II.삼각함수

2.삼각함수의 미분법

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

1 양수 a가 $\lim_{x\to 0}\frac{(a+12)^x-a^x}{x}=\ln 3$을 만족시킬 때, a의 값은?[3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

2 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $g(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x$에 대하여 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 최댓값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

3 다항함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x+g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$을 만족시킬 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

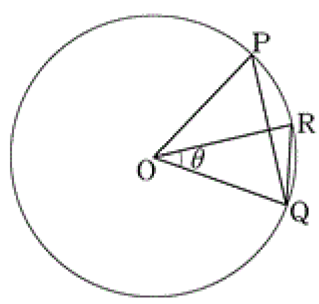
[보기]
ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=1$
ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

4 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 $\angle POQ$를 이등분하는 직선이 호 PQ와 만나는 점을 R라 하자.

삼각형 POQ의 넓이와 삼각형 ROQ의 넓이의 비가 $3:2$이고 $\angle ROQ=\theta$라 할 때, $16\cos\theta$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

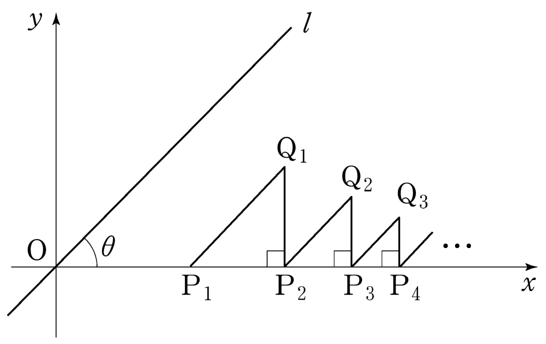
5 [공통]그림과 같이 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 θ인 직선 l이 있다.

점 $P_1(1, 0)$을 지나고 직선 l과 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{OP_1} = \overline{P_1Q_1}$이 되는 점 Q_1을 선택하자.

점 Q_1에서 x축에 내린 수선의 발을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2Q_2}$가 되는 점 Q_2를 선택하자.

점 Q_2에서 x축에 내린 수선의 발을 P_3이라 하고, 점 P_3을 지나고 직선 l에 평행한 직선 위에 선분의 길이가 $\overline{P_2P_3} = \overline{P_3Q_3}$이 되는 점 Q_3을 선택하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점 P_n, Q_n에 대하여 선분 P_nQ_n의 길이를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$일 때, $\cos\theta$의 값은?[4점](단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)

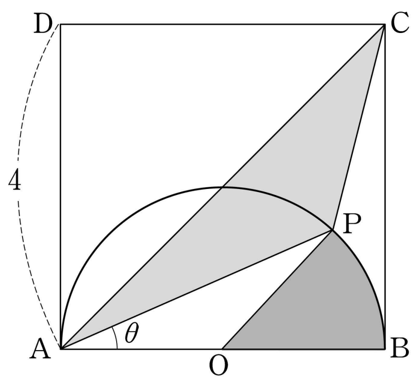


① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

6 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$에서 변 AB의 중점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원 위에 점 P가 있다. $\angle BAP = \theta$일 때 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0} \frac{8 - f(\theta)}{g(\theta)} = \alpha$라 할 때, 10α의 값을 구하시오.(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

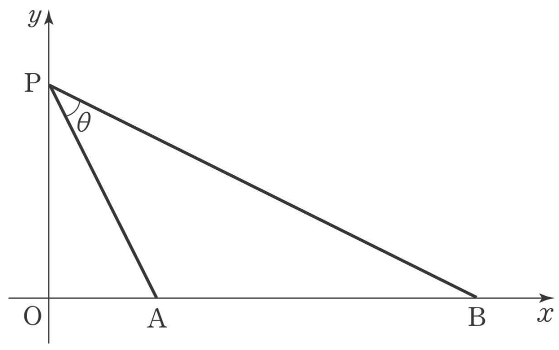
7 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & (x \neq 1) \\ a, & (x = 1) \end{cases}$로 정의한다. $x = 1$에서 $f(x)$가 연속일 때, a의 값은?[3점]

① 0　② 1　③ 2

④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

8 그림과 같이 x축 위의 두 점 $A(20,\ 0)$, $B(80,\ 0)$와 양의 y축 위의 점 $P(0,\ y)$에 대하여 $\angle APB=\theta$라고 할 때, $\tan\theta$의 값이 최대가 되는 점 P의 y좌표를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2005년 09월 모의평가]

9 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x\to0}xf(x)=1$을 만족할 때, $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$이 존재하는 $g(x)$를 [보기]에서 모두 고르면? [3점]

[보 기]
ㄱ. $g(x)=\sin x$
ㄴ. $g(x)=\cos x$
ㄷ. $g(x)=\ln(1+x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

10 함수 $y=5\sin x+\cos 2x$의 최댓값은?[3점]

① 2 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

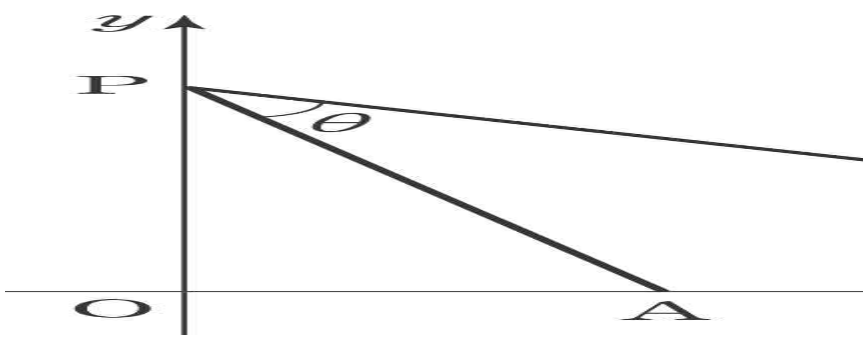
[난이도 : ★★☆] [2004년 6월 모의평가]

11 함수 $y=5\sin x+\cos 2x$의 최댓값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2004년 월 모의평가]

12 그림과 같이 x축 위의 두 점 $A(20,\ 0)$, $B(80,\ 0)$??양의 y축 위의 점 $P(0,\ y)$에 대하여 $\angle APB=\theta$라고 할 때, $\tan\theta$의 값이 최대가 되는 점 P의 y좌표를 구하시오.[4점]



① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

13 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x\to0}xf(x)=1$을 만족할 때, $\lim\limits_{x\to0}f(x)g(x)$이 존재하는 $g(x)$를 다음 [보기]에서 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $g(x)=\sin x$
ㄴ. $g(x)=\cos x$
ㄷ. $g(x)=\ln(1+x)$

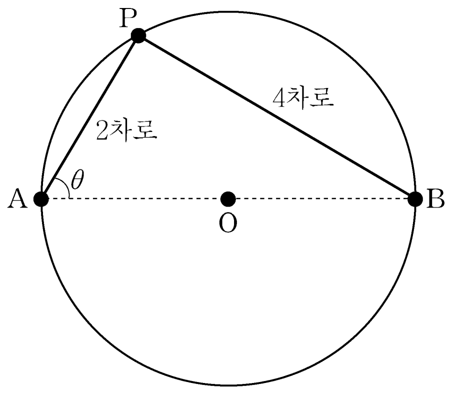
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

14 두 도시 A, B는 $60km$떨어져 있고, 도시 O는 두 도시의 중간 지점에 있다.

신도시의 위치를 도시 O에서 $30km$떨어진 지점에 정한 후, 신도시와 도시 A

사이에는 2차로 직선 도로를, 신도시와 도시 B사이에는 4차로 직선 도로를 건설하려고 한다. 2차로 도로는 km당 6억 원, 4차로 도로는 km당 8억 원의 공사비가 소요된다. 공사비가 최대가 되는 신도시의 위치를 P라 하고 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은?[4점]



① $\frac{4}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2
④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

15 실수 전체 집합에서 정의된 두 함수 f, g가

$f(x)=\begin{cases}2, & (x>0)\\ 1, & (x=0)\\ 0, & (x<0)\end{cases}$ 이고, $g(x)=\sin\pi x$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(f(x))$는 상수함수이다.
ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(g(x))$의 값이 존재한다.
ㄷ. $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2018년 3월 학력평가]

16 함수 $f(x)=x+2\sin x$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [2점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

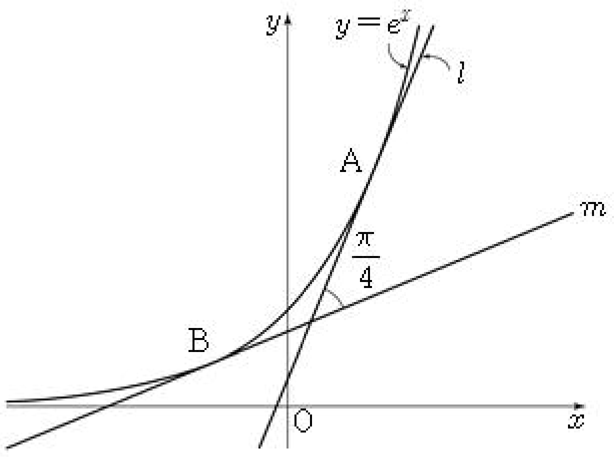
17 $\tan\alpha=4$, $\tan\beta=-2$일 때, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

18 함수 $f(x)=\sin^2 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 최댓값을 M이라 할 때, $4M$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

19 그림과 같이 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $A(t,\ e^t)$, $B(-t,\ e^{-t})$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l과 m이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는? (단, $t>0$) [4점]

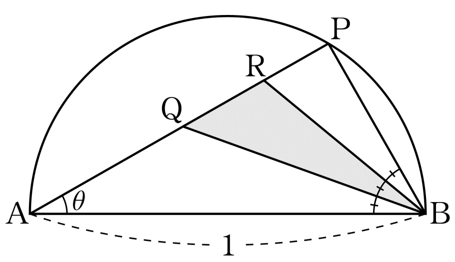


① $\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$　② $\frac{1}{\ln 2}$　③ $\frac{4}{3\ln(1+\sqrt{2})}$

④ $\frac{7}{6\ln 2}$　⑤ $\frac{3}{2\ln(1+\sqrt{2})}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

20 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP$를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

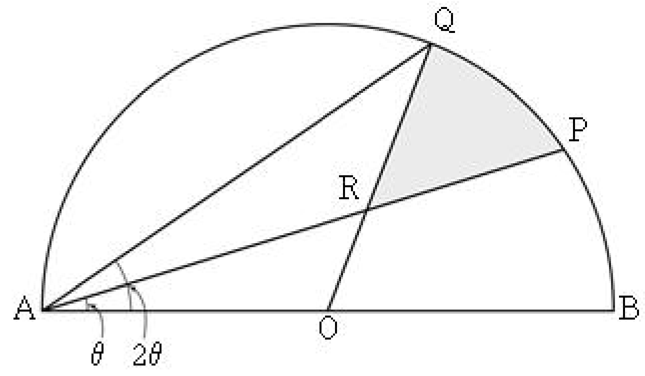


① $\frac{1}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ 1

④ $\sqrt{3}$　⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

21 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QAB=2\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)[4점]



① $\frac{4}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2

④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

[난이도 : ★☆☆] [2016년 4월 학력평가]

22 $f(x)=\sin x$일 때, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [2점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0

④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

23 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\theta$ 의 값은?(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

24 함수 $f(x) = 6\tan 2x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

25 함수 $f(x) = a\sin x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자. $M - m = 6$ 일 때, 양수 a 의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

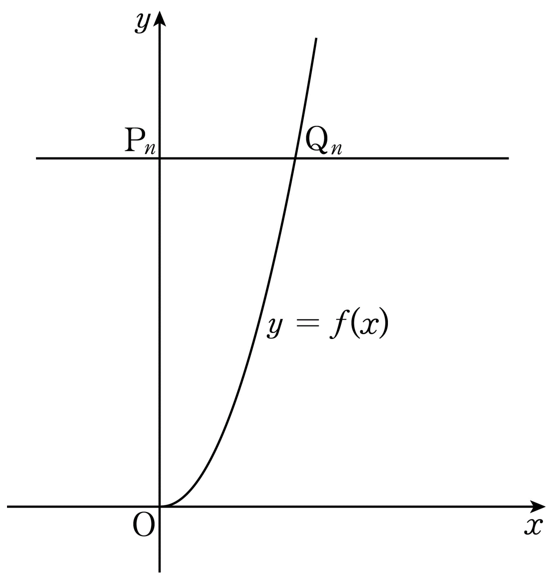
26 함수 $f(x) = \sin x + a\cos x$ 에 대하여 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 3$ 일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은?(단, a 는 상수이다.)[3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}$ ③ 0
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

27 자연수 n 에 대하여 좌표가 $(0, 3n+1)$ 인 점을 P_n, 함수 $f(x) = x^2 (x \geq 0)$ 이라 하자.

