Ⅲ.미분법

1.여러 가지 함수의 미분

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $f(x)$가 $g(x)$의 역함수이고 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이다. 함수 $h(x)=xg(x)$라 할 때, $h'(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

2 양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$f(x)=\begin{cases} \ln x, & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x, & (x \ge e) \end{cases}$ 일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\}\ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\frac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)$의 값은?[4점]

① $\frac{1}{(e+1)^2}$ ② $\frac{1}{e(e+1)}$ ③ $\frac{1}{e^2}$

④ $\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\frac{1}{e(e-1)}$

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

3 함수 $f(x)=x^3+x+1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

4 $0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

[4점][2016(B) /수능 21]

① $\frac{79}{12}$

② $\frac{85}{12}$

③ $\frac{91}{12}$

④ $\frac{97}{12}$

⑤ $\frac{103}{12}$

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

5 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자.

함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?[4점][2013학년도 수능]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$
④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

6 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} 1-x, & (x<0) \\ x^2-1, & (0\le x<1) \\ \frac{2}{3}(x^3-1), & (1\le x) \end{cases}$ 일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $\lvert f(x)\rvert$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $x^kf(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2005 학년도 대수능]

7 [이과]미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

8 함수 $f(x)=3e^{5x}+x+\sin x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$는 점 $(3,\ 0)$을 지난다. $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)-g(3)}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 모의평가]

9 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 기울기가 2이다.

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(\sqrt{x})$의 $x=4$에서의 미분계수는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

10 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능인 함수 $f(x)$가 있다.

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다.

함수 $f(2x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(1, a)$에서의 접선의 기울기는 b이다.

$10(a+b)$의 값을 구하시오.[4점][2012년 6월]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

11 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x), & (f(x)\geq mx) \\ mx, & (f(x)<mx) \end{cases}$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은?[4점][2012년 6월]

① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

12 함수 $f(x)=(x+1)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하자. $h'(0)=15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.[4점][2011년 6월 평가원]

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

13 함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 양수 a에 대하여 $\dfrac{1}{f'(a)}+\dfrac{1}{g'(a)}$의 값은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

14 함수 $f(x)=x\sqrt{x}$에 대하여 $f'(16)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

15 함수 $f(x)=\dfrac{x}{2}+2\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=(f\circ f)(x)$라 할 때, $g'(\pi)$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\dfrac{7}{8}$ ③ $-\dfrac{3}{4}$
④ $-\dfrac{5}{8}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

16 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+8}$에 대하여 부등식 $f'(x)>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

17 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g'(f(x))=\dfrac{1}{x^2+1}$이다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① e^3 ② e^6 ③ e^9
④ e^{12} ⑤ e^{15}

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

18 $\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

보 기
ㄱ.
ㄴ.
ㄷ.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

19 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^x$과 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=e$, $f'(1)=e$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(f(x))=f'(x)$이다.

함수 $h(x)=f^{-1}(x)g(x)$에 대하여 $h'(e)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

20 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\frac{1}{3}$을 만족시킨다.

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(2)+g'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$　② 2　③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{10}{3}$　⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

21 미분가능한 함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$를 만족시킬 때,

다음은 $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하는 과정이다.

$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$ 에서
$3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$ 이므로
$f(x)=\frac{1}{\boxed{(가)}}$
이다.
$f(x)$의 도함수를 구하면
$f'(x)=\frac{-e^x-2e^{2x}}{\left(\boxed{(가)}\right)^2}$
이다. $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 이다.
그러므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{(나)}$
이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $h(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times h(\ln2)$의 값은? [4점]

① -8　② -4　③ 0
④ 4　⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

22 함수 $f(x)=(x+1)^3+\ln x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

23 함수 $f(x)=x^3+2x+1$에 대하여

$f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $24g'(1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

24 삼차 함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & (x \ge k) \\ f(2k-x), & (x<k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

25 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin^2 x+a\cos x,\quad g(x)=\begin{cases} 0, & \left(x<-\frac{\pi}{2}\right) \\ x, & \left(-\frac{\pi}{2}\le x<\pi\right) \\ bx, & (x\ge\pi) \end{cases}$$

에 대하여에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, a, b는 실수이다.)[4점]

[보 기]
ㄱ. $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} g(x)=0$
ㄴ. $a=2$이면 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=-\frac{\pi}{2}$에서 연속이다.
ㄷ. a의 값에 관계없이 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=\pi$에서 연속이면 $b=2n-1$(n은 정수)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

