2}$

위의 식에 $a=\frac{5}{3}\pi$를 대입하면

$2\left\{\frac{b}{3}\sin\frac{5}{2}\pi+\frac{c}{5}\sin\frac{25}{6}\pi\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi$

위의 식을 정리하면

$\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1$ …㉡

한편, ㉠에 $a=\frac{5}{3}\pi$를 대입하면

$f\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

양변을 미분하면

$f'\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

위의 식에 $x$ 대신에 $-\frac{5}{6}\pi$를 대입하면

$f'(x)=-f'(-x)$ 이므로

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)-f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=1$

$\therefore$ $f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$\left[0,\frac{5}{6}\pi\right]$ 에서

$f'(x)=-3b\sin 3x-5c\sin 5x$

위의 식에 $x=\frac{5}{6}\pi$를 대입하면

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2}$ …㉢

㉡과 ㉢을 연립하면

$b=-\frac{9}{4}$ , $c=\frac{5}{2}$

$\therefore$ $abc=\frac{5}{3}\pi\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}=-\frac{75}{8}\pi$

이므로

$p=8$, $q=75$

$\therefore$ $p+q=83$

**다른 풀이**

$f(x)$가 $y$축 대칭함수이므로 (나)식의 $x$에 $0$과 $-a$를 대입하면 다음과 같다.

$\int_{0}^{a} f(t)dt=\sin\frac{\pi}{3}$

$\int_{-a}^{0} f(t)dt=\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)$

$0<a<2\pi$에서 $\sin\frac{\pi}{3}=\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{\pi}{3}-a+\frac{\pi}{3}=-\pi$ 이므로 $a=\frac{5\pi}{3}$

30) 답 : ②

[해설]

$$
\begin{aligned}
h(a)&=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{8} g(x)dx\\
&=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{8} g(x)dx-\int_{0}^{a} g(x)dx\\
&=\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{8} g(x)dx-\int_{0}^{a} g(x)dx\\
&=8+\int_{0}^{a}(f(x)-g(x))dx
\end{aligned}
$$

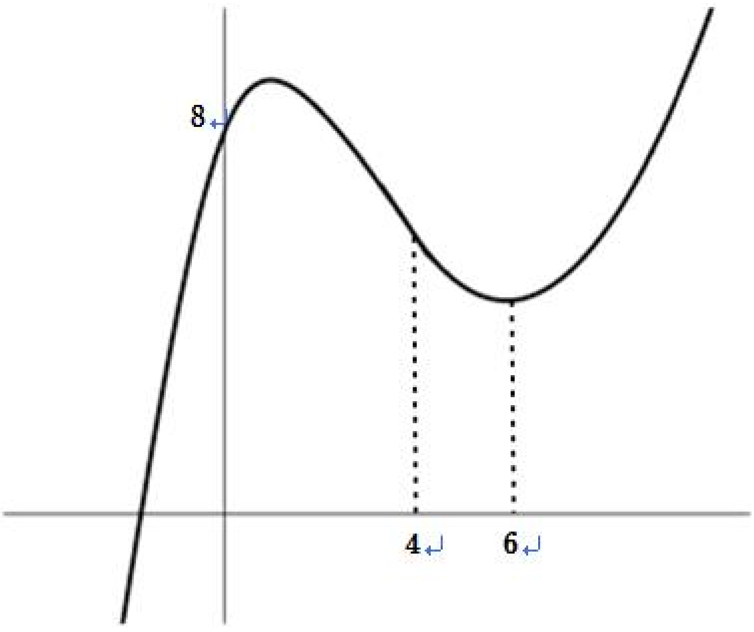
이라 하면

$h'(a)=f(a)-g(a)=\begin{cases}\frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}-\frac{1}{2}a, & (a\le 4)\\ \frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}+\frac{1}{2}a-4, & (a>4)\end{cases}$ 이고

$h(a)$는 연속함수이고 $h(0)=8$이므로

$$
\begin{aligned}
h(a)&=8+\int_{0}^{a}(f(x)-g(x))dx\\
&=\begin{cases}-\frac{1}{4}a^2+\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+8+5\ln 4, & (a\le 4)\\ \frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a-5\ln(a^2+4)+16+5\ln 4, & (a>4)\end{cases}
\end{aligned}
$$

이고, 주어진 그래프는 아래와 같다.




따라서 $h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의 최솟값은

$h(6)=16-5\ln 10$ 이다.

