III.미분법

2.도함수의 활용

중단원 기출문제

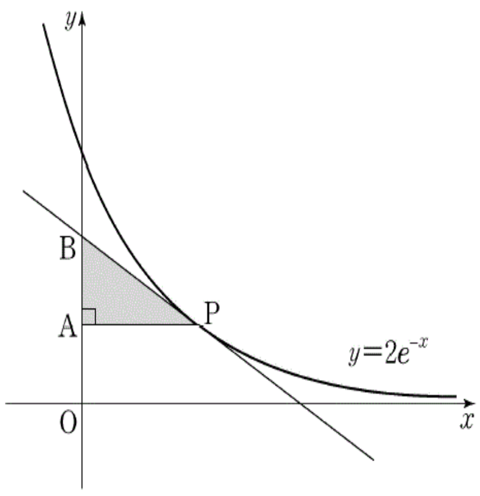
[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

1 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가 $x=t-\frac{2}{t}$, $y=2t+\frac{1}{t}$이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 속력은? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

2 곡선 $y=2e^{-x}$ 위의 점 $P(t, 2e^{-t})$ $(t>0)$에서 y축에 내린 수선의 발을 A라 하고, 점 P에서 접선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 APB의 넓이가 최대가 되도록 하는 t의 값은? [4점]



① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ e

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

3 $x>a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x)=g(x)$이다. (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하야 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$) (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta-\alpha=6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

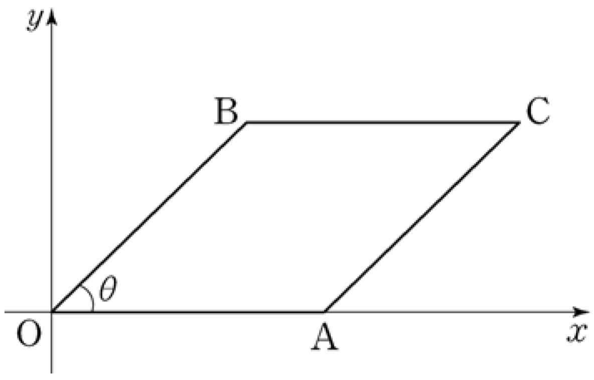
[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

4 곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A에서의 접선이 원점 O를 지날 때, 선분 OA의 길이는? [3점]

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

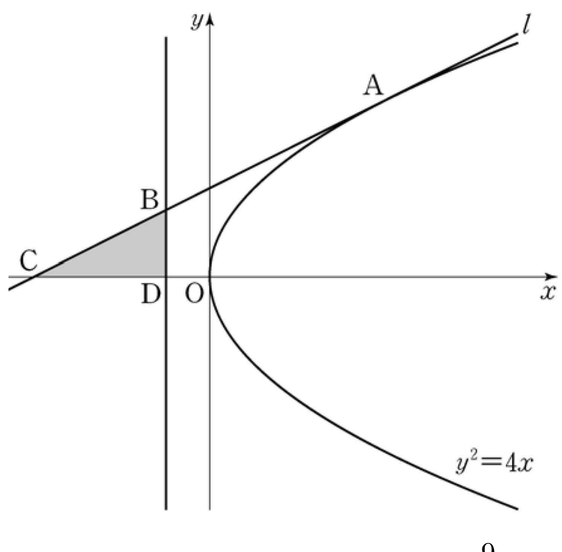
5 좌표평면에서 점 A의 좌표는 $(1, 0)$이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$인 θ에 대하여 점 B의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다. 사각형 $OACB$가 평행사변형이 되도록 하는 제1사분면 위의 점 C에 대하여 사각형 $OACB$의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 OC의 길이의 제곱을 $g(\theta)$라 하자. $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)[4점][2016(B) /수능 15]



① $2+\sqrt{5}$　② $2+\sqrt{6}$　③ $2+\sqrt{7}$
④ $2+2\sqrt{2}$　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

6 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(4,\ 4)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 l과 포물선의 준선이 만나는 점을 B, 직선 l과 x축이 만나는 점을 C, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 넓이는?[3점][2016(B) /수능 9]

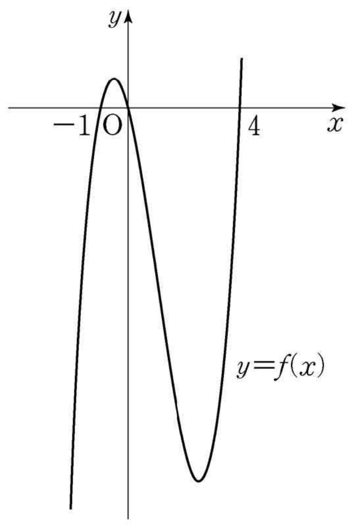


① $\frac{7}{4}$　② 2　③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{5}{2}$　⑤ $\frac{11}{4}$

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

7 함수 $f(x)=x(x+1)(x-4)$에 대하여

직선 $y=5x+k$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 양수 k의 값은?[4점]



① 5　② $\frac{11}{2}$　③ 6
④ $\frac{13}{2}$　⑤ 7

[난이도 : ★☆☆] [2014 학년도 대수능]

8 함수 $f(x)=2x^3-12x^2+ax-4$가 $x=1$에서 극댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [3점]

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

9 이차 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다. (나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

10 정의역이 $\{x|0\le x\le \pi\}$인 함수 $f(x)=2x\cos x$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f'(a)=0$이면 $\tan a=\frac{1}{a}$이다. ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지는 a가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$에 있다. ㄷ. 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$에서 방정식 $f(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

11 실수 m에 대하여 점 $(0,2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자.

함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은?[4점]

① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

12 곡선 $y=e^x$위의 점 $(1,e)$에서의 접선이 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접할 때, 실수 k의 값은?[3점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e^4}$
④ $\frac{1}{1+e}$ ⑤ $\frac{1}{1+e^2}$

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

13 함수 $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $13\ln 2$이다. ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㄷ. 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 구간 $(4,8)$에서 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

14 함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=(f\circ f\ )(x)$로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

[보 기]
ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

15 사차 함수

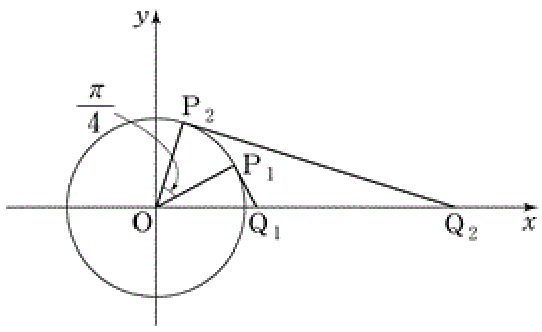
$f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$

의 그래프 위의

점 (a,b)에서의 접선의 기울기가 4일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

16 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$위의 점 P_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_1이라 할 때, 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다. 점 P_1을 원점 O를 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_2라 하자. 삼각형 P_2OQ_2의 넓이는?(단, 점 P_1은 제 1사분면 위의 점이다.)[3점]



① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

17 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $A(a,f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자.

직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $B(b,f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자.

다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $a\neq b$이다.)[4점]

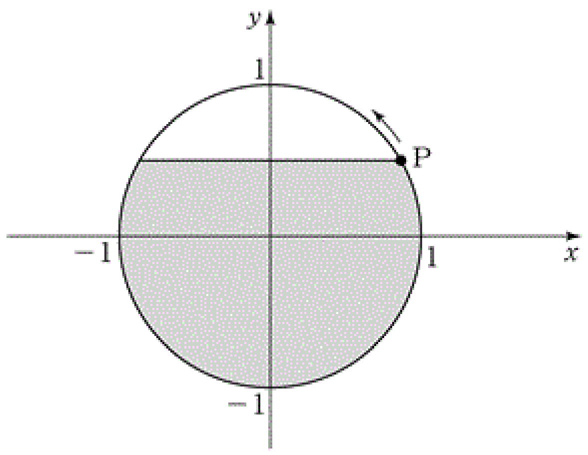
[보기]
ㄱ. $h'(b)=0$
ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.
ㄷ. 점 $(a,h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

18 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P가 점 $(1, 0)$에서 출발하여 원점을 중심으로 매초 $\frac{1}{40}$(라디안)의 일정한 속력으로 원 위를 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그을 때, 원과 직선으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 점 P가 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{b}{a}$ 이다. $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

19 [이과]함수 $y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이고, $|x|\neq 1$인 모든 x의 값에 대하여 미분계수 $f'(x)$가

$f(x)=\begin{cases} x^2, & (|x|<1) \\ -1, & (|x|>1) \end{cases}$ 일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖는다. ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다. ㄷ. $f(0)=0$이면 $f(1)>0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

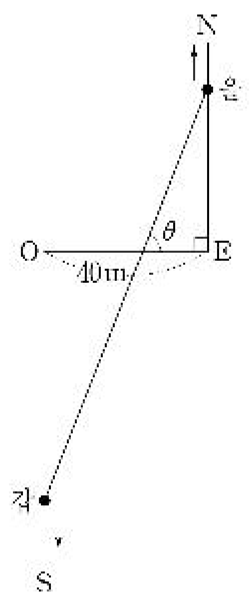
[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

20 [이과]양수 a에 대하여 닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)=\frac{x-5}{(x-5)^2+36}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

21 [이과]지점 O와 지점 E사이의 거리는 $40m$이다. 아래 그림과 같이 갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 OS를 따라 초속 $3m$의 일정한 속력으로 달리고, 을은 갑이 출발한 지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 초속 $4m$의 일정한 속력으로 달리고 있다.

갑과 을의 지점을 연결하여 만든 선분과 선분 OE가 만나서 이루는 각을 θ(라디안)이라 할 때, 갑이 출발한 지 20초가 되는 순간 θ의 변화율은?[4점]



① $\frac{21}{290}$ 라디안/초

② $\frac{13}{290}$ 라디안/초

③ $\frac{7}{290}$ 라디안/초

④ $\frac{3}{290}$ 라디안/초

⑤ $\frac{1}{290}$ 라디안/초

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

22 $a>1$일 때, 함수

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2,\ (a>1)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 b라 하자. 다음은 두 수 a,b의 크기를 비교하는 과정이다.

$f'(x)=$ [(가)]이고 $a>1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 [(나)]을 가진다. 그런데 $f(1)<0$이고 $f(b)=0$이므로 a[(다)]b이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $6(x+a)(x+1)$, 극소값, $>$
② $6(x+a)(x+1)$, 극소값, $<$
③ $6(x-a)(x-1)$, 극소값, $>$
④ $6(x-a)(x-1)$, 극대값, $<$
⑤ $6(x-a)(x-1)$, 극대값, $>$

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

23 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f'(-x)=f'(x)$ ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$ ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극솟값을 갖는다.

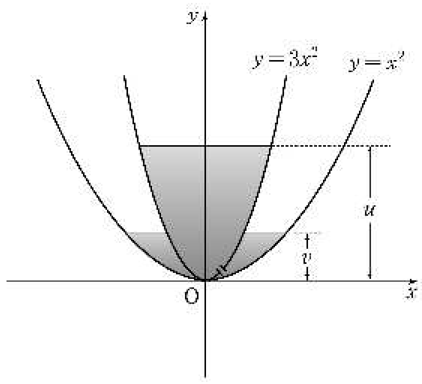
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

24 곡선 $y=3x^2,\ (0\le y\le 10)$을 y축 둘레로 회전시킨 회전체 A와 곡선 $y=x^2,\ (0\le y\le 10)$을 y축 둘레로 회전시킨 회전체 B가 있다.

처음에는 물이 A의 안쪽에만 차 있다가 원점 O부근의 작은 구멍을 통하여 A의 바깥쪽과 B의 안쪽으로 둘러싸인 부분으로 흘러 나가기 시작한다.

A의 안쪽 수면의 높이를 u, A의 바깥쪽 수면의 높이를 v라 할 때, v가 u의 $\frac{1}{2}$이 되는 순간의 $\frac{dv}{du}$의 값은?[4점]



① -2 ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

25 x에 대한 방정식 $\ln x-x+20-n=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는

자연수 n의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

26 $1 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $\alpha x \le e^x \le \beta x$가 성립하도록 상수 α, β를 정할 때, $\beta - \alpha$의 최솟값은?[3점]

① $\frac{e}{2}$ ② e ③ $e\left(\frac{e^3}{4}-1\right)$
④ $e\left(\frac{e^2}{3}-1\right)$ ⑤ $e\left(\frac{e}{2}-1\right)$

[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

27 곡선 $x^3 - xy^2 = 10$ 위의 점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

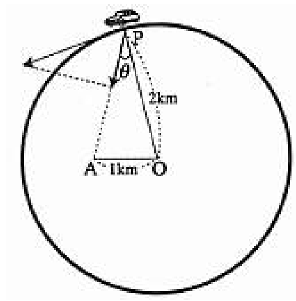
[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

28 함수 $y = \frac{\ln x}{x}$가 최댓값을 가질 때의 x의 값은?[2점]

① 1 ② e ③ $\frac{1}{e}$
④ $2e$ ⑤ e^2

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

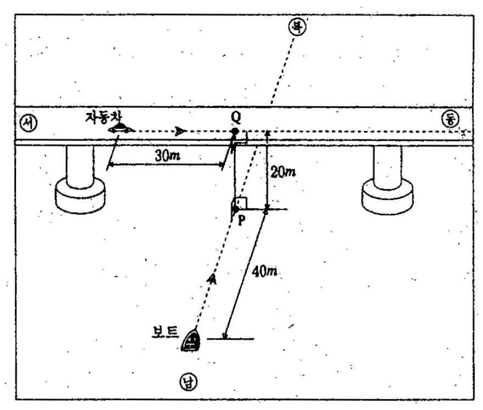
29 반지름의 길이가 $2km$인 원형의 자동차 시험장에서 초속 $20m$의 일정한 속력으로 자동차가 달리고 있다. 원의 중심 O에서 $1km$ 떨어진 지점 A에 속력 측정기가 놓여 있어, 자동차의 속도 중 자동차의 위치 P로부터 A방향으로의 성분을 측정하고 있다. 이때, $\angle APO = \theta$이면, 이 성분의 크기는 $20\sin\theta(m/초)$이다. 이 자동차가 한바퀴 도는 동안 속력 측정기가 기록하는 최댓값은 몇 $m/초$인가?



① 8 ② 10 ③ $10\sqrt{2}$
④ $10\sqrt{3}$ ⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

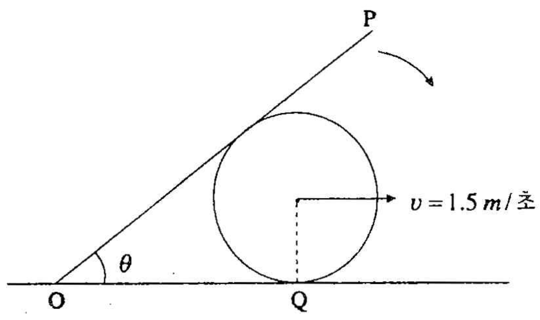
30 보트가 남쪽에서 북쪽으로 $10m/$초의 등속도로 호수 위를 지나가고 있다. 수면 위 $20m$의 높이에 동서로 놓인 다리 위를 자동차가 서쪽에서 동쪽으로 $20m/$초의 등속도로 달리고 있다. 아래 그림과 같이 지금 보트는 수면 위의 점 P에서 남쪽 $40m$, 자동차는 다리 위의 점 Q에서 서쪽 $30m$지점에 각각 위치해 있다. 보트와 자동차 사이의 거리가 최소가 될 때의 거리는? (단, 자동차와 보트의 크기는 무시하고, 선분 PQ는 보트와 자동차의 경로에 각각 수직이다.) [1.5점]



① $21m$ ② $24m$ ③ $27m$
④ $30m$ ⑤ $33m$

[난이도 : ★★★] [1997 학년도 대수능]

31 반지름의 길이 $1m$인 원판에 기대어 있는 막대기 $\overline{OP}$의 한 끝은 아래 그림과 같이 평평한 지면 위의 한 점 O에 고정되어 있다. 원판이 지면과 접하는 점을 Q라 하자. 원판의 중심이 오른쪽으로 지면과 평행하게 등속도 $1.5m$/초로 움직인다. 되는 순간, 막대 $\overline{OP}$가 지면과 이루는 각의 크기 θ의 시간에 대한 순간변화율은?(단, 단위는 라디안/초이다)[2점]



① $-\dfrac{3}{5}$　② $-\dfrac{3}{2}$　③ $-\dfrac{3}{10}$
④ $-\dfrac{\sqrt{5}}{6}$　⑤ $-\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

32 좌표평면에서 점 $(2,\ a)$가 곡선 $y=\dfrac{2}{x^2+b}\,(b>0)$의 변곡점일 때, $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

33 함수 $f(x)=(x^2-8)e^{-x+1}$은 극솟값 a와 극댓값 b를 갖는다. 두 수 a, b의 곱 ab의 값은? [3점]

① -34　② -32　③ -30
④ -28　⑤ -26

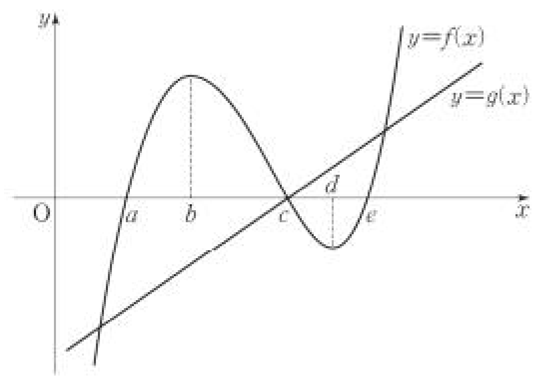
[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

34 곡선 $y=\ln(x-3)+1$ 위의 점 $(4, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

35 삼차 함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 $f'(b)=f'(d)=0$이다.



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다.

다음 중 옳은 것은?(단 $p<q$)[4점]

① $a<p<b$이고 $c<q<d$이다.
② $a<p<b$이고 $d<q<e$이다.
③ $b<p<c$이고 $c<q<d$이다.
④ $b<p<c$이고 $d<q<e$이다.
⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$이다.

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

36 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

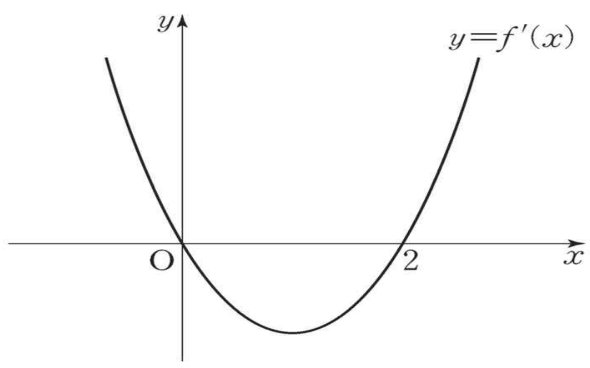
[보 기]
ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

37 삼차 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



[보 기]
ㄱ. $f(0)<0$이면 $\vert f(0)\vert < \vert f(2)\vert$이다.
ㄴ. $f(0)f(2) \geq 0$이면 함수 $\vert f(x)\vert$가 $x=a$에서 극소인 a의 값은 개수는 2이다.
ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 방정식 $\vert f(x)\vert=f(0)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

38 곡선 $y=\ln 5x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$에서의 접선의 y절편은?[3점]

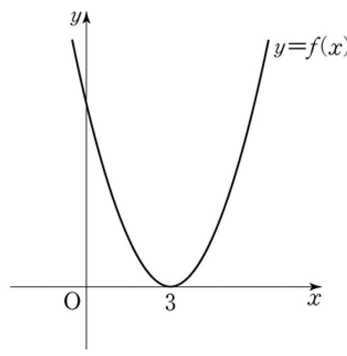
① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

39 함수 $f(x)$가

$f(x)=(x-3)^2$일 때,

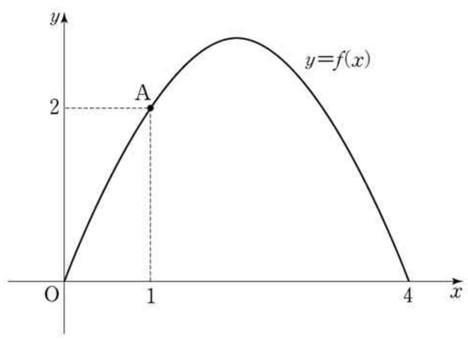
함수 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이고 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 y절편이 -5일 때, 이 접선의 x절편은?[3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

40 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 그림과 같고 직선 $y=g(x)$가 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $A(1, 2)$ 를 지난다.



일차함수 $g(x)$가 닫힌 구간 $[0, 4]$ 에서 $f(x)\le g(x)$를 만족시킬 때, $g(3)$의 값은? [4점]

① π ② $\pi+1$ ③ $\pi+2$
④ $\pi+3$ ⑤ $\pi+4$

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

41 양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

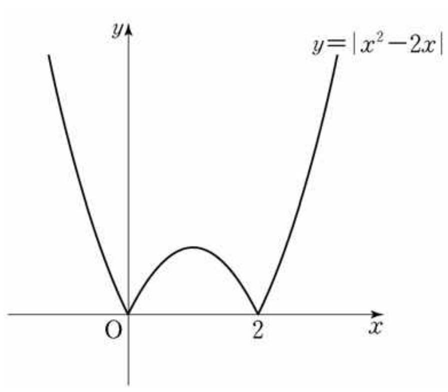
(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다. (나) $0\le x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1\ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

42 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자.

최고차항의 계수가 1인 이차 함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

43 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=f(x)\ln x^4$

이라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선이 서로 수직일 때, $100f'(e)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

44 3이상의 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^n e^{-x}$일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보 기]
ㄱ. $f\left(\frac{n}{2}\right)=f'\left(\frac{n}{2}\right)$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 점 $(0,\ 0)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

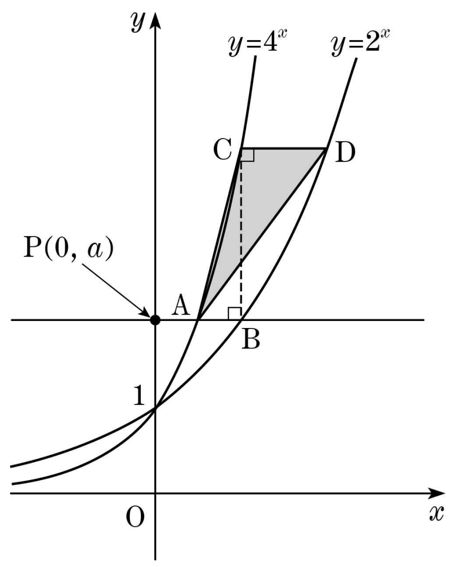
45 열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{2x}}$가 $x=a$에서 극솟값을 가질 때, $\cos a$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　③ 0
④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

46 두 곡선 $y=4^x,\ y=2^x$과 y축 위의 점 $P(0,\ a)\,(a>1)$가 있다. 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 두 곡선 $y=4^x,\ y=2^x$과 만나는 점을 각각 $A,\ B$라 하자.

또, 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 D라 하자.



점 P가 점 $(0,\ 2)$를 출발하여 y축의 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속도로 움직인다.

점 P가 점 $(0,\ 4)$를 지나는 순간, 삼각형 ADC의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율은? [4점]

① $5+\dfrac{3}{2\ln 2}$　② $5+\dfrac{5}{2\ln 2}$　③ $7+\dfrac{1}{2\ln 2}$
④ $7+\dfrac{3}{2\ln 2}$　⑤ $7+\dfrac{5}{2\ln 2}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

47 함수 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x\,(a>0)$의 극솟값이 0일 때, 상수 a의 값은?[3점][2011년 6월 평가원]

① $\dfrac{1}{e}$　② $\dfrac{2}{e}$　③ $\sqrt{e}$
④ e　⑤ $2e$

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

48 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$f(x)=\frac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를

$g(x)$라 하자.

에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 점 $(2, 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 실근 중 양수인 것은 $x=2$하나뿐이다.
ㄷ. 함수 $\lvert f(x)-g(x)\rvert$는 $x=2$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

49 삼차 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)방정식 $f(x)-x=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖는다.
(나) $x=3$일 때 극값 7을 갖는다.
(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$를 $f(x)-x$로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점][2011년 9월 평가원]

[보기]
ㄱ. α, β, γ는 방정식 $f(f(x))-x=0$의 근이다.
ㄴ. $h(x)=x$
ㄷ. $g'(3)=1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

50 곡선 $y=\left(\frac{\ln 1}{ax}\right)^2$의 변곡점이 직선 $y=2x$위에 있을 때, 양수 a의 값은?[3점]

① e ② $\frac{5}{4}e$ ③ $\frac{3}{2}e$
④ $\frac{7}{4}e$ ⑤ $2e$

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

51 다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x), f'(x), f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $g'(3)=-1$
ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.
ㄷ. 점 $P(1, 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

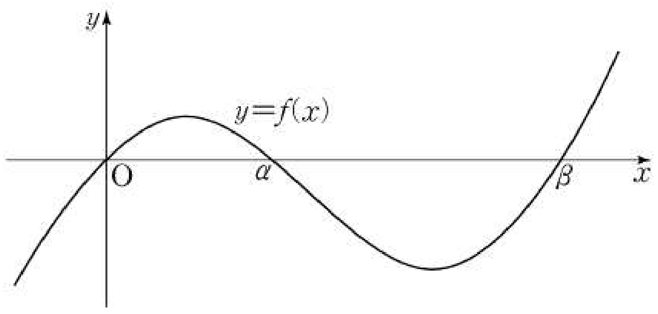
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

52 삼차 함수 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)\,(0<\alpha<\beta)$와 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$라고 하자.

$a<0,\ \alpha<b<\beta$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.
ㄴ. $g(b)>f(a)$
ㄷ. $g(a)>f(b)$



① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2009년 6월 모의평가]

53 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-1}$의 값은?[2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

54 함수 $f(x)=\sin\frac{x^2}{2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $0<x<1$일 때, $x^2\sin\frac{x^2}{2}<f(x)<\cos\frac{x^2}{2}$이다.
ㄴ. 구간 $(0, 1)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.
ㄷ. $\int_0^1 f(x)dx$는 $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$보다 작다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

55 좌표평면에서 곡선 $y=\cos^n x$, $\left(0<x<\frac{\pi}{2},\ n=2, 3, 4, \cdots\right)$의 변곡점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

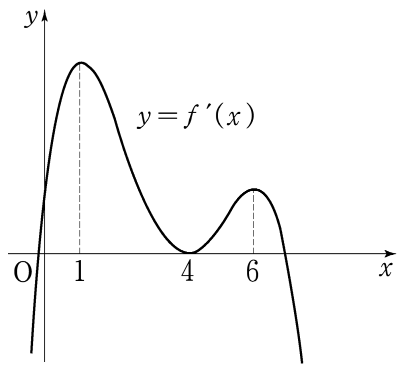
① $\frac{1}{e^2}$　② $\frac{1}{e}$　③ $\frac{1}{\sqrt{e}}$
④ $\frac{1}{2e}$　⑤ $\frac{1}{\sqrt{2e}}$

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

56 아래 그림은 5차 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다.