26 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(2)$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

27 함수 $f(x)=(x-1)e^x\,(x>0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(e^2,\,2)$에서의 접선의 기울기는?[3점]

① $\frac{1}{2e^2}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ 1

④ $2e$ ⑤ $2e^2$

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

28 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin 2x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

29 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$일 때, $f(x)$가 미분가능하면 $f'(-x)=f'(x)$이다. ㄴ. 임의의 실수 x에 대하여 $\lvert f(x)\rvert\le Mx^2$이면 $f'(0)=0$이다.(단, M은 양의 상수이다.) ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}=0$이면 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 및 해설

1.여러 가지 함수의 미분

중단원 기출문제

1) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 $f(1)=2$, $f'(1)=3$ 이므로

$g(2)=1$

$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$

한편, 함수 $h(x)=xg(x)$에서 $h'(x)=g(x)+xg'(x)$

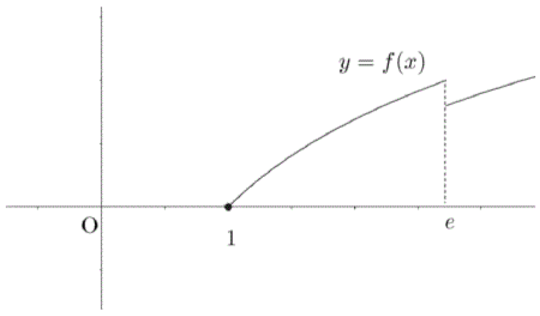
따라서 $h'(2)=g(2)+2g'(2)=1+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

2) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



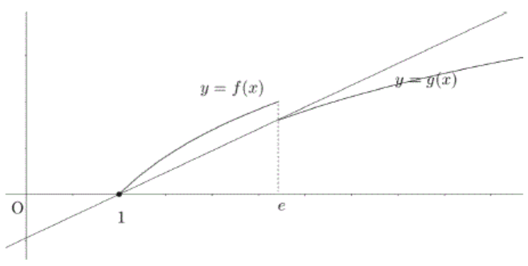
이때 일차함수 $g(x)$가 주어진 조건을 만족시키려면

$1\le x<e$일 때 $g(x)\le f(x)$이고

$x\ge 1$일 때 $g(x)\ge f(x)$이어야 한다.

따라서 일차함수 $g(x)$의 기울기의 최솟값 $h(t)$는 다음과 같다.

(i) 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x(x\ge e)$에 그은 접선이 존재하지 않을 때

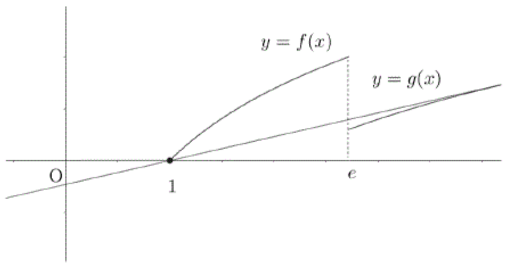


두 점 $(1, 0)$, $(e, f(e))$를 지나는 직선의 기울기가 $h(t)$이다.

즉, $h(t)=\frac{-t+\ln e}{e-1}=\frac{-t+1}{e-1}$이다.

이때, $h'(t)=\frac{-1}{e-1}$이므로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$

(ii) 점 $(1, 0)$에서 곡선 $y=-t+\ln x(x\ge e)$에 그은 접선이 존재할 때



그 접선의 기울기가 $h(t)$이다.

이때 $f'(x)=\frac{1}{x}(x\ne e)$이므로 접점의 x좌표를 α라 하면

$h(t)=\frac{1}{\alpha}$이다.

한편, 접점 $(\alpha, -t+\ln\alpha)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-t+\ln\alpha)=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)$이다.

이 접선이 점 $(1, 0)$을 지나므로 $t-\ln\alpha=\frac{1}{\alpha}-1$ $\ln\alpha+\frac{1}{\alpha}=t+1$

이때 $h(t)=\frac{1}{\alpha}$이므로 $\frac{\ln 1}{h(t)}+h(t)=t+1$

즉, $h(t)-\ln h(t)=t+1$이다.

위 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면 $h'(t)-\frac{h'(t)}{h(t)}=1$이므로

$h'(t)=\frac{h(t)}{h(t)-1}$이다.