**다른 풀이**

$h(a)$ 의 함수식을 구하지 않고 그래프 개형을 이용하여 최솟값이 $a=6$ 일 때임을 확인하고 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
h(6)&=8+\int_0^6 (f(x)-g(x))dx \\
&=8+\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}-\frac{4-|x-4|}{2}\right)dx \\
&=8+\int_0^6\left(\frac{5}{2}\right)dx-\int_0^6\left(\frac{10x}{x^2+4}\right)dx-\int_0^6\left(\frac{4-|x-4|}{2}\right)dx \\
&=8+15-\left[5\ln(x^2+4)\right]_0^6+7 \\
&=16-5\ln 10
\end{aligned}
$$

31) 답 : 4

[해설]

$f(x)=\int_0^x (2at+1)dt$ 의 양변을 미분하면 $f'(x)=2ax+1$

$f'(2)=17$ 이므로 $4a+1=17 \quad \therefore\ a=4$

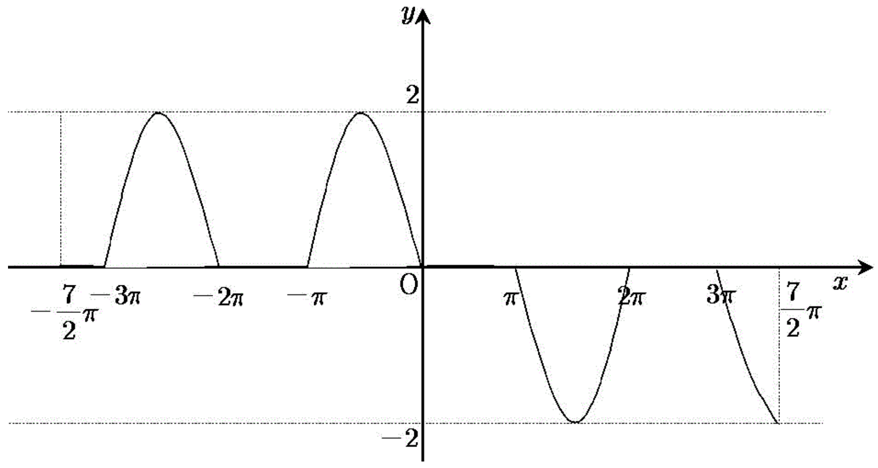
32) 답 : ①

[해설]

$f(x)$ 를 범위에 따라 정리해보면

$$
f(x)=\begin{cases} 0, \left(-\frac{7\pi}{2}\le x\le -3\pi,\ -2\pi\le x\le -\pi,\ 0\le x\le \pi,\ 2\pi\le x\le 3\pi\right) \\ -2\sin x,\ (-3\pi\le x\le -2\pi,\ -\pi\le x\le 0) \\ 2\sin x,\ \left(\pi\le x\le 2\pi,\ 3\pi\le x\le \frac{7\pi}{2}\right) \end{cases}
$$

그래프는 다음과 같다.




모든 실수 $x$ 에 대하여

$\int_a^x f(t)dt\ge 0$ 이 되도록 하는 실수 $a$ 의

최솟값 $\alpha=-\frac{7}{2}\pi$, 최댓값 $\beta=-3\pi$

$\therefore\ \beta-\alpha=-3\pi-\left(-\frac{7}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi$

33) 답 : 128

[해설]

$0\le k\le 7$ 인 각각의 정수 $k$ 에 대하여

① $f(k+t)=f(k)\,(0<t\le 1)$ 인 경우

$k<x\le k+1$ 에서 $f(x)=f(k)$ : 상수함수

② $f(k+t)=2^t\times f(k)\,(0<t\le 1)$ 인 경우

$k<x\le k+1$ 에서 $f(x)=f(k)\times 2^{x-k}$ : 지수함수

주어진 조건에서 함수 $f(x)$ 는 미분가능하지 않은 점이 2 개이므로 ① ⇒ ② ⇒ ① 또는 ② ⇒ ① ⇒ ②처럼 변화되는 지점이 2번 있어야 한다.

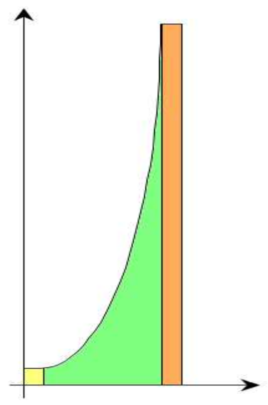
또한 ②가 7번이상 나오면 $f(8)>100$ 이 되므로 조건을 만족하지 않는다.

가능한 경우 중에 ②가 그려지는 구간이 많이 들어가 있을수록 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 값이 커지므로 8개의 소구간이 ①②②②②②②① 의 순서로 이어지는 연속함수일 때, $\int_0^8 f(x)dx$ 가 최대가 된다.

따라서, 주어진 조건을 만족하는 함수 중 $\int_0^8 f(x)dx$ 가 최대가 될 때,

함수 $f(x)$ 는

$$
f(x)=\begin{cases} f(0)=1,\ (0\le x\le 1) \\ f(1)\times 2^{x-1}=2^{x-1},\ (1\le x\le 7) \\ f(7)=64,\ (7\le x\le 8) \end{cases}
$$ 이다.