점 P_n 을 지나고 x 축과 평행한 직선이 곡선 $y = f(x)$ 와 만나는 점을 Q_n 이라 할 때,



곡선 $y = f(x)$ 위의 점 R_n 은 직선 P_nR_n 의 기울기가 음수이고 y 좌표가 자연수인 점이다.

삼각형 P_nOQ_n 의 넓이를 S_n, 삼각형 P_nOR_n 의 넓이가 최대일 때, 삼각형 P_nOR_n 의 넓이를 T_n 이라 하자. $\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - T_n}{\sqrt{n}}$ 의 값은?

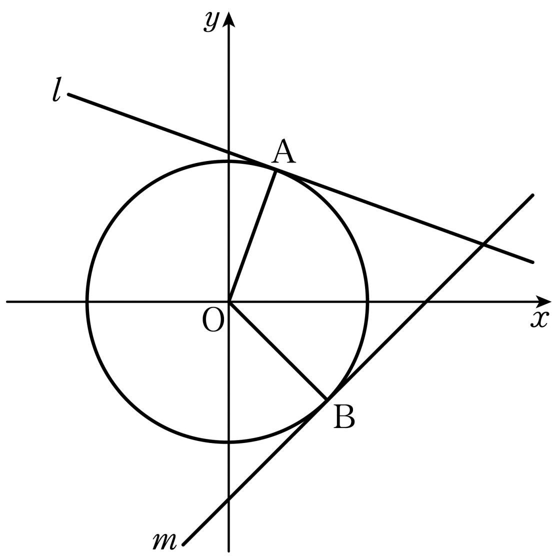
(단, O 는 원점이다.)[4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

28 그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선 l이 원 $x^2+y^2=1$과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m이 원 $x^2+y^2=1$과 점 B에서 접한다.

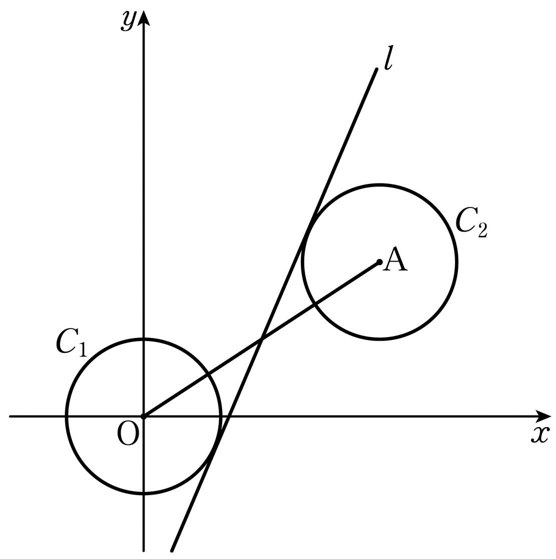
$100\cos^2(\angle AOB)$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

29 좌표평면에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 3인 원 C_1과 중심이 점 $A(t,\ 6)$이고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다.

그림과 같이 기울기가 양수인 직선 l이 선분 OA와 만나고, 두 원 C_1, C_2에 각각 접할 때, 다음은 직선 l의 기울기를 t에 대한 식으로 나타내는 과정이다.(단, $t>6$)



직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 점 O를 지나고 직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\tan\alpha=\frac{6}{t}$ $\tan\beta=$ [(가)] 이다. 직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\theta=\alpha+\beta$ 이므로 $\tan\theta=$ [(나)] 이다. 따라서 직선 l의 기울기는 [(나)]이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $\frac{g(8)}{f(7)}$의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

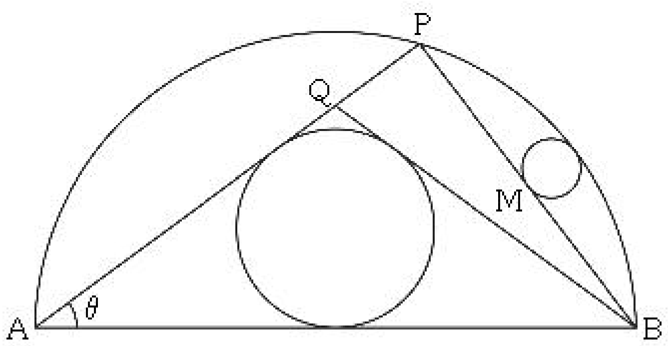
30 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다.

호 AB 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자.

선분 PB의 중점 M에서 선분 PB에 접하고

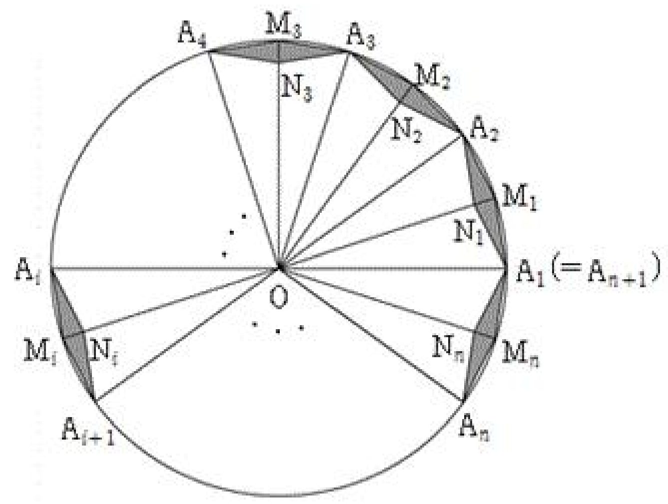
호 PB에 접하는 원의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 AP 위에 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$가 되도록 점 Q를 잡고 삼각형 ABQ에 내접하는 원의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\theta^2 \times T(\theta)}{S(\theta)}$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)[4점]



[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

31 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n(n \geq 4)$등분한 점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라 하자. 호 A_iA_{i+1}($i=1, 2, \cdots, n$)을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $A_iM_iA_{i+1}N_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형 $A_1M_1A_2N_1$, $A_2M_2A_3N_2$, $A_3M_3A_4N_3$, $\cdots$, $A_nM_nA_{n+1}N_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2 \times S_n\right)$의 값은?(단, $A_{n+1}=A_1$)[4점]



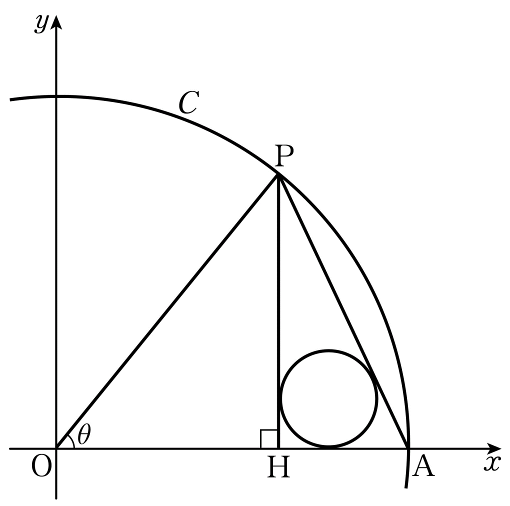
① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$
④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

32 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.

원 C가 x축의 양의 방향과 만나는 점을 A, 원 C 위에 있고 제1사분면에 있는 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\angle POA=\theta$라 하자.

삼각형 APH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2015년 10월 학력평가]

33 $\sin\theta=\frac{2}{3}$일 때, $\cos2\theta$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{5}{9}$

[난이도 : ★☆☆] [2015년 4월 학력평가]

34 $\tan\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\tan2\theta$의 값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{6}{5}$　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

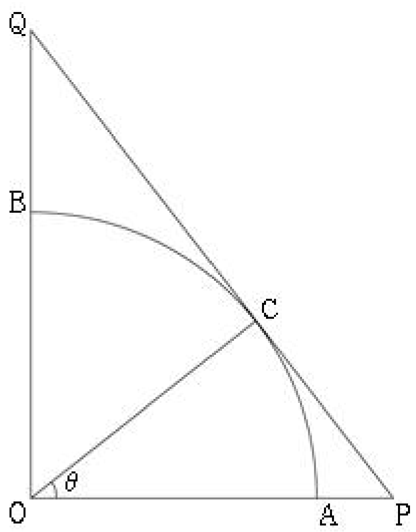
35 $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$일 때, $\cos2\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [2점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{5}$　③ $\frac{7}{10}$
④ $\frac{4}{5}$　⑤ $\frac{9}{10}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

36 그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다.

$\angle COA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$가 되도록 호 AB 위의 점 C를 잡고, 점 C에서의 접선이 변 OA의 연장선, 변 OB의 연장선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=15$일 때, $\tan 2\theta$의 값은? [4점]



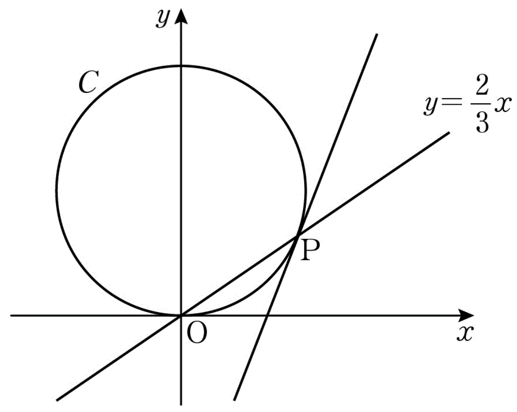
① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

37 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

38 그림과 같이 원점에서 x축에 접하는 원 C가 있다. 원 C와 직선 $y=\frac{2}{3}x$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 P라 할 때, 원 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{8}{5}$ ③ $\frac{28}{15}$
④ $\frac{32}{15}$ ⑤ $\frac{12}{5}$

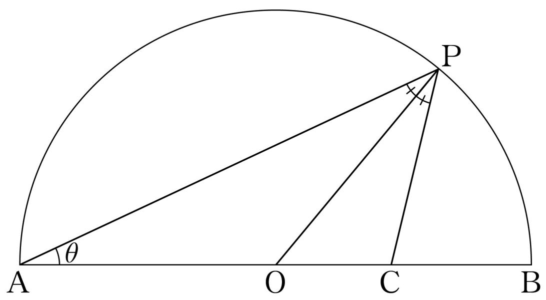
[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

39 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 0}f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)=1$일 때, $\lim_{x\to 0}x^2 f(x)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

40 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle PAB = \theta$라 하자.