한편, 두 점 $(1, 0)$, $(e, f(e))$, 즉 두 점 $(1, 0)$, $(e, -t+1)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-t+1}{e-1}$이고,

점 $\lim_{x\to e+}f'(x)=\frac{1}{e}$이므로 $\frac{-t+1}{e-1}>\frac{1}{e}$

즉, $t<\frac{1}{e}$이면 $h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$이므로

$h'(t)=\frac{-1}{e-1}$이고 $\frac{-t+1}{e-1}\le\frac{1}{2}$

즉, $t\ge\frac{1}{e}$이면 $h(t)-\ln h(t)=t+1$이므로 $h'(t)=\frac{h(t)}{h(t)-1}$이다.

$\frac{1}{2e}<\frac{1}{e}$이므로 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{-1}{e-1}$

한편, $t\le\frac{1}{e}$에서 $h(t)=\frac{-t+1}{e-1}$의 최솟값은

$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-\frac{1}{e}+1}{e-1}=\frac{1}{e}$이다.

한편, 양수 a에 대하여 $h(a)=\frac{1}{e+2}$일 때

$h(a)=\frac{1}{e+2}<\frac{1}{e}=h\left(\frac{1}{e}\right)$이므로 $a>\frac{1}{e}$이다.

따라서 $h'(a)=\frac{h(a)}{h(a)-1}=\frac{\frac{1}{e+2}}{\frac{1}{e+2}-1}=\frac{-1}{e+1}$

따라서 $h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{-1}{e-1}\times\frac{-1}{e+1}=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$ 이다.

3) 답 : ⑤

[해설]

$f(0)=1$이므로 $g(1)=0$

또, $f'(x)=3x^2+1$이므로

$f'(0)=1$

$f(g(x))=x$ 이며 양변을 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=1$$

4) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 역함수의 미분법을 활용할 수 있는가?

$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$이므로

$h'(t)=\{f(t)-g(t)\}+t\times\{f'(t)-g'(t)\}$

그러므로

$h'(5)=\{f(5)-g(5)\}+5\{f'(5)-g'(5)\}\ ...$ ㉠

한편, $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=5$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3+2x^2-15x+5=5$ 이며 이항하여 인수분해하면

$x(x^2+2x-15)=0$

$x(x+5)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

그러므로 $f(5)=3,\ g(5)=-5\ ...$㉡

한편, $y'=3x^2+4x-15$에서

$$f'(5)=\frac{1}{3\cdot 3^2+4\cdot 3-15}=\frac{1}{24}$$

$$g'(5)=\frac{1}{3\cdot(-5)^2+4\cdot(-5)-15}=\frac{1}{40}\ ...㉢$$

㉡과 ㉢을 ㉠에 대입하면

$$h'(5)=\{3-(-5)\}+5\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{40}\right)=8+\frac{1}{12}=\frac{97}{12}$$

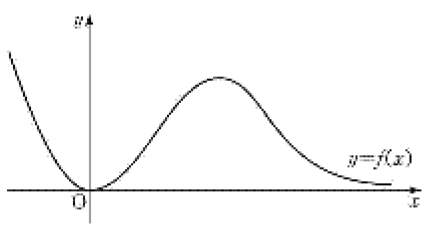
5) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$에서 $f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}$

$=kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=2$

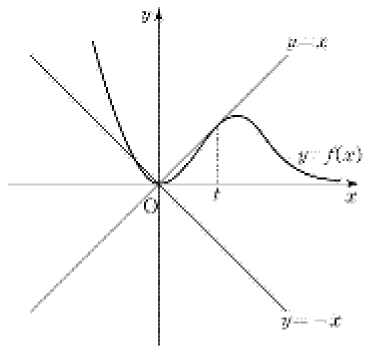


x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4k}{e^2}$	↘

곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중

크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x,\ y=-x$와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면

$x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$kt^2e^{-t}=t\cdots$㉠이고 $x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로

$kt(2-t)e^{-t}=1\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $2-t=1$

$\therefore\ t=1$

$\therefore\ k=e$따라서 k의 최댓값은 e이다.