따라서 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은

$\int_0^8 f(x)dx$

$=\int_0^1 1dx+\int_1^7 2^{x-1}dx+\int_7^8 64dx$

$=[x]_0^1+\left[\frac{2^{x-1}}{\ln 2}\right]_1^7+[64x]_7^8$

$=65+\frac{63}{\ln 2}$

$\therefore\ p+q=65+63=128$

34) 답 : 127

[해설]

$(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}|tf(t+1)-(t+1)f(t)|=\frac{t+1}{t}$

양변을 $t(t+1)$로 나누면

$\frac{1}{2}\left|\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}\right|=\frac{1}{t^2}$

$f(t)$는 감소함수이고 $f(t)>0$이므로 $\frac{f(t)}{t}>\frac{f(t+1)}{t+1}$

$\therefore\ \frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$

$\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}=-\frac{2}{t^2}$ ⋯ ㉠

㉠ 은 $\int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}+c$를 양변 미분한 것이다.

$t=1$일 때, $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=2+c=2$에서 $c=0$

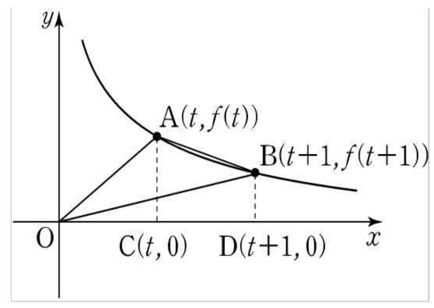
$\therefore \int_t^{t+1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{2}{t}$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(x)}{x}dx$

$=\frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}$

$\therefore\ p+q=127$

[MIM edu:자세한 풀이]




세 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$로 이루어지는 삼각형의 넓이 $S$를 구하면, (신발끈 공식 사용가능)

$S=\frac{1}{2}\{(t+1)f(t)-tf(t+1)\}=t+\frac{1}{t}$ 이다.

$t>0$이므로, 양변을 $\frac{1}{2}t(t+1)$로 나누면, (같은 모양으로 변형)

$\frac{f(t+1)}{t+1}-\frac{f(t)}{t}=-\frac{2}{t^2}$, $g(t)=\frac{f(t)}{t}$라 하자.

$g(t+1)-g(t)=-\frac{2}{t^2}$ ⇔ $\frac{d}{dt}\int_t^{t+1}g(x)dx=-\frac{2}{t^2}$

이 식은 다시, $\int_t^{t+1}$ ($C$는 적분상수)로 나타낼 수 있다.

식을 변형하면,

$\int_t^{t+1}g(t)dt=\frac{2}{t}+C$에서 $t=1$을 대입하면,

$C=0$이다.

따라서, $\int_t^{t+1}g(t)dt=\frac{2}{t}$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}g(t)dt$

$=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}g(t)dt+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}g(t)dt$

$=\frac{4}{7}+\frac{4}{9}=\frac{64}{63}$

$\therefore\ p+q=127$

35) 답 : ①

[해설]

$\int_0^0 f(t)dt=0$이므로 $\therefore\ a=-1$

준식의 양변을 미분하면 $f(x)=e^x-1$

따라서 $f(\ln 2)=2-1=1$이다.

36) 답 : ⑤

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{k}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(m+\frac{(m+1-m)k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\int_m^{m+1}f(x)dx<0$이므로

$m=-3,\ -2,\ -1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$이므로 7개다.

37) 답 : 9

[해설]

$x-t=u$라 하면 $t=x-u$

$$\begin{cases} t=0, \to u=x \\ t=x, \to u=0 \end{cases}$$

$dt=-du$ 이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)du$$

$$=\int_0^x (x-u)f(u)du$$

$$=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$$

$$F'(a)=\int_0^a \frac{1}{u+1}du=[\ln(u+1)]_0^a=\ln(a+1)=\ln 10$$

$\therefore\ a=9$

38) 답 : ③

[해설]

$$x_k=1+\frac{k}{n}$$

따라서, 넓이 $A_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$$[\text{구하는 값}]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)f\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 xf(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2-\int_1^2 e^x dx\right\}=\frac{1}{2}e^2$$

39) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]정적분의 성질을 알고 활용할 수 있는가?

ㄱ. $f(x)=x$ 라고 하면

$$\int_0^3 xdx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

$$3\int_0^1 xdx=3\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

따라서 $\int_0^3 xdx \neq 3\int_0^1 xdx$ (거짓)

ㄴ. 정적분의 성질에 의하여 참이다.

ㄷ. $f(x)=x$ 라고 하면

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

$$\left\{\int_0^1 xdx\right\}^2=\left(\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right)^2=\frac{1}{4}$$

따라서 $\int_0^1 x^2dx \neq \left\{\int_0^1 xdx\right\}^2$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

40) 답 : ⑤

[해설]

해설

ㄱ. $1\le x\le e$ 의 범위에서 $0\le \ln x\le 1$

$$(\ln x)^n-(\ln x)^{n+1}=(\ln x)^n(1-\ln x)\ge 0$$

$(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$ (참)