다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $f'(4)=0$이고 $f''(1)=f''(4)=f''(6)=0$이다.)[4점]



[보기]

ㄱ. $f(x)$는 서로 다른 세 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $4<x_1<x_2<6$인 x_1, x_2에 대하여 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$이다.

ㄷ. $f(0)=0$일 때, 양의 실수 a에 대하여 $y=f(x)$의 그래프와 $y=a$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$의 극댓값은 a이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

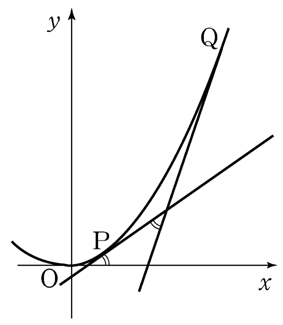
[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

57 $0<x<\frac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 부등식 $\tan 2x>ax$를 만족하는 a의 최댓값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

58 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$위의 두 점 $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$에서의 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형이 이등변삼각형일 때, a^2의 값을 구하시오.(단, $a>\sqrt{2}$)[4점]



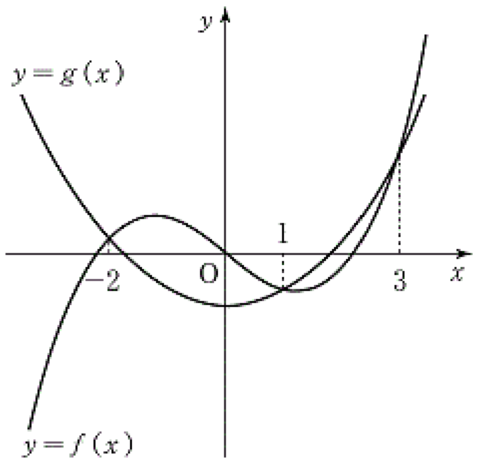
[난이도 : ★★☆] [2005년 06월 모의평가]

59 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 $x=a$와 $x=b$에서 만나고, a인 $x=c$에서 두 함수값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은? [3점]

① $f'(c)=-g'(c)$　② $f'(c)=g'(c)$
③ $f'(a)=g'(b)$　④ $f'(b)=g'(b)$
⑤ $f'(a)=g'(a)$

[난이도 : ★★★] [2005년 06월 모의평가]

60 아래 그림은 원점에 대하여 대칭인 삼차 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 이차 함수 $y=g(x)$의 그래프이다. 방정식 $\dfrac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-1}=0$ 의 모든 근의 곱을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

61 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 $x=a$와 $x=b$에서 만나고, a인 $x=c$에서 두 함수값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은? [3점]

① $f'(c)=-g'(c)$ ② $f'(c)=g'(c)$
③ $f'(a)=g'(b)$ ④ $f'(b)=g'(b)$
⑤ $f'(a)=g'(a)$

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

62 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 부등식 $\tan 2x>ax$를 만족하는 a의 최댓값은?[3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

63 [이과]지면에 정지해 있던 열기구가 수직 방향으로 출발한 후 t 분일 때, 속도 $v(t)\left(\dfrac{m}{\text{분}}\right)$를 $v(t)=\begin{cases} t, & (0\le t\le 20) \\ 60-2t, & (20\le t\le 40)\end{cases}$라 하자. 출발한 후 $t=35$분일 때, 지면으로부터 열기구의 높이는? (단, 열기구는 수직 방향으로만 움직이는 것으로 가정한다.) [3점]

① $225m$ ② $250m$ ③ $275m$
④ $300m$ ⑤ $325m$

[난이도 : ★★★] [2004년 06월 모의평가]

64 아래 그림은 원점에 대하여 대칭인 삼차 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y 축에 대하여 대칭인 이차 함수 $y=g(x)$의 그래프이다. 방정식 $\dfrac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-1}=0$의 모든 근의 곱을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

65 곡선 $y=x^2-2x\ln x$의 변곡점의 x좌표는? [3점]

① 1 ② $\sqrt{e}$ ③ 2
④ e ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

66 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$의 극댓값과 극솟값의 합은? [3점]

① -1 ② $-\dfrac{5}{6}$ ③ $-\dfrac{2}{3}$
④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

67 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(\tan x)$의 그래프와 x축이 만나는 점을 P라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선의 y절편은? [3점]

① $-\pi$　② $-\dfrac{5}{6}\pi$　③ $-\dfrac{2}{3}\pi$
④ $-\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $-\dfrac{\pi}{3}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

68 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$에서의 접선 l이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 l은 제2사분면을 지나지 않는다. (나)직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형은 넓이가 2인 직각이등변삼각형이다.

함수 $g(x)=xf(2x)$에 대하여 $g'(2)$의 값은? [4점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

69 함수

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & (0\le x<1) \\ e^{2-x}, & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

에 대하여 열린 구간 $(0, 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|\,dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$ 이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

70 함수 $f(x)=e^x(ax^3+bx^2)$과 양의 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[-t,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 할 때, 두 함수 $M(t)$, $m(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 t에 대하여 $M(t)=f(t)$이다. (나) 양수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k,\ k+2]$에 있는 임의의 실수 t에 대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립한다. (다) $\displaystyle\int_1^5 \{e^t\times m(t)\}dt=\frac{7}{3}-8e$

$f(k+1)=\dfrac{q}{p}e^{k+1}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 0이 아닌 상수, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

71 곡선 $y=\ln(x-7)$에 접하고 기울기가 1인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 AOB의 넓이를 구하시오.(단, O는 원점이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

72 실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)=(x^2+2ax+11)e^x$이 증가하도록 하는 자연수 a의 최댓값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

73 자연수 n에 대하여 함수 $y=e^{-x}-n-\frac{1}{e}$의 그래프와 함수 $y=|\ln x|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

74 닫힌 구간 $[0, 2\pi]$에서 x에 대한 방정식 $\sin x-x\cos x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4점]

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

75 x에 대한 방정식 $\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오.(단, $0\le x<2\pi$)[4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

76 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $P(t, \ln t)$, $Q(2t, \ln 2t)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 각각 $R(r(t),\ 0)$, $S(s(t),\ 0)$이라 하자.

함수 $f(t)$를 $f(t)=r(t)-s(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$의 극솟값은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

77 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+\cos 2\pi x}{x^{2n}+1}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-x}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{x} tf(t)dt$$

라 할 때, $g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

78 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에 대하여에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. $f'(0)=1$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\dfrac{1}{2}$이다.
ㄷ. $0<a<b<1$일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

79 다음은 모든 실수 x에 대하여 $2x-1\geq ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값을 구하는 과정이다.

아래의 (가)에 알맞은 식을 $g(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $g(2)\times p$의 값은? [4점]

> $f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$이라 하자.
> $f'(x)=([가])\times e^{-x^2}$
> $f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$
> 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 조사하면 함수 $f(x)$의 극솟값은 [(나)]이다.
> 또한 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로
> 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면함수 $f(x)$의 최솟값은 [(나)]이다.
> 따라서 $2x-1\geq ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값은 [(나)]이다.

① $\dfrac{10}{e}$ ② $\dfrac{15}{e}$ ③ $\dfrac{20}{\sqrt[4]{e}}$
④ $\dfrac{25}{\sqrt[4]{e}}$ ⑤ $\dfrac{30}{\sqrt[4]{e}}$

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

80 좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

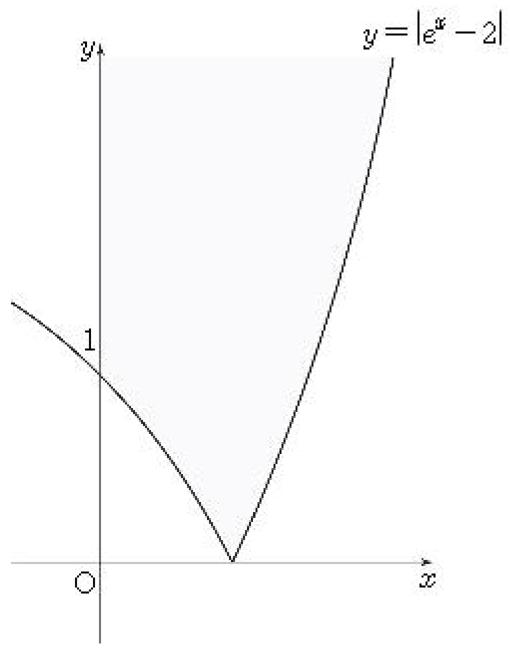
$$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq |e^x-2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자.

양의 실수 t에 대하여 영역 D의서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다.
(나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라할 때, $f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

81 곡선 $y=2^{2x-3}+1$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는?[3점]

① $\dfrac{1}{2}\ln 2$ ② $\ln 2$ ③ $\dfrac{3}{2}\ln 2$
④ $2\ln 2$ ⑤ $\dfrac{5}{2}\ln 2$

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

82 함수 $f(x)=x^3+3x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 정수 a의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

(가)점 $(-4, a)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선이 세 개 있다. (나)세 접선의 기울기의 곱은 음수이다.

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

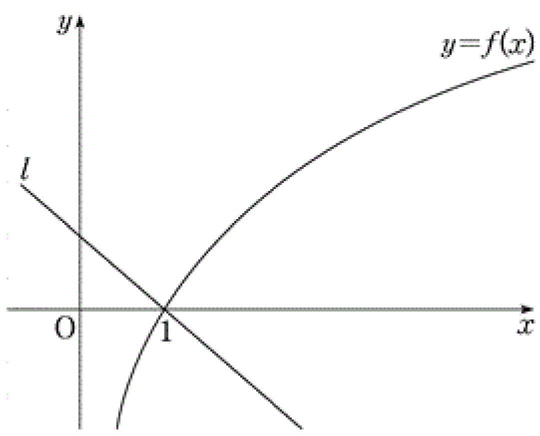
83 함수 $f(x)=x^4-16x^2$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k값의 제곱의 합을 구하시오. [4점]

(가)구간 $(k, k+1)$에서 $f'(x)<0$이다. (나)$f'(k)f'(k+2)<0$

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

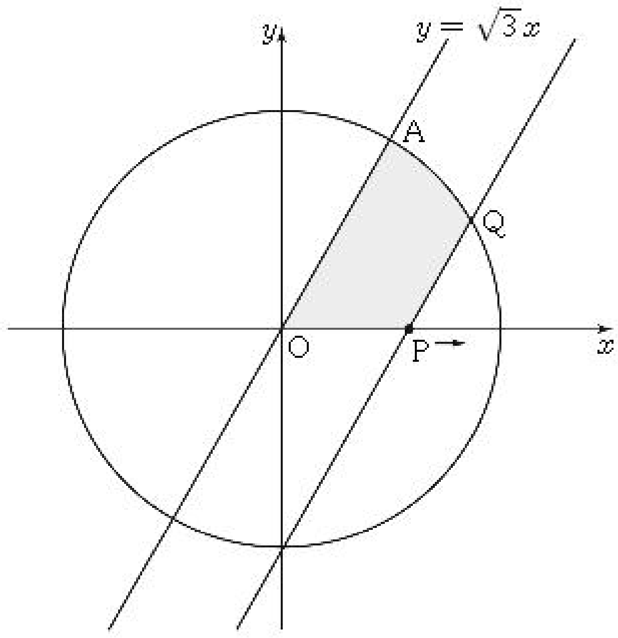
84 좌표평면에 함수 $f(x)=\sqrt{3}\ln x$의 그래프와 직선 $l: y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$이 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 서로 다른 두 점 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$에서의 접선을 각각 m, n이라 하자.

세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형일 때, $6(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. [4점]



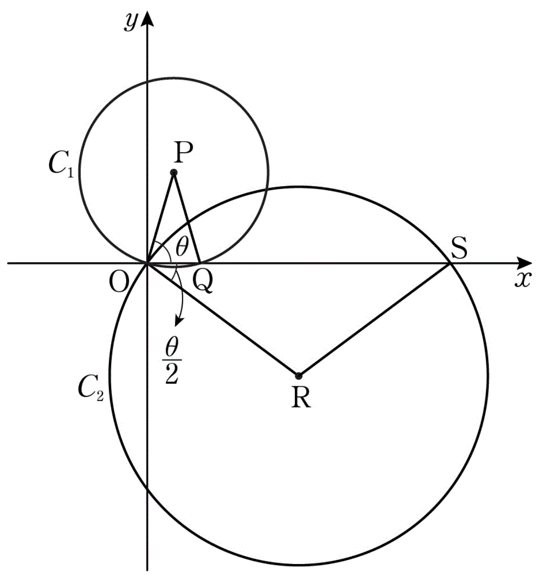
[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

85 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이 있다. 직선 $y=\sqrt{3}x$와 원이 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 P는 원점 O를 출발하여 x축을 따라 양의 방향으로 매초 2의 일정한 속력으로 움직인다. 점 P가 원점 O를 출발하여 t초가 되는 순간, 점 P를 지나고 직선 $y=\sqrt{3}x$에 평행한 직선이 제1사분면에서 원과 만나는 점을 Q라 하자. 세 선분 AO, OP, PQ와 호 QA로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, 점 Q의 y좌표가 5가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오.(단, $0<t<5$)[4점]



[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

86 그림과 같이 $\overline{OP}=1$인 제1사분면 위의 점 P를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_1이 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{OR}=2$이고 $\angle ROQ=\frac{1}{2}\angle POQ$인 제4사분면 위의 점 R를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C_2가 x축과 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 S라 하자. 라 할 때, 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합이 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\ \theta$의 값은?(단, O는 원점이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)[4점]



① $\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$
④ $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

87 함수 $f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, 다음 중 a가 속하는 구간은? [3점]

① $(1, e)$ ② (e, e^2) ③ (e^2, e^3)
④ (e^3, e^4) ⑤ (e^4, e^5)

[난이도 : ★★☆] [2014년 4월 학력평가]

88 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선과 직선 $y=-\frac{1}{3}x+2$가 서로 수직일 때, $\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

89 -1과 1을 제외한 모든 실수 x에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)=-1$이고 $\lim_{x\to1+} f(x)=1$이다.
(다) $x\neq1$인 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)<0$이다.

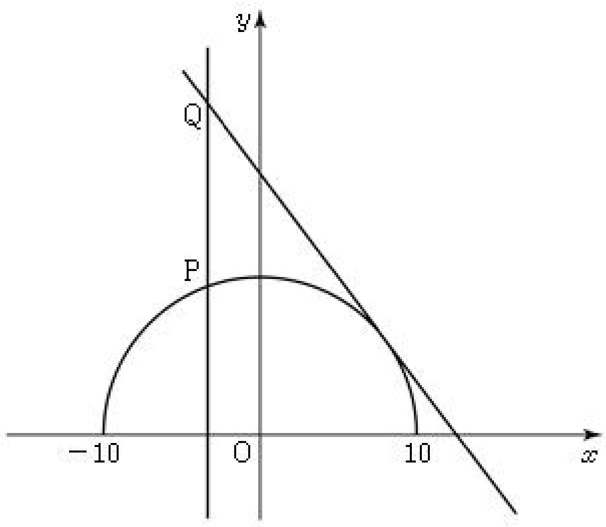
[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보 기]
ㄱ.함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 한 점에서 ?립??
ㄴ.함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만난다.
ㄷ. $f'(\alpha)=-1$인 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

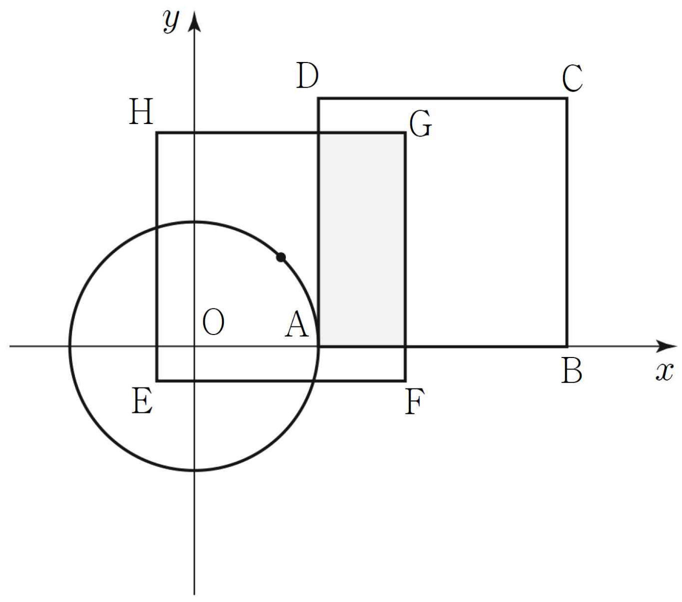
90 곡선 $C: x^2+y^2=100\ (y \geq 0)$과 곡선 C의 접선 $y=-\sqrt{3}x+20$이 있다. 곡선 C 위의 점 P에서 y축에 평행한 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q라 하자. 점 P가 점 $A(10,\ 0)$을 출발하여 곡선 위를 매초 5의 일정한 속력으로 점 $B(-10,\ 0)$까지 이동할 때, 시간(초)에 대한 선분 PQ의 길이의 순간변화율의 최댓값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

91 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 $A(1,0)$, $B(3,0)$, $C(3,2)$, $D(1,2)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$가 있다. 한 변의 길이가 2인 정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점이 원 $x^2+y^2=1$ 위에 있을 때, 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? [4점]

(단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 수직이다.)



① $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

92 함수 $f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\frac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 4월 학력평가]

93 곡선 $e^{3x}\ln y = 2$ 위의 점 $(0,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는?[3점]

① $-6e^2$ ② $-5e^2$ ③ $-4e^2$
④ $-3e^2$ ⑤ $-2e^2$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

94 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x) = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\sin 2x}$ 의 최솟값은?[3점]

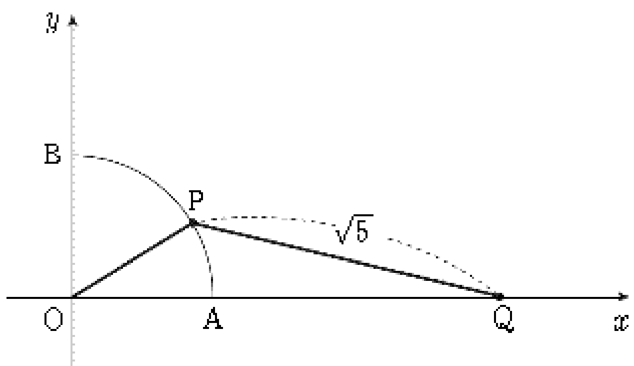
① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

95 곡선 $y = e^{3-x}$ 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.(단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점]

[난이도 : ★★★] [2012년 4월 학력평가]

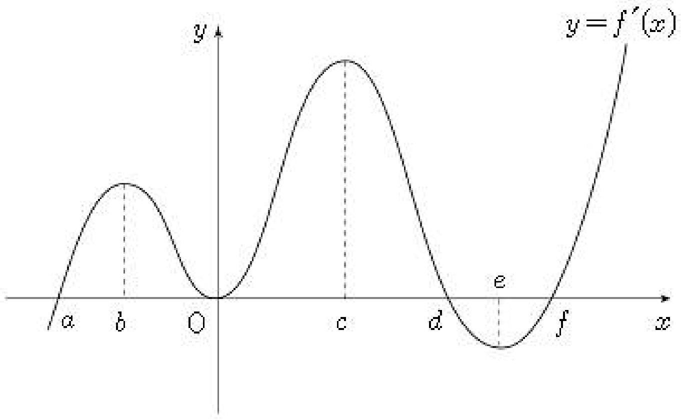
96 좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점 $A(1,\ 0)$에서 출발하여 호 AB 위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직일 때, x축 위의 점 Q는 $\overline{PQ} = \sqrt{5}$ 를 만족시키면서 x축 위를 움직인다.



$\angle POA = \frac{\pi}{4}$ 가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의 시간(초)에 대한 변화율을 r이라 할 때, $9r^2$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

97 다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점][2012년 7월]



[보기]
ㄱ. 구간 $[a, f]$에서 함수 $f(x)$는 4개의 변곡점을 가진다.
ㄴ. 구간 $[a, e]$ 에서 함수 $f(x)$가 극대가 되는 x의 갯수는 1개 있다.
ㄷ. 구간 $[a, e]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(c)$이다.

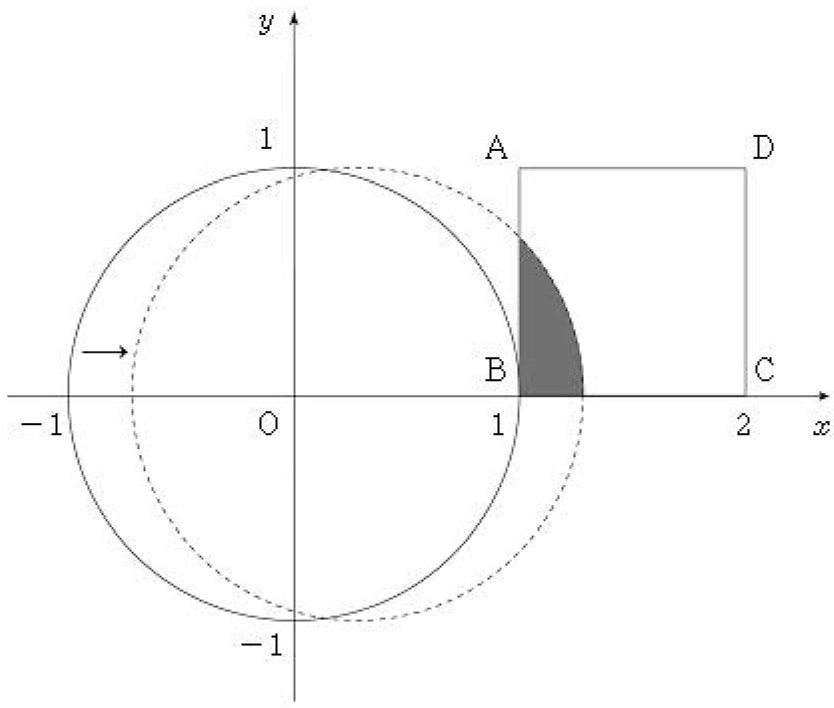
[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

98 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t|p \le t \le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

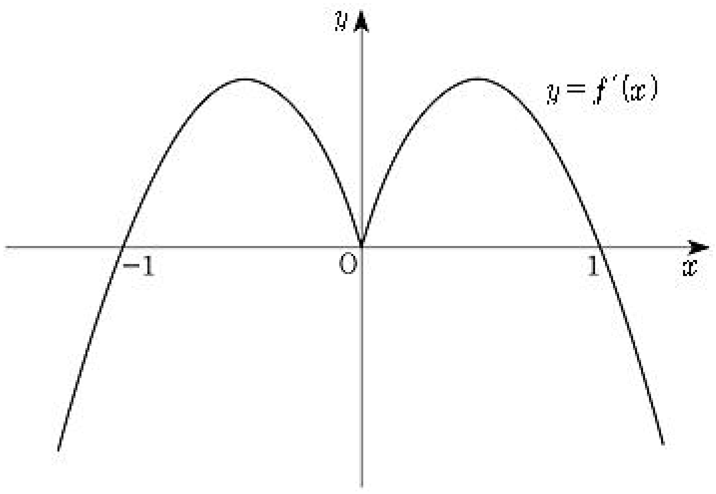
99 [공통]좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 O와 네 점 $A(1, 1)$, $B(1, 0)$, $C(2, 0)$, $D(2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $ABCD$가 있다. 원 O의 중심이 x축을 따라 양의 방향으로 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. t초 후 원의 내부와 정사각형 $ABCD$의 내부가 겹치는 부분의 넓이를 S라 하자. 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?(단, $0 \le t \le 1$)[4점][2012년 7월]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

100 그림과 같이 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고 $x>0$일 때 위로 볼록하다.



함수 $f(x)$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$)[4점]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.
ㄴ. $f(0)=0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은 0이다.
ㄷ. $f(1)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

101 곡선 $y=2x^2+1$위의 점 $(-1,\,3)$에서의 접선이 곡선 $y=2x^3-ax+3$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

102 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=x^3+3x^2+2$, $g(x)=\sin x$가 있다. 이때, 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?[3점]

① 6　② 8　③ 10
④ 12　⑤ 14

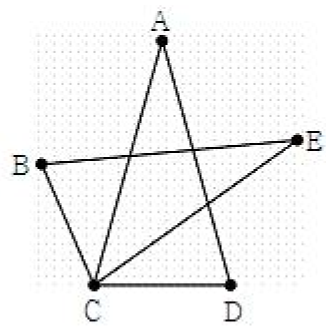
[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

103 곡선 $x^3+xy+y^3-8=0$과 x축이 만나는 점에서의 접선의 기울기는?[3점]

① -6　② -5　③ -4
④ -3　⑤ -2

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

104 [공통]다음은 꼭짓점이 5개인 그래프를 행렬로 나타낸 것이다.



$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 1 & 1 & q & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

꼭짓점 C에서 다른 한 꼭짓점을 지나 다시 꼭짓점 C로 돌아오는 방법의 수를 r라 할 때, 세 상수 $p,\,q,\,r$에 대하여 $p+q+r$의 값은?[3점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

105 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$f(x)=x^3-3x^2+15$, $g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.[4점]

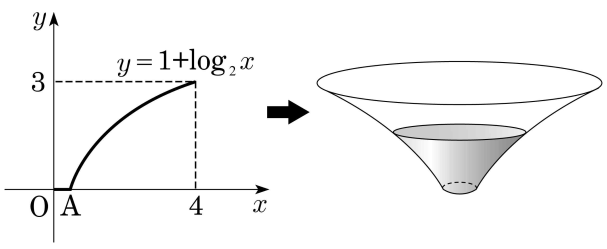
[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

106 [공통]한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$ 인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$ 씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다.

정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$ 이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

107 그림과 같이 원점 O와 점 $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$에 대하여 선분 OA와 곡선 $y=1+\log_2 x\left(\frac{1}{2}\le x\le 4\right)$를 y축의 둘레로 회전시켜 만든 회전체 모양의 그릇이 있다.



