IV.적분법

1.부정적분

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2017 학년도 대수능]

1 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$ 의 값은? [2점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

2 $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{e} dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}-1$ ② $2-e$ ③ $\frac{1}{e}-2$
④ $1-e$ ⑤ $\frac{1}{2}-e$

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

3 $\int_{0}^{e} \frac{5}{x+e} dx$ 의 값은? [3점][2016(B) /수능 4]

① ln2 ② 2ln2 ③ 3ln2
④ 4ln2 ⑤ 5ln2

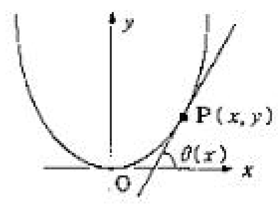
[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

4 $\int_{0}^{1} 3\sqrt{x}\, dx$ 의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

5 포물선 $y=x^2$ 위의 한 점 $P(x,\, y)$ 에서 접선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta(x)$ 라 할 때 $\int_{0}^{1} \tan\theta(x) dx$ 의 값은?[2점]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

6 정적분 $\int_{0}^{\pi} (1-\cos^3 x)\cos x \sin x dx$ 의 값은?

① 0 ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$
④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

7 $\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{15}$　② $\frac{8}{15}$　③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{11}{15}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

8 $\int_{0}^{1} e^{x+4}dx$의 값은?[3점]

① e^5-e^4　② e^5　③ e^5+e^4
④ e^5+2e^4　⑤ e^5+3e^4

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

9 $\int_{1}^{16} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

10 $\int_{0}^{1} 2e^{2x}dxd$의 값은? [3점]

① e^2-1　② e^2+1　③ e^2+2
④ $2e^2-1$　⑤ $2e^2+1$

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

11 정의역이 $\{x|x>-1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여

$f'(x)=\frac{1}{(1+x^3)^2}$ 이고, 함수 $g(x)=x^2$일 때,

$\int_{0}^{1} f(x)g'(x)dx=\frac{1}{6}$ 이다.

$f(1)$의 값은?[4점][2011년 6월 평가원]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{5}{18}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{7}{18}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

12 $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

13 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+3, & (x<1) \\ \ln x, & (x>1) \end{cases}$$

이다. $f(e)=2$일 때, $f(-6)$의 값은? [3점]

① 9　② 11　③ 13
④ 15　⑤ 17

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

14 뉴턴의 냉각법칙에 따르면 온도가 20으로 일정한 실내에 있는 어떤 물질의 시각 t(분)에서의 온도를 $T(t)$라 할 때, 함수 $T(t)$의 도함수 $T'(t)$에 대하여 다음 식이 성립한다고 한다.

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)-20}dt = kt + C \text{ (단, } k,\ C\text{는 상수이다.)}$$

$T(0)=100$, $T(3)=60$일 때, k의 값은? (단, 온도의 단위는 $°C$이다.) [4점]

① $-\frac{\ln 2}{3}$ ② $-\frac{2\ln 2}{3}$ ③ $-\ln 2$
④ $-\frac{4\ln 2}{3}$ ⑤ $-\frac{5\ln 2}{3}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

15 함수 $f(x)=\int_0^x \sin(\pi\cos t)dt$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >
ㄱ. $f'(0)=0$ ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. ㄷ. $f(\pi)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

16 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)d\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

17 $\int_1^2 \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$의 값은? [3점]

① $2\ln 2-1$ ② $3\ln 2-1$ ③ $\ln 2+1$
④ $2\ln 2+1$ ⑤ $3\ln 2+1$

[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

18 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x-1}\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