6) 답 : ③

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & (x<0)\\ x^2-1, & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3}(x^3-1), & (x\ge 1)\end{cases}$$

ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0-}\frac{(1+h)^2-0}{h}=2$

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{\frac{2}{3}((1+h)^3-1)-0}{h}=2$

$\therefore\ f'(1)$은 존재하고 미분가능하다.(참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0-}\frac{|1-h|-1}{h}=-1$

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{|f(h)|-|f(0)|}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0+}\frac{|h^2-1|-|(-1)|}{h}=0$

$\therefore\ |f(x)|$는 $x=0$에서 미분 불가능하다.(거짓)

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{h^kf(h)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{h^k(1-h)}{h}=\lim_{h\to0-}h^{k-1}(1-h)$

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{h^kf(h)}{h}=\lim_{h\to0+}h^{k-1}(h^2-1)$

$\displaystyle\lim_{h\to0-}h^{k-1}(1-h)=\lim_{h\to0+}h^{k-1}(h^2-1)=0$

에서 $k\ge2$이므로 ㄷ은 참이다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7) 답 : ③

[해설]

$x\to1$일 때, (분모)$\to$0이므로 (분자)$\to$0이어야 한다.

정답 및 해설

$\therefore \lim_{x\to1}\{g(x)-2\}=0$ 에서 $g(1)=2$

$\therefore f(2)=1$

그러므로 주어진 식은

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$$

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$에서

$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$

$\therefore f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3}$

[정답] ③

8) 답 : 17

[해설]

$f'(x)=15e^{5x}+1+\cos x$

$f'(0)=15e^{0}+1+\cos 0=17$

$g(x)$는 $(3,\ 0)$을 지나고 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)-g(3)}=\frac{1}{g'(3)}=f'(0)=17$$

9) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

주어진 조건에서 $f'(2)=2$이다.

$g(x)=f(\sqrt{x})$라 하면 $g'(x)=f'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

따라서 구하는 미분계수는

$$g'(4)=f'(\sqrt{4})\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$=f'(2)\cdot\frac{1}{4}$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}$$

10) 답 : 15

[해설]

주어진 조건에서 $f(2)=1,\ f'(2)=1$

$y=f(2x)$의 역함수는

$x=f(2y)\Leftrightarrow 2y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}f^{-1}(x)=g(x)$

$g(1)=\frac{1}{2}f^{-1}(1)=\frac{1}{2}\cdot2=1=a$

$g'(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2}=b$

$\therefore 10(a+b)=15$

[다른 풀이]

주어진 조건에서 $f(2)=1,\ f'(2)=1$

위의 조건을 함수 $h(x)=f(2x)$에 대하여 $\begin{cases}h(1)=1\\ h'(1)=2f'(2)=2\end{cases}\ \cdots$ ①

$f(g(x))=f(2g(x))=x\ ...$②이므로 $h(g(1))=f(2g(1))=1$이며

$f(2)=1$이므로 $g(1)=1=a$

② 의 양변을 미분하면 $f'(2g(x))\times 2g'(x)=1$

$g'(x)=\frac{1}{2f'\{2g(x)\}}$

$g'(1)=\frac{1}{2f'(2g(1))}=\frac{1}{2f'(2)}=\frac{1}{2}=b$

$\therefore 10(a+b)=15$

11) 답 : ②

[해설]

$f(x)=mx$인 $x=\alpha$라 하면 $x=\alpha$에서 미분가능하므로

$\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha\cdots$ ㉠

$3\alpha^2-6\alpha-9=m\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $(\alpha-1)^2(2\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=1$ 또는 $\alpha=-\frac{1}{2}$

그래프를 그려보면, $\alpha=1$일 때 $m=-12$이고 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서

미분가능하지만 $\alpha=-\frac{1}{2}$일 때 $m=-\frac{21}{4}$이고 $g(x)$는 $x>0$에서 미분불가능한

뾰족한 점이 발생한다. (그래프 생략)

따라서 $m=-12$

12) 답 : 10

[해설]

해설

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

$g'(1)f'(0)$

$f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(0)=1$

$15=g'(1)\times\frac{3}{2}$에서

$g'(1)=10$

13) 답 : ①

[해설]

$f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수 $g(x)$를 구해보면

$x=\ln(e^y-1)$

$e^y-1=e^x$

$\therefore g(x)=\ln(e^x+1))$

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1},\ g'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{2e^a}{e^a}=2$

14) 답 : 6

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ 이므로 $f'(16)=\dfrac{3}{2}\times 4=6$

15) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$g'(x)=f'(f(x))\times f'(x)$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}+2\cos x$

$f(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$, $f'(\pi)=-\dfrac{3}{2}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$g'(\pi)=f'(f(\pi))\times f'(\pi)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\times f'(\pi)=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$

16) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$f'(x)=\dfrac{(x^2+x+8)-x(2x+1)}{(x^2+x+8)^2}=\dfrac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2}>0$

$(x^2+x+8)^2>0$ 이므로

$-x^2+8>0$

$-2\sqrt{2}<x<2\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha=-2\sqrt{2}$, $\beta=2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=16$

17) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 역함수의 미분을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 구한다.