이 그릇을 평평한 바닥에 놓고 매초 $12\pi cm^3$ 의 일정한 비율로 물을 넣고 있다. 수면이 상승하는 속도가 $6cm/\sec$ 가 되는 순간의 수면의 높이는 acm 이다.

a 의 값은?(단, 좌표축의 눈금 단위는 cm 이다.)[4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{4}{3}$

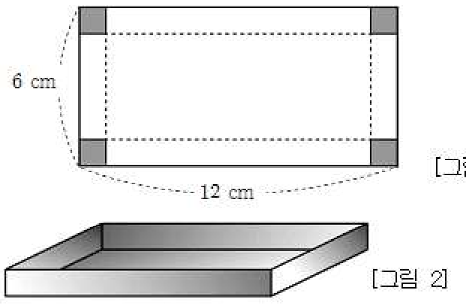
[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

108 [공통]x 에 대한 방정식

$\cos x=\frac{1}{(2n-1)\pi}x\ (n=1, 2, 3, \cdots)$의 양의 실근의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}$ 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

109 [그림 1]과 같이 가로의 길이가 $12cm$, 세로의 길이가 $6cm$인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형 모양의 종이를 잘라 낸 후 남는 부분을 접어서[그림 2]와 같이 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 상자의 부피의 최댓값을 Mcm^3이라 할 때, $\frac{\sqrt{3}}{3}M$의 값을 구하시오.(단, 종이의 두께는 무시한다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

110 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$이 $x=\alpha$에서 극값을 가질 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

(단, e는 자연로그의 밑이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha^2}$
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

111 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, P, Q는 서로 다른 점이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.
ㄴ. $m>-1$
ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{PQ}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

112 함수 $f(x)=2\ln(5-x)+\frac{1}{4}x^2$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다.

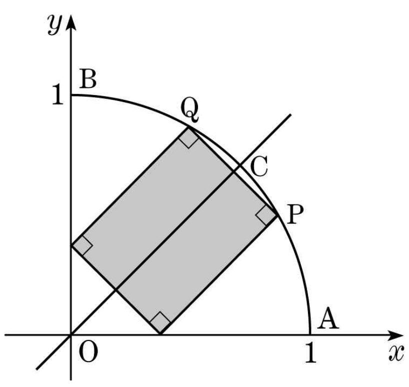
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

113 그림과 같이 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 사분원 OAB에 대하여 각 AOB를 이등분하는 직선이 사분원과 만나는 점을 C라 하자.

두 점 P, Q는 점 C에서 동시에 출발하여 사분원의 둘레를 따라 각각 시계 방향, 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{36}$의 일정한 속력으로 움직인다. 두 점 P, Q가 점 C에서 출발하여 t초 $(0<t<9)$가 되는 순간, 선분 PQ를 두 변으로 하고 사분원 OAB에 내접하는 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하자.

출발한 지 6초가 되는 순간, 넓이 $S(t)$의 시간(초)에 대한 변화율은?[4점]



① $\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi$ ② $\frac{1-\sqrt{3}}{72}\pi$
③ $\frac{\sqrt{3}-1}{72}\pi$ ④ $\frac{\sqrt{3}-1}{36}\pi$
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{36}\pi$

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

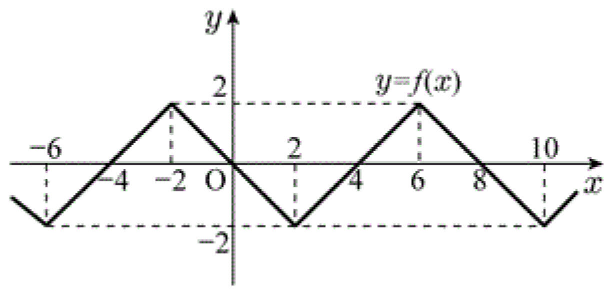
114 함수 $f(x)=\frac{\ln\{x\}}{k}$ (k는 자연수)의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점과 곡선 $y=g(x)$위의 점 사이의 최단 거리를 l_k라 하자.

$l_k \geq 3\sqrt{2}$를 만족시키는 k의 최솟값은?(단, $e=2.7$로 계산한다.)[3점]

① 11 ② 10 ③ 9
④ 8 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

115 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_{x}^{x+2} f(t)dt$라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것?[4점]

[보기]
ㄱ. $g(-1)=0$ ㄴ. 함수 $g(x)$는 열린 구간 $(-2, 2)$에서 감소한다. ㄷ. $-4 \leq x \leq 6$에서 방정식 $g(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

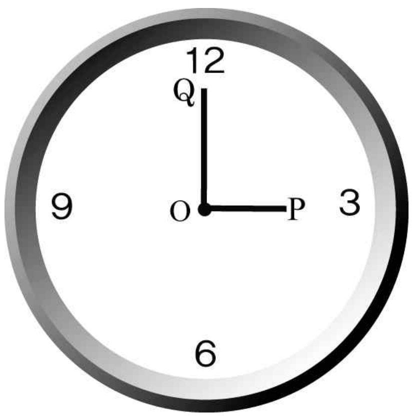
116 함수 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 곡선 $y=f(x)$위의 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{8}$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

117 그림과 같은 원모양의 시계가 있다. 시계의 중심을 O, 길이가 2인 시침의 끝점을 P, 길이가 3인 분침의 끝점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하자. 4시 정각이 되는 순간, 넓이 S의 시간(분)에 대한 순간변화율은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있는 경우는 $S=0$으로 한다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

118 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다.

함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\cdot f(t)dt$라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.
ㄷ. $g'(c)=0$인 실수 c가 개구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

119 밑면의 지름의 길이가 8이고 높이가 6π인 원기둥이 있다.

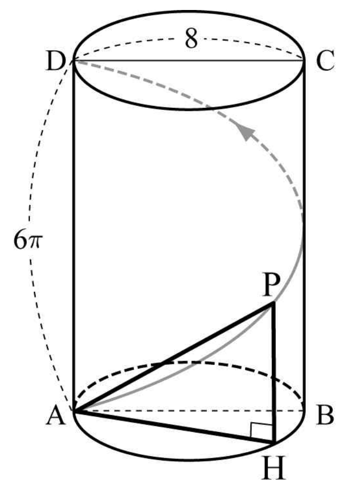
그림과 같이 평행한 두 선분 AB와 DC는 서로 다른 두 밑면의 지름이고, 두 선분 DA와 AB는 수직이다.

점 P가 매초 π의 일정한 속력으로 원기둥의 옆면을 따라 점 A에서 출발하여 선분 CB위의 점을 지나 점 D까지 최단거리로 움직인다.

점 P에서 선분 AB를 포함하는 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 삼각형 PAH의 넓이를 S라 하자.

점 P가 점 A에서 출발한 지 5초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

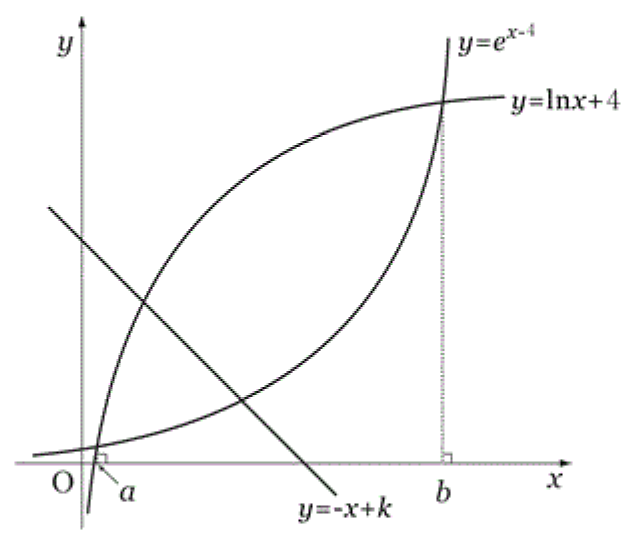
120 함수 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 최솟값은 $-1-\sqrt{2}$이다. ㄴ. $x=\frac{\pi}{4}$에서 최댓값을 갖는다. ㄷ. $x=\frac{5}{4}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

121 그림과 같이 함수 $y=\ln x+4$, $y=e^{x-4}$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 각각 a, b라 하자. 일차함수 $y=-x+k$의 그래프가 $a\le x\le b$에서 두 함수의 그래프와 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 될 때, 상수 k의 값은?[4점]



① $\frac{7}{2}$　② 4　③ $\frac{9}{2}$
④ 5　⑤ $\frac{11}{2}$

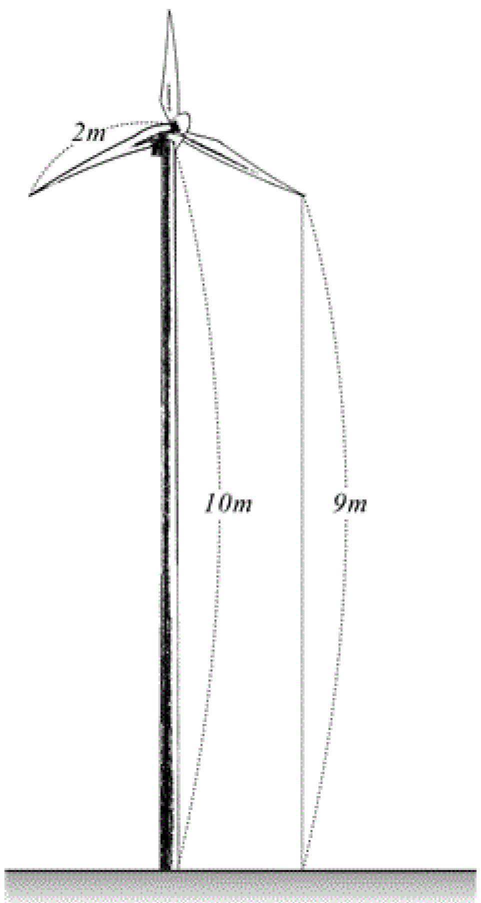
[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

122 지면에서 회전 중심축까지의 높이가 $10m$이고, 길이가 $2m$인 풍력 발전기의 날개가 축을 중심으로 일정한 속력으로 시계반대방향으로 돌고 있다.

지면에서 날개 끝까지의 높이가 $9m$가 될 때, 시간(초)에 따른 높이의 변화율이 $4\pi(m/s)$이고, 풍력 발전기의 날개가 한 바퀴 도는데 걸리는 시간을 k초라 하자.

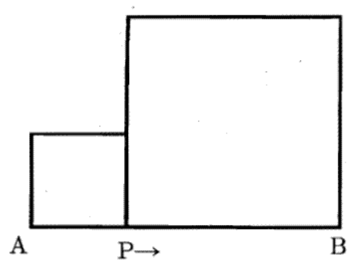
$k^2=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소)일 때, $10(p+q)$의 값을 구하시오.

(단, 축은 지면과 평행하고 축과 날개의 두께는 고려하지 않는다.)[4점]



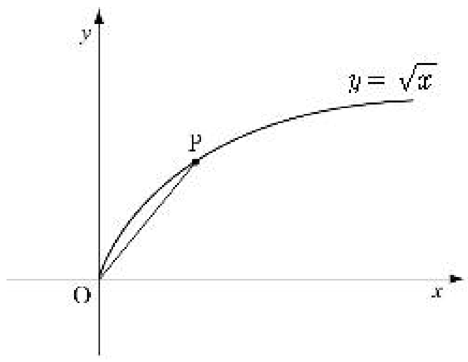
[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

123 그림과 같이 선분 AB위의 점 P가 매초 2㎝의 일정한 속도로 점 A에서 출발하여 점 B로 움직이고 있다. 선분 AP, 선분 PB를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합을 S라 하자. 점 P가 점 A를 출발한 후 8초가 되는 순간의 넓이 S의 변화율을 $x(cm^2/\mathrm{sec})$라 할 때, x를 구하시오.(단, 선분 AB의 길이는 $20cm$이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

124 점 P는 원점 O를 출발하여 곡선 $y=\sqrt{x}$를 따라 원점에서 멀어지고 있다. 점 P의 x좌표가 매초 2의 속도로 일정하게 변할 때, 직선 OP의 기울기가 10이 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.[4점]

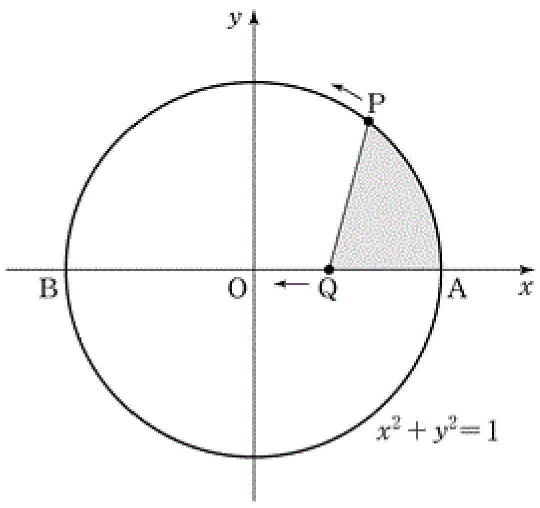


[난이도 : ★★★] [2008년 04월 학력평가]

125 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P는 점 $A(1,\ 0)$에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다.

점 Q는 점 A에서 출발하여 점 $B(-1,\ 0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자.

출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]



① $\frac{\pi}{4}-1$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$
④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}+1$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

126 계수가 실수인 삼차 함수 $y=f(x)$가 있다.

방정식 $f(x)=0$과 $f'(x)=0$의 근에 관한 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f'(x)=0$이 서로 같은 실근을 가지면 $f(x)=0$도 반드시 서로 같은 근을 가진다. ㄴ. $f'(x)=0$이 허근을 가지면 $f(x)=0$도 반드시 허근을 가진다. ㄷ. $f'(x)=0$이 서로 다른 실근을 가지면 $f(x)=0$도 반드시 서로 다른 두 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

127 두 전신주 사이에 늘어져 있는 전신줄이나 현수교의 케이블 등에서 볼 수 있는 곡선은 "현수선"이라 불리며, $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 꼴의 곡선의 방정식으로 표현된다. $f(x)$에 대한 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(3)>f(2)+f'(2)$ ㄴ. $x\geq 0$일 때, $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\frac{e^2+e^{-2}}{2}\right)=\frac{e^2-e^{-2}}{2}$이다. ㄷ. 점 $(0,\ 1)$에서 출발하여 곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$의 제 1사분면 위를 매초 1의 속력으로 움직이는 점 P에 대하여, t초 후의 점 P의 x좌표는 $\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$이다.

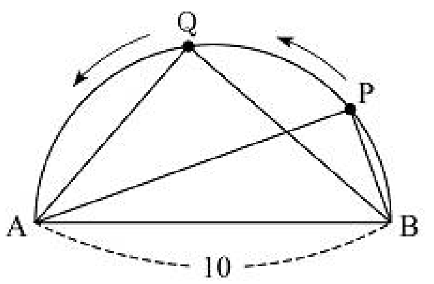
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

128 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

그림과 같이 두 점 P, Q가 점 B에서 동시에 출발하여 다음 조건을 만족시키면서 반원 위를 움직인다.

(가) $\angle QAB = 2\angle PAB$
(나)선분 BP의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

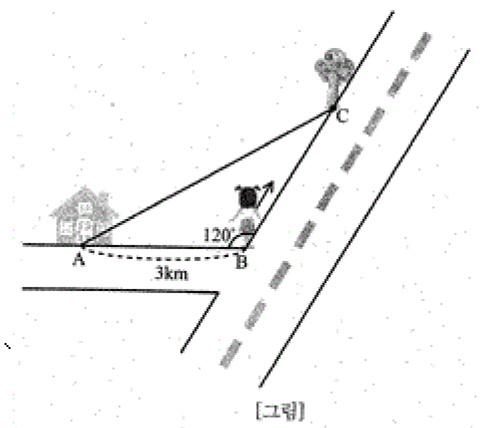


점 P가 점 B에서 출발하여 5초가 되는 순간 선분 AQ의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 p이다.

$100p^2$의 값을 구하시오.(단, $0 \le \angle PAB < \frac{\pi}{4}$이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

129 아래 [그림]과 같이 같은 A지점에 있는 집으로부터 $3km$ 떨어진 보행자 도로의 교차 지점 B를 출발하여 사잇각이 120°가 되는 다른 쪽 도로를 따라 $\frac{28}{13}km/h$의 속도로 걸어가고 있다. 도로 위의 한 지점 C를 통과하는 순간의 $\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{15}{4}\sqrt{3}\,km^2$이다.



이때, $\overline{AC}$의 순간변화율(km/h)은?[3점]

① 2 ② $\frac{15}{7}$
③ $\frac{16}{7}$ ④ $\frac{17}{7}$
⑤ 3

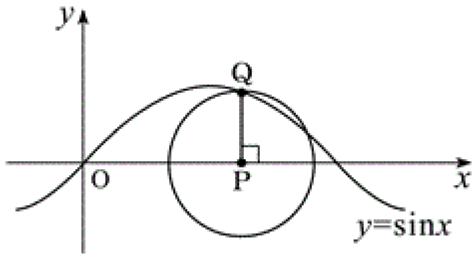
[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

130 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = a\sin x + bx + 1$이 극값을 가질 때, 다음 중 항상 옳은 것은?[3점]

① $a > b$ ② $a < b$ ③ $a^2 > b^2$
④ $a^2 < b^2$ ⑤ $a^2 = b^2$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

131 좌표평면에서 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 좌표는 $\left(\frac{t^2}{\pi},\,0\right)$이다. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sin x$와 만나는 점을 Q라 할 때, 점 P를 중심으로 하고 선분 PQ를 반지름으로 하는 원의 넓이를 S라 하자.



$t=\frac{\pi}{2}$인 순간, 넓이 S의 t에 대한 변화율은?[4점]

① $-\pi$　② $-\frac{\pi}{2}$　③ 0

④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ π

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

132 함수 $f(x)=e^{\frac{2}{x}}$에 대하여 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은 ?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.
ㄷ. $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

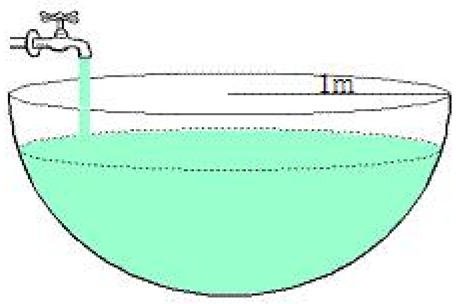
[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

133 두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+2}+1}{x^{2n}+2}$, $g(x)=\sin(k\pi x)$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않을 때, $60k$의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

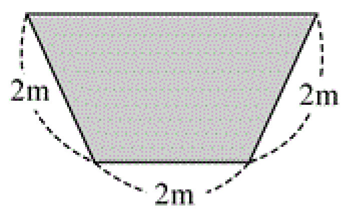
134 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 $1m$인 구를 반으로 자른 모양의 그릇에 $0.2\pi m^3/\text{sec}$의 속도로 물을 채우려고 한다.

수면의 높이가 $\frac{3}{4}m$가 되는 순간에 수면의 상승속도를 v라고 할 때, $75v$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

135 그림과 같이 단면이 등변사다리꼴 모양인 물이 흐르는 통로를 만들려고 한다. 통로의 단면에서 밑변과 등변의 길이가 모두 $2m$이고 단면의 넓이가 최대가 되도록 설계할 때, 단면의 최대 넓이는 몇 m^2인가?[3점]

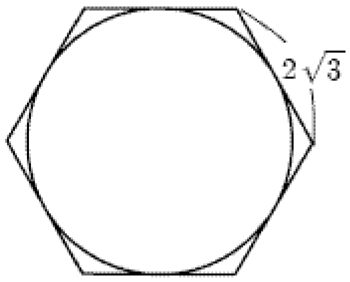


① 6　② $3\sqrt{3}$　③ $4\sqrt{2}$

④ $4+\sqrt{3}$　⑤ $2+2\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

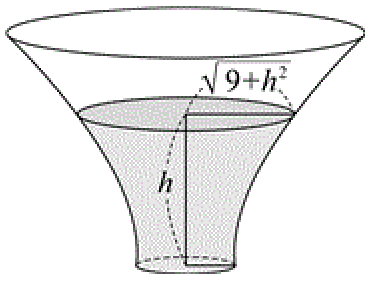
136 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정육각형에 내접하는 원이 있다. 원의 반지름의 길이가 매초 2의 속력으로 증가할 때, 4초 후 원의 넓이의 증가율은?[4점]



① 38π ② 40π
③ 42π ④ 44π
⑤ 46π

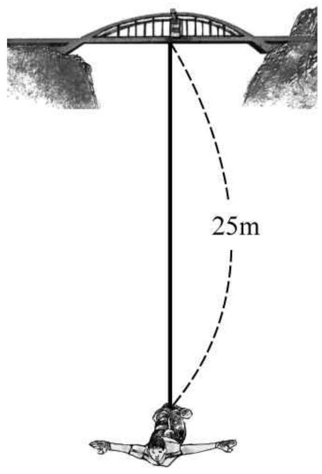
[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

137 어떤 그릇에 깊이가 hcm가 되도록 물을 넣을 때 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{9+h^2}cm$인 원이 된다. 이 그릇에 매초 $260\pi cm^3$의 비율로 물을 넣을 때, 수면의 높이가 $2cm$인 순간의 수면이 상승하는 속도는 몇 $cm/$초인지 구하시오.(단, 그릇의 높이는 $2cm$보다 크다.)[4점]



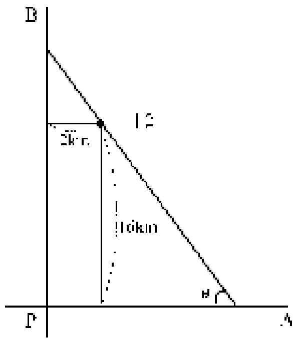
[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

138 높이가 $45m$인 번지점프대에 길이가 $20m$인 원기둥 모양의 탄력줄이 연결되어 있다. 이 탄력줄은 힘을 주어 길이가 늘어나도 원기둥 모양이 유지되며 그 부피는 변하지 않는다고 한다. 어떤 사람이 탄력줄을 매고 점프대를 출발한 후 $20m$였던 탄력줄의 길이가 $25m$로 되는 순간에 탄력줄의 길이가 늘어나는 속도는 $10m/$초 이고, 탄력줄의 반지름의 길이는 $\frac{3}{100}m$이다. 이 순간에 탄력줄의 반지름의 길이의 변화율을 $-\frac{b}{a}m/$초 라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

139 그림과 같이 지점 P에서 서로 수직으로 만나는 두 직선 도로가 있다. 두 직선 도로 PA, PB에서 각각 $16km$, $2km$떨어진 마을을 지나고 두 직선 도로를 연결하는 새 직선 도로를 건설하려고 한다.



새 직선 도로와 도로 PA가 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, 새 직선 도로의 길이가 최소이기 위한 $\tan\theta$의 값은 ?[4점]

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

정답 및 해설

2.도함수의 활용

중단원 기출문제

1) 답 : ③

[해설]

$\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{2}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2-\dfrac{1}{t^2}$ 이므로

시각 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는 $(3,\ 1)$

따라서 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

2) 답 : ④

[해설]

$y'=-2e^{-x}$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$x=0$ 을 대입하면

$y=2(1+t)e^{-t}$ 에서

$A(0,\ 2e^{-t}),\ B(0,\ 2(1+t)e^{-t})$

$\overline{AB}=2te^{-t}$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$라 하면

[중간계산] $S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2te^{-t}\times t$

$=t^2e^{-t}$

$S'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}$

$=t(2-t)e^{-t}$ 이므로

$S(t)$는 $t=2$ 일 때, 극대이면서 최대이므로 구하는 t의 값은 2이다.

3) 답 : 216

[해설]

$f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}\ (x>a)$ 에서

$f(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}=M$

$f(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}=M$

$f'(x)=\dfrac{g'(x-a)-g(x)}{(x-a)^2}$ 에서

$f'(\alpha)=0$ 이므로 $g'(\alpha)(\alpha-a)-g(\alpha)=0$

$g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha-a}$

$f'(\beta)=0$ 이므로 $g'(\beta)(\beta-a)-g(\beta)=0$

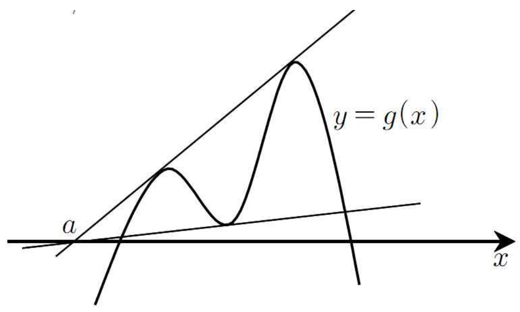
$g'(\beta)=\dfrac{g(\beta)}{\beta-a}$

이때, $g'(\alpha)$는 $x=\alpha$ 에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기 이고

$g'(\beta)$는 $x=\beta$ 에서 곡선 $y=g(x)$의 접선의 기울기이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

$i)$



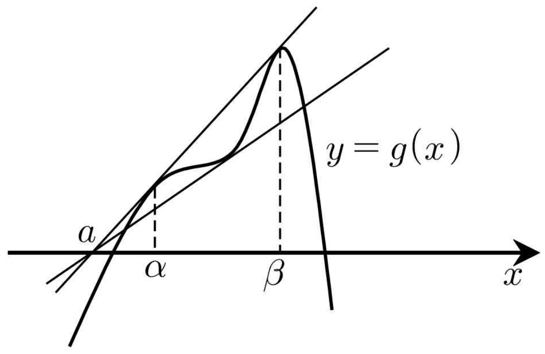
함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의그림과 같을 때,

함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 3개이므로

조건 (다)를 만족시키지 못한다.

$ii)$



함수 $y=g(x)$의 그래프가 위의 그림과 같을 때,

함수 $y=g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값은 1개다.

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극대 또는 극소가 되는 x의 값이 3개 이므로

조건 (다)를 만족시킨다.

$i)$에서 함수 $y=g(x)$는 극값을 1개 갖는다.

$g(x)-kx=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 으로 놓으면

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+kx$ 이므로

$g'(x)=-4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+k$

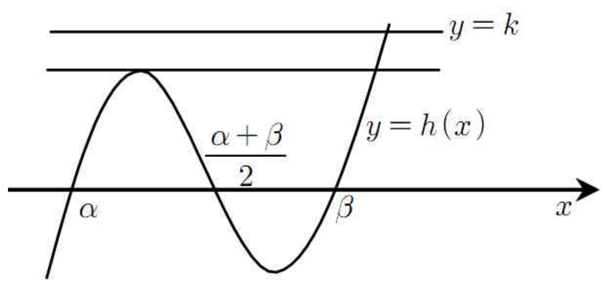
이때, $g'(x)=0$

$4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=k$

의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2개이어야 한다.