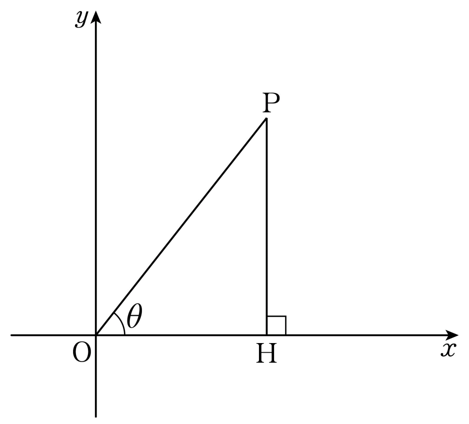
[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

19 $\int_1^5 \left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)dx = \ln\alpha$일 때, 실수 α의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

20 그림과 같이 제1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\angle POH=\theta$라 하자. $\dfrac{\overline{OH}}{\overline{PH}}$를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)d\theta$의 값은?(단, O는 원점이다.)[3점]



① $\frac{1}{2}\ln 3$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 6$
④ $2\ln 3$ ⑤ $2\ln 6$

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

21 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & (x \le 1) \\ \dfrac{1}{x}, & (x > 1) \end{cases}$$

이다. $f(-1)=e+\dfrac{1}{e^2}$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
④ $e+1$ ⑤ $e+2$

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

22 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 l, m은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가)두 직선 l, m은 서로 평행하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 θ이다.
> (나)두 직선 l, m은 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1 \le x \le 1)$과 각각 만난다.

두 직선 l과 m 사이의 거리의 최댓값을 $f(\theta)$라 할 때,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta=a+b\sqrt{2}\pi$이다. $20(a+b)$의 값을 구하시오.(단, a와 b는 유리수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

23 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x dx$의 값은? [3점]

① 0 ② $\frac{3}{2}$ ③ 3
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

24 모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=\begin{cases} 3\sqrt{x}, & (x>1) \\ 2x, & (x<1) \end{cases}$이다. $f(4)=13$일 때, $f(-5)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★☆☆] [2014년 4월 학력평가]

25 $\int_0^1 (x^2+2)dx$의 값은? [2점]

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

26 $x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
(나) $f(x)+xf'(x)=x\cos x$

$f(\pi)$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{\pi}$ ② $-\frac{1}{\pi}$ ③ 0
④ $\frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

27 $\int_{e^2}^{e^3} \frac{a+\ln x}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\cos x dx$가 성립할 때, 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

28 양의 실수를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=x$, $h(x)=\ln x$에 대하여 다음 두 조건을 모두 만족하는 함수 $g(x)$가 있다. 이때, $g(e)$의 값은? [3점][2012년 7월]

(가) $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=h(x)$
(나) $g(1)=-1$

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

29 함수 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx$에 대하여 $f(x)$의 최솟값이 8일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점][2012년 7월]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

30 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\sin x$일 때, $f(\pi)-f(0)$의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

31 정적분 $\int_0^1 2xe^{x^2}dx$의 값은?(단, e는 자연로그의 밑)[3점]

① $e-1$ ② e ③ $e+1$
④ e^2-1 ⑤ e^2

정답 및 해설

1.부정적분

중단원 기출문제

1) 답 : ⑤

[해설]

[구하는 값] $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx = [-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= 0-(-2) = 2$

2) 답 : ②

[해설]

[구하는 값] $= \int_1^e \frac{\ln x}{e} dx$

$= \int_1^e (\ln x - 1)dx$

$= \int_1^e \ln x dx - \int_1^e 1 dx$

$= [x\ln x - x]_1^e - [x]_1^e$

$= 2 - e$

3) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$\int_0^e \frac{5}{x+e} dx = [5\ln(x+e)]_0^e = 5\ln 2e - 5\ln e = 5\ln 2$

4) 답 : ②

[해설]

$\int_0^1 3\sqrt{x} dx = \int_0^1 3x^{\frac{1}{2}} dx = \left[3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2$

5) 답 : ⑤

[해설]

포물선 $y = x^2$ 위의 한 점 $P(x, y)$에서의 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta(x)$이므로

$\tan\theta(x)$는 이 접선의 기울기가 된다.