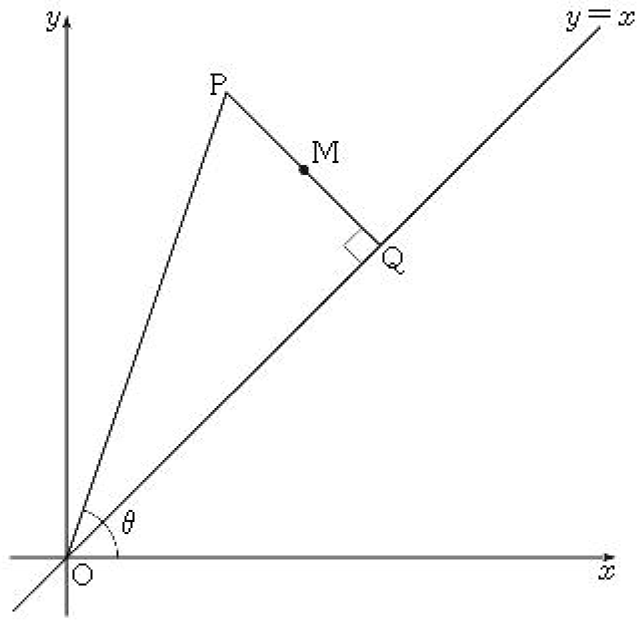
선분 OB 위의 점 C가 $\angle APO = \angle OPC$를 만족시킬 때, $\lim_{\theta \to 0+} \overline{OC}$의 값은?(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이고, 점 O는 선분 AB의 중점이다.)[3점]



① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

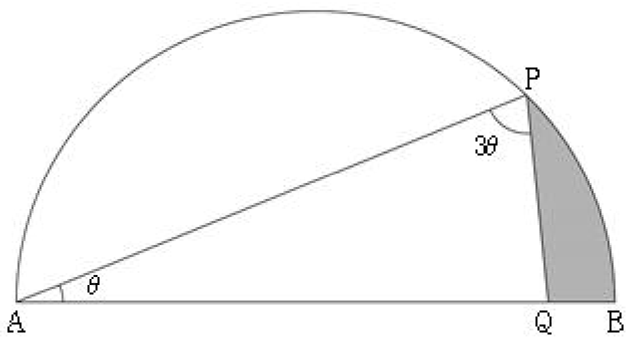
41 그림과 같이 원점 O로부터의 거리가 1인 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$라 하자. 점 P에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. 점 M의 y좌표가 최대일 때, $\tan\theta$의 값은? [4점]



① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

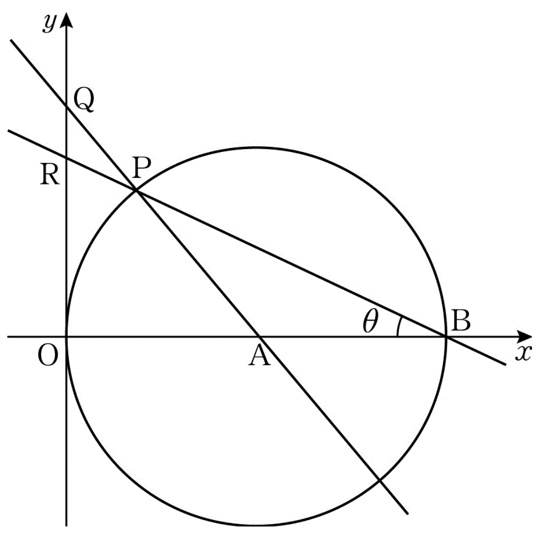
[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

42 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의호 AB 위에 $\angle PAB=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 점 P가 있다. $\angle APQ=3\theta$가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때, 두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

43 그림과 같이 중심이 $A(3, 0)$이고 점 $B(6, 0)$을 지나는 원이 있다. 이 원 위의 점 P를 지나는 두 직선 AP, BP가 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PBA=\theta$라 하고, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2014년 3월 학력평가]

44 $\lim_{x\to0}\frac{3x+\tan x}{x}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

45 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 θ에 대하여 $(1+\tan\theta)\tan2\theta=3$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

46 $\tan\theta=\frac{1}{4}$일 때, $\sin2\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{17}$ ② $\frac{8}{17}$ ③ $\frac{9}{17}$
④ $\frac{10}{17}$ ⑤ $\frac{11}{17}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 4월 학력평가]

47 $0\le x<\pi$일 때, 방정식 $3\cos2x-2\sin^2x-4\cos x+5=0$의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{7}{12}\pi$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{3}{4}\pi$
④ $\frac{5}{6}\pi$ ⑤ $\frac{11}{12}\pi$

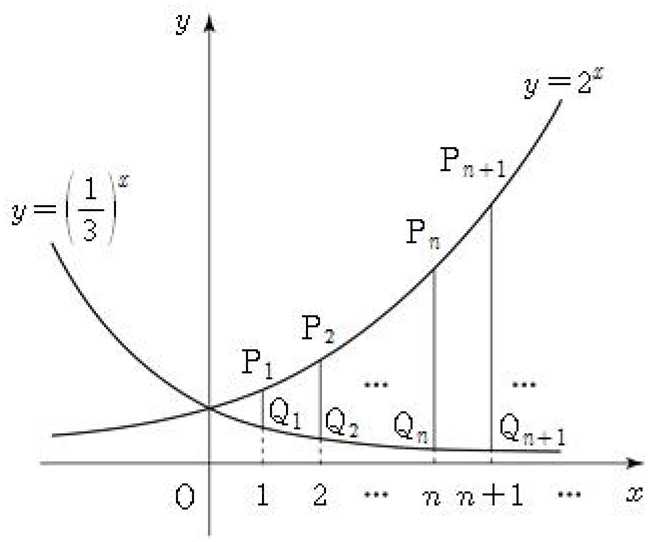
[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

48 함수 $f(x)=4\sin x+6\cos^2\frac{x}{2}+1$의 최댓값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

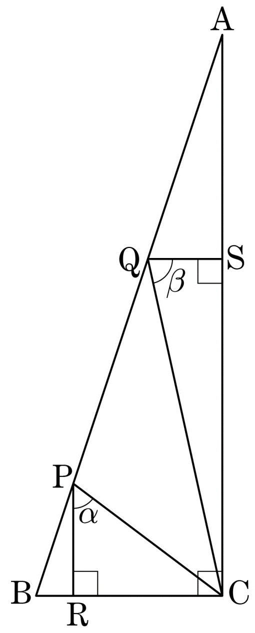
49 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 사다리꼴 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{2^{n-1}}$의 값은? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

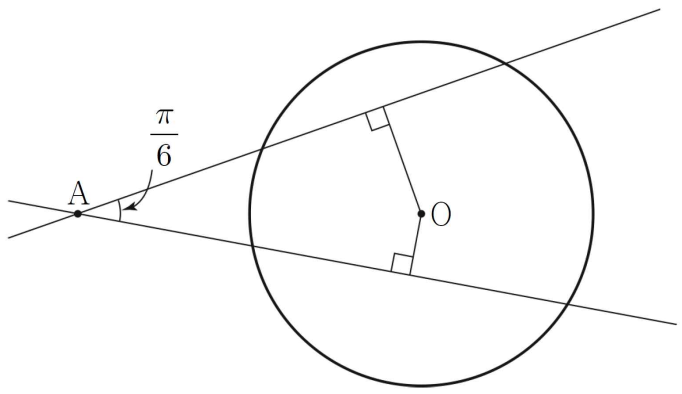
[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

50 $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=1$, $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R, 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle CPR=\alpha$, $\angle CQS=\beta$라 할 때, $\tan(\beta-\alpha)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

51 그림과 같이 중심이 O이고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 원의 중심으로부터 거리가 2인 점 A에서 원과 서로 다른 두 점에서 각각 만나도록 그은 두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$로 일정하다. 원의 중심 O에서 두 직선까지의 거리를 각각 l, m이라 할 때, $2l^2+m^2$의 최솟값은 $p+q\sqrt{7}$이다. $30(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

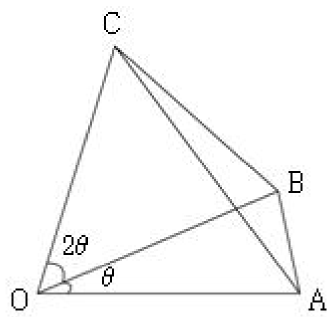


[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

52 그림과 같이 평면 위에 있는 사각형 $OABC$가

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$, $\angle AOB=\frac{1}{2}\angle BOC=\theta$, $\cos\theta=\frac{9}{10}$를

만족시킨다. $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\beta$라 할 때, $\sin^2(\alpha-\beta)$의 값은? [4점]

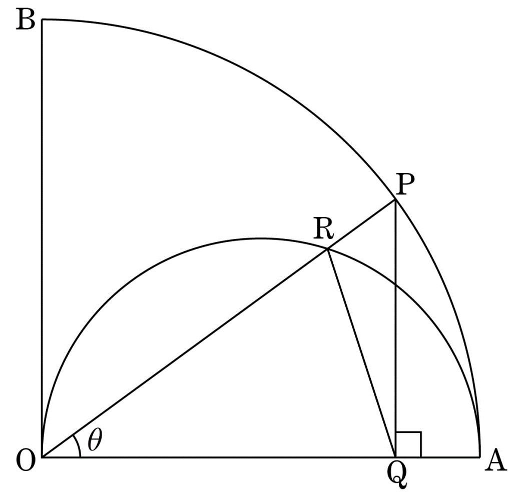


① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$

④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

53 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 Q, 선분 OP와 반원의 교점 중 O가 아닌 점을 R라 하고, $\angle POA=\theta$라 하자. 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

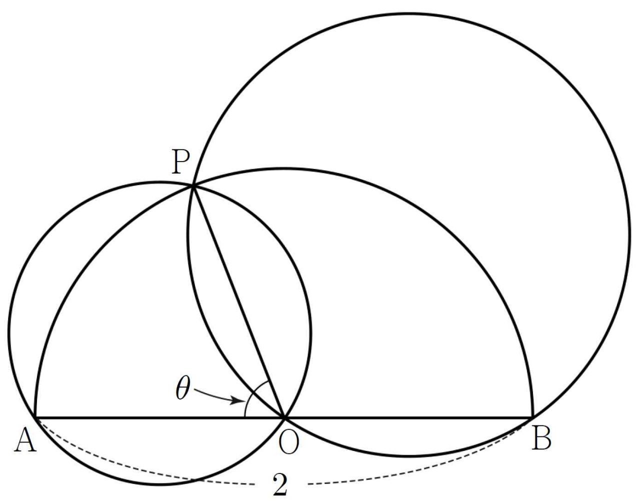
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

54 실수 t에 대하여 좌표평면에서 원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선과 원 $x^2+y^2=e^{2t}$이 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 P라 하고, 점 P가 나타내는 곡선을 C라 하자. $t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a\times e^{b\pi}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오.(단, a와 b는 유리수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

55 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle AOP=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$일 때, 세 점 A, O, P를 지나는 원의 넓이를 $f(\theta)$, 세 점 B, O, P를 지나는 원의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$의 값은? [4점]