$h(x)=4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 라면

$y=h(x)$와 $y=k$는 한점 또는 두 점에서 만나야 한다.



함수 $h(x)$는 극값을 $\beta=\alpha+6\sqrt{3}$ 이므로 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$ 으로 놓고

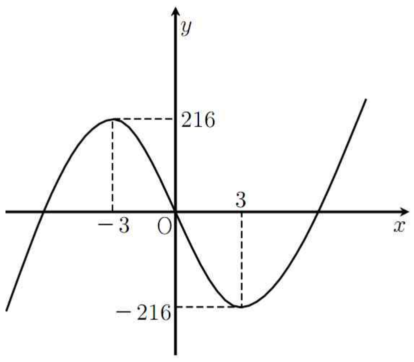
함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 극값을 구해도 된다.

이때, $y'=-12(x+3)(x-3)$ 이므로

$y'=0$ 에서 $x=-3,\ x=3$

정답 및 해설

함수 $y=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 k의 범위는 $k \le -216$ 또는 $216 \le k$

$k>0$이므로 k의 최솟값은 216이다.

따라서 M의 최솟값도 216이다.

4) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ 3e^{a-1})$으로 놓으면

$y'=3e^{x-1}$이므로 접선의 기울기는 $3e^{a-1}$이다.

그러므로 접선의 방정식은 $y=3e^{a-1}(x-a)+3e^{a-1}$

이 접선이 원점 $O(0,\ 0)$을 지나므로

$0=3e^{a-1}(-a)+3^{a-1}$

$\therefore\ a=1$

따라서 $A(1,\ 3)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

5) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

사각형 $OABC$가 평행사변형이므로

$f(\theta)\ =2\times\triangle OAB$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}\times\sin\theta$

$=2\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\times\sin\theta\ =\sin\theta$

또, 평행사변형 $OABC$의 대각선의 중점은 일치하므로 C의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\left(\frac{\cos\theta+1}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$

$\therefore\ a=\cos\theta+1,\ b=\sin\theta$

$\therefore\ C(\cos\theta+1,\ \sin\theta)$

그러므로 $g(\theta)\ =\overline{OC}^2\ =(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta\ =2+2\cos\theta$

[중간 계산]: $f(\theta)+g(\theta)\ =\sin\theta+(2+2\cos\theta)$

$=2\cos\theta+\sin\theta+2$

$=\sqrt{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\cos\theta+\frac{\sqrt{5}}{5}\sin\theta\right)+2$

$=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2$ (단,

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

따라서 $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값은 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$일 때, $\sqrt{5}+2$을 갖는다.

6) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 포물선의 접선의 방정식을 구하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $A(4,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$4y=2(x+4)$ 이며 정리하면

$y=\frac{1}{2}x+2\ldots$㉠

이때, 포물선의 준선의 방정식은 $x=-1$이므로

$D(-1,\ 0)$

또, ㉠에 $x=-1$을 대입하면

$B\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$

또, ㉠에 $y=0$을 대입하면

$C(-4,\ 0)$

따라서 삼각형 BCD의 넓이를 S라 하면

$S\ =\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{BD}\ =\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}\ =\frac{9}{4}$

7) 답 : ①

[해설]

직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와

서로 다른 두 점에서 만나려면

직선 $y=5x+k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 접해야 하므로

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$라고 하면

$f(x)=x(x+1)(x-4)=x^3-3x^2-4x$에서

$f'(x)=3x^2-6x-4$이므로

접선의 기울기는 $f'(a)=3a^2-6a-4$이다.

그런데 직선의 기울기가 5이므로

$3a^2-6a-4=5 \Leftrightarrow 3a^2-6a-9=0 \Leftrightarrow a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1,\ 3$

(ⅰ) $a=-1$일 때, 접점은 $(-1,\ 0)$이므로

접선의 방정식은 $y=5(x+1)=5x+5$,

$\therefore\ k=5$

(ⅱ) $a=3$일 때, 접점은 $(3,\ -12)$이므로

접선의 방정식은 $y+12=5(x-3)$이며 정리하면

$y=5x-27$이고 $k>0$이므로

문제의 조건을 만족하지 않는다.

$\therefore$ (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $k=5$

8) 답 : 22

[해설]

[출제 의도] 삼차 함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

삼차 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=0$이다.

$f'(x)=6x^2-24x+a$이므로

$f'(1)=6-24+a=0$

$\therefore\ a=18$

따라서, $f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$이고

$f(1)=2-12+18-4$
$=4=M$
$\therefore\ a+M=18+4=22$

9) 답 : 72

[해설]

$g(x)=f(x)e^{-x}$ 에서 $g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$

$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 로 놓으면

$f'(x)=2ax+b$, $f''(x)=2a$ 이므로

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$ 의 두 근이 $x=1,\ 4$ 이므로 이차방정식 $ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$ 은 $x=1,\ 4$ 를 두 근으로 갖는다.

근과 계수의 관계에서

$\frac{4a-b}{a}=5$, $\frac{2a-2b+c}{a}=4$ 이므로 $b=-a,\ c=0$

즉 $f(x)=ax^2-ax$ 이고 $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

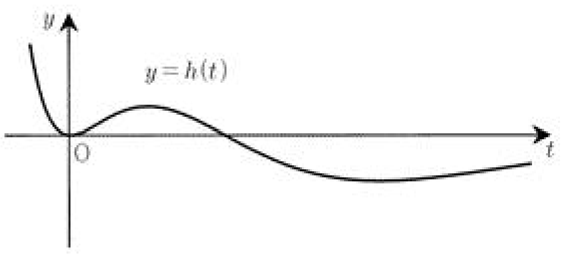
한편 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,\ g(t))$ 에서 그은 접선의 방정식은 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\ k)$ 를 지나므로

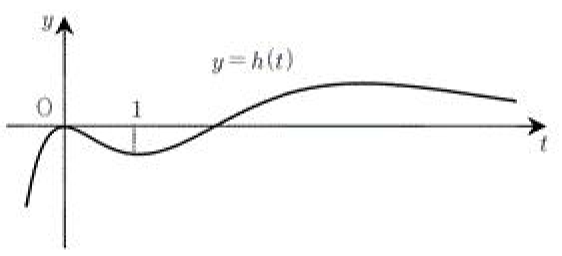
$k-g(t)=g'(t)(0-t)$ 에서 $k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$ 로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$ 의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$ 이어야 한다.

$a<0$ 인 경우 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$ 인 경우 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고 $h(1)=-1$ 이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$ 에서 $a=e$

$\therefore\ g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}$
$=72a^2e^{-2}=72e^2e^{-2}=72$

[다른 풀이]

$(1,\ g(1))$, $(4,\ g(4))$ 가 $y=g(x)$ 의 변곡점이므로 $g'(x)$ 와 $g''(x)$ 를 구해보면

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=e^{-x}(-f(x)+f'(x))$

$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ 라 하면

$f'(x)=2ax+b$, f 이므로

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

$(1,\ g(1))$, $(4,\ g(4))$ 가 $y=g(x)$ 의 변곡점이므로

$g''(1)=g''(4)=0$

따라서 $ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$ 의 근이 $x=1,\ 4$ 이다.

$\therefore\ b=-a,\ c=0$

즉 $f(x)=ax^2-ax$ 이고 $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$ 이고 $g'(x)=ae^{-x}(-x^2+3x-1)$ 이다.

$g(1)=0,\ g(4)=\frac{a}{e^4}\cdot 12$

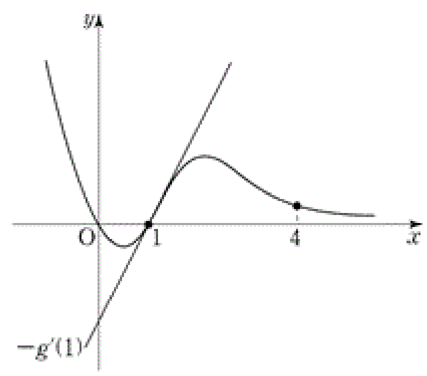
$g'(x)=0$ 에서 $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 일 때 극소,

$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 일 때 극대이다.

그리고 $\lim_{x\to\infty} ae^{-x}(x^2-x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} ae^{-x}(x^2-x)=+\infty$

따라서 $g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$ 에서 접선을 구하면

$y=g'(1)(x-1)$

이 접선의 y절편이 $-g'(1)$ 이므로

접선의 개수가 3인 k값의 범위가 $-1<k<0$ 이 되려면 $-g'(1)=-1$ 이 되어야 한다.

$\therefore\ g'(1)=\frac{a}{e}=1$ 에서 $a=e$

$g(x)=\frac{e}{e^x}(x^2-x)$ 이므로

$g(-2)=e^3\cdot 6$, $g(4)=\frac{1}{e^3}\cdot 12$

$\therefore\ g(-2)\times g(4)=e^3\times 6\times\frac{1}{e^3}\times 12=72$

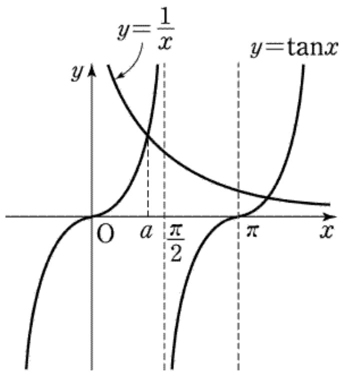
10) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=2\cos x-2x\sin x=2x\cos x\left(\frac{1}{x}-\tan x\right)$ 에서

$f'(a)=2\cos a-2a\sin a=2a\cos a\left(\frac{1}{a}-\tan a\right)=0$ 이므로

$\tan a=\frac{1}{a}$ 이다. (참)



ㄴ. 증감표를 그려보면

x	0		$\frac{\pi}{4}$		a		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	2	+	+	+	0	-	-	-	0	-	-2
$f(x)$	0	↗	↗	↗	$2a\cos a$	↘	↘	↘	0	↘	-2π

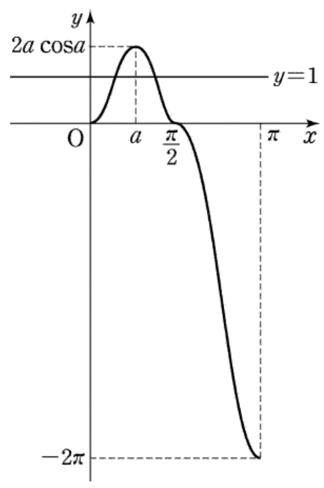
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{\pi}-\tan\frac{\pi}{4}\right)>0$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{\pi}-\tan\frac{\pi}{3}\right)<0$

사이값값의 정리에 의해 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{3}$ 이다.(참)

ㄷ. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{4}\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}>1$ 이고

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}>1$ 이므로 $f(a)>f\left(\frac{\pi}{3}\right)>1$ 이다.



구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(참)

[다른 풀이]

ㄴ. 함수 $f'(x)$ 는 모든 실수에서 연속이고

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi=\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)>0$

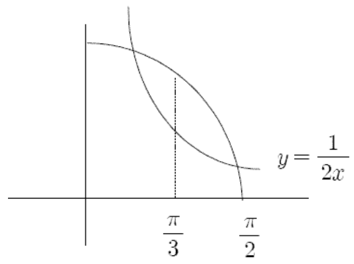
$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi<0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여

$f'(a)=0$ 인 실수 a 가 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$ 에 존재한다.

따라서 구간 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3}\right)$ 에서 극댓값을 가지는 실수 a 가 존재한다.(참)

ㄷ. $x=0$ 일 때, $2x\cos x=1$ 에서 $\cos x=\frac{1}{2x}$ 의 양변의 그래프를 그려보면

$x=\frac{\pi}{3}$ 에서 $y=\cos x$ 의 그래프가 $y=\frac{1}{2x}$ 의 그래프보다 위에 존재한다.($\because$ $\cos\frac{\pi}{3}>\frac{3}{2\pi}$)



따라서 구간 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 방정식 $f(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.(참)

11) 답 : ④

[해설]

$y=mx+2$ 와 $y=x^3-3x^2+1$ 의 교점의 개수는

$x^3-3x^2-mx-1=0$ 에서 교점의 좌표 $x\neq 0$ 이므로

$x^2-3x-\frac{1}{x}=m$ 의 실근의 개수와 같다.

$g(x)=x^2-3x-\frac{1}{x}$ 으로 놓고 미분을 이용하여 그려보면

$g'(x)=2x-3+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-3x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2}=0$

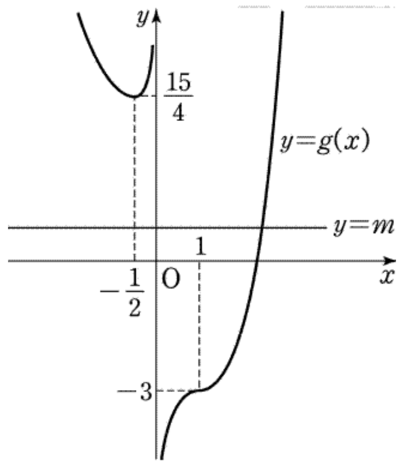
증감표를 그려보면

x		$-\frac{1}{2}$		(0)		1	
$g'(x)$	-	0	+	없음	+	0	+
$g(x)$	↘	$\frac{15}{4}$	↗	없음	↗	-3	↗

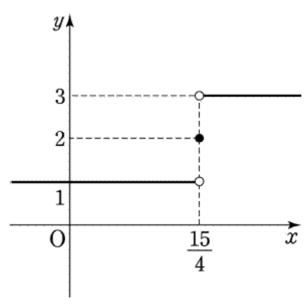
$\lim_{x\to 0-}g(x)=\infty,\ \lim_{x\to 0+}g(x)=-\infty$

$\lim_{x\to -\infty}g(x)=+\infty,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$ 이므로

$y=g(x)$ 와 $y=mx$ 의 그래프를 그려보면



$f(m)$ 은 $y=g(x)$ 와 $y=mx$ 의 교점의 개수이므로



따라서 a 의 최댓값은 $\frac{15}{4}$ 이다.

정답 및 해설

12) 답 : ②

[해설]

$y=e^x$ 의 $(1, e)$ 에서의 접선은

$y=e(x-1)+e=ex \ldots$①

$y=2\sqrt{x-k}$ 의 $x=t$ 에서의 접선은

$$y=\frac{1}{\sqrt{t-k}}(x-t)+2\sqrt{t-k}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{t-k}}x+\frac{-t+2(t-k)}{\sqrt{t-k}} \ldots ②$$

① 과 ②이 일치하므로

$e=\dfrac{1}{\sqrt{t-k}}$ 이며 정리하면

$t-2k=0 \therefore\ t=2k$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{e^2}$

[참고] $ex=2\sqrt{x-k}$ 를 정리하여 $D=0$ 임을 이용해도 된다.

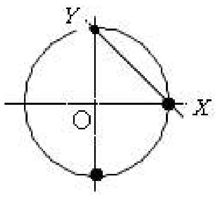
13) 답 : ③

[해설]

ㄱ(T) $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)\,(0<x<10)$

$$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{1}{10-x}=\frac{-5x+40}{x(10-x)}=\frac{-5(x-8)}{x(10-x)}$$

최댓값: $f(8)=4\ln 8+\ln 2=12\ln 2+\ln 2=13\ln 2$



ㄴ(T)위의 증감표(그래프 대용)를 보면 구간 $(0, 8)$ 에서 한 개, $(8, 10)$ 에서 한 개 모두 두 개의 실근을 갖는다.

ㄷ(F) $y=e^{f(x)}=e^{4\ln x+\ln(10-x)}=e^{\ln(10x^4-x^5)}$

$=10x^4-x^5\,(0<x<10)$

$y'=40x^3-5x^4$

$y''=120x^2-20x^3=-20x^3(x-6)$

곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $[4, 6]$ 에서 아래로 볼록, 구간 $(6, 8)$ 에서 위로 볼록이다.

14) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $f'(x)=1+\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

개구간 $(0, \pi)$에서 $f''(x)<0$ 이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다. ∴ 참

ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)$

$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$

개구간 $(0, \pi)$에서 $g'(x)>0$ 이므로

함수 $g(x)$는 증가한다. ∴ 참

ㄷ. $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$

$g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$

$\dfrac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$ 이고 $g(x)$는 미분가능이므로 평균값 정리에 의해

$g'(x)=1$ 인 x가 구간 $(0, \pi)$에 존재한다. ∴ 참

15) 답 : 50

[해설]

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x=4$

$\therefore\ x^3-3x^2+3x-1=0$

$\therefore\ (x-1)^3=0$

$\therefore\ x=1=a$

$b=f(a)=7$

$\therefore\ a^2+b^2=50$

16) 답 : ③

[해설]

P_1과 x축과 이루는 각을 θ라 하면

$P_1(\cos\theta, \sin\theta)$으로 들 수 있고

접선은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이 된다.

$Q_1\left(\dfrac{1}{\cos\theta}, 0\right)$이고, 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\tan\theta$가 된다.

넓이가 $\dfrac{1}{4}$ 이므로 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ 이다.

$$\triangle OP_2Q=\frac{1}{2}\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}$$

17) 답 : ⑤

[해설]

$y=g(x)$가 $f(x)$의 점 $(a, f(a))$에서의 접선이므로

$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

또, $g(x)$가 점 $B(b, f(b))$에서 $f(x)$에 접하므로

$f'(a)=g'(b)=f'(b)$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

ㄱ. $h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$

ㄴ. $h(a)=h(b)=0$ 이고 $h(x)$가 미분가능하므로 롤의 정리에 의하여, $h'(c)=0$ 인 c가 개구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$\therefore\ h'(a)=h'(b)=h'(c)=0$ 이므로

$h'(x)=0$ 은 적어도 3개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $h''(x)=f''(x)$ 이고, $h''(a)=f''(a)=0$ 이다.

또한, 점 $(a, f(a))$는 $y=f(x)$의 변곡점이므로

$f''(x)$는 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대이다.

따라서, $h''(x)$도 같으므로 $(a, h(a))$는 $h(x)$의 변곡점이다.

18) 답 : 83

[해설]

시각 t일 때, 선분 $\overline{OP}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ라 하면 $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{40}$ 이고, 점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다.

이때, 어두운 부분의 넓이 S는

$S=\frac{\pi}{2}+\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{\pi}{2}+\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta$

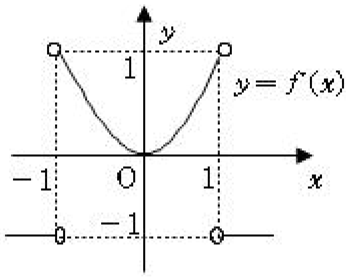
점 P가 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지날 때 $\theta=\frac{\pi}{6}, \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta=\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{dS}{dt}=(1+\cos 2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{40}=\frac{3}{80}=\frac{b}{a}$$
$$\therefore\ a+b=83$$

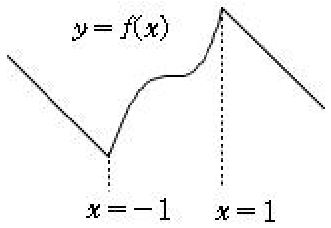
19) 답 : ④

[해설]

도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 연속함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to-1-0} f'(x)=-1<0$,

$\lim_{x\to-1+0} f'(x)=1>0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀐다.

따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값을 갖는다.(참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니므로

$f(x)=f(-x)$가 성립하지 않는다.(거짓)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)>f(0)$이므로

$f(0)=0$이면 $f(1)>0$이다.(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20) 답 : 11

[해설]

폐구간 $[-a, a]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{x-5}{(x-5)^2+36}$에서

$x-5=t$로 놓으면 구하는 함수의 최댓값과 최솟값은

폐구간 $[-a-5, a-5]$에서 정의된 함수 $f(t)=\frac{t}{t^2+36}$의 최댓값과 최솟값과 같다.

이제 함수 $f(t)=\frac{t}{t^2+36}$의 그래프의 개형을 그려보자.

i) $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프의 점근선은 x축이다.

ii) $t>0$일 때 $f(t)>0$이고, $t<0$일 때 $f(t)<0$이다.

iii) $f(-t)=-f(t)$이므로 $y=f(t)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

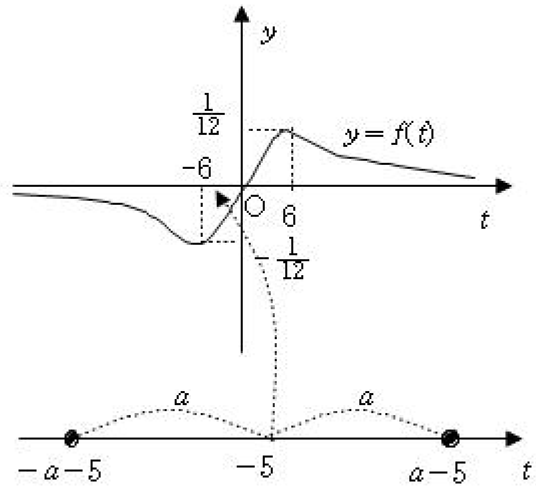
iv)

$$f'(t)=\frac{1(t^2+36)-t\cdot 2t}{(t^2+36)^2}=\frac{36-t^2}{(t^2+36)^2}=0$$

에서 $t=6$ 또는 $t=-6$이고 $f'(t)$의 분모는 항상 0보다 크므로

$f(x)$는 $t=-6$에서 극소이고 $t=6$에서 극대이다.

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 폐구간 $[-a-5, a-5]$은 $t=-5$에 대하여 대칭인 구간이므로

함수 $y=f(t)$의 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여 $M+m=0$

즉, $m=-M$을 만족하려면

폐구간 $[-a-5, a-5]$은 $t=-6$과 $t=6$을 모두 포함해야 한다.

$\therefore\ -a-5\le-6$이고 $a-5\ge 6$

$\therefore\ a\ge 1$이고 $a\ge 11$

$\therefore\ a\ge 11$

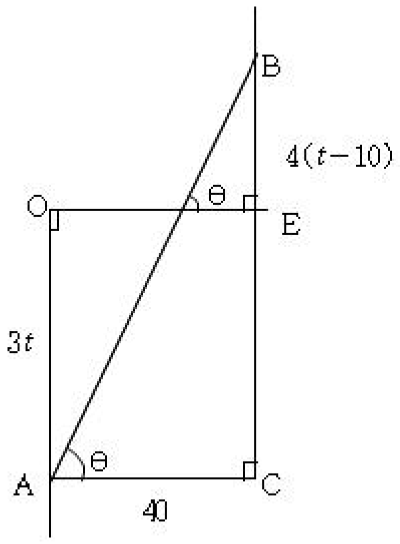
따라서 구하는 a의 최솟값은 11이다.

21) 답 : ③

[해설]

지점 O로부터 같이 출발한 지 t초가 지난 후 갑과 을의 위치를 각각 A, B라 하면

$\overline{OA}=3t$, $\overline{OB}=4(t-10)$이다.



따라서 위의 그림에서

$\overline{BC}=7t-40$, $\overline{AC}=40$

이므로

$$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{7t-40}{40}\ \cdots\ ①$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{7}{40}$$

$\therefore\ \dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{7}{40}\cdot\dfrac{1}{\sec^2\theta}$

$=\dfrac{7}{40}\cdot\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\cdots$ ②

① 에 $t=20$을 대입하면

$\tan\theta=\dfrac{5}{2}$ 이므로 이를 ②에 대입하면

$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{7}{40}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{25}{4}}=\dfrac{7}{40}\cdot\dfrac{4}{29}$

$=\dfrac{7}{290}$ (라디안/초)

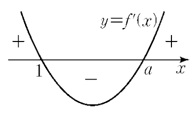
22) 답 : ④

[해설]

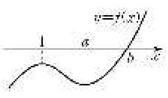
$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2$ 에서

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$

$=[6(x-a)(x-1)]$ ←㈎



$a>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서[극댓값]을 가진다.



㈏

그런데 $f(1)=-a+1<0$이고,

$f(b)=0$이므로

아래 그림과 같이 $a[<]b$㈐

23) 답 : ①

[해설]

$f(-x)=-f(x)$에서

ㄱ. 양변을 미분하면 $f'(-x)\cdot(-1)=-f'(x)$이므로

$f'(-x)=f'(x)$ ∴ 참

ㄴ.(반례) $f(x)=x^3-x$라 하면

$f(x)$는 이계도함수를 가지고 $f(-x)=-f(x)$이지만

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}(3x^2-1)=-1$

∴ 거짓

ㄷ. $f'(-x)=f'(x)$이므로 도함수 $f'(x)$는 우함수이다.

즉, $x=a(a\neq0)$에서 극댓값을 가지면 $x=-a$에서 극댓값을 갖는다.

∴ 거짓

24) 답 : ②

[해설]

처음 물의 양을 $m\pi$라 하면

$m\pi=\pi\displaystyle\int_0^u\frac{1}{3}ydy+\pi\int_0^v ydy-\pi\int_0^v\frac{1}{3}ydy$

$=\pi\displaystyle\int_0^u\frac{1}{3}ydy+\pi\int_0^v\frac{2}{3}ydy$

$=\pi\left[\dfrac{1}{6}y^2\right]_0^u+\pi\left[\dfrac{1}{3}y^2\right]_0^v$

$=\dfrac{\pi}{6}u^2+\dfrac{\pi}{3}v^2$

$\therefore\ \dfrac{1}{6}u^2+\dfrac{1}{3}v^2=m\cdots$①

① 의 양변을 u에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{3}u+\dfrac{2}{3}v\cdot\dfrac{dv}{du}=0,\ \dfrac{dv}{du}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{v}$

따라서 v가 u의 $\dfrac{1}{2}$이 되는 순간의 $\dfrac{dv}{du}$의 값은

$\dfrac{dv}{du}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{\frac{1}{2}u}=-1\ (\because\ v=\dfrac{1}{2}u)$

25) 답 : 18

[해설]

$\ln x-x+20-n=0$

$\therefore\ x-\ln x=20-n(x>0)\cdots$ ①

$y=f(x)=x-\ln x(x>0)$로 놓으면

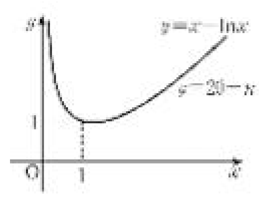
$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 이므로

$f'(x)=0$이 되는 x의 값은 $x=1$이다.