$y = x^2$의 도함수는 $y' = 2x$이므로 $\tan\theta(x) = 2x$

$\therefore \int_0^1 \tan\theta(x) dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$

6) 답 : ③

[해설]

$\cos x = t$로 치환하면 $-\sin x dx = dt$ $\begin{cases} x=0 \to t=1 \\ x=\pi \to t=-1 \end{cases}$

[구하는 식] $= \int_{-1}^1 (1-t^3)t(-dt)$

$= \int_{-1}^1 t(1-t^3)dt$

$= \int_{-1}^1 (t - t^4)dt$

$= 2\int_0^1 (-t^4)dt = 2\left[-\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{2}{5}$

7) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 상수 차수를 직접 올리는 정분 공식을 활용할 수 있다.

[구하는 값] $= \int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt[3]{x^2-1}\, dx$

$= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{\frac{1}{3}} dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\left[(x^2-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^{\sqrt{2}}$

$= \frac{3}{8}\left[(x^2-1)^{\frac{4}{3}}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{8}{15}$

[다른 풀이]

$\int_1^{\sqrt{2}} x\sqrt[3]{x^2-1}\, dx$에서

$\sqrt{x^2-1} = t$라 하자.

양변을 x에 대해 미분하면

$\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{dt}{dx}$ 이고

$x^2 = t^2 + 1$ 이므로

$\int_0^1 (t^2+1)t^2 dt = \int_0^1 (t^4 + t^2)dt = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$

8) 답 : ①

[해설]

$\int_0^1 e^{x+4} dx = \left[e^{x+4}\right]_0^1 = e^5 - e^4$

9) 답 : 6

[해설]

$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^{16} = 8 - 2 = 6$

10) 답 : ①

[해설]

$\int_0^1 2e^{2x} dx = \left[2 \times \frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 = e^2 - 1$

11) 답 : ④

[해설]

해설

$\int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$= [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx$

정답 및 해설

$$=f(1)g(1)-f(0)g(0)-\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}dx$$

$g(1)=1,\ g(0)=0$이고

$1+x^3=t$로 치환하면

$$f(1)-\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt=f(1)-\frac{1}{6}$$

$f(1)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ 이므로

$$f(1)=\frac{1}{3}$$

12) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx=\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}$$

13) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 적분법 이해하기

함수 $f'(x)$를 적분하면

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+C_1, & (x<1) \\ x\ln x-x+C_2, & (x>1)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(e)=e\ln e-e+C_2=2$이므로 $C_2=2$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=1,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=1+3+C_1$$

$1=1+3+C_1$이므로 $C_1=-3$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x^2+3x-3, & (x\le 1) \\ x\ln x-x+2, & (x>1)\end{cases}$$

따라서 $f(-6)=36-18-3=15$

14) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 적분을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$\frac{d}{dt}\ln|T(t)-20|=\frac{T'(t)}{T(t)-20}$ 이므로

$\ln|T(t)-20|=kt+C$가 성립한다.

$t=0$일 때, $\ln|T(0)-20|=C$에서

$C=\ln 80$ ...㉠

$t=3$일 때, $\ln|T(3)-20|=3k+C$에서

$3k+C=\ln 40$ ...㉡

㉠, ㉡에서 $3k=\ln 40-\ln 80=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$

$$k=-\frac{\ln 2}{3}$$

15) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 정적분으로 정의된 함수의 성질을 추론한다.