ㄴ. $1<x<e$ 에서 $(\ln x)^n > (\ln x)^{n+1}$ 이므로

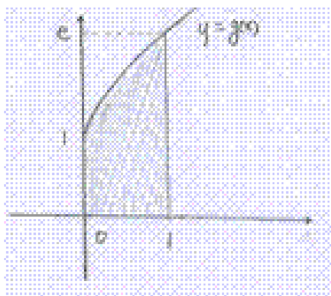
$$\int_1^e (\ln x)^n dx > \int_1^e (\ln x)^{n+1}dx$$

$$-\int_1^e (\ln x)^n dx < -\int_1^e (\ln x)^{n+1}dx$$

$$e-\int_1^e (\ln x)^n dx < e-\int_1^e (\ln x)^{n+1}dx$$

$\therefore\ S_n < S_{n+1}$

ㄷ. 주어진 그래프를 $y=x$ 에 대하여 대칭시키면




$S_n=\int_0^1 g(x)dx$ (참)

41) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]정적분과 미분의 관계를 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

조건㈏에서

$$\cos x\int_0^x f(t)dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$$

양변을 $x$ 에 대하여 미분하면

$$-\sin x\int_0^x f(t)dt+\cos x\cdot f(x)=-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt-\sin x\cdot f(x)$$

등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1\ (\because\ \text{조건㈎})$$

$$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

42) 답 : ④

[해설]

$\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$ 에서 $tx=y$로 놓으면

$t=\frac{dy}{dx}$ 에서 $dx=\frac{dy}{t}$

$x=0$일 때, $y=0$

$x=2$일 때, $y=2t$이므로

$\int_0^2 xf(tx)dx=\int_0^{2t}\frac{y}{t}f(y)\frac{dy}{t}=\frac{1}{t^2}\int_0^{2t}yf(y)dy=4t^2$

$\therefore \int_0^{2t}yf(y)dy=4t^4$

양변을 $t$에 관하여 미분하면

$2tf(2t)\times(2t)'=16t^3$

$\therefore f(2t)=4t^2$,

$\therefore f(2)=4$

43) 답 : ②

[해설]

$f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^6}dt$ 에서 양변을 $x$에 관하여 미분하면

$f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$ 이다.

$e^{f(x)}=t$로 치환하면

$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx=\int_1^{\sqrt{e}}1dt=\sqrt{e}-1$ ($\because$ $e^{f(x)}f'(x)dx=dt$ )

44) 답 : 12

[해설]

주어진 식을 $x$에 대하여 정리하면

$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2dt=6\int_0^x x^3(x-t)^2dt$ 에서

$x\int_0^x \{f(t)\}^2dt-\int_0^x t\{f(t)\}^2dt=6x^3\int_0^x (x^2-2xt+t^2)dt$

$=6x^3\left[x^2t-xt^2+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$

$=6x^5-6x^4+2x^3$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_0^x \{f(t)\}^2dt=30x^4-24x^3+6x^2$ 이다.

구하고자하는 회전체의 부피를 $V_x$라 하면

$V_x=\pi\int_0^1 \{f(x)\}^2dx=\pi(30-24+6)=12\pi$

$\therefore a=12$

45) 답 : ⑤

[해설]

부분적분법에 의해

$\int x\sin x dx=x(-\cos x)-\int 1\cdot(-\cos x)dx=$

$-x\cos x+\sin x+C$이므로

$\int_{2\pi}^{3\pi}x\sin x dx=[-x\cos x+\sin x]_{2\pi}^{3\pi}$

$=-3\pi(-1)+0-(-2\pi)\cdot 1-0=5\pi$ [정답]⑤

46) 답 : ⑤

[해설]

$\alpha=\int_0^p f(x)dx,\ \beta=-\int_p^{2p^2}f(x)dx$ ... ①

이때, $\int_0^p xf(2x^2)dx$ 에서 $2x^2=t$라 하면

$4xdx=dt$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=p$일 때, $t=2p^2$이다.

$\int_0^p xf(2x^2)dx=\int_0^{2p^2}f(t)\times\frac{1}{4}dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{2p^2}f(t)dt$

$=\frac{1}{4}\left\{\int_0^p f(t)dt+\int_p^{2p^2}f(t)dt\right\}$

$=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$ ($\because$ ①)

47) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]적분법

$\alpha=\int_0^p f(x)dx$, $\beta=\int_p^{2p^2}f(x)dx$ ....㉠

이때, $\int_0^p xf(2x^2)dx$ 에서 $2x^2=t$라 하면

$4xdx=dt$이고, $x=0$일 때 $t=0$, $x=p$일 때, $t=2p^2$이다.

$\therefore \int_0^p xf(2x^2)dx=\int_0^{2p^2}f(t)\times\frac{1}{4}dt$

$=\frac{1}{4}\int_0^{2p^2}f(t)dt$

$=\frac{1}{4}\left\{\int_0^p f(t)dt+\int_p^{2p^2}f(t)dt\right\}$

$=\frac{1}{4}(\alpha-\beta)$ ($\because$ ㉠)

48) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$이고

$x=1$일 때 $t=0$이고 $x=2$일 때 $t=3$이므로

[구하는 값] $=\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{t}dt$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^3$

$=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-0)=\sqrt{3}$

49) 답 : 64

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$$x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt = ae^{2x}-4x+b \quad \ldots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=a+b \quad \ldots ㉡$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x) = 2ae^{2x}-4$$

즉 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=2ae^{2x}-4 \quad \ldots ㉢$

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=2a-4$, 즉 $a=2$ 이므로 ㉡에서 $b=-2$이다.