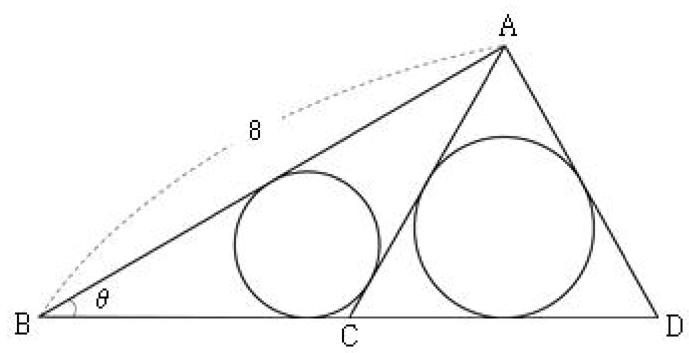


① π　② $\frac{2\pi}{3}$　③ $\frac{\pi}{2}$

④ $\frac{\pi}{3}$　⑤ $\frac{\pi}{4}$

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

56 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ABC=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡는다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{r_1r_2}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① 6　② 7　③ 8

④ 9　⑤ 10

[난이도 : ★☆☆] [2012년 4월 학력평가]

57 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$일 때, $\cos\theta$의 값은?(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)[2점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{7}$

④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{9}$

[난이도 : ★☆☆] [2012년 4월 학력평가]

58 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{4}$일 때, $\cos\theta$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{7}$

④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{9}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 4월 학력평가]

59 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x}{x^2}=2$, $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

60 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}, & (x\neq 1)\\ a, & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

61 $(\sin 165^\circ - \cos 165^\circ)(\sin 105^\circ + \cos 105^\circ)$의 값은? [3점]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

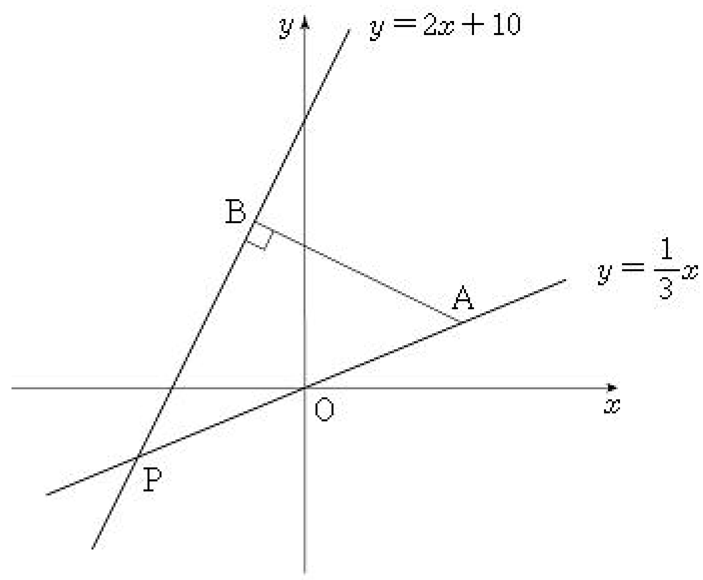
62 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\tan x}{x^2}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

63 그림과 같이 두 직선 $y=\frac{1}{3}x$, $y=2x+10$ 위의 두 점 A, B와 교점 P를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형 PAB가 있다. $\angle B=90^\circ$ 이고 $\overline{PB}=12$일 때, $\overline{PA}$의 값은?

[3점][2012년 7월]



① $12\sqrt{2}$　② $12\sqrt{3}$　③ 18　④ $18\sqrt{2}$　⑤ $18\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

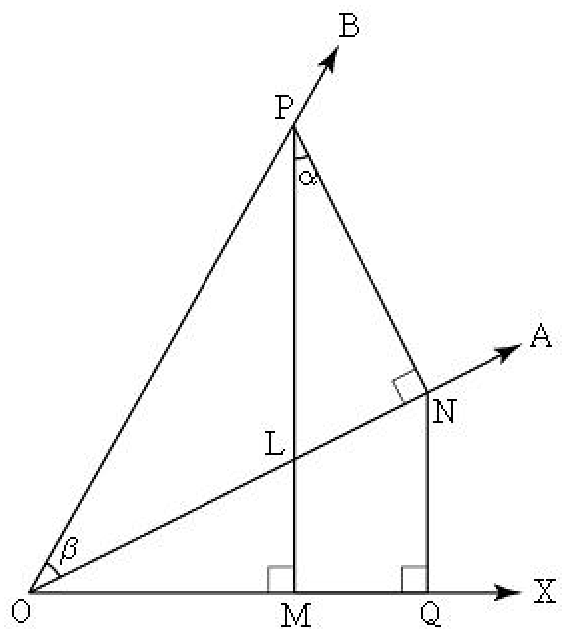
64 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}, & (x\neq 1)\\ a, & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

65 그림과 같이 서로 다른 세 반직선 OX, OA, OB가 있다. 반직선 OB위의 점 P에서 두 반직선 OX, OA위로 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하고, N에서 반직선 OX위에 내린 수선의 발을 Q, 선분 PM과 선분 ON의 교점을 L이라 하자.

$\overline{OM}=4$, $\overline{MQ}=2$, $\overline{LM}=2$이고 $\angle LPN=\alpha$, $\angle LOP=\beta$라 할 때, $\dfrac{3}{\tan(\beta-\alpha)}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\angle XOA<\angle XOB<\dfrac{\pi}{2}$)



[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

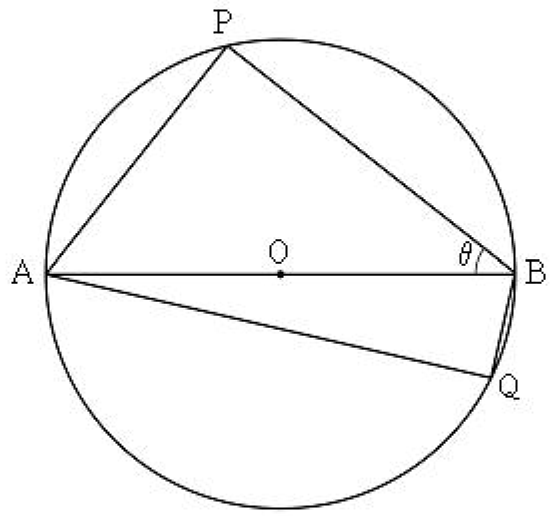
66 이차방정식 $25x^2-25x+4=0$의 두 근이 $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$일 때, $\dfrac{\tan a}{\tan b}$의 값은? (단, $0<b<a<\dfrac{\pi}{4}$) [4점]

① $\dfrac{3}{5}$ ② $\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{4}{5}$

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

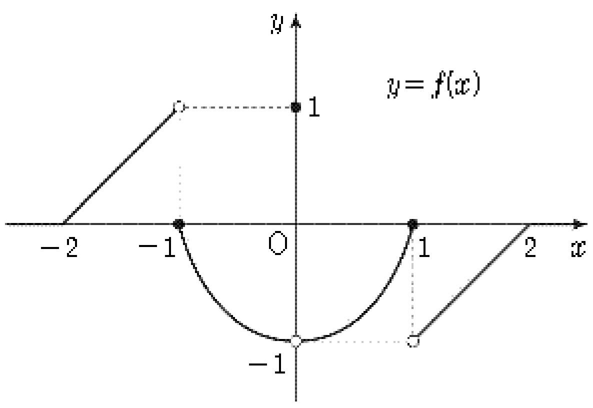
[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

67 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 두 점 P, Q를 $\angle ABQ=2ANGLEABP$이고 삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 AQB의 넓이의 4배가 되도록 정한다. $\angle ABP=\theta$라 할 때, $40\cos\theta$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$)[4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 4월 학력평가]

68 [공통]실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$
ㄴ. $\lim_{x \to 1+} \{f(x) - f(-x)\} = 0$
ㄷ. 함수 $\lvert f(x) \rvert \cdot \sin \pi x$는 열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

69 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1},\ g(x) = x^2 + 10x \text{이다.}$$

함수 $f(x)g(x-a)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

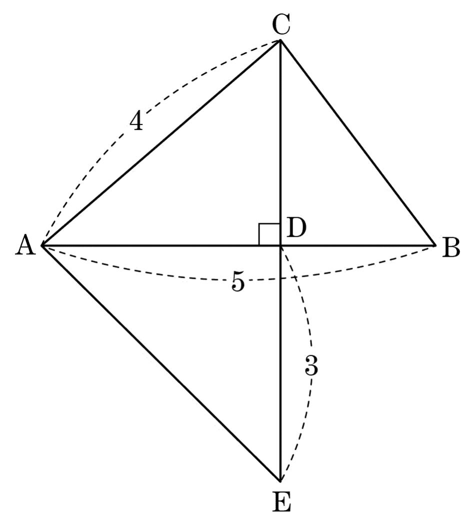
[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

70 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=4$인 삼각형 ABC가 있다.

꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라 할 때, 선분 CD의 연장선 위에 $\overline{DE}=3$을 만족시키는 점 E를 잡는다.

두 삼각형 ABC, AED의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 최댓값을 M이라 하자. M^2의 값을 구하여라.

(단, 각 CAB는 예각이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

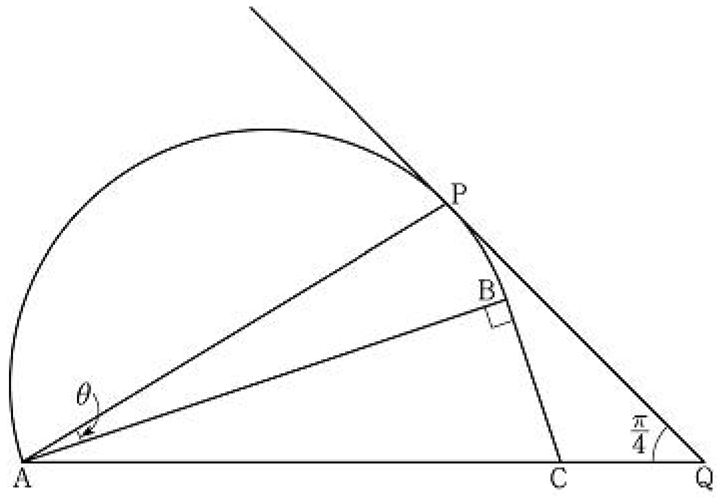
71 함수 $y=\sin 2x + \sin x + \cos x$의 최댓값과 최솟값의 합은? [4점]

① $-\sqrt{2}-\frac{1}{3}$ ② $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\sqrt{2}-\frac{1}{4}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

72 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다.