또한, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로

$y=f(x)$의 증감과 그래프의 개형을 조사하면 아래와 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	1	↗



이 그림으로부터 방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가질 조건을 구하면

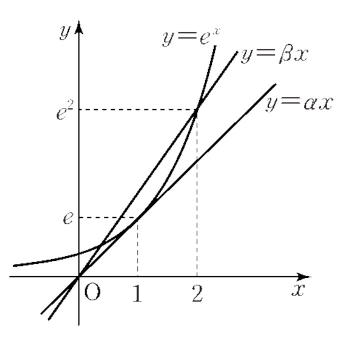
$20-n>1$ ∴ $n<19$ÿ

26) 답 : ⑤

[해설]

$y=e^x$의 접선 중 원점을 지나는 것은 $y=ex$

즉, $(1,\ e)$에서의 접선과 같다.



$\beta\geq\dfrac{e^2}{2},\ \alpha\leq e$

따라서 $\beta-\alpha$의 최솟값은 $\dfrac{e^2}{2}-e=e\left(\dfrac{e}{2}-1\right)$

27) 답 : ①

[해설]

$x^3-xy^2=10$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$3x^2-\left(y^2+x\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}$$

따라서, 점 $(-2,3)$에서의 미분계수는

$$\frac{3\cdot 4-9}{2\cdot(-2)\cdot 3}=\frac{3}{-12}=-\frac{1}{4}$$

28) 답 : ②

[해설]

$y=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서 $y'=\dfrac{(\ln x)'(x)-\ln x(x)'}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

도함수 $y=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x>e$이면 $y'<0$

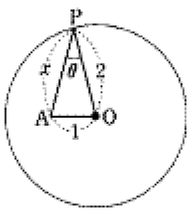
$0<x<e$이면 $y'>0$이므로

함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 는 $x=e$에서 극대이며 최대이다.

29) 답 : ②

[해설]

$\triangle APO$에서 사인법칙을 쓰면



$$\frac{2}{\sin A}=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{\sin A}{2}$$

따라서, $\sin A=1$일 때 $\sin\theta$는 최댓값 $\dfrac{1}{2}$을 가진다.

그러므로 최댓값 $=20\cdot\dfrac{1}{2}=10$

[별해]

$\overline{AP}=x(km)$라 하면 $\triangle AOP$에서

$$\cos\theta=\frac{2^2+x^2-1^2}{2\cdot 2x}=\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}\ \geq 2\sqrt{\frac{x}{4}\cdot\frac{3}{4x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

θ가 예각이므로 $\theta\leq\dfrac{\pi}{6}$

$$\therefore\ 20\sin\theta\leq 20\sin\frac{\pi}{6}=10$$

따라서, 구하는 최댓값은 $10(m/s)$

30) 답 : ④

[해설]

P를 원점 O, 보트 자동차의 출발점을 각각 $(40,0,0)$, $(0,-30,20)$으로 하는 공간좌표를 정하면

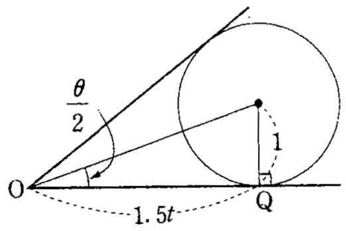
t초 후의 각각의 위치 A, B는

$A(40-10t,0,0)$, $B(0,-30+20t,20)$

$$\overline{AB}^2=(40-10t)^2+(-30+20t)^2+20^2$$
$$=100(t^2-8t+16)+100(4t^2-12t+9)+400$$
$$=100(5t^2-20t+29)$$
$$=100\{5(t-2)^2+9\}\ \geq 900$$
$$\therefore\ \overline{AB}\geq 30$$

31) 답 : ①

[해설]



t초 후의 선분 OQ의 길이는 $1.5t$이므로

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1.5t}=\frac{2}{3t}$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\frac{4}{3t}}{1-\frac{4}{9t^2}}=\frac{12t}{9t^2-4}$$

양변을 t에 관하여 미분하면

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{12(9t^2-4)-12t\times 18t}{(9t^2-4)^2}$$

$$\therefore\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{-12(9t^2+4)}{(9t^2-4)^2}\cdot\cos^2\theta$$

그런데 $\overline{OQ}=2$이면 $1.5t=2$에서 $t=\dfrac{4}{3}$

이때 $\tan\theta=\dfrac{4}{3}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$이므로

$$\left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=\frac{4}{3}}=\frac{-12\left\{9\times\left(\frac{4}{3}\right)^2+4\right\}}{\left\{9\times\left(\frac{4}{3}\right)^2-4\right\}}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=-\frac{3}{5}$$

32) 답 : 96

[해설]

$$y'=\frac{-4x}{(x^2+b)^2}$$

$$y''=\frac{-4(x^2+b)^2-(-4x)\times 2(x^2+b)\times 2x}{(x^2+b)^4}$$
$$=\frac{-4(x^2+b-4x^2)}{(x^2+b)^3}=\frac{-4(b-3x^2)}{(x^2+b)^3}$$

$(2,\ a)$가 변곡점이므로 $y''_{x=2}=0$

$\therefore\ b=12$

곡선 $y=\dfrac{2}{x^2+b}$는 $(2,\ a)$를 지나므로 곡선에 대입하면

$$a=\frac{2}{2^2+12}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{12}{\frac{1}{8}}=96$$

33) 답 : ②

[해설]

$f'(x)=-(x-4)(x+2)e^{-x+1}$ 에서

$x=-2$ 에서 극솟값 a 를 갖고 $x=4$ 에서 극댓값 b 를 갖는다.

$a=f(-2)=-4e^3$

$b=f(4)=8e^{-3}$

따라서 $ab=-32$ 이다.

34) 답 : ①

[해설]

$y'=\dfrac{1}{x-3}$ 이므로 $x=4$ 일 때, 미분계수는 1이다.

곡선 위의 점 $(4, 1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하면

$y=x-3$ 이다.

$\therefore\ a=1, b=-3$

따라서 $a+b=-2$ 이다.

35) 답 : ②

[해설]

$f(x)=m(x-a)(x-c)(x-e)$, $g(x)=n(x-c)$ (m, n은 양수)

라 놓으면 $f(x)g(x)=mn(x-a)(x-c)^2(x-e)$ 이고

그래프의 개형으로부터 $a<x<b$ 인 구간과 $d<x<e$ 인 구간에서 극솟값을 가짐을 알 수 있다.

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$는 $(a,\ 0)$, $(c,\ 0)$, $(e,\ 0)$을 지나고 최고차항이 양수이므로

$f(x)=k_1(x-a)(x-c)(x-e)$ (단, k_1은 양수)

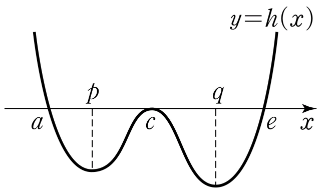
일차함수 $g(x)$는 $(c,\ 0)$을 지나고 기울기가 양수이므로

$g(x)=k_2(x-c)$ (단, k_2는 양수)

$h(x)=f(x)\ g(x)$라 하면

$h(x)=k_1k_2\ (x-a)(x-c)^2(x-e)$

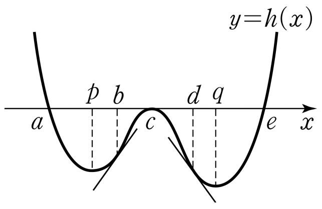
함수 $h(x)$는 $x=p$, $x=q$에서 극소이고 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이고,

$h'(b)=f'(b)g(b)+f(b)g'(b)=f(b)\cdot k_2>0$ ($\because$ $f(b)>0$, $f'(b)=0$)

$h'(d)=f'(d)g(d)+f(d)g'(d)=f(d)\cdot k_2<0$ ($\because$ $f(d)<0$, $f'(d)=0$)



따라서 다음 관계가 성립한다.

$a<p<b<c<d<q<e$

$\therefore\ a<p<b$ 이고 $d<q<e$

36) 답 : ①

[해설]

ㄱ. (가), (나)에 의하여

$f(x)=-f(-x)$ 이고 $f(-x)\neq 1$ 이므로

$-f(-x)\neq -1$ 이다.

$\therefore\ f(x)\neq -1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f(x)$는 전 구간에서 미분 가능하고 연속인 원점 대칭 함수이므로 반드시 원점을 지나야 한다.

또한 $f(x)\neq 1$, $f(x)\neq -1$ 이기 위해 $f(x)$은 -1과 1 사이여야 한다.

$\therefore\ -1<f(x)<1$

(다)에서

$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

$=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$

$=1-\{f(x)\}^2$

$\therefore\ f'(x)>0$

함수 $f(x)$는 전 구간에서 증가한다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$

양변을 미분하면 $f''(x)=-2f(x)f'(x)$

$(0, 0)$ 에서만 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점은 오직 하나이다. $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

다른 풀이

ㄷ에서

$f(x)=-f(-x)$

$f'(x)=(1+f(x))(1-f(x))$

$$\frac{f'(x)}{(1+f(x))(1-f(x))}=1$$

$$\frac{f'(x)}{(f(x)+1)(f(x)-1)}=-1$$

$$\int\left\{\frac{f'(x)}{f(x)-1}-\frac{f'(x)}{f(x)+1}\right\}dx=\int -2dx$$

$\ln|f(x)-1|-\ln|f(x)+1|=-2x+C$

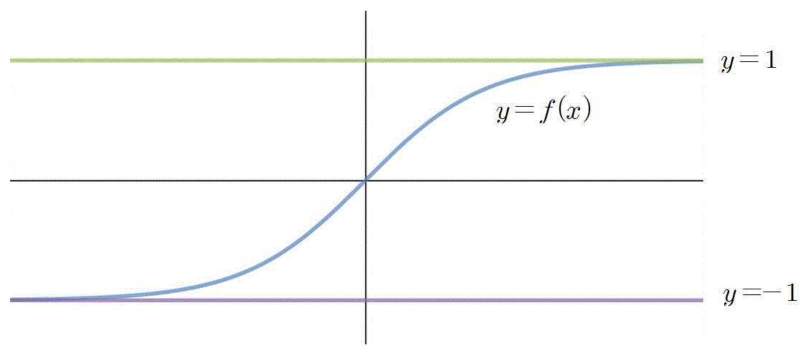
$f(0)=0$ 이므로 $\therefore\ C=0$

$$-\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=e^{-2x}$$

$1-f(x)=e^{-2x}f(x)+e^{-2x}$

$(e^{-2x}+1)f(x)=1-e^{-2x}$

$$f(x)=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

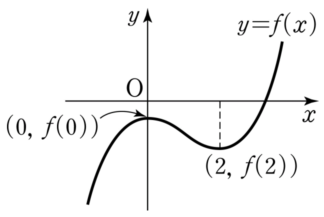


37) 답 : ⑤

[해설]

삼차 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

ㄱ. 아래 그림에서 알 수 있듯이 $f(0)<0$이면 $|f(0)|<|f(2)|$이 성립한다.

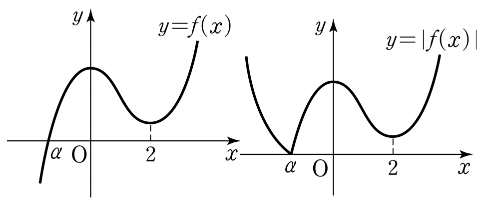


$\therefore$ $|f(0)|<|f(2)|$ (참)

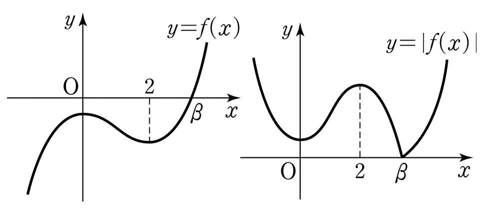
ㄴ. $f(0)f(2)\ge 0$을 만족하는 $|f(x)|$의 그래프의 개형은 다음과 같으므로

따라서 $|f(x)|$는 $x=\alpha$와 $x=2$에서 극소이다.

따라서 a의 개수는 2이다.



ㄷ. $f(0)+f(2)=0$이면 x축에 대하여 대칭인 모양이 되므로 $|f(x)|=f(0)$은 서로 다른 4개의 실근을 갖는다.



38) 답 : ④

[해설]

곡선 $y=\ln 5x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$에서의 접선을 구해보면

$y'=\frac{1}{x}$ 이므로 기울기는 5이고,

따라서 접선은 $y=5\left(x-\frac{1}{5}\right)=5x-1$

따라서 y절편은 -1

39) 답 : ⑤

[해설]

[해설]

$g'(x)=f(x)$이므로

$y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(2)(x-2)+g(2)$

$=f(2)(x-2)+g(2)$

$=x-2+g(2)$

접선의 방정식의 y절편이 -5이므로 $g(2)=-3$이고 접선의 방정식은

$y=x-5$

따라서 접선의 x절편은 5이다.

40) 답 : ③

[해설]

일차함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)\le g(x)$ 이려면 $g(x)$는 $x=1$에서 $f(x)$의 접선이다.

$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{4}x$

$f'(1)=\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $g(x)=\frac{\pi}{2}(x-1)+2$

$\therefore$ $g(3)=\pi+2$

41) 답 : 15

[해설]

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$

$f(x)$ 가 $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로

$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$의 근이 $x=\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에서 $-\frac{2a+b}{a}=0$, $\frac{b+c}{a}=-3$ 이므로

$b=-2a$, $c=-a$

$\therefore$ $f'(x)=a(x^2-3)e^x$, $f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$

$0\le x_1<x_2$; 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)+x_2-x_1\ge 0$ 이므로 양변을 $x_2-x_1(>0)$로

나누어 식을 정리하면 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}\ge -1$

$f(x)$ 가 $x\ge 0$ 에서 연속이고 미분 가능하므로

평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c)$

$(0\le x_1<c<x_2;)$이다.

$\therefore$ $f'(c)\ge -1$

즉, $x\ge 0$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값이 -1 이고

$f(x)$ 의 변곡점에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 가지므로

$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=0$ 에서 $x=-3, 1$

$x\ge 0$ 을 만족하는 $x=1$ 에서 $f'(x)$ 의 최솟값을 갖는다.

$f'(1)=-2ae=-1$ 에서 $a=\frac{1}{2e}$ $\therefore$ $a\le \frac{1}{2e}$

따라서, $abc=a(-2a)(-a)=2a^3\le 2\left(\frac{1}{2e}\right)^3=\frac{\frac{1}{4}}{e^3}$ 이므로 $k=\frac{1}{4}$

$\therefore$ $60k=15$

42) 답 : 8

[해설]

함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 4 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$

이고 $t=0$과 $t=1$에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$과 $t=1$에서 연속이므로

$$\begin{cases}\lim_{t\to+0} f(t)g(t)=4g(0)\\ \lim_{t\to-0} f(t)g(t)=0\\ f(0)g(0)=2g(0)\end{cases}$$

$\therefore\ g(0)=0$

$$\begin{cases}\lim_{t\to1+0} f(t)g(t)=2g(1)\\ \lim_{t\to1-0} f(t)g(t)=4g(1) \quad 2g(1)=4g(1)=3g(1)\\ f(1)g(1)=3g(1)\end{cases}$$

$\therefore\ g(1)=0$

따라서 $g(t)=t(t-1)$이고,

$f(3)+g(3)=2+6=8$이다.

43) 답 : 50

[해설]

[접선의 방정식]

점 $(e,\ -e)$는 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(e)=-e$

$y=f(x)$ 위의 점 $(e,\ -e)$에서의 접선의 기울기를 $f'(e)=a$라 하자.

$y=g(x)$를 미분하면

$g'(x)=f'(x)\cdot \ln x^4+f(x)\cdot \dfrac{4}{x}$ 이고

$y=g(x)$ 위의 점 $(e,\ -4e)$에서의 접선의 기울기

$g'(e)=f'(e)\cdot \ln e^4+f(e)\cdot \dfrac{4}{e}=4a-4$

$x=e$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 접선이 수직이므로

$f'(e)\times g'(e)=-1$

$a(4a-4)=-1$

$4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 100f'(e)=100a=50$

44) 답 : ③

[해설]

$f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$

$f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}e^x-e^x x^n}{(e^x)^2}=\dfrac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}$

ㄱ. $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$ 에서

$f'\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n-1}\left(n-\dfrac{n}{2}\right)}{e^{\frac{n}{2}}}=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$ 따라서 $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f'(x)=-x^{n-1}(x-n)e^{-x}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↗		↘

ii) n 이 짝수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

$\therefore$ 참

ㄷ. $f''(x)=e^{-x}x^{n-2}\left(x^2-2nx+n(n-1)\right)$

$f''(0)=0$

i) n 이 홀수일 때 $x<0\ \rightarrow f''(x)<0$

$x>0 \rightarrow f''(x)>0$

ii) n 이 짝수일 때 $x<0\ \rightarrow f''(x)>0$

$x>0 \rightarrow f''(x)>0$

n 이 짝수일 때 $x=0$ 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호 변화가 없다

$\therefore$ 거짓

(참고) ㄴ에서 n 이 짝수일 때는 $x=0$ 에서 극솟값을 가지므로 $(0,\ 0)$ 에서 변곡점이 될 수 없다.

[MIM edu:자세한 풀이]

ㄱ. $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=\left(\dfrac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}$, $f'(x)$를 구하면,

$f'(x)=e^{-x}(nx^{n-1}-x^n)$에 $x=\dfrac{n}{2}$ 대입

$f'\left(\dfrac{n}{2}\right)=\left(\dfrac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}=f\left(\dfrac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ, ㄷ. $f'(x)$의 그래프를 그리면 된다.

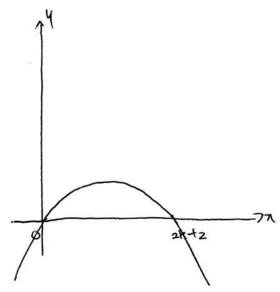
여기서 n이 홀수인 경우와 짝수인 경우를 나눠서 그래프를 그리는 것이 중요하다.

또, e^{-x}가 실수 전체에서 0보다 크기 때문에,

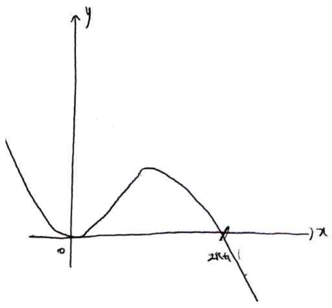
$g(x)=nx^{n-1}-x^n$만 그려서,

도함수의 부호를 조사하는 것도 좋은 방법이다.

i) $n=2k+2\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



ii) $n=2k+1\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



그래프를 보면, ㄴ은 n이 홀수이어도 성립하고,
짝수여도 성립함을 알 수 있다.
반면 ㄷ의 경우,
$n=2k+2$인 경우에 성립하지 않음을 알 수 있다.
따라서 ㄴ은 참이고 ㄷ은 거짓이다.
정답은 ㄱ, ㄴ

45) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 미분법을 이용하여 극솟값을 가질 조건을 찾는다.

$f(x)=\sin\dfrac{x}{e^{2x}}$ $=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x$

$=e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$이고

$f''(x)=-2e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)+e^{-2x}(-2\cos x-\sin x)$

$=e^{-2x}(3\sin x-4\cos x)$이다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 가지므로

$f'(a)=0,\ f''(a)>0$이어야 한다.

이때 $e^{-2a}>0$이므로

$-2\sin a+\cos a=0$ ⋯ ①

$3\sin a-4\cos a>0$ ⋯ ②이 성립해야 한다.

① 에서 $\cos a=2\sin a$이므로

$\tan a=\dfrac{1}{2}$

① 을 ②에 대입하면

$-5\sin a>0$

따라서 $\tan a>0$이고, $\sin a<0$이므로

$\pi<a<\dfrac{3}{2}\pi$

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$

$\cos a=\dfrac{1}{\sec a}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \cos a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ $\left(\because\ \pi<a<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

[다른 풀이]

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이어야 한다.

$f(x)=\sin\dfrac{x}{e^{2x}}=e^{-2x}\sin x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\sin x+e^{-2x}\cos x$

$=-e^{-2x}(2\sin x-\cos x)$

이때 $-e^{-2a}(2\sin a-\cos a)=0$에서 $\tan a=\dfrac{1}{2}$

i) $0<a<\dfrac{\pi}{2}$일 때

$0<x<a$이면 $\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)>0$

$a<x<\dfrac{\pi}{2}$이면 $\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

ii) $\pi<a<\dfrac{3}{2}\pi$일 때

$\pi<x<a$이면 $\sin x>\sin a$이고 $\cos x<\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x>2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)<0$

$a<x<\dfrac{3\pi}{2}$이면 $\sin x<\sin a$이고 $\cos x>\cos a$이므로

$2\sin x-\cos x<2\sin a-\cos a=0$

$\therefore\ f'(x)>0$

따라서 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

$\sec^2 a=1+\tan^2 a=\dfrac{5}{4}$에서

$\sec a=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because\ \pi<a<\dfrac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore\ \cos a=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

[다른 풀이]

$f(x)=\sin\dfrac{x}{e^{2x}}$는 미분가능한 함수이므로 몫의 미분법을 사용하면

$f'(x)=\dfrac{e^{2x}\cos x-2e^{2x}\sin x}{\left(e^{2x}\right)^2}$

$=-\dfrac{2\sin x-\cos x}{e^{2x}}$

이때 삼각함수의 합성에 의해서

$2\sin x-\cos x=\sqrt{5}\sin(x-\alpha)$ 이므로 (단,

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$)

$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{5}\sin(x-\alpha)}{e^{2x}}$

이때 $f'(x)=0$에서 $\sin(x-\alpha)=0$이므로

$x-\alpha=0$ 또는 $x-\alpha=\pi$

$\therefore\ x=\alpha$ 또는 $x=\pi+\alpha$

이때 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi+\alpha$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\pi+\alpha)$	$\nearrow$	

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\pi+\alpha$에서 극솟값을 갖는다.

$\therefore\ a=\pi+\alpha$

$\therefore\ \cos a=\cos(\pi+\alpha)$

$=-\cos\alpha$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

46) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 미분법을 이용하여 넓이의 순간변화율을 구한다.

네 점 A, B, C, D의 좌표는 $A(\log_4 a,\ a)$, $B(\log_2 a,\ a)$, $C(\log_2 a,\ a^2)$, $D(2\log_2 a,\ a^2)$이다.

$\overline{CD}=\log_2 a$, $\overline{BC}=a^2-a$이므로

삼각형 ADC의 넓이를 $S(a)$라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}(a^2-a)\cdot\log_2 a$$

$$S'(a)=\frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\frac{1}{2}(a^2-a)\frac{1}{a\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\frac{1}{2\ln 2}(a-1)$$

$$\therefore\ S'(4)=7+\frac{3}{2\ln 2}$$

이때 $\dfrac{dS}{dt}=S'(a)\dfrac{da}{dt}$이고 $\dfrac{da}{dt}=1$이므로

구하는 순간변화율은 $\left(7+\dfrac{3}{2\ln 2}\right)\times 1=7+\dfrac{3}{2\ln 2}$

[다른 풀이]

점 P가 점 $(0,2)$를 출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는 $(0,\ 2+t)$이므로

삼각형 ADC의 넓이는

$$S(t)=\frac{1}{2}(t^2+3t+2)\cdot\log_2(t+2)$$

$$S'(t)=\frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\frac{1}{2}(t^2+3t+2)\frac{1}{(t+2)\ln 2}$$

$$=\frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\frac{1}{2\ln 2}(t+1)$$

점 P가 점 $(0,4)$를 지나는 순간은 $t=2$일 때이므로 구하는 순간변화율은

$$\therefore\ S'(2)=\frac{1}{2}(2\times 2+3)\log_2(2+2)+\frac{1}{2\ln 2}(2+1)$$

$$=7+\frac{3}{2\ln 2}$$

47) 답 : ④

[해설]

해설

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x\ (a>0)$$

$$f'(x)=x-\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}=0$$

$f'(x)=0$에서 $x=\sqrt{a}$이므로 함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$의 극솟값은

$$f(\sqrt{a})=\frac{1}{2}a-a\ln\sqrt{a}=0,$$

$$\therefore\ a=e$$

48) 답 : ⑤

[해설]

해설

ㄱ. $f'(x)=\dfrac{1}{27}(4x^3-18x^2+24x+19)$

$$f''(x)=\frac{1}{27}(12x^2-36x+24)=\frac{1}{27}(x-1)(x-2)$$

$f''(2)=0$이고 좌우에서 부호가 바뀌므로 변곡점이다(참)

ㄴ. $f(x)=x$

$\dfrac{1}{27}(x^4-6x^3+12x^2+19x)=x$에서

$x^4-6x^3+12x^2-8x=0$이며 인수분해하면

$=\dfrac{1}{27}x(x-2)^3=0$에서

실근은 $0,\ 2$이므로 양의 실근은 2뿐이다(참)

ㄷ. $f(2)=2,\ f'(2)=1$이므로

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(2)}=1$

$0<x<2$에서 $f(x)<x$이므로

$f(x)<g(x)$

$x\ge 2$에서 $f(x)>x$이므로

$f(x)\ge g(x)$

$H(x)=|f(x)-g(x)|$라 하면

$x<2$에서 $H(x)=g(x)-f(x)$

$x\ge 2$에서 $H(x)=f(x)-g(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=1\text{이므로}$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{H(2+h)-H(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0-}\left(\frac{g(2+h)-g(2)}{h}-\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)$$

$$=0$$

같은 방법으로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{H(2+h)-H(2)}{h}=0$$

$\therefore$ $H(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다(참)

49) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]합성함수의 미분법을 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

ㄱ. α,β,γ는 방정식 $f(x)=x$의 근이므로

$f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta,\ f(\gamma)=\gamma$

$\therefore\ f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$

$f(f(\beta))=f(\beta)=\beta$

$f(f(\gamma))=f(\gamma)=\gamma$

따라서, α,β,γ는 방정식 $f(f(x))=x$의 근이다.(참)

ㄴ. $f(x)-x$가 삼차식이므로

$h(x)=px^2+qx+r$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+h(x)$

$=\{f(x)-x\}g(x)+px^2+qx+r$

$f(f(\alpha))=p\alpha^2+q\alpha+r=\alpha \cdots ①$

$f(f(\beta))=p\beta^2+q\beta+r=\beta \cdots ②$

$f(f(\gamma))=p\gamma^2+q\gamma+r=\gamma \cdots ③$

① -②에서 $p(\alpha^2-\beta^2)+q(\alpha-\beta)=\alpha-\beta$

$\alpha \neq \beta$이므로 $p(\alpha+\beta)+q=1 \cdots ④$

② -③에서 $p(\beta^2-\gamma^2)+q(\beta-\gamma)=\beta-\gamma$

$\beta \neq \gamma$이므로 $p(\beta+\gamma)+q=1 \cdots ⑤$

④ -⑤에서 $p(\alpha-\gamma)=0$

$\alpha \neq \gamma$이므로 $p=0$

④ 에서 $q=1$

① 에서 $\alpha+r=\alpha$이므로 $r=0$

$\therefore\ h(x)=x$ (참)

ㄷ. $f(f(x))=\{f(x)-x\}g(x)+x \cdots (\cdot)$

조건㈏, ㈐에서

$f(3)=7,\ f(f(3))=5$이므로

$f(f(3))=\{f(3)-3\}g(3)+3$에서

$5=(7-3)g(3)+3 \therefore\ g(3)=\frac{1}{2}$

$(\cdot)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)=\{f'(x)-1\}g(x)+\{f(x)-x\}g'(x)+1$

$x=3$을 대입하면

$f'(f(3))f'(3)=\{f'(3)-1\}g(3)+\{f(3)-3\}g'(3)+1$

조건㈏에서 $f'(3)=0$이므로

$0=(0-1)\times\frac{1}{2}+(7-3)g'(3)+1$

$4g'(3)=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ g'(3)=-\frac{1}{8}$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

50) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=\left(-\frac{\ln 1}{ax}\right)^2=(\ln ax)^2$에서

$f'(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{e}{a}$

$x<\frac{e}{a}$일 때, $f''(x)>0$이고 $x>\frac{e}{a}$일 때, $f''(x)<0$이다.