$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=4e^{2x}-4$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=8e^{2x}$이므로

[구하는 값] $=f(a)f(b) = f(2)f(-2)$

$=(8e^4)\times(8e^{-4})$

$=64e^{4-4}$

$=64$

50) 답 : 5

[해설]

[출제 의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k=1+\dfrac{k}{n}$로 놓으면 $\triangle x=\dfrac{1}{n}$이므로 정적분의 정의에 의하여

[중간 계산] $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\displaystyle=\int_1^2(x-1)f(x)dx$

이다. 따라서

[구하는 값] $\displaystyle=\int_1^2(x-1)\ln x dx$

$\displaystyle=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx$

$\displaystyle=(0-\ )-\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$

$\displaystyle=-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^2$

$\displaystyle=-(1-2)+\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{1}{4}$

$p=4$, $q=1$이므로 $p+q=5$

51) 답 : 325

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{n-\ln t}{t}dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{n-\ln x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=e^n$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | 극대 | $\searrow$ |

함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 최댓값을 가지므로

$g(n)=f(e^n)=\displaystyle\int_1^{e^n}\frac{n-\ln t}{t}dt$

$n-\ln t=s$라 하면 $\dfrac{ds}{dt}=-\dfrac{1}{t}$이고,

$t=1$일 때 $s=n$, $t=e^n$일 때 $s=0$이므로

$g(n)=\displaystyle\int_n^0(-s)ds=\left[-\frac{1}{2}s^2\right]_n^0=\frac{1}{2}n^2$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{12}g(n)=\sum_{n=1}^{12}\frac{n^2}{2}=325$

52) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 함수의 정적분 계산하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$\displaystyle=\int_1^3 f(x)dx$

$\displaystyle=\int_1^3\frac{1}{x^2+x}dx$

$\displaystyle=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$\displaystyle=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^3$

$\displaystyle=\frac{\ln 3}{2}$

53) 답 : 51

[해설]

[출제 의도] 치환적분법을 이해하고 정적분 문제를 해결한다.

$f(x)=\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$에서

$f(\pi-x)=\dfrac{e^{\cos(\pi-x)}}{1+e^{\cos(\pi-x)}}$

$=\dfrac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}}$

$=\dfrac{e^{-\cos x}\times e^{\cos x}}{(1+e^{-\cos x})\times e^{\cos x}}$

$=\dfrac{1}{e^{\cos x}+1}$

그러므로

$a=f(\pi-x)+f(x)$

$=\dfrac{1}{e^{\cos x}+1}+\dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$

$=\dfrac{1+e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}=1$

$b=\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)dx$

$$=\int_0^{\pi}\{1-f(\pi-x)\}dx$$

$$=\int_0^{\pi}1dx-\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$$

$\pi-x=t$로 놓으면

$x=\pi-t$이므로 $\dfrac{dx}{dt}=-1$

$x=0$일 때, $t=\pi$이고

$x=\pi$일 때, $t=0$이므로

$$b=\pi+\int_{\pi}^{0}f(t)dt$$

$$=\pi-\int_0^{\pi}f(t)dt\ =\pi-b$$

$b=\pi-b$이므로 $b=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $a+\dfrac{100}{\pi}b=1+\dfrac{100}{\pi}\times\dfrac{\pi}{2}$

$=1+50=51$

[다른 풀이]

$$b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\pi-x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)+f(\pi-x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx\ =\Big[\ x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\ =\frac{\pi}{2}-0\ =\frac{\pi}{2}$$

54) 답 : 12

[해설]

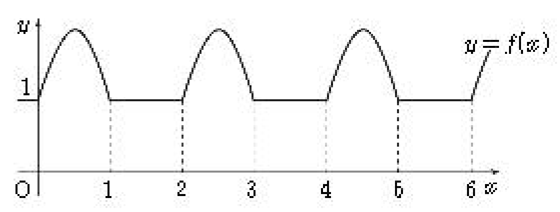
[출제 의도] 여러 가지 적분법 추론하기

(가)와 (나)에서 $f(2)=f(0)=1$, $f(1)=1$

$1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$는 연속이고 $1<x<2$에서 $f'(x)\ge 0$이므로

$f(x)=1$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




$$\int_0^6 f(x)dx=3\int_0^2 f(x)dx\ =3\int_0^1(\sin\pi x+1)dx+3\int_1^2 dx$$

$$=3\times\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+x\right]_0^1+3\ =6+\frac{6}{\pi}$$

따라서 $p=6$, $q=6$이고 $p+q=12$

55) 답 : 200

[해설]

23. [출제 의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^{10}(x+1)^2dx-\int_0^{10}(x-1)^2dx\ =\int_0^{10}4xdx\ =200$$

56) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 삼각방정식 이해하기

$2\cos^2x-1+6\times\dfrac{1+\cos x}{2}=1$

$2\cos^2x+3\cos x+1=0$이므로

$(2\cos x+1)(\cos x+1)=0$

$\therefore\ \cos x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ 또는 $x=\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $3\pi$

57) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 정적분 이해하기

$x^2=t$라 하면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$이므로

$$f(n)=\int_1^n\left(x^2e^{x^2}\times x\right)dx=\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^tdt$$

$$=\frac{1}{2}\left[te^t-e^t\right]_1^{n^2}\ =\frac{1}{2}\left(n^2e^{n^2}-e^{n^2}\right)$$

$$=\frac{e^{n^2}}{2}\left(n^2-1\right)$$

따라서 $\dfrac{f(5)}{f(3)}=\dfrac{12\times e^{25}}{4\times e^9}=3e^{16}$

58) 답 : 6

[해설]

[출제 의도] 치환적분법과 부분적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$\displaystyle\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx=-4$에서 $x+1=t$로 놓으면

$\dfrac{dx}{dt}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$

$$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx$$

$$=\int_1^2(t-2)f'(t)dt\ =\Big[\ (t-2)f(t)\Big]_1^2-\int_1^2 f(t)dt$$

$$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt\ =2-\int_1^2 f(t)dt=-4$$

따라서 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=6$

59) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 부분적분법을 활용하여 추론하기

$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 적분하면

$xF(x)=\int(2x+2)e^x dx$

$=(2x+2)e^x-\int 2e^x dx$

$=(2x+2)e^x-2e^x+C$

$=2xe^x+C$ ( $C$는 적분상수)

$F(1)=2e$ 이므로

$F(1)=2e+C=2e$ 에서 $C=0$

$F(x)=2e^x$

따라서 $F(3)=2e^3$

60) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 적분과 미분의 관계를 활용하여 주어진 문제를 해결한다.

$g'(x)=f(x)=0$을 만족하는 $x$를 구하면

$x(x+2)(x+4)=0$에서 $x=-4,\ -2,\ 0$이므로

$x=-2$에서 $g(x)$는 극댓값을 갖는다.

$\therefore\ \alpha=-2$

$$g(\alpha)=\int_2^{-2}f(t)dt=\int_2^{-2}(t^3+6t^2+8t)dt$$

$$=-2\int_0^2 6t^2 dt=-2\left[2t^3\right]_0^2=-32$$

61) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 적분법을 이용하여 방정식의 근의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

실수 $t$와 정수 $k$에 대하여

$$\int_t^{t+2k}f(x)dx=0,\quad \int_{-t}^{t+2k}f(x)dx=0$$

따라서 구간 $[-1,\ 1]$에서 방정식 $h(x)=0$

즉 $\int_{g(x)}^{g(x+1)}f(t)dt=0$을 만족시키려면

$g(x+1)-g(x)=2n$ ( $n$은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ ( $m$은 정수)이어야 한다.

$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

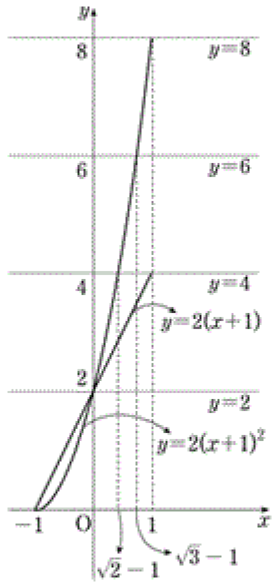
구간 $[-1,\ 1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$,

$y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로

$2(x+1)=2n$ ( $n$은 정수)를 만족시키는 $x$의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이고,

$2(x+1)^2=2m$ ( $m$은 정수)를 만족시키는 $x$의 값은 $-1,\ 0,$ $\sqrt{2}-1,\ \sqrt{3}-1,\ 1$이다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 5




62) 답 : 27

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, $a, b, c$는 상수)

라 하면 조건 (가)에 의하여 $c=0$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 조건 (나)에 의하여 $a=-6$

$f'(x)=3x^2-12x+b=3(x-2)^2+b-12$

조건 (다)에 의하여 $b\geq 9$이고

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2}\geq\frac{27}{4}\quad(\because b\geq 9)$$

$b=9$일 때, 최솟값 $m=\frac{27}{4}$

따라서 $4m=27$

63) 답 : 32

[해설]

[출제 의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

삼각형 $OQ_kB$에서

$\angle OBQ_k=\angle AOP_k=\frac{k\pi}{2n}$ 이고 $\overline{OB}=8$이므로

$\overline{OQ_k}=8\sin\frac{k\pi}{2n}$, $\overline{BQ_k}=8\cos\frac{k\pi}{2n}$

$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{OQ_k}\times\overline{BQ_k}$$

$$=\frac{1}{2}\times 8\sin\frac{k\pi}{2n}\times 8\cos\frac{k\pi}{2n}=16\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=16\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$=16\int_0^1\sin\pi x\ dx=16\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=\frac{32}{\pi}$$

따라서 $\alpha=32$

64) 답 : 102

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx$$
$$= \int_{-3}^{-1} x^2 f(x)dx + \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{3} x^2 f(x)dx$$
$$= 2\int_{1}^{3} x^2 f(x)dx + 2$$
$$= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x+2)dx + 2$$
$$= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x)dx + 2 \ = 102$$