선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에서의 접선과 AC의 연장선이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle PQA=\frac{\pi}{4}$이고 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $60\tan 2\theta$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2011년 3월 학력평가]

73 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}$의 값은?[2점]

① 0　② 3　③ 6
④ 9　⑤ 12

[난이도 : ★☆☆] [2011년 10월 학력평가]

74 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$의 값은?[2점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2011년 10월 학력평가]

75 $\cos\theta=\frac{3}{4}$일 때, $\cos 2\theta$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{5}{16}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

76 두 실수 x, y가 $x+y=\frac{\pi}{3}$를 만족시킬 때, $\sqrt{3}\cos x+2\sin y$의 최댓값은?[3점]

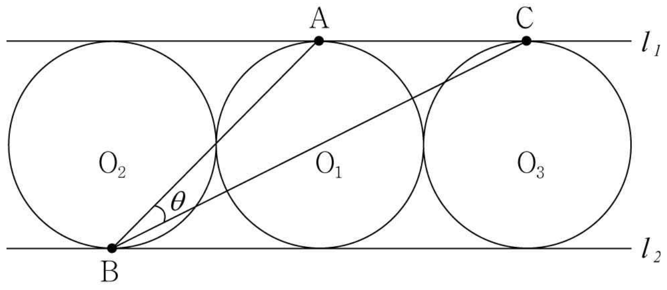
① $\sqrt{7}$　② 3　③ $\sqrt{11}$
④ $\sqrt{13}$　⑤ $\sqrt{15}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

77 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$일 때, $\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta$의 최댓값을 M이라 하자. M^2의 값을 구하시오.[3점]

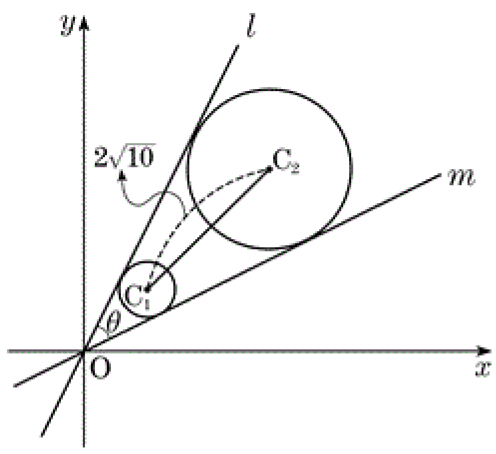
[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

78 그림과 같이 반지름의 길이가 같고 중심이 일직선 위에 있는 세 원 O_2, O_1, O_3이 있다. 두 원 O_2와 O_3이 원 O_1에 각각 외접할 때, 세 원의 공통외접선을 각각 l_1, l_2라 하자. l_1과 원 O_1의 접점을 A, l_2와 원 O_2의 접점을 B, l_1과 원 O_3의 접점을 C라 할 때, $\angle ABC=\theta$에 대하여 $\cot^3\theta$의 값을 구하시오.[3점]



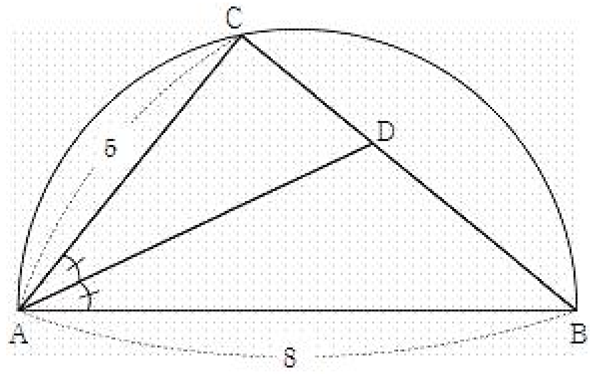
[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

79 그림과 같이 좌표평면 위의 원점을 지나는 서로 다른 두 직선 l, m이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. 반지름의 길이가 1, 3인 두 원 C_1, C_2가 제 1사분면 위에서 두 직선 l, m에 동시에 접하고 $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{10}$일 때, $120\tan\theta$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

80 그림과 같이 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\overline{AC}=5$인 점 C가 있다. $\angle CAB$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=p\sqrt{3}$이다. $\dfrac{1}{p^2}$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

81 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

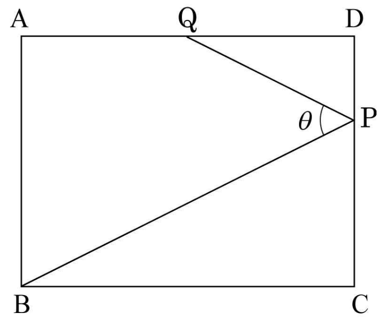
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+5)=f(x)$ (나) $f(x)=\begin{cases} 2x+a, & (-2\le x<1) \\ x^2+bx+3, & (1\le x\le 3)\end{cases}$

이때, $f(2011)$의 값은?[3점]

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

82 그림과 같이 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:4$인 직사각형 $ABCD$에서 선분 CD를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 선분 AD의 중점을 Q라 하자. $\angle BPQ=\theta$일 때, $\cos 2\theta$의 값은?[3점]

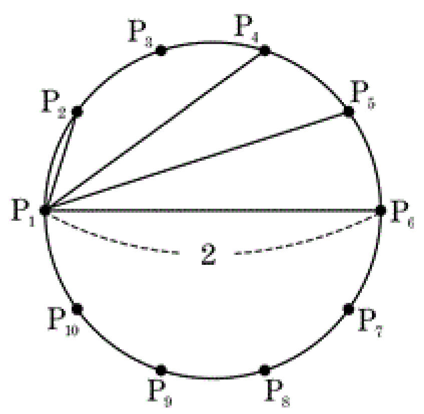


① $-\frac{9}{25}$　　② $-\frac{7}{25}$　　③ $-\frac{4}{25}$

④ $-\frac{1}{25}$　　⑤ 0

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

83 그림과 같이 지름의 길이가 2인 원이 있다. 원의 둘레를 10등분하여 각 등분점을 시계 방향으로 차례로 $P_1, P_2, \cdots, P_{10}$이라 할 때, 다음 중 $\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_4}\cdot\overline{P_1P_5}$의 값과 같은 것은?[3점]



① $2\sin\frac{\pi}{10}$　　② $\sin\frac{\pi}{5}$　　③ $2\sin\frac{\pi}{5}$

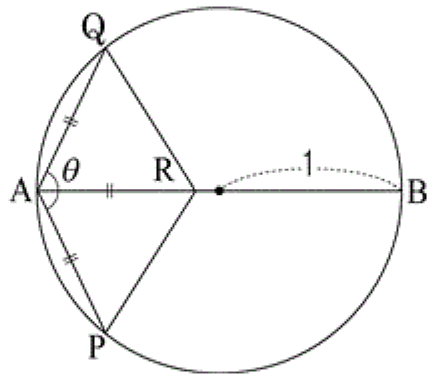
④ $\sin\frac{2}{5}\pi$　　⑤ $2\sin\frac{2}{5}\pi$

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

84 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위에 한 점 A가 있다.

$\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AR}$이 되는 원 위의 두 점을 P, Q, 지름 AB위의 점을 R라 하자.

$\angle PAQ=\theta$에 대하여 사각형 $APRQ$의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\tan\theta}$의 값은?[4점]

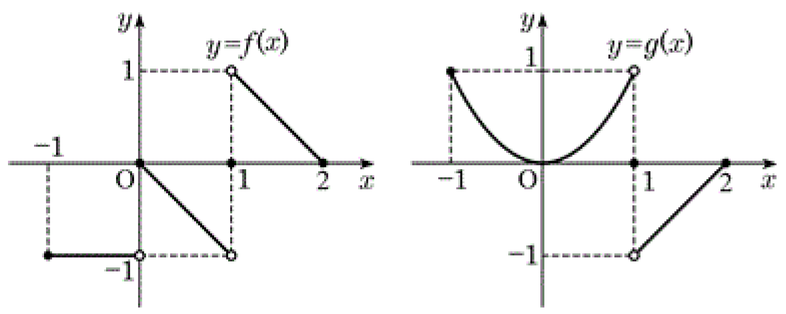


① 1　　② 2　　③ 3

④ 4　　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

85 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보기]

ㄱ. $\lim_{x\to 0-} f(x)=-1$

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

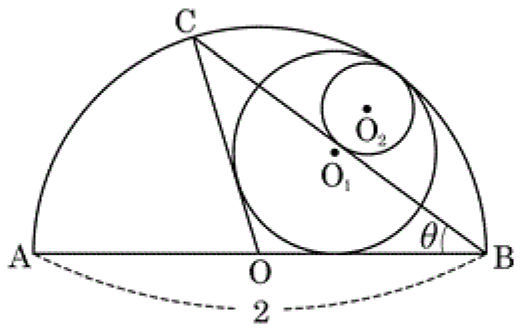
ㄷ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 열린 구간 $(-1, 2)$에서 연속이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

86 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점 O와 반원 위를 움직이는 점 C에 대하여 부채꼴 OBC에 내접하는 원을 O_1, 현 BC와 호 BC로 둘러싸인 부분에 내접하는 원 중 반지름의 길이가 가장 큰 원을 O_2라 하자. $\angle ABC=\theta$라 하고 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이를 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2010년 4월 학력평가]

87 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\right)$의 값은?[2점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2010년 11월 학력평가]

88 두 상수 a, b에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-3}{ax^2+b}=\frac{1}{6}$일 때, $a-b$의 값은?[2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

89 $\sin2\theta=\frac{1}{4}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)[3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ 1
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

90 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\ln\sqrt[3]{x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{x\to0+}\frac{f(g(x))}{g(x)-1}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

91 점 $(6, 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 α, β이다. $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

92 $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?

(단, $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$)[3점]

① $\frac{3-\sqrt{14}}{12}$　② $\frac{-4+\sqrt{14}}{12}$
③ $\frac{4-\sqrt{14}}{12}$　④ $\frac{-3+\sqrt{14}}{12}$
⑤ $\frac{3+\sqrt{14}}{12}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

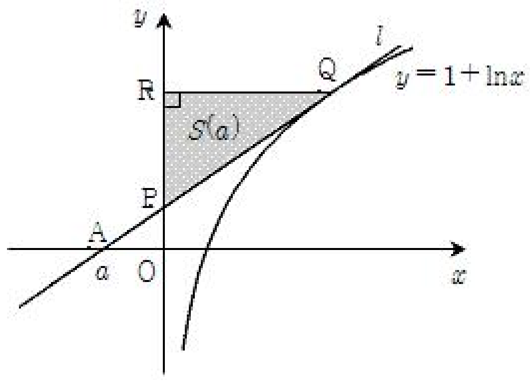
93 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x\ln(1+x)}$ 의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

94 그림과 같이 점 $A(a,\ 0)$에서 곡선 $y=1+\ln x$에 그은 접선이 y축과 만나는 점을 P, 접점을 Q라 하자. 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 R, $\triangle PQR$의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $a<0$)[3점]

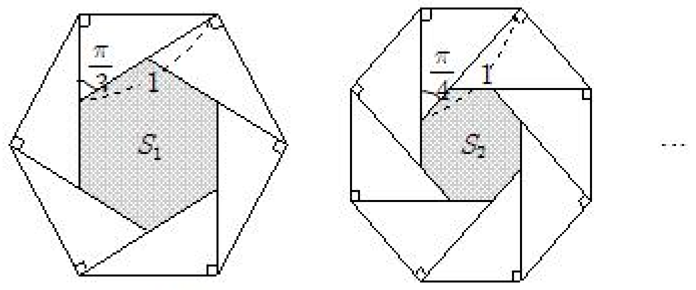


[보기]
ㄱ. $\overline{PR}=1$
ㄴ. $\lim_{a\to -0} S(a)=\frac{1}{2}$
ㄷ. $\lim_{a\to -\infty}\frac{S(a)}{a}=1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

95 [그림 1]과 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{3}$인 6개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자.[그림 2]와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{4}$인 8개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자.



[그림 1]　　[그림 2]

이와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\frac{\pi}{n}$인 $2n$개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n^2 S_n$의 값은?[4점]

① $\frac{1}{10}\pi^3$　② $\frac{1}{8}\pi^3$　③ $\frac{1}{6}\pi^3$
④ $\frac{1}{4}\pi^3$　⑤ $\frac{1}{2}\pi^3$

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

96 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$일 때, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{q}{p}$라 하자.