따라서 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a},1\right)$

변곡점이 직선 $y=2x$위에 있으므로 $\frac{2e}{a}=1$,

$\therefore\ a=2e$

51) 답 : ③

[해설]

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

위의 표에서 $x<1,\ 1<x<3$일 때, $f''(x)>0$이므로

$f'(x)$는 증가하고 이 구간에서 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

또한, $x=1$일 때, $f'(x)=0$이므로

$x=1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌게 된다.

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 그래프는 아래로 볼록하다.

ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$에서 $g'(x)=\cos(f(x))\times f'(x)$

$\therefore\ g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)=\cos\pi\times f'(3)=(-1)\times 1=-1$

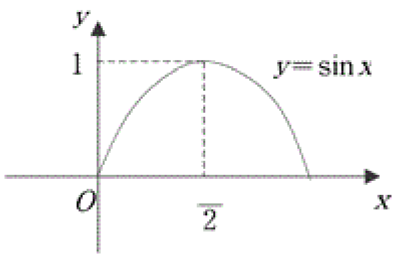
(참)

ㄴ. $1<x<3$에서 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하며 증가하므로

$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$

따라서 $\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$에서

$g(x)=\sin(f(x))$의 그래프는 감소하면서 위로 볼록하다.



$x=1$일 때,

$g'(1)=\cos(f(1))\times f'(1)=\cos\frac{\pi}{2}\times 0=0$

$x=3$일 때,

$g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)=\cos\pi\times 1=-1$

따라서 $1<a<b<3$에서

$-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$ (참)

ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))\times f'(x)\times f'(x)+\cos(f(x))\times f''(x)$

$x=1$일 때,

$g''(1)=-\sin(f(1))\times f'(1)\times f'(1)+\cos(f(1))\times f''(1)$

$-\sin\frac{\pi}{2}\times 0\times 0+\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=0$

이지만 $x<1$과 $x>1$에서 $g''(x)$의 부호가 같으므로

$x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

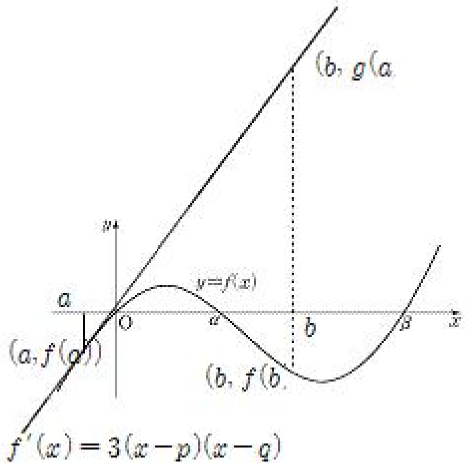
52) 답 : ④

[해설]

문제의 그림에서 삼차 함수 $f(x)$는 극대, 극소를 갖는다.

따라서 $x=p$에서 극댓값, $x=q$에서 극솟값을 갖는다고 하면

도함수 $f'(x)$는 서로 다른 두 실근 p,q를 갖는다.(단, $0<p<\alpha,\ \alpha<q<\beta$)



$f'(x)=3(x-p)(x-q)$

ㄱ. $g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$이므로

방정식 $g(x)-f(a)=0 \Leftrightarrow (b-a)f'(x)=0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.(참)

ㄴ. 함수 $g(x)-f(a)=3(b-a)(x-p)(x-q)$에 $x=b$를 대입하면

$g(b)-f(a)=3(b-a)(b-p)(b-q)$이다.

$\therefore$ $b>q$이면 $g(b)-f(a)>0$

$b<q$이면 $g(b)-f(a)<0$ (거짓)

ㄷ. 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이며

$\alpha<x<\beta$에서 접선은 삼차 함수 $y=f(x)$보다 위에 있음을 알 수 있다.

여기서 $x=b$를 대입하면

$f'(a)(b-a)+f(a)=g(a)$이므로

$g(a)>f(b)$이다.(참)

53) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\left(\sqrt{9n^2+1}+n\right)}{\left(\sqrt{9n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{9n^2+1}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(2n+1)^2(9n^2+1)}+2n^2+n}{8n^2+1}$$

분모, 분자를 n^2으로 나누면(준식) $=\dfrac{\sqrt{36}+2}{8}=1$

54) 답 : ④

[해설]

ㄱ. $0<x^2<1$이므로, $x^2\sin\dfrac{x^2}{2}<\sin\dfrac{x^2}{2}$ …①

$0<\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{1}{2}<\dfrac{\pi}{6}$이므로, $\sin\dfrac{x^2}{2}<\cos\dfrac{x^2}{2}$ …②

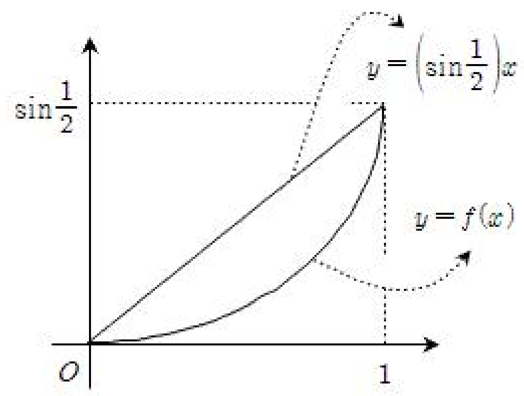
①, ② 에 의해 $x^2\sin\dfrac{x^2}{2}<f(x)<\cos\dfrac{x^2}{2}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $f'(x)=x\cos\dfrac{x^2}{2}$, $f''(x)=\cos\dfrac{x^2}{2}-x^2\sin\dfrac{x^2}{2}>0$

($\because$ ㄱ.에 의해)

따라서, $y=f(x)$는 $0<x<1$에서 아래로 볼록. $\therefore$ 거짓

ㄷ.



$0<x<1$에서 아래로 볼록이므로, [그림]에서 $f(x)\le\left(\sin\dfrac{1}{2}\right)x$

따라서, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1\left(\sin\frac{1}{2}\right)xdx=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$ $\therefore$ 참

55) 답 : ③

[해설]

$y=\cos^n x$

$y'=n\cos^{n-1}x\cdot(-\sin x)$

$y''=n(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\cdot(-\sin x)-n\cos^{n-1}x\cdot\cos x$

$=n\cos^{n-2}x\{(n-1)\sin^2 x-\cos^2 x\}$

변곡점을 찾기 위해 $y''=0$으로 놓으면

$(n-1)\sin^2 x-\cos^2 x=0$ ($\because$ $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos^{n-2}x\neq 0$)

$\therefore$ $\tan^2 x=\dfrac{1}{n-1}$

이를 만족하는 x를 α라 하면

$\tan^2\alpha=\dfrac{1}{n-1}$, 여기서 $\tan^2\alpha=\sec^2\alpha-1$이므로

$\sec^2\alpha=\dfrac{n}{n-1}$ 즉, $\cos^2\alpha=1-\dfrac{1}{n}$

변곡점의 y좌표 $a_n=\cos^n\alpha=(\cos^2\alpha)^{\frac{n}{2}}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

56) 답 : ⑤

[해설]

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표를 각각 $\alpha, 1, \beta$라 놓으면

ㄱ. $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이지만 $x=1$에서는 극대 또는 극소는 아니다.(거짓)

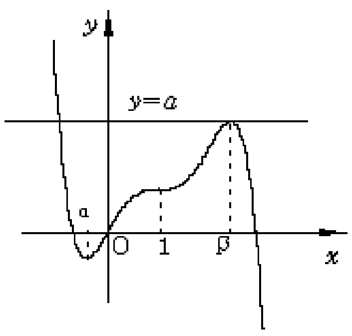
ㄴ. $4<x<6$에서 $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

따라서 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$y=f(x)$와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$의 극댓값은 a이다.(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.[정답]⑤



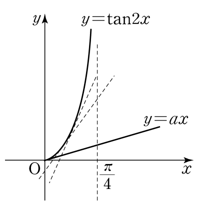
57) 답 : ④

[해설]

$f(x)=\tan 2x$라 하자.

주어진 조건 $\tan 2x > ax$을 만족하려면

아래 그림과 같이 원점에 가까운 점에서 $f(x)$의 접선의 기울기가 a이상이면 되므로



$f'(x)=2\sec^2 2x$에서

$\lim_{x\to 0+} 2\sec^2 2x \geq a$

$\therefore\ a \leq 2$

따라서, a의 최댓값은 2이다.

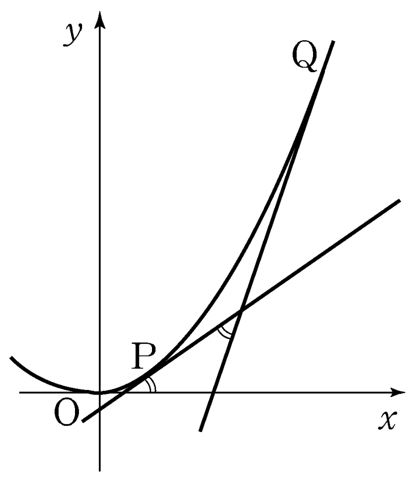
58) 답 : 32

[해설]

아래 그림에서

점 P에서 접선의 기울기는 $y'_{x=\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\tan\theta$

점 Q에서 접선의 기울기는 $y'_{x=a}=\dfrac{1}{2}a=\tan 2\theta$이다.



배각 공식에서

$\dfrac{1}{2}a=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a=4\sqrt{2}\ \therefore\ a^2=32$

59) 답 : ②

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 두면

$h(x)$ 는 미분가능(연속)이고, $h(a)=h(b)=0$ 이고,

a인 $x=c$에서 두 함수값의 차가 최대이므로

$h(x)$ 는 a인 $x=c$ 에서 최대 또는 최소이므로

$h'(c)=0$ 이다.

$\therefore\ h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$ 에서 $f'(c)=g'(c)$ 이다.

60) 답 : 36

[해설]

$\dfrac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-1}=0$

$\Leftrightarrow\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0,\ x\neq\pm1$

$\Leftrightarrow\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}=0,\ x\neq\pm1$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)$또는$f(x)=-g(x),\ x\neq\pm1$

ⅰ) $f(x)=g(x)$의 해는 $y=f(x)$와 $y=g(x)$와의 교점의 x좌표이므로

$x=-2$또는$x=3\ (x\neq1$이므로$)$

ⅱ) $f(x)=-g(x)$의 해는 $y=f(x)$와 $y=-g(x)$(위의 그래프 $y=g(x)$와

x축에 대하여 대칭이동한 그래프) 와의 교점의 x좌표이므로

$x=-3$또는$x=2\ (x\neq-1$이므로$)$

그러므로 모든 근의 곱은 36

61) 답 : ②

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 두면

$h(x)$ 는 미분가능(연속)이고, $h(a)=h(b)=0$ 이고,

a인 $x=c$에서 두 함수값의 차가 최대이므로

$h(x)$ 는 a인 $x=c$ 에서 최대 또는 최소이므로

$h'(c)=0$ 이다.

$\therefore\ h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$ 에서 $f'(c)=g'(c)$ 이다.

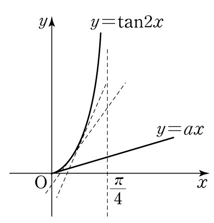
62) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]미분법

$f(x)=\tan 2x$라 하자.

주어진 조건을 만족하려면 아래 그림과 같이 원점에 가까운 점에서 $f(x)$의 접선의 기울기가 a이상이면 되므로



$f'(x)=2\sec^2 2x$에서 $\lim_{x\to 0+} 2\sec^2 2x \geq a$

$\therefore\ a \leq 2$

따라서, a의 최댓값은 2이다.

63) 답 : ③

[해설]

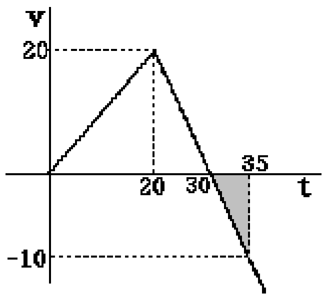
최초에 지면에 정지해 있었으므로, $t=35$ 일 때의 열기구의 높이를 h 라 하면

$$h=0+\int_0^{35} v(t)\ dt$$
$$=\int_0^{20} t\ dt+\int_{20}^{35} (60-2t)\ dt$$
$$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{35}$$
$$=\frac{400}{2}+60(35-20)-(1225-400)=275\ \ (\text{m})$$

정답:③

$v-t$ 그래프에서의 정적분이 현위치이므로 그래프를 통해서 해결해 보자.

오른쪽 그림에서 35초일 때의 높이는 t 축 위의 넓이에서 t 축 아래의 어두운 부분의 넓이를 빼면 된다.



$\therefore\ h=\frac{1}{2}\times30\times20-\frac{1}{2}\times5\times10=300-25=275$

[*answ] ③

64) 답 : 36

[해설]

$$\frac{\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2}{x^2-1}=0$$

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0,\ x\neq\pm1$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}=0,\ x\neq\pm1$

$f(x)=g(x)$또는$f(x)=-g(x),\ x\neq\pm1)$

ⅰ) $f(x)=g(x)$의 해는

$y=f(x)$와 $y=g(x)$와의 교점의 x좌표이므로

.$x=-2$또는$x=3$($x\neq1$이므로)

ⅱ) $f(x)=-g(x)$의 해는

$y=f(x)$와 $y=-g(x)$(위의 그래프 $y=g(x)$와 x축에 대하여 대칭이동한 그래프) 와의 교점의 x좌표이므로

.$x=-3$또는$x=2$($x\neq-1$이므로)

그러므로 모든 근의 곱은 36

65) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 도함수의 활용 이해하기

$f(x)=x^2-2x\ln x$라 하면 $f'(x)=2x-(2\ln x+2)$, $f''(x)=2-\frac{2}{x}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$

$0<x<1$일 때 $f''(x)<0$

$x>1$일 때 $f''(x)>0$

따라서 변곡점의 x좌표는 1

66) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 몫의 미분법을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값의 합을 구한다.

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-x+1)-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	2	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이므로

극댓값과 극솟값의 합은

$$f(2)+f(0)=\frac{2-1}{2^2-2+1}+\frac{0-1}{0^2-0+1}=\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{2}{3}$$

67) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 도함수를 활용하여 접선의 y절편을 구한다.

$f(x)=0$에서

이미지가 없거나 이미지 크기가 0 임

$\tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{4}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$이다.

$$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\sqrt{2})^2}{1}=2$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

이미지가 없거나 이미지 크기가 0 임

$y=2x-\frac{\pi}{2}$이므로

이 접선의 y절편은 $-\frac{\pi}{2}$이다.

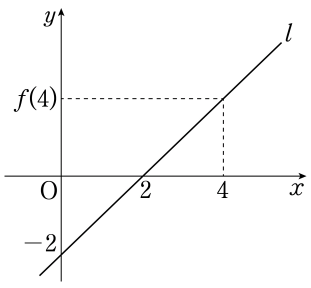
68) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 접선의 방정식을 이용하여 합성함수의 미분계수를 구한다.

조건 (가)에서 직선 l이 제2사분면을 지나지 않고

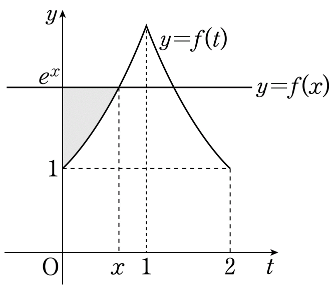
조건 (나)에서 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의
넓이가 2이므로 아래 그림과 같이 직선 l의 x절편과 y절편은 각각 2, -2이다.



함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$에서의 접선 l은 기울기가 1이고, 점 $(2, 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은 $y=x-2$이다.
따라서 $f(4)=2$, $f'(4)=1$이다.
$g(x)=xf(2x)$에서 $g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로
$g'(2)=f(4)+4f'(4)=2+4=6$

69) 답 : 36

[해설]
[출제 의도] 정적분으로 정의된 함수의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제를 해결한다.
(ⅰ) $0<x\le 1$일 때,

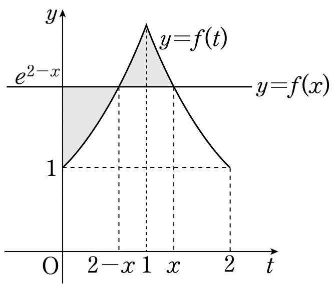


그림에서 $0<t\le x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이므로

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt=\int_0^x \{f(x)-f(t)\}dt$$

$$=\int_0^x (e^x-e^t)dt=\left[te^x-e^t\right]_0^x=xe^x-e^x+1=(x-1)e^x+1$$

(ⅱ) $1<x<2$일 때,



그림에서 $0<t<2-x$일 때, $f(x)\ge f(t)$
$2-x\le t<x$일 때, $f(x)\le f(t)$이므로

$$g(x)=\int_0^x |f(x)-f(t)|dt$$

$$=\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt+\int_{2-x}^x \{f(t)-f(x)\}dt$$

위의 (ⅰ)에 의하여

$$\int_0^{2-x}\{f(x)-f(t)\}dt=(2-x-1)e^{2-x}+1=(1-x)e^{2-x}+1$$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{2-x}^x \{f(t)-f(x)\}dt$$

$$=2\int_1^x \{f(t)-f(x)\}dt$$

$$=2\int_1^x (e^{2-t}-e^{2-x})dt$$

$$=2\left[-e^{2-t}-te^{2-x}\right]_1^x$$

$$=2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x})-(-e-e^{2-x})\}$$

$$=2e-2xe^{2-x}$$

따라서
$g(x)=(1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}=(1-3x)e^{2-x}+2e+1$
위의 (ⅰ), (ⅱ)에서
$g(x)=\{(x-1)e^x+1,\ (0<x\le 1,\ (1-3x)e^{2-x}+2e+1,\ (1<x<2$
이므로
$g'(x)=\{(xe^x,\ (0<x<1)),\ (3x-4)e^{2-x},\ (1<x<2$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(x)$		+		−	0	+	
$g(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

(극댓값) $=g(1)=(1-1)e+1=1$

(극솟값) $=g\left(\frac{4}{3}\right)=(1-4)e^{\frac{2}{3}}+2e+1=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$

$a=-2$, $b=3$이므로
$(ab)^2=36$

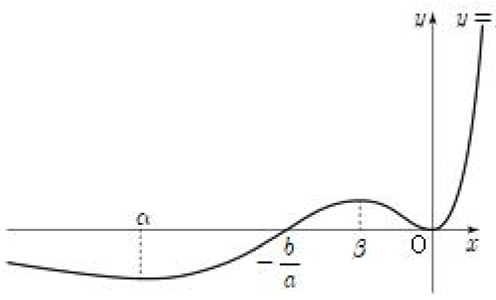
70) 답 : 49

[해설]
[출제 의도] 도함수를 활용하여 추론하기
$f(x)=e^x(ax^3+bx^2)=x^2e^x(ax+b)$
$f'(x)=xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$
$f(0)=f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접하고,
조건 (가)에서 $M(t)=f(t)$에 의하여
함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로 $a>0$
또한 함수 $f(x)$의 그래프가 $x>0$에서 x축과 만나지 않고
$f\left(-\frac{b}{a}\right)=0$이므로 $-\frac{b}{a}<0$
$\therefore\ b>0$
$f'(x)=xe^x\{ax^2+(3a+b)x+2b\}$에서
이차방정식 $ax^2+(3a+b)x+2b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(3a+b)^2-8ab=(a-b)^2+8a^2>0$이므로 이차방정식은 서로 다른 두 실근 α, β ($\alpha<\beta$)를 갖는다.
$\alpha+\beta=-\frac{3a+b}{a}<0$, $\alpha\beta=\frac{2b}{a}>0$이므로 $\alpha<\beta<0$이다.
$f'(x)=0$에서 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=0$함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

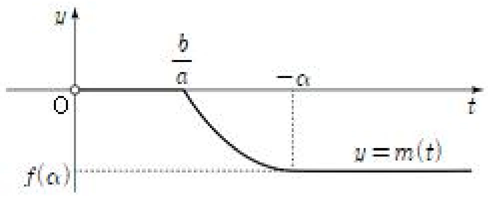
x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	0	↗

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 $m(t)=\begin{cases} 0 & \left(0<t<\frac{b}{a}\right) \\ f(-t) & \left(\frac{b}{a}\le t\le -\alpha\right) \\ f(\alpha) & (t>-\alpha) \end{cases}$



조건 (나)에서 양수 k에 대하여

닫힌 구간 $[k,\ k+2]$에 있는 임의의 실수 t에

대해서만 $m(t)=f(-t)$가 성립하므로

$\frac{b}{a}=k$, $-\alpha=k+2$

$f'(\alpha)=f'(-k-2)=0$

$\frac{-k-2}{e^{k+2}}\{a(-k-2)^2+(3a+ak)(-k-2)+2ak\}=0$

$\frac{-k-2}{e^{k+2}}\ne 0$이므로

$a(-k-2)^2+(3a+ak)(-k-2)+2ak=0$

$a(k-2)=0$

$\therefore\ k=2$, $\alpha=-4$ 따라서 $f(x)=ae^x(x^3+2x^2)$이고,

$m(t)=\begin{cases} 0 & (0<t<2) \\ ae^{-t}(-t^3+2t^2) & (2\le t\le 4) \\ -\frac{32a}{e^4} & (t>4) \end{cases}$

조건 (다)에 의하여

$\int_1^5\{e^t\times m(t)\}dt=\int_2^4(-at^3+2at^2)dt+\int_4^5\left(-\frac{32a}{e^4}e^t\right)dt$

$=\left[-\frac{a}{4}t^4+\frac{2a}{3}t^3\right]_2^4+\left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5$

$=\frac{28a}{3}-32ae=\frac{7}{3}-8e$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

따라서 $f(k+1)=f(3)=\frac{45}{4}e^3$이고, $p+q=49$

71) 답 : 32

[해설]

[출제 의도] 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 문제를 해결한다.

$y=\ln(x-7)$에 대하여 $y'=\frac{1}{x-7}$

곡선 $y=\ln(x-7)$에 접하는 직선의 기울기가 1일 때 접점의 x좌표를 a라 하면

$\frac{1}{a-7}=1$이므로 $a=8$

따라서 접점의 좌표는 $(8,\ 0)$이다.

기울기가 1이고 점 $(8,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=x-8$이므로 이 직선이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $A(8,\ 0)$, $B(0,\ -8)$이다.

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\frac{1}{2}\times 8\times 8=32$

72) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 도함수의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.

$f'(x)=(2x+2a)e^x+(x^2+2ax+11)e^x$

$\quad=\{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x$

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하므로

모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=\{x^2+2(a+1)x+2a+11\}e^x\ge 0$

$e^x>0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+2(a+1)x+2a+11\ge 0$

이차방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+11=0$의

판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(2a+11)=a^2-10\le 0$

따라서 구하는 자연수 a의 최댓값은 3이다.

73) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이해하여 교점의 개수를 구한다.

$y=e^{-x}-n-\frac{1}{e}$, $y=|\ln x|$의 교점의 개수는

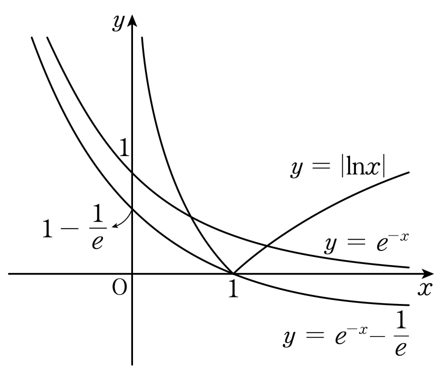
ⅰ) $n=1$일 때,

$y=e^{-x}$과 $y=|\ln x|$의 교점의 개수가 2이므로 $f(1)=2$

ⅱ) $n=2$일 때,

$y=e^{-x}-\frac{1}{e}$과 $y=|\ln x|$의 교점이 $(1,\ 0)$뿐이므로 $f(2)=1$

따라서 $f(1)+f(2)=2+1=3$



74) 답 : ⑤

[해설]
[출제 의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기
함수 $f(x)=\sin x-x\cos x$라 하면
$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

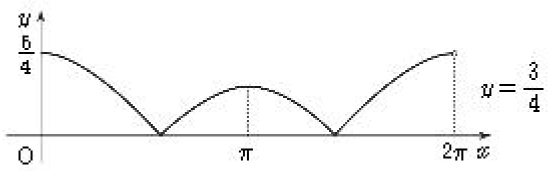
x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	π	↘	-2π

방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 $0\le k<\pi$
따라서 정수 k는 0, 1, 2, 3이므로 합은 6

75) 답 : 30
[해설]
[출제 의도] 삼각함수의 그래프의 성질 추론하기
$y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼

평행이동한 그래프이므로주기는 2π, 치역은 $\left\{y \mid -\frac{3}{4}\le y\le\frac{5}{4}\right\}$이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 $y=\cos x+\frac{1}{4}$의그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여대칭이동시켜 얻은 그래프이다.
$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 그림과 같다.