65) 답 : 11

[해설]

[출제 의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제 해결하기

점 $D_k\left(0,\ \frac{k}{n}\right)$이므로 직선 $AD_k$의 방정식은 $y = \frac{k}{n}x + \frac{k}{n}$

직선 $AD_k$와 곡선 $y = -x^2+1$과의 교점 $P_k$는

$P_k\left(1-\frac{k}{n},\ \ \frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$이므로

$\triangle AP_kQ_k$의 밑변의 길이는 $2-\frac{k}{n}$이고 높이는 $\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2$

$$\therefore\ S_k = \frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}(2-x)(2x-x^2)dx = \frac{11}{24}$$

따라서 $\alpha = \frac{11}{24}$이고 $24\alpha = 11$

66) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 정적분 이해하기

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\sin x+1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x(\sin x+1)dx$$

$\sin x = t$로 치환하면 $\cos x dx = dt$

$x=0$일 때 $t=0$이고, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1 (2t^2+2t)dt = \left[\frac{2t^3}{3} + t^2\right]_0^1 = \frac{5}{3}$$

67) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 치환적분을 이해한다.

$2x = t$라 하면 $2 = \frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^2 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt \ = \frac{1}{2}\left\{\int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\{6+(-2)\} = 2$$

68) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수와 정적분의 관계를 이해한다.

(나)에서 $\int_{\{0\}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = k$라 두면 $g(x) = k\cos x + 3$

(가)에서 $x=0$을 대입하면

$-k = (k+3+a)\cdot 0 - 2$이므로 $k=2$

$x = \frac{\pi}{2}$를 대입하면 $0 = (3+a)\cdot 1 - 2$이므로

$a = -1$이다.

따라서 $g(x) = 2\cos x + 3$이므로

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt = (2\cos x+2)\sin x - 2$이며 양변을 미분하면

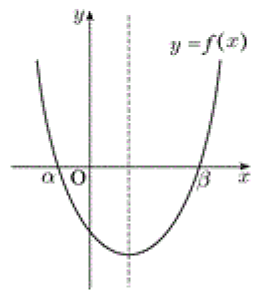
$f(x) = -2\sin^2 x + (2\cos x + 2)\cos x$

$\therefore\ f(0) = 4$

69) 답 : ⑤

[해설]

이차 함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




$\therefore\ C < B < A$

70) 답 : 9

[해설]

[출제 의도]정적분을 활용하여 문제 해결하기

ⅰ) $x < 1$일 때,

$\int_0^x (-t+1)dt = x$이므로

$$-\frac{x^2}{2} + x = x$$

$\therefore\ x = 0$

ⅱ) $x \geq 1$일 때,

$$\int_0^1 (-t+1)dt + \int_1^x (t-1)dt = x$$
$$\frac{1}{2} + \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right) = x$$
$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$\therefore\ x = 2+\sqrt{2}$ ($\because\ x \geq 1$)

ⅰ), ⅱ)에 의해 양수인 실근은

$x = 2+\sqrt{2}$

이므로

$m=2,\ n=1$이다.

따라서 $m^3 + n^3 = 9$

71) 답 : ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-(n+k)^2}} = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

72) 답 : 2

[해설]

[구하는 값] $= \int_0^1 (1+2e^{-x})dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

$= [x-2e^{-x}]_0^1 - \left\{ \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \int_1^e \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx \right\}$

$=2$

73) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]정적분을 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. 구간 $(0, 1)$에서 $\frac{d\{f(x)\}^2}{dx} = 2f(x)f'(x)$

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2} = 2\{f'(x)\}^2 + 2f(x)f''(x)$이므로

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2} > 0$

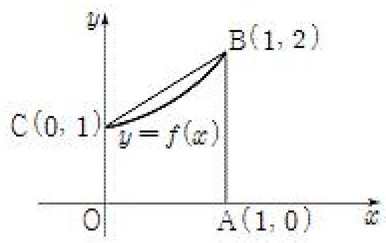
∴ 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0, 1)$에서 아래로 볼록하다.(참)

ㄴ. $1-x=t$라 하면

$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 f(t)dt$이므로

$\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}dx = 2\int_0^1 f(x)dx$

조건에 의해 구간 $(0, 1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고




$\int_0^1 f(x)dx$의 값은 사다리꼴 $COAB$의 넓이보다 작다.

∴ $\int_0^1 \{f(x)+f(1-x)\}dx < 3$(참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해

$\frac{\left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\}^2 + \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \ge \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \{f(x)\}^2 dx$

이므로

$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\}^2 + \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}^2}{2} \cdot \frac{1}{n} \ge \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

74) 답 : ②

[해설]

$S(a) = 1+1+\int_2^a 2e^{2-x}dx$

$= 2 + [-2e^{2-x}]_2^a$

$= 4 - 2e^{2-a}$

따라서, $\lim_{a\to\infty} S(a) = \lim_{a\to\infty} (4-2e^{2-a}) = 4$

75) 답 : ④

[해설]

$\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = 7$에서 $\int_2^3 f(x)dx = 14$

$\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = 1$에서 $\int_3^4 f(x)dx = 3$

$\int_{2001}^{2012} f(x)dx = \int_1^{12} f(x)dx$

$\int_1^2 f(x)dx + 5\int_2^4 f(x)dx = 88$

76) 답 : ②

[해설]

$F'(x) = f(x)$이므로 $\int f(x)dx = F(x)+C$이다.