$g(f(x))=x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=1$

조건 (나)에서 $g'(f(x))\neq 0$ 이고 $g'(f(x))=\dfrac{1}{f'(x)}$ 이므로

$f(x)g'(f(x))=\dfrac{f(x)}{f'(x)}=\dfrac{1}{x^2+1}$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=x^2+1$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$\ln|f(x)|=\dfrac{1}{3}x^3+x+C$ (단, C는 적분상수)

$|f(x)|=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

조건 (가)에서 $f(0)=1>0$ 이고 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x+C}$

$f(0)=1$ 에서 $C=0$

따라서 $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3+x}$ 이므로 $f(3)=e^{12}$

18) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$ 이므로

$f(g(x))=x$ $f(1)=2$ 이므로 $g(2)=1$

주어진 식에서

$f'(g(x))=\dfrac{1-\{g(x)\}^2\{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3\{f(g(x))\}^2}=\dfrac{1-x^3\{g(x)\}^2}{x^2\{g(x)\}^3}=\dfrac{1}{g'(x)}$ 이므로

$g'(x)=\dfrac{x^2\{g(x)\}^3}{1-x^3\{g(x)\}^2}$ ⋯ $(\star)$ㄱ. 식 $(\star)$에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=\dfrac{2^2\times\{g(2)\}^3}{1-2^3\times\{g(2)\}^2}=\dfrac{2^2}{1-2^3}=-\dfrac{4}{7}$ $\therefore$ (참)

ㄴ. 식 $(\star)$을 정리하면

$g'(x)=x^3\{g(x)\}^2g'(x)+x^2\{g(x)\}^3=x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x)+g(x)\}$

양변을 x 에 대하여 적분하면 $xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$ 이므로

$\displaystyle\int g'(x)dx=\int\{xg(x)\}^2\{xg(x)\}'dx$

$g(x)=\dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3+C$ (단, C는 적분상수) $x=2$를 대입하면

$1=\dfrac{8}{3}+C$ 이므로 $C=-\dfrac{5}{3}$ $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\dfrac{5}{3}$ ⋯ $(\star\star)$

$\therefore$ (참)

ㄷ. 식 $(\star\star)$에 $x=1$을 대입하여 정리하면

$\{g(1)\}^3-3g(1)-5=0$

함수 $h(t)=t^3-3t-5$, $g(1)=\alpha$ 라 하면

$h'(t)=3(t+1)(t-1)$ $t=-1$ 에서 극댓값 -3, $t=1$ 에서 극솟값 -7 을 가지므로

방정식 $h(t)=0$ 은 하나의 실근 α 를 갖는다.

$h(2)=8-6-5=-3<0$, $h\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{125}{8}-\dfrac{15}{2}-5=\dfrac{25}{8}>0$ 이므로

사이값 정리에 의해 $2<\alpha<\dfrac{5}{2}$

$2<g(1)<\dfrac{5}{2}$ $\therefore$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

19) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$f(1)=(1+a+b)e=e$ 에서 $a+b=0$ ...㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e=e$ 에서 $2a+b=-2$ ...㉡

㉠, ㉡에서 $a=-2$, $b=2$

$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$ 에서

$f'(x)=x^2e^x$ $f''(x)=x(x+2)e^x$ 이므로

$f''(1)=3e$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x)\geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.

$f(1)=e$ 에서 $f^{-1}(e)=1$ 이므로

역함수의 미분법에 의하여 $(f^{-1})'(e)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{e}$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$ 이고

$g(f(x))=f'(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ ...㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$

$$g'(e)\times e=3e$$
$$g'(e)=3$$

따라서

$$h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)=\frac{1}{e}\times e+1\times 3=4$$

20) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 미분법 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하므로

$$f(1)=2,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=f'(1)=\frac{1}{3}$$

$f(g(x))=x$의 양변을 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=1$$
$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$$

$f(1)=2$이므로 $g(2)=1$

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=3$$

따라서 $g(2)+g'(2)=1+3=4$

21) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 역함수의 미분법 추론하기

$g\left(3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$ 에서

$3f(x)-\frac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{\boxed{e^x+e^{2x}}}$$

이다.