ㄱ. $f(x)=\int_0^x \sin(\pi\cos t)dt$에서 $f'(x)=\sin(\pi\cos x)$

$f'(0)=\sin(\pi\cos 0)=\sin\pi=0$ (참)

ㄴ.모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=\int_0^{-x}\sin(\pi\cos t)dt$

$-t=y$로 놓으면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고 $t=0$일 때 $y=0$, $t=-x$일 때 $y=x$이므로

$$f(-x)=-\int_0^x \sin\{\pi\cos(-y)\}dy=-\int_0^x \sin(\pi\cos y)dy$$

$=-f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi-t=y$라 하면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고, $t=0$일 때 $y=\pi$, $t=\pi$일 때 $y=0$이므로

$$f(\pi)=\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos t)dt=-\int_{\pi}^0 \sin\{\pi\cos(\pi-y)\}dy$$

$$=-\int_{\pi}^0 \sin(-\pi\cos y)dy=\int_{\pi}^0 \sin(\pi\cos y)dy$$

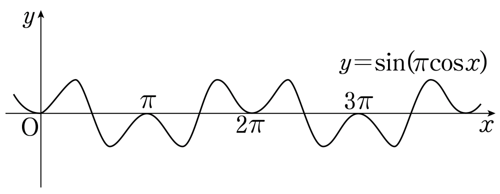
$$=-\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos y)dy=-f(\pi)$$

$2f(\pi)=0$이므로 $f(\pi)=0$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[참고]

함수 $y=\sin(\pi\cos x)$의 그래프는 그림과 같다.



16) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 정적분 계산하기

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)d\theta=\left[\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

17) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$$\int_1^2\left(3x+\frac{2}{x^2}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[3\ln x-\frac{2}{x}\right]_1^2=(3\ln 2-1)-(0-2)=3\ln 2+1$$

18) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$2x-1=t$라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이고 $x=\frac{1}{2}$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\times\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

19) 답 : 15

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$$\int_1^5\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\right)dx=\Big[\ln|x+1|+\ln|x|\Big]_1^5=\ln 6+\ln 5-\ln 2$$

$=\ln 15=\ln\alpha$

따라서 $\alpha=15$

20) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 치환적분법을 활용하여 삼각함수의 정적분의 값을 구한다.

$\overline{OP}=r$라 하면

$\overline{OH}=r\cos\theta$, $\overline{PH}=r\sin\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{r\cos\theta}{r\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(\theta)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$에서 $\sin\theta=t$로 놓으면 $\frac{dt}{d\theta}=\cos\theta$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\frac{1}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t}dt$$

$$=[\ln t]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{\ln\sqrt{3}}{2}-\frac{\ln 1}{2}$$

$$=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

21) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 연속의 정의를 이해하고 도함수가 주어진 함수의 부정적분을 구한다.

ⅰ) $x\le 1$일 때, $f'(x)=e^{x-1}$이므로

$f(x)=\int e^{x-1}dx=e^{x-1}+C_1$ (C_1은 적분상수)

ⅱ) $x>1$일 때 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C_2$ (C_2는 적분상수)

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}\left(e^{x-1}+C_1\right)=1+C_1$

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\left(\ln x+C_2\right)=C_2$

따라서 $1+C_1=C_2$

$f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$에서 $\frac{1}{e^2}+C_1=e+\frac{1}{e^2}$이므로

$C_1=e$, $C_2=e+1$

따라서 $f(e)=\ln e+(e+1)=e+2$

22) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 정적분을 활용하여 문제 해결하기

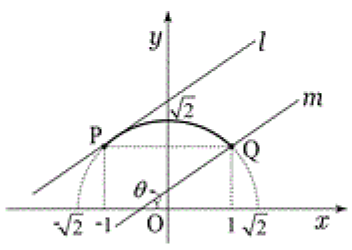
곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1\le x\le 1)$ 위의 양 끝점 $(-1,1)$, $(1,1)$을 각각 P, Q라 하고,

직선 l의 y절편이 직선 m의 y절편보다 크다고 하자.

점 P를 지나고 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}$에 접하는 접선이 x축과 양의 방향으로

이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

(ⅰ) $0\le\theta<\frac{\pi}{4}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 곡선과 접하고, 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 Q와 직선 l 사이의 거리이다.