따라서 $A(a, F(a))$, $B(a+c, F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a} = \frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}$

$\frac{1}{c}\int_a^{a+c} f(x)dx$

$= \frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$

77) 답 : 83

[해설]

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여

$A_n(1)+A_n(2)+\cdots+A_n(k)$

$= \int_0^{\frac{k}{n}} f'(x)dx$

$= [f(x)]_0^{\frac{k}{n}} = f\left(\frac{k}{n}\right) - f(0) = f\left(\frac{k}{n}\right) - 2$

$f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 2\left(\frac{k}{n}\right) + 2$이다.

따라서 곡선 $y=xf(x)$와 $x$축, $y$축, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S$는

$S = \int_0^1 xf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 2\left(\frac{k}{n}\right) + 2\right\}$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2x\right)dx = \frac{53}{30}$

∴ $53+30=83$

78) 답 : ①

[해설]

$S(t) = \int_0^t 2x\{f(t)-f(x)\}dx = f(t)\int_0^t 2xdx - \int_0^t 2xf(x)dx$

에서

$S'(t) = t^2f'(t) + 2tf(t) - 2tf(t) = t^2f'(t)$

한편, $f'(x)=e^x\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}e^x\cos\frac{\pi}{2}x$ 이므로

$S'(2)=4f'(2)=-2\pi e^2$

79) 답 : 25

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(10+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_{10}^{12}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx$

($\because$ $f(x+2)=f(x)$)에서 구하는 값은 다음과 같다.

$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(30x^2+15)dx=\int_{0}^{1}(30x^2+15)dx=25$

80) 답 : 27

[해설]

[출제 의도]정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

㈎에서 $f(x)g(x)=(x-1)(x+1)(x+3)$

㈐에서 $g'(x)=2f(x)$, $g(1)=0$ 이므로

$f(x)=x+1$, $g(x)=(x-1)(x+3)$ $\because$ $f'(x)=1$

$\therefore$ $\int_{0}^{3}3g(x)dx=\int_{0}^{3}3(x^2+2x-3)dx=27$

81) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]정적분의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\int_{0}^{\frac{1}{n}}(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$

$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{0}^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=1$

82) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]급수와 정적분 사이의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}\sqrt{1+x}\,dx$

$=\int_{1}^{2}\sqrt{x}\,dx$

$\therefore$ $a+b=3$

83) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]정적분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f_n(x)=\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=(nx-S_n)^2$

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$ 라 하면 $f_n(1)-f_n(0)=-n^3$ 에서

$(n-S_n)^2-S_n^2=-n^3$, $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ (참)

ㄴ. $n=2$ 일 때, $f_2(x)=(2x-3)^2$

$f_2(2)=1$ (거짓)

ㄷ. $f_n(x)=\left\{nx-\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ 는

$x=\frac{n+1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$\int_{0}^{n+1}f_n(x)dx=2\int_{0}^{\frac{n+1}{2}}f_n(x)dx$ (참)

84) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]치환적분법을 이용하여 삼각함수의 정적분의 값을 추론할 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $a_1+a_3=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x dx$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x dx$

$\tan x=t$ 일 때, $\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$ 이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\sec^2 x dx=\int_{0}^{1}tdt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 마찬가지로 생각하면

$a_2+a_4=\int_{0}^{1}t^2dt=\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. 일반적으로 $a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}$

$=(a_{4k+1}+a_{4k+3})+(a_{4k+2}+a_{4k+4})$

$\int_{0}^{1}t^{4k+1}dt+\int_{0}^{1}t^{4k+2}dt=\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}$

$\sum_{k=1}^{100}a_k=\sum_{k=0}^{24}(a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4})$

$=\sum_{k=0}^{24}\left(\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}\right)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}$ (거짓)

85) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]적분기호를 사용한 함수의 성질을 추측할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 주어진 식에 $x=0$ 을 대입하면

$f(0)=e^0-1+\int_{0}^{0}f(t)dt=1-1+0=0$ $\therefore$ 참

ㄴ. 주어진 식을 $x$ 에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^x+f(x)$, $f'(0)=e^0+f(0)=1$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. ㄴ에서 $f'(x)-f(x)=e^x>0$ 이므로

$f'(x)>f(x)$ $\therefore$ 참

86) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 정적분을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{1}{n}\sin x = \frac{1}{n+1}\sin x$에서 $\sin x = 0$ $\therefore$ $x = 0,\ \pi$

$$S_n = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin x - \frac{1}{n+1}\sin x\right)dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$

구하는 값은 $0 \le x \le \pi$에서 곡선 $y = \sin x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.