$f(x)$의 도함수를 구하면

$$f'(x)=\frac{-e^x-2e^{2x}}{\left(\boxed{e^x+e^{2x}}\right)^2}$$

이다. $f(0)=\frac{1}{2}$ 이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 이다.

그러므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(0)}=\boxed{-\frac{4}{3}}$$

이다.

$h(x)=e^x+e^{2x}$, $p=-\frac{4}{3}$

따라서 $\left(-\frac{4}{3}\right)\times h(\ln 2)=-8$

22) 답 : 13

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$$f'(x)=3(x+1)^2+\frac{1}{x}$$

따라서 $f'(1)=13$

23) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(0)=1$이므로 $g(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2$에서 $f'(0)=2$이므로

$$g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$$

따라서 $24g'(1)=12$

24) 답 : 13

[해설]

[출제 의도] 함수의 대칭성을 이용하여 미분가능성 문제를 해결한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k-}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$
$$=\lim_{x\to k-}\left[(k-x)\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$
$$=-3k^2+2k+9$$

또, $\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$
$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$
$$=3k^2-2k-9$$

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

이므로

$$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$$
$$3k^2-2k-9=0$$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

[참고]

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

25) 답 : ③

[해설]

정답 및 해설

[출제 의도] 함수의 연속성을 이해하여 합성함수의 연속성을 추론한다.

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x<-\frac{\pi}{2}$에서 0이므로

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} g(x)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} 0=0$ (참)

ㄴ. $a=2$이므로 $f(x)=\sin^2 x+2\cos x$이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

임의의 실수 α에 대하여

$\lim_{x\to\alpha-} f(x)=\lim_{x\to\alpha+} f(x)=f(\alpha)$를 만족한다.

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} (f\circ g)(x)=f(0)$

$=\sin^2 0+2\cos 0$

$=2$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} f(x)$

$=\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=1$

$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}-} (f\circ g)(x)\neq \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+} (f\circ g)(x)$

이므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=-\frac{\pi}{2}$에서

불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to\pi-} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to\pi-} f(x)$

$=\sin^2\pi+a\cos\pi=-a$

$\lim_{x\to\pi+} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to\pi+} f(bx)$

$=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$

$(f\circ g)(\pi)=f(b\pi)=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi$

합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=\pi$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\pi-} (f\circ g)(x)=\lim_{x\to\pi+} (f\circ g)(x)=(f\circ g)(\pi)$

그러므로

$\sin^2 b\pi+a\cos b\pi=-a$

$1-\cos^2 b\pi+a\cos b\pi+a=0$

$1-\cos^2 b\pi+a(1+\cos b\pi)=0$ ⋯ ㉠

㉠이 a에 대한 항등식이므로

$1-\cos^2 b\pi=0$이고 $\cos b\pi+1=0$이다.

$\cos b\pi=-1$이므로

$b\pi=(2n-1)\pi$ (n은 정수)

$b=2n-1$ (n은 정수) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

26) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

$g(2)=\theta$라 하면 $f(\theta)=2$

$f(\theta)=2\sin\theta+1=2$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $g(2)=\frac{\pi}{6}$

따라서 $g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

27) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]역함수의 접선의 기울기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}$이므로

$g'(e^2)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2e^2}$

28) 답 : ①

[해설]

$f(x)=\sin 2x$이므로

$f(x)$의 역함수 $g(x)$는 $x=\sin 2y$

$\frac{dx}{dy}=2\cos 2y$,

$\frac{dx}{dy}=2\sqrt{1-x^2}$

$g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

따라서 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

29) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x)$ ∴ 참

ㄴ. $|f(0)|\le M\cdot 0^2=0$에서 $f(0)=0$이다.

따라서, $|f'(0)|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|$

$\le\lim_{h\to 0}\frac{Mh^2}{|h|}=\lim_{h\to 0}M|h|=0$

∴ $f'(0)=0$ ∴ 참

ㄷ.(반례) $f(x)=\begin{cases} x+1, & (x>0) \\ 0, & (x=0) \\ x-1, & (x<0)\end{cases}$ 는

$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h}\right\}=0$

이지만 $x=0$에서 불연속이므로 미분가능하지 않다. ∴ 거짓