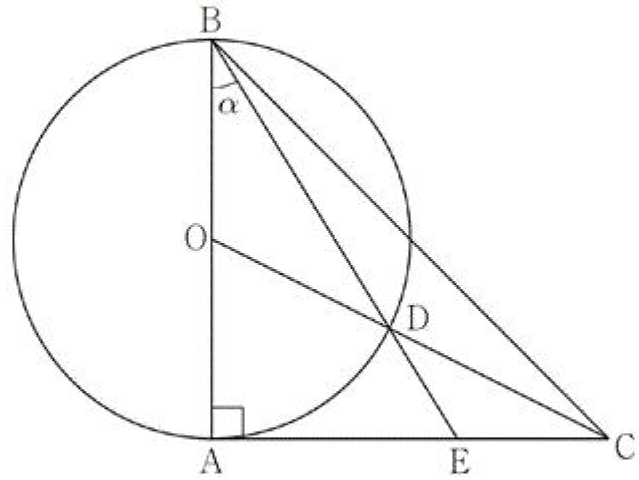
이때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)?[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

97 그림과 같이 $\overline{BC}$를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 ABC가 있다.

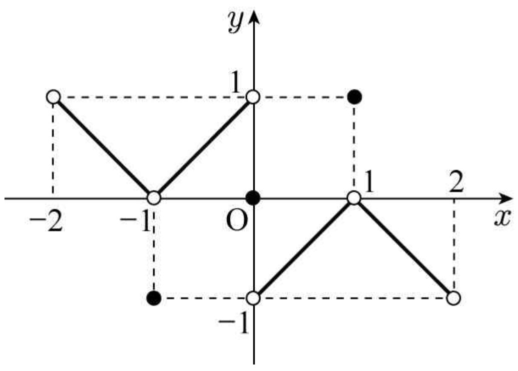
AB의 중점을 O, AB를 지름으로 하는 원 O와 OC와의 교점을 D, BD의 연장선과 AC의 교점을 E라 하자. $\angle ABE = \alpha$라 할 때, $\tan\alpha$의 값은?[4점]



① $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$
③ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$　④ $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$
⑤ $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

98 열린 구간 $(-2, 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=-1$
ㄴ. 함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $-2<a<2$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)f(-x)$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

99 $\lim_{x\to 0} \frac{a^x+b}{\ln(x+1)}=\ln 3\,(a>0,\ a\neq 1)$을 만족하는 상수 $a-b$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2009년 4월 학력평가]

100 직각삼각형 ABC에서 직각이 아닌 두 각의 크기를 α, β라 하고, $\tan\alpha=\frac{3}{2}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?[3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{9}{13}$ ③ $\frac{10}{13}$
④ $\frac{11}{13}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

101 $\lim_{x\to 0} \frac{x-1+\cos x}{x+\sin x}$의 값은?[3점]

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

102 $\sin\alpha=\frac{2}{3}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\beta=\frac{1}{2}\left(0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$이고 $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+\frac{a}{3}x+\frac{b}{36}=0$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?[3점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

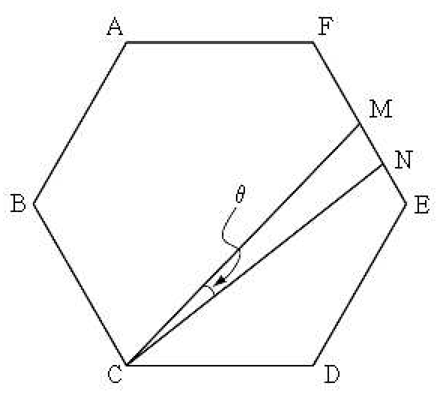
[난이도 : ★★☆] [2009년 4월 학력평가]

103 함수 $y=\sqrt{2}\sin x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$는 $x=\theta$일 때 최댓값을 갖는다. $\tan\theta$의 값은?[3점]

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ 0
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 4월 학력평가]

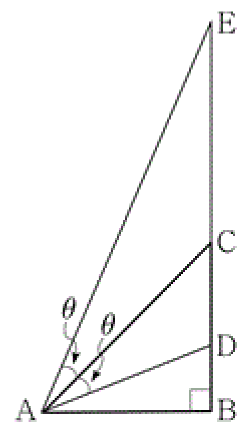
104 정육각형 $ABCDEF$에서 $\overline{EF}$의 중점을 M, $\overline{EM}$의 중점을 N, $\angle MCN=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은?[3점]



① $\frac{2\sqrt{3}}{25}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{23}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{23}$
④ $\frac{6\sqrt{3}}{25}$　⑤ $\frac{6\sqrt{3}}{23}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

105 $\angle B$가 직각인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC위의 점 D와 선분 BC의 연장선 위의 점 E를 $\angle CAD=\angle CAE=\theta$가 되도록 잡는다.



$\frac{\overline{AE}-\overline{AD}}{\overline{AC}}=2$일 때, $\sin\theta$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

106 부등식 $\sin(x+y)\geq\cos(x-y)$를 만족하는 x, y에 대하여 $x+2y$의 최댓값은?(단, $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq y\leq\frac{\pi}{2}$)[4점]

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{3}{4}\pi$　③ π
④ $\frac{5}{4}\pi$　⑤ $\frac{3}{2}\pi$

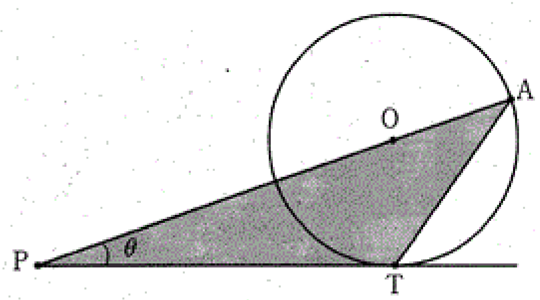
[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

107 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 점 O인 원이 있다.

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 한 접선의 접점을 T라 하자.

선분 PO의 연장선이 원과 만나는 점을 A라 하고, $\angle APT=\theta$라 하자.

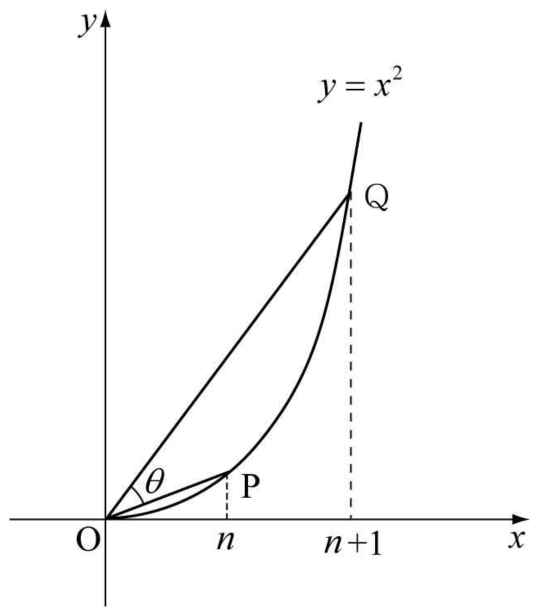
$\triangle APT$의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{2}}$의 값은?[4점]



① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

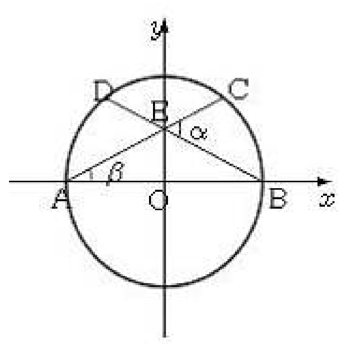
108 n이 자연수일 때, 함수 $y=x^2$ 위의 두 점 $P(n,\ n^2)$, $Q(n+1,\ (n+1)^2)$과 원점 O에 대하여 $\angle POQ=\theta$라 하면, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^2\sin\theta)$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\sqrt{2}$　④ $\sqrt{3}$　⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2008년 4월 학력평가]

109 그림에서 원점 O를 중심으로 하는 원이 x축과 만나는 두 점은 A, B이고, 원의 두 현 AC와 BD의 교점 E는 y축 위에 있으며 $\angle CEB=\alpha$, $\angle CAB=\beta$이다. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin^2\beta=\frac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로 소인 자연수이다.)[3점]



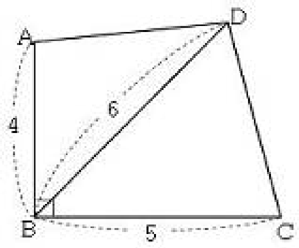
[난이도 : ★☆☆] [2008년 4월 학력평가]

110 $\sin\alpha+\cos\beta+\sin\gamma=0$, $\cos\alpha+\sin\beta+\cos\gamma=0$을 만족할 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값은?[3점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

111 사각형 $ABCD$에서 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{BD}=6$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이의 최댓값은?[3점]



① $3\sqrt{41}$　② $3\sqrt{42}$　③ $3\sqrt{43}$　④ $6\sqrt{11}$　⑤ $9\sqrt{5}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

112 함수 $f(x)=-2\sin^2 x+\sin 2x+1$의 최댓값은?[3점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

113 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$일 때, $\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}$의 값은?(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)[4점]

① $\frac{8\sqrt{5}}{25}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{12\sqrt{5}}{25}$　④ $\frac{14\sqrt{5}}{25}$　⑤ $\frac{16\sqrt{5}}{25}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

114 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값을 바르게 구한 것은?(단, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$)[3점]

① $2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$　② $2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

③ $-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$　④ $-2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$

⑤ $2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

115 [공통]함수 $f(x)=2x^2+5x+1$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

116 수열 $\{\theta_n\}$에 대하여 $\tan\dfrac{\theta_n}{2}=\dfrac{n+1}{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n$의 값은?(단, $0\le\theta_n\le\dfrac{\pi}{2}$이다.)[3점]

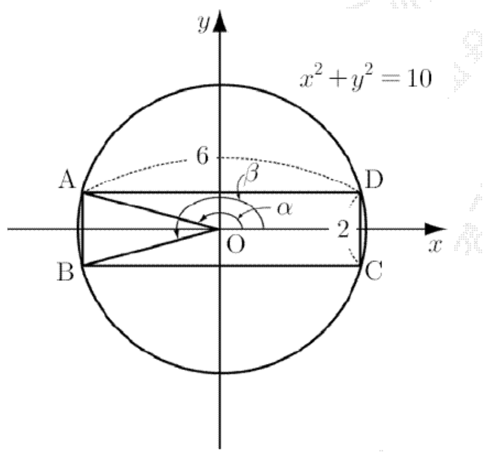
① 1 ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\dfrac{7}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

117 그림과 같이 가로의 길이가 6, 세로의 길이가 2인 직사각형 $ABCD$가 원 $x^2+y^2=10$에 내접하고 있다. 두 선분 OA, OB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\csc\alpha+\sec\beta$의 값은?