$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나는 k의 값은 $\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}$이고 $40\alpha=30$

76) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 로그함수의 접선을 활용하여 문제 해결하기
$y=\ln x$를 x에 대하여 미분하면 $y'=\frac{1}{x}$
점 $P(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$$

$$\therefore\ r(t)=t-t\ln t$$

점 $Q(2t,\ \ln 2t)$에서의 접선의 방정식은

$$y-\ln 2t=\frac{1}{2t}(x-2t)$$

$$\therefore\ s(t)=2t-2t\ln 2t$$

$f(t)=r(t)-s(t)=(2\ln 2-1)t+t\ln t$

$f'(t)=2\ln 2+\ln t=0$에서 $t=\frac{1}{4}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	$-\frac{1}{4}$	↗

따라서 극솟값은 $-\frac{1}{4}$

77) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 극한으로 표현된 함수의 대칭성을 이용하여 정적분의 값을 구한다.
ⅰ) $x>1$ 또는 $x<-1$일 때

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+\cos 2\pi x}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^{2n}}\times\cos 2\pi x}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$$

ⅱ) $x=1$일 때

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n}+\cos 2\pi}{1^{2n}+1}=1$$

ⅲ) $x=-1$일 때

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n}+\cos 2\pi(-1)}{(-1)^{2n}+1}=1$$

ⅳ) $-1<x<1$일 때

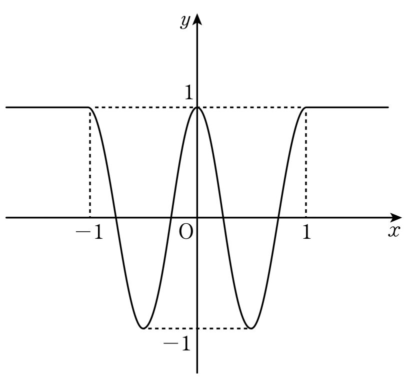
$\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}+\cos 2\pi x}{x^{2n}+1}=\cos 2\pi x$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)로부터 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}1, & (|x|\ge 1)\\ \cos 2\pi x, & (|x|<1)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



$g(x)=\int_{-x}^{2}f(t)dt+\int_{2}^{x}tf(t)dt$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,
함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$g(-2)=\int_{2}^{2}f(t)dt+\int_{2}^{-2}tf(t)dt$$

$$=0+\int_{2}^{-2}tf(t)dt$$

$$=\int_{2}^{-2} tf(t)dt \ =0$$

$$g(2)=\int_{-2}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{2} tf(t)dt$$

$$=\int_{-2}^{2} f(t)dt \ +0$$

$$=2\int_{0}^{2} f(t)dt$$

$$=2\left\{\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{2} f(t)dt\right\}$$

$$=2\left[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi t\right]_0^1+2\Big[\ t\ \Big]_1^2$$

$$=0+2=2$$

따라서 $g(-2)+g(2)=0+2=2$

[참고]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면

$f(-x)=f(x)$이고,

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=(-x)f(-x)$

$=-xf(x)$

$=-g(x)$이므로

함수 $y=xf(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

78) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 도함수와 이계도함수를 이해하여 함수의 그래프와 관련된 성질을 추론한다.

함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$=1-\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x)(x^2+1)^2-(1-x^2)\{2(x^2+1)\cdot 2x\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+1)\{-(x^2+1)-2(1-x^2)\}}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

ㄱ. $f'(x)=1-\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$에서 $f'(0)=\dfrac{1}{1}=1$ (참)

ㄴ. $f'(x)=1-\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖고 $x=1$에서 극댓값 $\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

$x>0$일 때, $f(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq-\dfrac{1}{2}$이다. (참)

ㄷ. $f''(x)=\dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$이므로

$f''(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	1	↘	$-\frac{1}{8}$	↗

따라서 함수 $f'(x)$는 $x<-\sqrt{3}$ 또는 $0<x<\sqrt{3}$에서 감소하고,

$-\sqrt{3}<x<0$ 또는 $x>\sqrt{3}$에서 증가하므로

함수 $f'(x)$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 감소한다.

따라서 $0<x<1$인 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)<f'(0)=1$ ... ㉠

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고,

열린구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$0<a<b<1$인 모든 실수 $a,\ b$에 대하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. ... ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<b<1$일 때,

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(0)=1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

79) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 도함수를 활용하여 그래프 추론하기

$f(x)=(2x-1)e^{-x^2}$이라 하자.

$f'(x)=([-4x^2+2x+2])\times e^{-x^2}$

$=-2(2x+1)(x-1)e^{-x^2}$

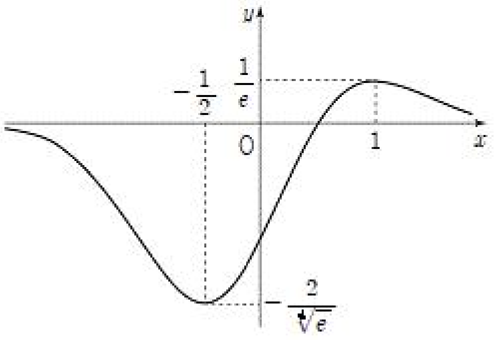
$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$	↗	$\frac{1}{e}$	↘

이므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 $\left[-\dfrac{2}{\sqrt[4]{e}}\right]$ 이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면



이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\left[-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\right]$ 이다.

$(2x-1)e^{-x^2} \geq -\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$ 이므로 $k \leq -\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 $2x-1 \geq ke^{x^2}$을 성립시키는 실수 k의 최댓값은 $\left[-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\right]$ 이다.

$\therefore\ g(x)=-4x^2+2x+2$, $p=-\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$

따라서 $g(2)\times p=\frac{20}{\sqrt[4]{e}}$

80) 답 : 71

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제 해결하기

$g(x)=|e^x-2|$ 라 하자.

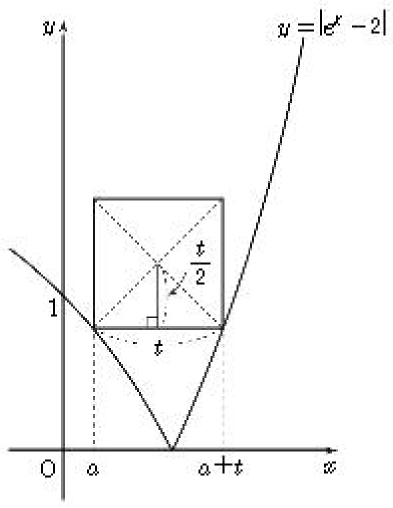
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 좌표는 $(0,1)$, $(\ln 3, 1)$

$f(t)$는 한 변의 길이가 t인 정사각형의 꼭짓점이 $g(x)$의 그래프와 만날 때 정해진다.

$0<t\leq \ln 3$이면 두 점에서 만나고

$t>\ln 3$이면 한 점에서 만날 때이다.

ⅰ) $0<t\leq \ln 3$일 때



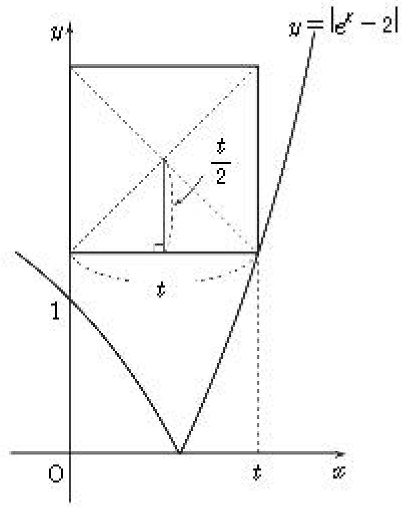
정사각형과 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표를 a와 $a+t$라 하면

두 교점의 좌표는 $(a, 2-e^a)$, $(a+t, e^{a+t}-2)$

두 교점의 y좌표가 같으므로 $e^a=\frac{4}{e^t+1}$ 이고, $f(t)=2-e^a+\frac{t}{2}$

$\therefore\ f(t)=2-\frac{4}{e^t+1}+\frac{t}{2}$

ⅱ) $t>\ln 3$일 때



정사각형과 $y=g(x)$의 교점의 좌표는 (t, e^t-2)

$\therefore\ f(t)=e^t-2+\frac{t}{2}$

그러므로 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 2-\frac{4}{e^t+1}+\frac{t}{2}, & (0<t\leq \ln 3) \\ e^t-2+\frac{t}{2}, & (t>\ln 3) \end{cases}$$

함수 $f(t)$의 도함수 $f'(t)$는

$$f'(t)=\begin{cases} \frac{4e^t}{(e^t+1)^2}+\frac{1}{2}, & (0<t<\ln 3) \\ e^t+\frac{1}{2}, & (t>\ln 3) \end{cases}$$

$f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\frac{25}{18}+\frac{11}{2}=\frac{62}{9}$

따라서 $p=9$, $q=62$이고 $p+q=71$

81) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 접선의 방정식 이해하기

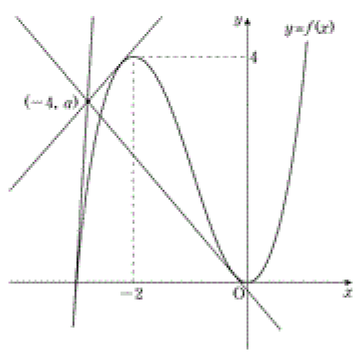
$y'=2\ln 2\times 2^{2x-3}$

따라서 곡선 $y=2^{2x-3}+1$ 위의 점 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\ln 2$

82) 답 : 9

[해설]

[출제 의도] 세 개의 접선이 존재할 수 있는 점의 범위를 찾는 문제를 해결한다.



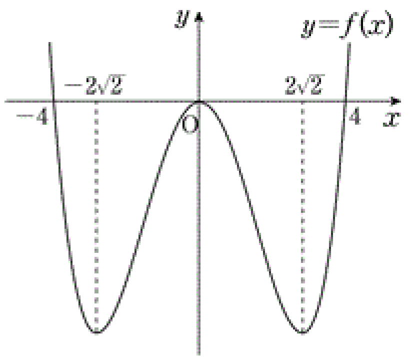
함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

세 접선의 기울기의 곱이 음수이므로

$y=f(x)$의 그래프에 접하는 세 접선의 기울기 중 한 접선의 기울기만 음수이다.

$0 < a < 4$이므로 정수 a의 최댓값 M은 3이다.
따라서 $M^2 = 9$

83) 답 : 17
[해설]
[출제 의도] 도함수의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.



$f'(x) = 4x(x^2-8)$이므로
$f'(x) = 0$에서 $x = -2\sqrt{2}$, 0, $2\sqrt{2}$
(가)의 조건에 의해 $f(x)$는 구간 $(k, k+1)$에서 감소한다.
그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty, -2\sqrt{2})$, $(0, 2\sqrt{2})$이고,
k는 정수이므로 $k=$ 0, 1 또는 -4, -5, $\cdots$
(나)의 조건에 의해 $f'(k+2) > 0$이므로 $k = 1$ 또는 -4
따라서 $1^2 + (-4)^2 = 17$

84) 답 : 32
[해설]
[출제 의도] 정삼각형의 성질과 미분법을 이용하여
접점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.
직선 l의 기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고,
세 직선 l, m, n으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로
두 접선 m, n과 직선 l이 이루는 예각의 크기는 60°이다.
직선 l과 이루는 예각의 크기가 60°인 직선의 기울기를 k라 하면
삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\left|\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-k}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}k}\right| = \sqrt{3},\quad k = \frac{\sqrt{3}}{5} \text{ 또는 } k = 3\sqrt{3}$$

$f(x) = \sqrt{3}\ln x$에서 $f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{5},\quad \frac{\sqrt{3}}{\beta} = 3\sqrt{3}$$

$\alpha = 5$, $\beta = \dfrac{1}{3}$이므로 $6(\alpha+\beta) = 32$

85) 답 : 10
[해설]
[출제 의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기
t초가 되는 순간 점 P의 좌표는 $(2t, 0)$
$\angle QOP = \theta$라 하면, $\angle AOQ = \dfrac{\pi}{3} - \theta$
부채꼴 OQA의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times 10^2 \times \left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) = 50\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)$

삼각형 OPQ의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times 10 \times 2t \times \sin\theta = 10t\sin\theta$
$S = 50\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right) + 10t\sin\theta$
양변을 t에 대하여 미분하면
$\dfrac{dS}{dt} = -50\dfrac{d\theta}{dt} + 10\sin\theta + 10t\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}$ $\cdots\cdots$ ㉠
점 $P(2t, 0)$을 지나고 직선 $y = \sqrt{3}x$에 평행한
직선을 l이라 하면 직선 l의 방정식은 $y = \sqrt{3}(x-2t)$이고
직선 l과 원이 만나는 점 Q의 좌표는
$Q(10\cos\theta, 10\sin\theta)$이므로 직선 l에 대입하면
$10\sin\theta = \sqrt{3}(10\cos\theta - 2t)$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉡의 양변을 t에 대하여 미분하면
$10\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}\left(-10\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} - 2\right)$ $\cdots\cdots$ ㉢
점 Q의 y좌표가 5이므로
$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이고
㉡에서 $t = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$이고
㉢에서 $\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{5}$이다.
㉠에 의하여 $\dfrac{dS}{dt} = 10$

86) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도] 미분법을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값 구하는 문제를 해결한다.
점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이므로
삼각형 OQP의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times 2\cos\theta \times \sin\theta = \sin\theta\cos\theta$
$= \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$
점 R의 좌표는 $\left(2\cos\dfrac{1}{2}\theta, -2\sin\dfrac{1}{2}\theta\right)$이므로
삼각형 ORS의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times 4\cos\dfrac{1}{2}\theta \times 2\sin\dfrac{1}{2}\theta = 4\sin\dfrac{1}{2}\theta\cos\dfrac{1}{2}\theta$
$= 2\sin\theta$
따라서 삼각형 OQP와 삼각형 ORS의 넓이의 합을 $f(\theta)$라 하면
$f(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta + 2\sin\theta$
$f'(\theta) = \cos 2\theta + 2\cos\theta$
$= 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$
이므로
$f'(\theta) = 0$에서 $\cos\theta = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta > 0$이므로

$\cos\theta = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$f'(\theta)=0$인 θ의 값을 $\theta_1\left(0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 할 때, $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$f(\theta_1)$	$\searrow$	

그러므로 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$에서 극대이면서 최대이다.따라서 $f(\theta)$가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 값은 $\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$이다.

87) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 미분법과 중간값의 정리를 이용하여 극값이 존재하는 구간을 구한다.

미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$이어야 한다.

$f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$이므로

$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-2)+e^{-x}\times\dfrac{1}{x}$

$=e^{-x}\left(\dfrac{1}{x}-\ln x+2\right)$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로

$g(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x+2$라 하면 $g(a)=0$이어야 한다.

$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\ =-1+\dfrac{x}{x^2}<0\ (\because x>0)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 연속이고 감소한다.

$g(1)=1-\ln 1+2=3>0$

$g(e)=\dfrac{1}{e}-\ln e+2=\dfrac{1}{e}+1>0$

$g(e^2)=\dfrac{1}{e^2}-\ln e^2+2=\dfrac{1}{e^2}>0$

$g(e^3)=\dfrac{1}{e^3}-\ln e^3+2=\dfrac{1}{e^3}-1<0$

그러므로 중간값의 정리에 의하여 $g(c)=0$인 실수 c가 열린 구간 (e^2, e^3)에 오직 하나 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, a가 속하는 구간은 (e^2, e^3)이다.

88) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 미분계수 이해하기

$f'(1)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$이므로 $f'(1)=3$, $\dfrac{1}{n}=h$라 하면

$n\to\infty$일 때 $h\to 0$이므로

[구하는 값] $=\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f\left(1-\frac{h}{3}\right)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}+\frac{f\left(1-\frac{h}{3}\right)-f(1)}{-\frac{h}{3}}\times\frac{1}{3}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}f'(1)+\dfrac{1}{3}f'(1)$

$=\dfrac{5}{2}$

89) 답 : ④

[해설]

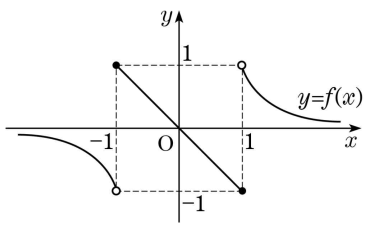
[출제 의도] 미분법을 이해하여 조건에 맞는 함수의 그래프를 추측한다.

주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 원점을 지난다.

또, 함수 $f(x)$는 $x\neq-1$, $x\neq 1$인 모든 x에서 연속이고, 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$에서 각각 감소한다.

ㄱ.함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 원점에서만 만난다.

ㄴ.(반례) 함수 $f(x)=\begin{cases}-x, & (|x|\le 1)\\ \dfrac{1}{x}, & (|x|>1)\end{cases}$ 은 주어진 조건을 만족시키지만 x축과 원점에서만 만난다.



ㄷ.함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로

평균값의 정리에 의하여

$f'(c_1)=\dfrac{-1-0}{1-0}=-1$

을 만족시키는 실수 c_1이 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 0]$에서 연속이고,

열린 구간 $(-1, 0)$에서 미분가능하므로

$f'(c_2)=\dfrac{1-0}{-1-0}=-1$

을 만족시키는 실수 c_2가 열린 구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

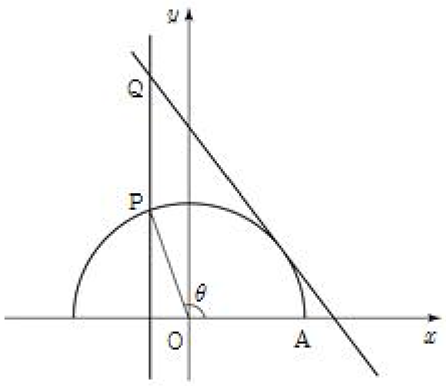
그러므로 $f'(\alpha)=-1$을 만족시키는 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

90) 답 : 10

[해설]

[출제 의도] 속도와 가속도를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\angle AOP = \theta$라 하면 호의 길이 $l = 10\theta$

점 $P(10\cos\theta, 10\sin\theta)$가 매초 5의 일정한 속력으로 이동하므로 양변을 시각 t에 대해 미분하면

$\frac{dl}{dt} = 10\frac{d\theta}{dt} = 5$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$

$\overline{PQ} = L = 20 - 10\sqrt{3}\cos\theta - 10\sin\theta$

따라서 L을 시각 t에 대해 미분하면

$$\frac{dL}{dt} = (10\sqrt{3}\sin\theta - 10\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = 10\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

따라서 $\theta = \frac{2\pi}{3}$일 때, 최댓값은 10

91) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점을 P라 하자.

동경 OP가 나타내는 각을 θ라 하면 공통부분이 생기는 θ의 범위는

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

점 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$, 점 $G(\cos\theta+1,\ \sin\theta+1)$이므로

공통부분의 넓이 $S(\theta) = \cos\theta(\sin\theta+1)$

$S'(\theta) = \cos 2\theta - \sin\theta$

$= -(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1) = 0$

$\sin\theta = -1$ 또는 $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{6}\ \left(\because\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

$S(\theta)$는 $\theta = \frac{\pi}{6}$에서 극대이고 최댓값을 갖는다.따라서 최댓값은

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

92) 답 : 34

[해설]

[출제 의도] 함수의 그래프의 개형으로 문제 해결하기

$f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$에 대하여

ⅰ) $x > 0$일 때

$f(x) = \frac{2\ln x}{x}$, $f'(x) = \frac{2-2\ln x}{x^2}$

$x = e$ 에서 $f'(x) = 0$ 이고

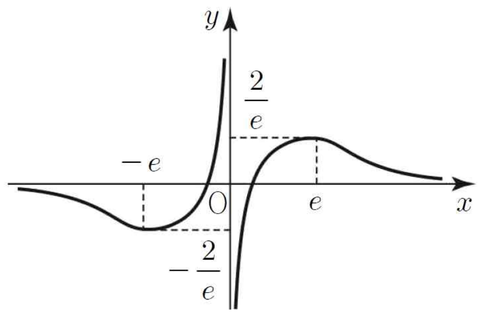
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

$\therefore$ 극댓값 $\alpha = \frac{2}{e}$

ⅱ) $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$f(-x) = -f(x)$가 성립하므로 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$y = \frac{2}{en}x$는 원점을 지나는 직선이고

원점에서 곡선 $y = \frac{2\ln x}{x}$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ f(t))$라하면

접선의 방정식은 $y = \frac{2-2\ln t}{t^2}(x-t) + \frac{2\ln t}{t}$ 이고 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0 = \frac{2-2\ln t}{t^2}(0-t) + \frac{2\ln t}{t}$

$\therefore\ t = \sqrt{e}$

$\therefore$ 접점은 $\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$이고접선의 방정식은 $y = \frac{1}{e}x$

$n=1$일 때, 직선 $y = \frac{2}{e}x$와 함수 $f(x)$의그래프의 교점의 개수는 0 $\therefore\ a_1 = 0$

$n=2$일 때, 직선 $y = \frac{1}{e}x$와 함수 $f(x)$의그래프의 교점의 개수는 2 $\therefore\ a_2 = 2$

$3 \le n \le 10$일 때, 직선 $y = \frac{2}{e}x$와 함수 $f(x)$의그래프의 교점의 개수는 4 $\therefore\ a_n = 4$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 0 + 2 + 4 \times 8 = 34$

93) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$\ln y = 2e^{-3x}$이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y} = -6e^{-3x}$

$y' = -6e^{-3x} \cdot y \cdots ①$

① 에 $x=0,\ y=e^2$ 을 대입하면 $y'=-6e^2$

따라서 점 $(0,\ e^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $-6e^2$

94) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 여러 가지 공식을 이용하여 함수의 최솟값을 구한다.

$$f(x)=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{\sin 2x}$$
$$=\frac{\sin 2x+1}{\sin 2x}$$
$$=1+\frac{1}{\sin 2x}$$

$0<\sin 2x\le 1$ 이므로 $f(x)$의 최솟값은 2이다.

95) 답 : 8

[해설]

[출제 의도]지수함수의 미분법을 이해하여 접선의 방정식을 구한다.

$y'=e^{3-x}(3-x)'=-e^{3-x}$ 이므로

(접선의 기울기) $=-e^{3-3}=-e^0=-1$

따라서 접선의 방정식은 $y-1=-(x-3),\ y=-x+4$

접선의 x절편과 y절편은 각각 4이므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times4\times4=8$이다.

96) 답 : 8

[해설]

[출제 의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

점 P는 호 AB 위의 점이고 시각 t일 때 $\angle POA=t$ $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이므로

점 P의 좌표는 $(\cos t,\ \sin t)$이다.

점 $Q(x,0)$의 시각 t에서의 위치는 $x=\cos t+\sqrt{5-\sin^2 t},\ y=0$

점 Q의 x좌표의 시간에 대한 변화율: $\frac{dx}{dt}=-\sin t-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{5-\sin^2 t}}$

$\therefore\ \angle POA=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의시간에 대한 변화율

$$r=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5-\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $9r^2=8$

97) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 도함수를 이용하여 그래프의 개형 추론하기

ㄱ. 함수 $f(x)$는 원점 O와 $x=b,\ c,\ e$에서 변곡점을 가진다. (참)

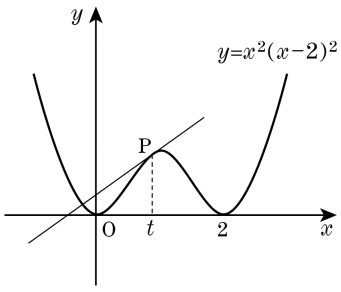
ㄴ. $f(x)$는 $x=d$ 에서 극대가 된다. (참)

ㄷ. 구간 $[a,\ e]$ 에서 최댓값은 $f(d)$이다. (거짓)

98) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]주어진 함수의 그래프에서 접선이 곡선보다 위쪽에 놓이도록 하는 접점의 범위를 구한다.



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 $P\ (t,\ f(t))$에서의 접선이므로

접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.

그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는

구간 $[0,\ 2]$ 에서 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사하면 된다.

$y=x^2(x-2)^2$ 에서

$$y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)$$
$$=4x(x-1)(x-2)$$

점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)$

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

한편 곡선 $y=x^2(x-2)^2$은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

점 $(2,\ 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 b라 하면 $\frac{2}{3}+b=2$에서 $b=\frac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는

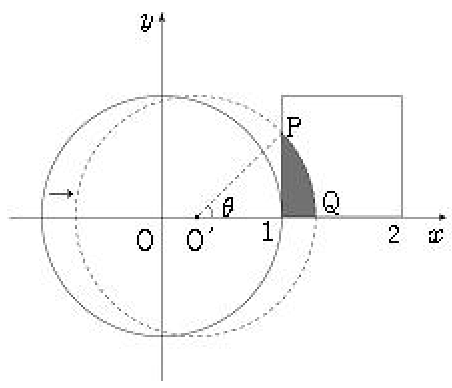
$\frac{2}{3}\le t\le\frac{4}{3}$ 이다.

$\therefore\ 36pq=36\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=32$

99) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 도함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



그림과 같이 원 O의 t초 후의 중심을 O', 원과 정사각형 $ABCD$의 교점을 $P,\ Q$라 하고,

$\angle PO'Q=\theta$라 하면

$\cos\theta=1-t$ 에서 $-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=-1$이다.

원과 정사각형 $ABCD$가 겹치는 부분의 넓이

$S=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}(1-t)\sin\theta$

$\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin2\theta$

$\frac{dS}{dt}=\frac{dS}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)\frac{1}{\sin\theta}$

원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2},0\right)$을 지나는 순간은 $t=\frac{1}{2}$이다.

$t=\frac{1}{2}$일 때, $\theta=\frac{\pi}{3}$이다.

$\therefore$ 원 O의 중심이 $\left(\frac{1}{2},0\right)$을 지나는 순간 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

100) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 주어진 조건에 맞는 함수의 성질을 추론한다.

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘

ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(0)=0$이면 도함수 $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭 이므로 함수 $f(x)$는 원점 대칭이다.