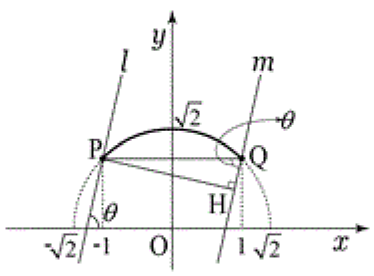
곡선은 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원의 일부이므로

곡선과 접하는 직선 l의 방정식은 $y=\tan\theta x+\sqrt{2}\sec\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\left|\tan\theta-1+\sqrt{2}\sec\theta\right|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$

$$=\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}\ (\sin\theta-\cos\theta\ge -1)$$

(ⅱ) $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 점 P를 지나고 직선 m이

점 Q를 지날 때 점 P와 직선 m 사이의 거리와 같다.

즉, 점 P에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면

$f(\theta)$는 선분 PH의 길이와 같다. $\angle PQH=\theta$이므로

$f(\theta)=2\sin\theta$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$f(\theta)=\begin{cases}\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}, & \left(0\le\theta<\frac{\pi}{4}\right)\\ 2\sin\theta, & \left(\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

함수 $f(\theta)$는 닫힌 구간 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 연속이므로

정답 및 해설

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2})d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin\theta d\theta$$

$$=[-\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2}\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-2\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

$a=1$, $b=\frac{1}{4}$

따라서 $20(a+b)=25$

23) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x dx = 3\left[\ \sin x\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3$$

24) 답 : 23

[해설]

[출제 의도] 부정적분 이해하기

$$f(x)=\begin{cases} 2x^{\frac{3}{2}}+C_1,\ (x>1) \\ x^2+C_2,\ (x<1)\end{cases}$$ (단, C_1, C_2는 적분상수)

$f(4)=16+C_1=13$

$C_1=-3$

$x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1-}(x^2+C_2)=\lim_{x\to1+}\left(2x^{\frac{3}{2}}-3\right)$$

$1+C_2=-1$

$C_2=-2$

따라서 $f(-5)=25-2=23$

25) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 정적분 계산하기

$$\int_0^1(x^2+2)\ dx=\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1=\frac{7}{3}$$

26) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 부분적분법을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=x\cos x$에서

$$\int\{xf(x)\}'dx=\int x\cos x dx$$

$xf(x)=x\sin x+\cos x+C$ (단, C 는 적분상수)

(가)에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로

$$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C$$

$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C$이므로 $C=0$

$\pi f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi$에서

$$f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$$

27) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 치환적분법 이해하기

주어진 등식의 좌변에서 $\ln x=s$라 하면

$$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}dx=\int_2^3(a+s)ds$$

$$=\left[as+\frac{1}{2}s^2\right]_2^3=a+\frac{5}{2}$$

주어진 등식의 우변에서 $\sin x=t$라 하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x dx=\int_0^1(1+t)dt$$

$$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

$a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$ $\therefore$ $a=-1$

따라서 a의 값은 -1

28) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 함수 추론하기

$\{f(x)g(x)\}'=h(x)$이므로 $f(x)g(x)=\int h(x)dx$

$xg(x)=\int\ln x dx$에서 부분적분법을 이용하여 정리하면

$xg(x)=x\ln x-x+C\,1\times g(1)=-1+C=-1$

$\therefore$ $C=0$

$g(x)=\ln x-1$

$\therefore$ $g(e)=0$

29) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 미분과 적분의 관계 이해하기

$f(x)=x^2-6x+C$

$f(x)$의 최솟값은 $f(3)=-9+C=8$

$C=17$

$f(x)=x^2-6x+17$

$\therefore$ $f(1)=12$

30) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=\int\sin x dx=-\cos x+C$(C는 적분상수)

$\therefore$ $f(\pi)-f(0)=-\cos\pi+\cos0=2$

31) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]치환적분을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x^2=t$로 치환하면 $2xdx=dt$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$

$\therefore \int_0^1 2xe^{x^2}dx = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e-1$