(단, 선분 AD는 x축과 평행한다.)[3점]



① $-\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ ② $-\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

④ $\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 04월 학력평가]

118 $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$일 때, $\cos 2\alpha$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{1}{32}$ ② $-\dfrac{1}{16}$ ③ $-\dfrac{1}{8}$

④ $-\dfrac{1}{4}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

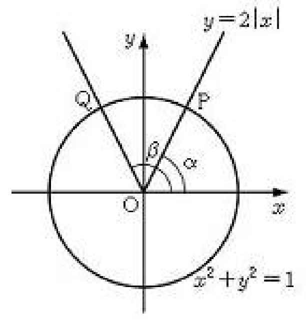
[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

119 $f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}}$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{5}{f(k)}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

120 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$과 $y=2|x|$의 그래프와의 두 교점을 각각 $P,\ Q$라 하자. $\overline{OP},\ \overline{OQ}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?[3점]



① 1 ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

121 연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^{2x}-1}=1004$를 만족할 때,

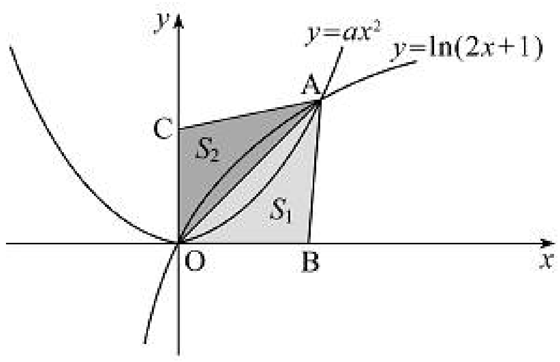
$\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값은?[3점]

① $\dfrac{1}{2008}$　　② $\dfrac{1}{1004}$　　③ 502

④ 1004　　⑤ 2008

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

122 그림과 같이 두 곡선 $y=ax^2\,(a>0)$, $y=\ln(2x+1)$이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 두 점 $B(1,\,0)$, $C(0,\,1)$에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 OAC의 넓이를 S_2라 하자. a의 값이 한없이 커질 때, $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값은 α에 한없이 가까워진다. α의 값은?[3점]

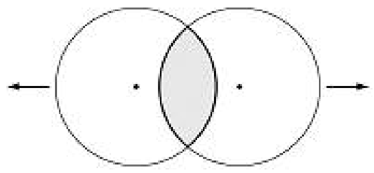


① $\dfrac{1}{e}$　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ 1

④ 2　　⑤ e

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

123 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나고 있다. 이 두 원 내부의 공통부분의 둘레의 길이를 l, 두 원의 교점을 잇는 선분의 길이를 m이라 하자. 두 원의 중심사이의 거리가 2에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{l}{m}$의 극한값은?[4점]

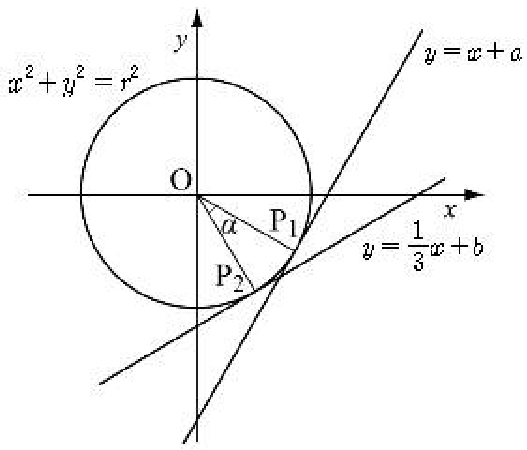


① 1　　② $\dfrac{3}{2}$　　③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

124 두 직선 $y=x+a$, $y=\dfrac{1}{3}x+b$가 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하는 점을 각각 P_1, P_2라 하고 $\angle P_1OP_2=\alpha$일 때, $\tan\alpha$의 값은?(단, $a<0$, $b<0$)[4점]



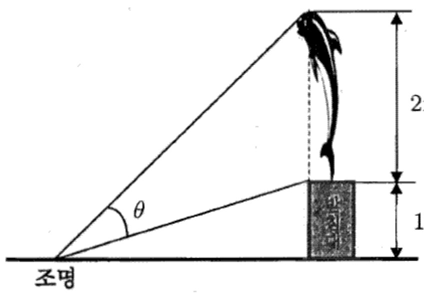
① $\dfrac{1}{4}$ ㅔ　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{3}{4}$

④ 1　　⑤ $\dfrac{5}{4}$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

125 어느 공원에서 높이 $1m$인 받침대 위에 놓인 높이 $2m$인 조형물이 있다.

지면에서 조형물에 비추는 각 θ가 최대인 지점에 그림과 같이 조명을 설치하려고 할 때, 조명과 받침대 사이의 거리는?



① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

126 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\sin(\sin2x)}{1-\cos x}$의 값을 구하시오.[4점]

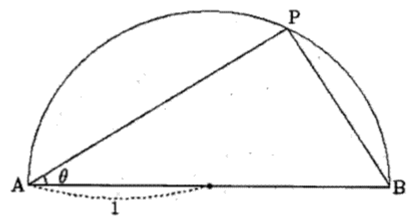
[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

127 [공통]좌표평면에서 직선 $x+y=\sqrt{2}$ 위의 임의의 점과 원 $(x-5\sqrt{2})^2+(y-5\sqrt{2})^2=16$ 위의 임의의 점 사이의 거리를 l이라 하자.

l이 최소가 되는 직선 위의 점에서 원에 그은 두 접선이 이루는 예각 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)일 때, $a-b$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

128 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원 위의 임의의 점 p에서 $\angle PAB=\theta$라 한다. $\overline{AP}+\overline{BP}=a\sin(\theta+b)$일 때, a^2b의 값은?(단, $0\le b\le 2\pi$)[4점]



① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π
④ π^2 ⑤ $2\pi^2$

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

129 $\lim\limits_{\theta\to0}\left(\dfrac{2}{\sin^2\theta}-\dfrac{1}{1-\cos\theta}\right)$의 값은?[3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2007년 4월 학력평가]

130 $y=\cos x+2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은 ?[3점]

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $3\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{7}$ ⑤ $5\sqrt{7}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

131 x에 대한 다항식 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=1$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?[3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

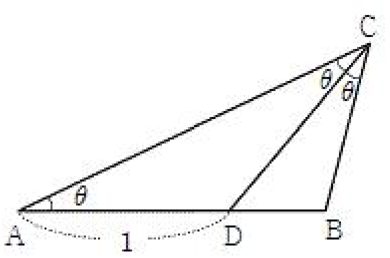
132 $\lim_{x\to1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$의 값은?[3점]

① -2　② $-\frac{1}{2}$　③ 0
④ $\frac{1}{2}$　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

133 삼각형 ABC에서 각 C의 이등분선이 변 AB와 만나는 점을 D라 하자.

삼각형 ADC가 이등변삼각형이고 $\overline{AD}=1$일 때, $\lim_{\theta\to0}\overline{AB}$의 값은?[3점]

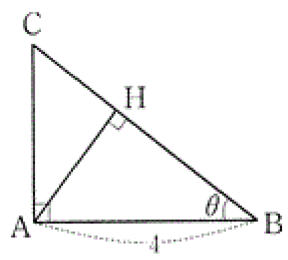


① 1　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{6}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

134 아래 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\angle A=90^\circ$, $\overline{AB}=4$이다.

꼭짓점 A로부터 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H, $\angle B=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{CH}}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}$의 값은?[3점]



① 0　② 1　③ $\frac{\pi}{2}$
④ 2　⑤ π

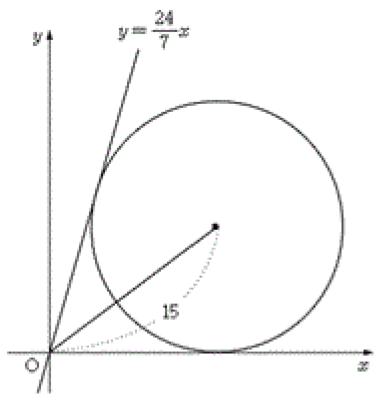
[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

135 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=\sin x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?[3점]

① $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

136 직선 $y=\frac{24}{7}x$와 x축에 동시에 접하고, 중심이 제 1사분면에 있는 원이 있다. 원점에서 이 원의 중심까지의 거리가 15일 때, 원의 반지름의 길이는?[4점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

137 $\sin x=-\frac{1}{3}$, $\sin 3x=-\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\sin 3^{n-1}x=-\frac{1}{3}$, $\cdots$ 을 만족하는 양의 해 중 최솟값을 각각 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots$ 이라 하고,

$\cos x=\frac{1}{3}$, $\cos 3x=\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\cos 3^{n-1}x=\frac{1}{3}$, $\cdots$ 을 만족하는 양의 해 중 최솟값을 각각 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n, \cdots$ 이라 하자.

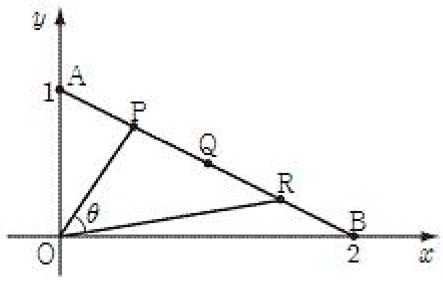
$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\frac{p}{q}\pi$ (p, q는 서로소인 자연수)일 때, $p+q$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

138 두 양수 a, b가 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln 2}$ 를 만족시킬 때, ab의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

139 두 점 $A(0, 1)$, $B(2, 0)$을 이은 선분 AB를 사등분하는 점을 각각 P, Q, R이라 하자. $\angle POR=\theta$라 할 때, $30\tan\theta$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

140 두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$이 각각 $\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2} \end{cases}$,

$\begin{cases} y_1 = \sqrt{3} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \end{cases}$ 로 정의된다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2 < x_n y_n \le 3$이 성립함을 증명한 것이다.

(1)수열 $\{x_n\}$의 일반항을 구해보자.

$x_n = \tan\alpha_n\left(0^\circ < \alpha_n < 90^\circ\right)$이라 하자.

$x_{n+1} = \tan\alpha_n + \sec\alpha_n = \dfrac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$을

$\sin\alpha_n = 2\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\cos\dfrac{\alpha_n}{2}$, $\cos\alpha_n = \cos^2\dfrac{\alpha_n}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha_n}{2}$ 임을 이용하여 정리하면, $x_{n+1} =$ [(가)] 이다.

따라서 $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 75^\circ$, $\alpha_3 = 82.5^\circ$, $\cdots$ 이므로

$\alpha_n = 90^\circ - \dfrac{30^\circ}{2^{n-1}}$이 된다.

$\therefore x_n = \tan\left(90^\circ - \dfrac{30^\circ}{2^{n-1}}\right) = \cot\left(\dfrac{30^\circ}{2^{n-1}}\right) \cdots$ ①

(2)수열 $\{y_n\}$의 일반항을 구해보자.

$y_n = \tan\beta_n\left(0^\circ < \beta_n < 90^\circ\right)$이라 하자.

$y_{n+1} = \dfrac{\tan\beta_n}{1+\sec\beta_n} =$ [(나)] 이다.

따라서 $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 30^\circ$, $\beta_3 = 15^\circ$, $\cdots$ 이므로

$\beta_n = \dfrac{60^\circ}{2^{n-1}}$이 된다. $\therefore y_n = \tan\left(\dfrac{60^\circ}{2^{n-1}}\right) \cdots$ ②

$\gamma_n = \dfrac{30^\circ}{2^{n-1}}$라 하면, ①과 ②에 의하여 $x_n y_n = \dfrac{2}{1-\tan^2\gamma_n}$이 된다.

∴ 모든 자연수 n에 대하여 $0 < \tan\gamma_n \le$ [(다)] 이므로 $2 < x_n y_n \le 3$이 성립한다.