따라서 극댓 값 $f(1)$, 극솟값 $f(-1)$에 대하여 $f(1)=-f(-1)$이므로

$f(1)+f(-1)=0$이다. (참)

ㄷ. 극댓값 $f(1)$이 0보다 작으므로

방정식 $f(x)=0$은 $x<-1$인 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

101) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]접선의 방정식 구하기

곡선 $y=2x^2+1$위의 점 $(-1,3)$에서의

접선의 방정식은 $y=-4x-1\ldots$①

직선 ①이 곡선 $y=2x^3-ax+3$에 접하므로

접점의 x좌표를 t라 하면

점 $(t,2t^3-at+3)$에서의 접선의 방정식은

$y=(6t^2-a)(x-t)+2t^3-at+3$

$=(6t^2-a)x-4t^3+3\ldots$②

② 이 ①과 같으므로 $t=1$

따라서 $a=10$

102) 답 : ②

[해설]

$g(x)=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$(f\circ g)(x)=f(t)=t^3+3t^2+2$

$f'(t)=3t^2+6t=0$에서 $t=0$또는 $t=-2$

이때,

$f(0)=2,\ f(-1)=4,\ f(1)=6$

이므로

구하는 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

103) 답 : ①

[해설]

$x^3+xy+y^3-8=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=2$이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+y+xy'+3y^2y'=0$

따라서 점 $(2,0)$에서의 접선의 기울기는 -6이다.

104) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]그래프와 행렬의 관계를 이해하기

주어진 그래프를 행렬로 나타내면

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이므로 $p=1,\ q=0$이고 꼭짓점 C에서 다른 한 꼭짓점을 지나 다시 꼭짓점 C로 돌아오는 방법은 $CAC,\ CBC,\ CDC,\ CEC$이므로

$r=4$이다.

따라서 $p+q+r=5$

105) 답 : 10

[해설]

$g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=t$라 하면 $-2\le t\le2$이다.

$(f\circ g)(x)=f(t)=t^3-3t^2+15$에서

$f'(t)=3t(t-2)$이므로 $f(t)$는 $t=0$에서 극대이다.

따라서 $f(0)=15,\ f(-2)=-5,\ f(2)=11$이므로

구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $f(0)+f(-2)=10$이다.

106) 답 : 36

[해설]

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의

길이를 r_t라 하면,

$r_t=\frac{\sqrt{3}}{6}x_t,\ x_t=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}t$이므로 $r_t=\frac{12+3t}{2}$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는

$S(t)=\pi\left(\frac{12+3t}{2}\right)^2$이므로

$x_t=24\sqrt{3}$일 때, $t=4$

$S'(4)=2\pi\left(\frac{12+3\times4}{2}\right)\times\frac{3}{2}=36\pi$이다.

따라서 $a=36$

107) 답 : ③

[해설]

수면의 높이가 h일 때 물의 부피 V는

$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h(2^{y-1})^2dy$이므로

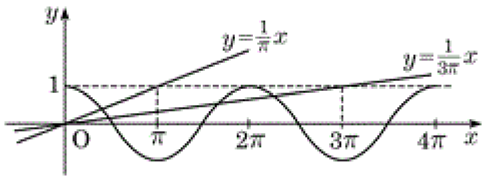
$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi\left(2^{2h-2}\right)\frac{dh}{dt},\ \pi\left(2^{2a-2}\right)\cdot 6=12\pi$$

$$\therefore\ a=\frac{3}{2}$$

108) 답 : 120

[해설]

[출제 의도]급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림에서 $a_n=2n-1\,(n\ge 1)$

$$\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{(a_n+1)(a_n+3)}=\sum_{n=1}^{24}\frac{500}{2n(2n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{24}\frac{125}{n(n+1)}$$

$$=125\sum_{n=1}^{24}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=120$$

109) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]도함수를 활용하여 실생활문제 해결하기

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를

x

라 하고

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)(12-2x)$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$이므로

$x=3-\sqrt{3}$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}M=24$

110) 답 : ④

[해설]

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$이고 $f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}$이다.

ㄱ. $f'(\alpha)=e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}=0$에서 $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha^2}$ (참)

ㄴ. 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로

곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다.(거짓)

ㄷ. $f'(\alpha)=0$이고 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이자 최소이다.(참)

111) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수에서 접선의 뜻을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

두 접점의 좌표를

$P\left(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha^2+2\alpha\right),\ Q\left(\beta,\ \beta^3-3\beta^2+2\beta\right)$라 하면

ㄱ. $y'=3x^2-6x+2$이므로 기울기가 m인 접선의 두 접점의 x좌표는

$3x^2-6x+2-m=0$을 만족하므로 $\alpha+\beta=2$이다.(참)

ㄴ. 기울기가 m인 접선의 두 접점이 존재하므로

α,β는 서로 다른 실수이다.

$3x^2-6x+2-m=0$이 서로 다른 실근을 가지므로

$3^2-3(2-m)>0$

$\therefore\ m>-1$ (참)

ㄷ. 두 접선은 평행하므로 두 접선 사이의 거리가 $\overline{PQ}$가 되기 위해서는

두 접점 P, Q를 지나는 직선과 접선이 수직이어야 한다.

즉, 기울기의 곱은 -1이다.

$$m\times\frac{(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)-(\beta^3-3\beta^2+2\beta)}{\alpha-\beta}=-1$$

$$m\{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$$

$$m\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$$

그런데, α,β는 $3x^2-6x+2-m=0$의 두 근이므로

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{2-m}{3}$$

$$\therefore\ m\left(\frac{2-m}{3}\right)=1$$

$$\therefore\ m^2-2m+3=0$$

판별식 $\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$이므로 실수 m이 존재하지 않는다.

따라서 두 접선 사이의 거리와 $\overline{PQ}$가 같아지는 실수 m은 존재하지 않는다.(거짓)

112) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]도함수를 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$의 정의역은 $x<5$이다.

$f'(x)=-\frac{2}{5-x}+\frac{x}{2}=0$에서 $x=1$또는 $x=4$,

$f''(x)=-\frac{2}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}=0$에서 $x=3\ (\because\ x<5)$이므로

함수 $f'(x), f''(x), f(x)$를 표로 나타내면 다음과 같다.

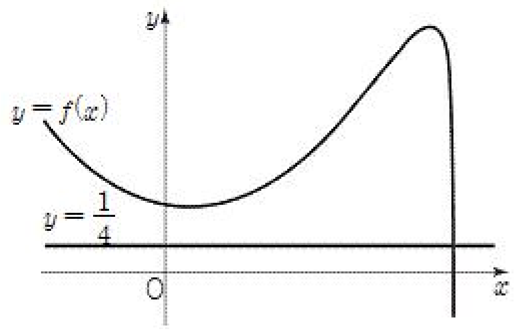
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	↘	$f(1)$	↗	$f(3)$	↗	$f(4)$	↘	

단, $f(1)=\frac{1}{4}+4\ln 2,\ f(3)=\frac{9}{4}+2\ln 2,\ f(4)=4$

ㄱ.(참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다.(거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$은 다음과 같으므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다.(참)



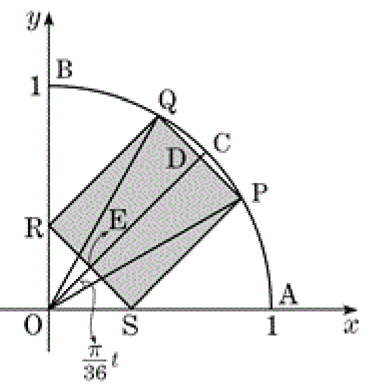
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

113) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형의 넓이의 순간변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

내접하는 사각형의 x축, y축 위의 두 꼭짓점을 각각 S, R라 하고 선분 OC와 선분 PQ, 선분 RS의 교점을 각각 D, E라 하자.



삼각형 DOP에서

$\overline{DP}=\overline{OP}\sin\frac{\pi}{36}t=\sin\frac{\pi}{36}t$

$\overline{OD}=\overline{OP}\cos\frac{\pi}{36}t=\cos\frac{\pi}{36}t$

$\angle EOS=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\overline{OE}=\overline{ES}(=\overline{DP})$

이다. 그러므로 $\square PQRS$의 넓이 $S(t)$는

$$\begin{aligned}S(t)&=\overline{PQ}\cdot\overline{PS}\\&=2\overline{DP}\cdot(\overline{OD}-\overline{OE})\\&=2\sin\frac{\pi}{36}t\left(\cos\frac{\pi}{36}t-\sin\frac{\pi}{36}t\right)\\&=2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t-2\sin^2\frac{\pi}{36}t\\&=\sin\frac{\pi}{18}t-2\sin^2\frac{\pi}{36}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S'(t)&=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t-2\sin\frac{\pi}{36}t\cos\frac{\pi}{36}t\right)\\&=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{18}t-\sin\frac{\pi}{18}t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S'(6)&=\frac{\pi}{18}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&=\frac{1-\sqrt{3}}{36}\pi\end{aligned}$$

114) 답 : ④

[해설]

역함수는 $y=x$대하여 대칭이므로

함수 $f(x)=\frac{\ln\{x\}}{k}$ 의 접선 중 기울기가 1인 접선에서 $y=x$까지 거리의 두 배가 l_k이다.

$f'(x)=1$인 접점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{\ln1}{k}\right)$이다.

$$d=\frac{\left|1-\frac{\ln1}{k}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}=\frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}$$

$l_k=2d=(1+\ln k)\sqrt{2}\ge3\sqrt{2}$ 에서 $k\ge e^2$

$\therefore$ k의 최솟값은 8

115) 답 : ④

[해설]

ㄱ. $g(-1)=\int_{-1}^{1}f(t)dt=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(1,2)$에서 증가한다.(거짓)

ㄷ. 방정식 $g(x)=2$의 실근은 $-4,\ -2,\ 4,\ 6$이므로 $-4-2+4+6=4$이다.(참)

116) 답 : ⑤

[해설]

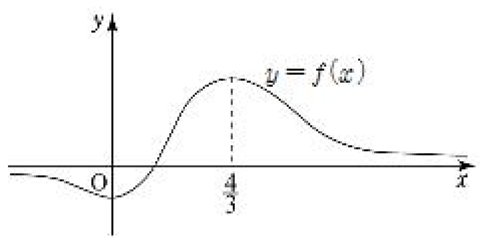
ㄱ. $f'(x)=\frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$, $f'(1)=1$

접선의 방정식은 $y=x-\frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 접선과 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $x=0$에서 최솟값 $-\frac{1}{8}$을 갖는다. $\therefore$ 참

ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)-f(10)=0$의 근은 2개다. $\therefore$ 참

117) 답 : 251

[해설]

분침의 속력: $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$

시침의 속력: $\frac{\frac{\pi}{6}}{60}=\frac{\pi}{360}$

3시 정각에서 t(분)후 분침과 시침이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

4시 정각 근처에서

$\theta=\frac{\pi}{30}t-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{360}t\right)=\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}t$

$\angle POQ=2\pi-\theta$이므로

$S=\frac{1}{2}\times2\times3\sin(2\pi-\theta)=3\cos\frac{11\pi}{360}t$

$\frac{dS}{dt}=-3\times\frac{11\pi}{360}\times\sin\frac{11\pi}{360}t$

$t=60$일 때, $\frac{dS}{dt}=\frac{11}{240}\pi$

$\therefore\ p+q=251$

118) 답 : ⑤

[해설]

$g(x)=-\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+\cos x\cdot f(x)$

ㄱ. $g(0)=0$ ($\because\ f(0)=0$) (참)

ㄴ. $g(-x)=-\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\cos(-x)\cdot f(-x)$

$=\sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\int_{-x}^{x}f(t)dt\right)-\cos x\cdot f(x)$

$=\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt-\cos x\cdot f(x)\ =-g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$ 이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$에서

$g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$에

서 $g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.(참)

119) 답 : 17

[해설]

점 P가 1초에 π씩 움직이므로 점 H는 1초에 $\frac{4}{5}\pi$씩 움직인다.

따라서 점 H가 t초 동안 움직인 거리는 $\frac{4}{5}\pi t$이다. 좌표 공간에서 선분 AB의 중점을 원점 O라 하고 점 $A(4,0,0)$, t초 후의 점 H, P를 $H\left(4\cos\frac{\pi t}{5}, 4\sin\frac{\pi t}{5}, 0\right)$, $P\left(4\cos\frac{\pi t}{5}, 4\sin\frac{\pi t}{5}, \frac{3\pi t}{5}\right)$

$\overline{HA}=\sqrt{\left(4\cos\frac{\pi t}{5}-4\right)^2+\left(4\sin\frac{\pi t}{5}\right)^2}=8\sin\frac{\pi t}{10}$

$S=\frac{1}{2}\overline{HA}\cdot\overline{PH}=4\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}$

$\frac{dS}{dt}=4\left(\cos\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{\pi}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}+\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi}{5}\right)$

따라서 $t=5$일 때 $\frac{dS}{dt}=\frac{12}{5}\pi=\frac{q}{p}\pi$

$\therefore\ p+q=17$

120) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성과 미분을 이용하여 그래프의 성질 추론하기

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$라 놓으면

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$

$g(t)=\frac{t}{t-2}=1+\frac{2}{t-2}$

ㄱ. $t=\sqrt{2}$ 일 때, 최솟값 $-1-\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $t=\sqrt{2}$ 에서 최솟값(거짓)

ㄷ. $f(x)=1+\frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2}$ 이다.

$f'(x)=-\frac{2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\left\{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\right\}^2}$ 이므로

$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)에서 극솟값을 갖고

$x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ (n은 정수)에서 극댓값을 갖는다.(참)

121) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 $y=-x+k$와 $y=x$가 수직이다.

직선 $y=-x+k$와 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 두 점 사이의 거리가

최대가 되려면

직선 $y=-x+k$가 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점에서 접선의 기울기가 1일 때이다.

$f'(x)=\frac{1}{x}=1\ \therefore\ x=1$

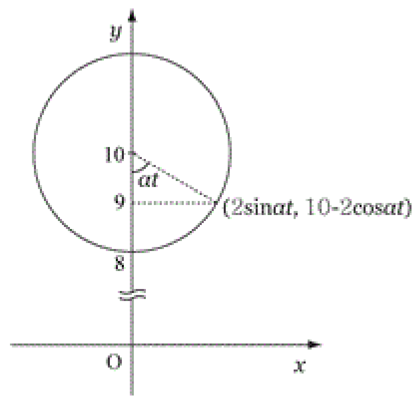
$g'(x)=e^{x-4}=1\ \therefore\ x=4$

$(1,4)$, $(4,1)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+5$이므로 k의 값은 5이다.

122) 답 : 70

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 수학외적 문제 해결하기



날개의 끝을 점 (x,y)라 하면

$x^2+(y-10)^2=4\cdots$①

$y=9$일 때, $\frac{dy}{dt}=4\pi(m/s)$

시간에 따른 각의 변화율을 α라 하면

$x=2\sin\alpha t,\ y=10-2\cos\alpha t$

$y=9$를 ①에 대입하면 $x=\sqrt{3}$

따라서 $\sin\alpha t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y=10-2\cos\alpha t$를 t에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dt}=2\alpha\sin\alpha t\left(\frac{m}{s}\right)\ \therefore\ \alpha=\frac{4}{\sqrt{3}}\pi$

따라서 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은

$k=\frac{2\pi}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \therefore\ k^2=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 10(p+q)=70$

123) 답 : 48

[해설]
[출제 의도]넓이의 변화율 구하기
t초 후 선분 AP, 선분 PB의 길이는
$\overline{AP}=2t$, $\overline{PB}=20-2t$
두 정사각형의 넓이의 합
$S=4t^2+(20-2t)^2=8t^2-80t+400$
$\therefore \dfrac{dS}{dt}=16t-80$
$t=8$일 때, S의 변화율은 $16\cdot 8-80=48$

124) 답 : 10
[해설]
[출제 의도]도함수를 활용하여 수학 내적문제 해결하기
$\dfrac{dx}{dt}=2$이고 $10x=\sqrt{x}$에서 $x=\dfrac{1}{100}$
$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\dfrac{dx}{dt}$
$\left[\dfrac{dy}{dt}\right]_{x=\frac{1}{100}}=10$

125) 답 : ④
[해설]
t초 후 $\angle POA=\dfrac{\pi}{2}t$, $OQ=1-t$이므로
$S=$ 부채꼴 $OAP-$ 삼각형 OQP
$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}t$ `
$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\left\{\sin\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}(t-1)\cos\dfrac{\pi}{2}t\right\}$
$\dfrac{dS}{dt}\Big|_{t=1}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

126) 답 : ②
[해설]
ㄱ.(반례) $f(x)=x^3+1$이라 하자.
$f'(x)=3x^2=0$이므로 서로 같은 실근을 가진다.
하지만 $f(x)=x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ 또는 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$가 되어
반드시 서로 같은 실근을 가진다고는 볼 수 없다.
$\therefore$ 거짓
ㄴ. 이차방정식 $f'(x)=0$이 허근을 가지면
$f(x)$는 증가함수 또는 감소함수이므로
$f(x)=0$은 단 하나의 실근과 서로 다른 두 허근을 갖는다. $\therefore$ 참
ㄷ.(반례) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x$이라 하자.
$f'(x)=x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ 또는 2가 되어 서로 다른 실근을 갖는다.
하지만, $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x=0$
$\Leftrightarrow 2x^3-9x^2+12x=0$
$\Leftrightarrow x(2x^2-9x+12)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ 또는 $\dfrac{9\pm\sqrt{45}i}{4}$가 되므로
$f(x)=0$이 반드시 서로 다른 두 실근을 갖는다고 볼 수는 없다.
$\therefore$ 거짓
따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

127) 답 : ④
[해설]
ㄱ. $f(x)$가 위로 오목(아래로 볼록)하므로 참이다.
ㄴ. $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$에서
$g'(f(x))f'(x)=1$이다.
한편 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^2-e^{-2}}{2}$를 만족하는 $x=2$된다.
$f(x)$의 도함수 $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$이므로
$g'\left(\dfrac{e^2+e^{-2}}{2}\right)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{2}{e^2-e^{-2}}$가 되어 거짓이다.
ㄷ. t초 후의 점 P의 x좌표를 $\left(k, \dfrac{e^k+e^{-k}}{2}\right)$이라 하자.
한편, t초 동안 점 P가 움직인 거리는 t이므로
$t=\displaystyle\int_0^k\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^k\sqrt{1+\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$
$=\displaystyle\int_0^k\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\dfrac{e^k-e^{-k}}{2}$
$(e^k)^2-2te^k-1=0$에서 $e^k=t+\sqrt{t^2+1}$
$\therefore k=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$(참)

128) 답 : 25
[해설]
[출제 의도]변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\angle PAB=\theta$라 하면 $\overline{BP}=10\sin\theta$, $\overline{AQ}=10\cos2\theta$
$\dfrac{d}{dt}\overline{BP}=10\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{20\cos\theta}$
$\dfrac{d}{dt}\overline{AQ}=-20\sin2\theta\dfrac{d\theta}{dt}=-40\sin\theta\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}=-2\sin\theta$
$t=5$일 때, $10\sin\theta=\dfrac{5}{2}$이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$이다.
$p=-2\cdot\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}$이므로 $100p^2=25$이다.

129) 답 : ①
[해설]
선분 BC의 길이를 $x(km)$, 선분 AC의 길이를 $y(km)$라 하자.
제 2코사인법칙으로부터
$y^2=x^2+3^2-2x\cdot3\cdot\sin120^\circ=x^2+3x+9\cdots$①
한편 점 C를 통과하는 순간에
$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times3\times x\times\sin120^\circ=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$에서 $x=5$이므로
$y=7$이다.
① 의 양변을 t에 관해서 미분하면
$2y\dfrac{dy}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}+3\dfrac{dx}{dt}\cdots$②이고

조건에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{28}{13}(km/h)$, $x=5$, $y=7$을 식 ②에 대입하면

$\frac{dy}{dt}=2(km/h)$가 된다.

130) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수가 극값을 가질 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=a\sin x+bx+1$

$f'(x)=a\cos x+b=0$에서

$f'(x)$의 최댓값과 최솟값의 부호가 달라야 하므로

$(a+b)(-a+b)=-a^2+b^2<0$

$\therefore\ a^2>b^2$

131) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]넓이의 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S=\pi(\sin x)^2$에서 $\frac{dS}{dt}=2\pi\sin x\cos x\times\frac{dx}{dt}$

$x=\frac{t^2}{\pi}$로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{\pi}$이고 $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $x=\frac{\pi}{4}$이다.

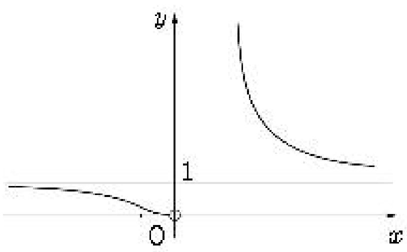
$$\therefore\ \left[\frac{dS}{dt}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}=2\pi\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times1=\pi$$

132) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=e^{\frac{2}{x}}$ 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{n\to\infty}e^{\frac{2}{x}}=1$(참)

ㄴ. 극값을 가지지 않는다.(참)

ㄷ. $x>0$에서 $f'(x)<0$(거짓)

133) 답 : 10

[해설]

$|x|>1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^2+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=2x^2$$

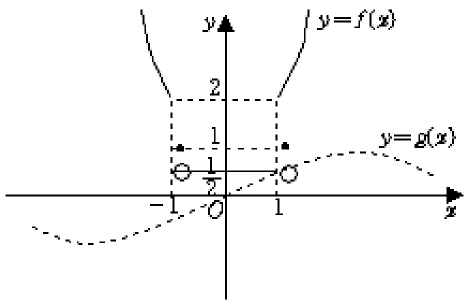
$x=1$일 때, $f(1)=\frac{2+1}{1+2}=1$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{2+1}{1+2}=1$

$|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+2}=0$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}$

따라서, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=g(x)$가 실근을 갖지 않으려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나지 않아야 한다.

$y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$g(x)=\sin(k\pi x)$에서 $k>0$으로 가정하여도 일반성을 잃지 않는다.

따라서, $g(1)\le\frac{1}{2}$이고,

$g(x)$의 주기는 4보다 커야 한다.

$g(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{k\pi}=\frac{2}{k}$이므로

$\frac{2}{k}>4$에서 $0<k<\frac{1}{2}\cdots$①

$g(1)=\frac{1}{2}$에서 $\sin k\pi=\frac{1}{2}$

$\therefore\ k=\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \cdots$

① 에 의해 $k=\frac{1}{6}$

따라서, k의 최댓값이 $\frac{1}{6}$이므로 $60k$의 최댓값은 10이다.

134) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]합성함수의 미분법을 이용하여 부피의 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

채워지는 물의 양 V는

$$V=\pi\int_{-1}^{h}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{h}=\pi\left(h-\frac{1}{3}h^3+\frac{2}{3}\right)$$

양변을 t에 대하여 미분하면 $\frac{dV}{dt}=\pi(1-h^2)\frac{dh}{dt}$

여기에 부피의 증가량 0.2π와 높이가 $\frac{3}{4}$이므로

$h=-\frac{1}{4}$를 대입하면 $0.2\pi=\pi\left(1-\frac{1}{16}\right)\frac{dh}{dt}$

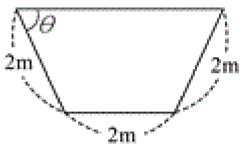
$\therefore\ \frac{dh}{dt}=\frac{16}{75}$이므로 $75v=75\times\frac{16}{75}=16$

135) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]미분을 활용하여 실생활 문제를 해결 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

사다리꼴의 윗변과 등변이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면



높이는 $2\sin\theta$, 윗변의 길이는 $2\times 2\cos\theta+2$이므로
사다리꼴의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}(4+4\cos\theta)\times 2\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$S'(\theta)=4(-\sin\theta)\sin\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta$
$=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)=4(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, 극대이면서 최대이다.

따라서 단면의 최대 넓이는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $3\sqrt{3}$이다.

136) 답 : ④
[해설]
한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 3이므로
t초후의 반지름의 길이는 $3=2t$이다.
따라서 원의 넓이를 S라 하면 $S(t)=\pi(3+2t)^2$
$\frac{dS}{dt}=2\pi((3+2t)\times 2=4\pi(3+2t)$
따라서 4초후의 넓이의 증가율은 44π이다.

137) 답 : 20
[해설]
[출제 의도]부피와 높이의 변화율에 대한 문제를 정적분을 이용하여 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.
그릇에 깊이가 hcm가 되도록 물을 넣었을 때 물의 부피 V는

$$V=\int_0^h \pi\left(\sqrt{9+h^2}\right)^2 dh=\int_0^h \pi(9+h^2)dh$$
$$=\pi\left[9h+\frac{1}{3}h^3\right]_0^h=\pi\left(9h+\frac{1}{3}h^3\right)$$

$V=\pi\left(9h+\frac{1}{3}h^3\right)$ 따라서 $\frac{dV}{dt}=\pi(9+h^2)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt}=260\pi$이고 $h=2$이므로 $260\pi=\pi(9+4)\left[\frac{dh}{dt}\right]_{h=2}$

$\therefore \left[\frac{dh}{dt}\right]_{h=2}=\frac{260\pi}{13\pi}=20(cm/초)$

138) 답 : 503
[해설]
[출제 의도]매개변수가 있는 함수의 미분을 문제 해결에 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.
점프대를 출발한지 t초 후의 탄력줄의 길이를
$l(\geq 20)$, 반지름의 길이를 r라 하면
탄력줄의 부피 V는 $V=\pi r^2 l$(일정)이고 l과 r는 모두 t의 함수이다.
이 식을 시각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dV}{dt}=\pi\left(r^2\frac{dl}{dt}+2rl\frac{dr}{dt}\right)=0$,

$r^2\frac{dl}{dt}+2rl\frac{dr}{dt}=0$

A지점을 지나는 순간 $l=25(m)$, $r=\frac{3}{100}(m)$,

$\frac{dl}{dt}=10(m/초)$이므로

$\left(\frac{3}{100}\right)^2\times 10+2\times\frac{3}{100}\times 25\frac{dr}{dt}=0$에서

$\frac{dr}{dt}=-\frac{3}{500}(m/초)$

$\therefore\ a+b=500+3=503$

139) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 미분을 이용하여 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
새로운 도로와 기존 도로 PA, PB가 만나는 점을 각각 C, D라 하고 마을을 점 Q라 하면

$\overline{CD}=\overline{QC}+\overline{QD}=\frac{16}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$

$f(\theta)=\frac{16}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$라 놓으면

$f'(\theta)=-\frac{16\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}=0$에서

$16\cos^3\theta-2\sin^3\theta=0 \Leftrightarrow \tan^3\theta=8$

$\therefore\ \tan\theta=2$

이때 $f(\theta)$는 최소이므로 새로운 직선도로의 길이가 최소가 되기 위한 $\tan\theta$의 값은 2이다.