위의 증명에서(가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\tan\left(\dfrac{90^\circ + \alpha_n}{2}\right)$, $\tan\dfrac{\beta_n}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

② $\cot\alpha_n$, $\tan\left(90^\circ + \beta_n\right)$, $\sqrt{3}$

③ $\tan\left(\dfrac{90^\circ + \alpha_n}{2}\right)$, $\tan\left(90^\circ + \beta_n\right)$, $\sqrt{3}$

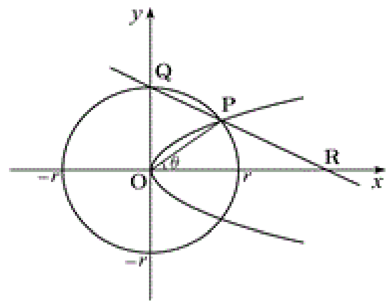
④ $\cot\alpha_n$, $\tan\dfrac{\beta_n}{2}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

⑤ $\tan\left(\dfrac{90^\circ + \alpha_n}{2}\right)$, $\tan\left(90^\circ + \beta_n\right)$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

141 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2(r>0)$과 포물선 $y^2=x$의 교점 중 제 1사분면 위에 있는 점을 P라 하고, 두 점 P, $Q(0, r)$를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자.

다음은 r의 값이 0에 한없이 가까워질 때, 점 R가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하는 과정이다.



선분 OP와 x축이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

점 P는 원 $x^2+y^2=r^2$위의 점이므로

$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$

이때, 점 P는 포물선 $y^2=x$위의 점이므로

$r=$[가]$\cdots$①이다.

두 점 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $Q(0, r)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+r$이므로 점 R의 좌표를 $R(a, 0)$으로 놓으면

$a=\dfrac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}$이다.$\cdots$②

$r\to0$일 때, $\theta\to\dfrac{\pi}{2}$이므로 ①, ②에서 $\lim\limits_{r\to0}a=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=$

[나]이다.

따라서 r의 값이 0에 한없이 가까워질 때, 점 R는 점([나], 0)에 한없이 가까워진다.

위 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[4점]

① $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, 1　② $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, 2

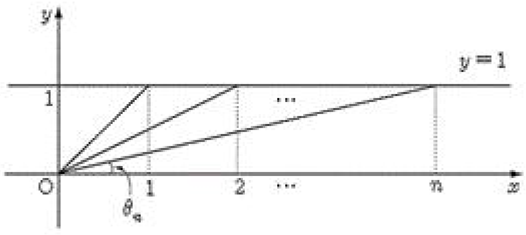
③ $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, 1　④ $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, 2

⑤ $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, 4

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

142 원점과 점 $(1,1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_1, 원점과 점 $(2,1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_2, ⋮

원점과 점 $(n,1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하자.



$\theta_1-\theta_2=\theta_p-\theta_q$가 되도록 하는 p,q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.(단, $1<p<q$이고 p,q는 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

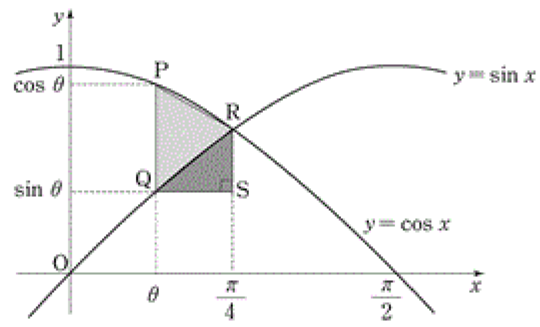
143 $0 \le x \le \pi$일 때, $f(x)=\sin x+\cos x-2\sin x\cos x$의 최댓값과 최솟값의 곱은?[4점]

① $-\frac{5}{4}$ ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

144 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\theta \ne \frac{\pi}{4}$일 때, 곡선 $y=\cos x$위의 점 $P(\theta, \cos\theta)$를 지나고 x축에 수직인 직선과 곡선 $y=\sin x$의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 $R\left(\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$를 지나고 x축에 수직인 직선의 교점을 S라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QSR의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값은?[4점]



① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{3}$

④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

145 α, β가 예각이고, $(\tan\alpha-\sqrt{3})(\tan\alpha+\sqrt{3})=-4$일 때, $\alpha-\beta$의 값은?[3점]

① $-\frac{\pi}{4}$ ② $-\frac{\pi}{6}$ ③ 0

④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

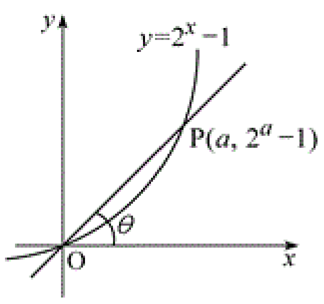
[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

146 함수 $y=\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, $\tan\alpha$의 값은?(단, $0\le x<2\pi$)[3점]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

147 곡선 $y=2^x-1$위의 점 $P(a,\ 2^a-1)$과 원점 O에 대하여 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때, $\lim_{a\to0}\tan\theta$의 값은?[3점]



① ln2 ② ln2+1 ③ 2ln2
④ 2ln2+1 ⑤ ln2+2

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

148 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$ 의 값은?[3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

149 $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{1}{2}$ 일 때, $\tan\theta$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

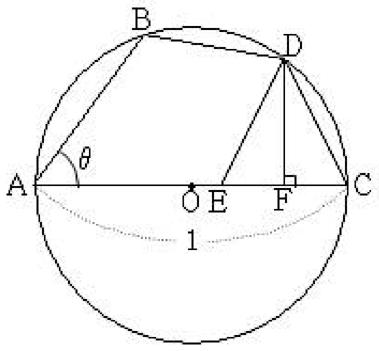
150 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{2\sin^2 x}=1$을 만족하는 양수 k의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

151 다음은 θ가 예각일 때, $\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$가 성립함을 증명한 것이다.

길이가 1인 선분 AC를 지름으로 하는 원 O위의 점 B에 대하여 $\angle BAC=\theta$라 하자.
호 BC의 중점을 D, D에서 지름 AC에 내린 수선의 발을 F라 하고, $\overline{AB}=\overline{AE}$가 되도록 지름 AC위에 점 E를 잡으면



$\triangle BAD\equiv\triangle EAD$
$\overline{CD}=$ [(가)]
$\therefore\overline{EF}=\overline{CF}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AB})$
$\angle AFD=\angle ADC=90$이므로
$\overline{CD}^2=$ [(나)]
$\frac{1}{2}\overline{AC}(\overline{AC}-\overline{AB})$
$\overline{CD}=\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{AB}=$ [(다)]
$\therefore\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

이 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\overline{DE}$, $\overline{AC}\cdot\overline{CF}$, $\sin\theta$
② $\overline{DE}$, $\overline{AC}\cdot\overline{CF}$, $\cos\theta$
③ $\overline{DE}$, $\overline{AD}\cdot\overline{DF}$, $\sin\theta$
④ $\overline{DF}$, $\overline{AD}\cdot\overline{DF}$, $\cos\theta$
⑤ $\overline{DF}$, $\overline{AC}\cdot\overline{CF}$, $\sin\theta$

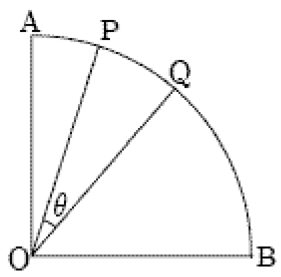
[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

152 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$일 때, $\cos2\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)[3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

153 중심각의 크기가 직각인 부채꼴 AOB가 있다. 호 AB위의 두 점 P, Q에 대하여 $\angle POQ=\theta$라고 하자. 호$AB=4$호PQ일 때, $\cos^2\theta$의 값은?[3점](단, 호AB는 호 AB의 길이이다.)



① $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
③ $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

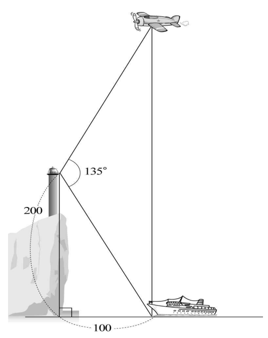
154 함수 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 주기는 4π이다. ㄴ. 최댓값은 2이고 최솟값은 -2이다. ㄷ. 함수 $y=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

155 그림과 같이 등대에서 배를 바라보는 시선과 배위에 수직으로 떠있는 비행기를 바라보는 시선이 이루는 각의 크기가 135°이며, 해수면에서 등대까지의 높이가 200, 등대에서 해수면에 내린 수선에서 배까지의 거리가 100이다. 이때, 배에서 비행기까지의 높이는?(단, 비행기와 배의 크기는 무시한다.)[3점]

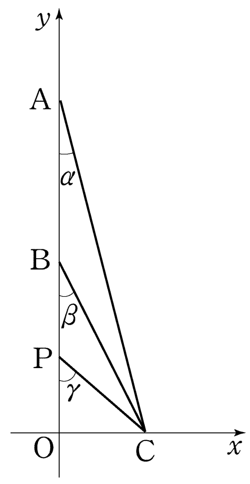


① 300 ② 400 ③ 500
④ 600 ⑤ 700

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

156 아래 그림과 같이 y축 위의 두 점 $A(0, 4)$, $B(0, 2)$와 x축 위의 점 $C(1, 0)$에 대하여 $\angle CAO=\alpha$, $\angle CBO=\beta$라 하자.

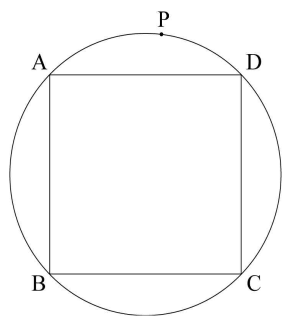
양의 y축 위의 점 $P(0, y)$에 대하여 $\angle CPO=\gamma$라 할 때, $\alpha+\beta=\gamma$가 되는 점 P의 y좌표는?[4점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{6}$
④ $\frac{8}{7}$ ⑤ $\frac{9}{8}$

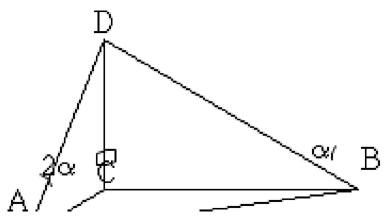
[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

157 그림과 같이 원에 내접하는 정사각형 $ABCD$와 점 B를 포함하지 않는 호 AD위에 동점 P가 있다. 동점 P가 점 D에 한없이 가까워질 때, $\frac{(\overline{AD}-\overline{AP})}{\overline{DP}}$의 극한값을 α라고 한다. 이때, $100\alpha^2$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

158 그림과 같이 한 점 C에서 서로 직교하는 세 직각삼각형 ABC, ACD, BDC에 대하여 $\angle DBC = \alpha$, $\angle DAC = 2\alpha$라 하자. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $\overline{AB} = 5\sqrt{73}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.[4점]

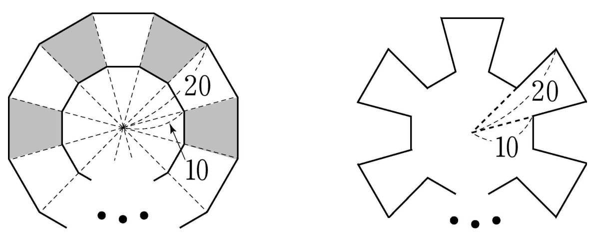


[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

159 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2$는 $x = a$에서 최솟값, $x = b$에서 최댓값을 갖는다. 이때, $\frac{21}{\pi}(a+b)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

160 [그림 1]은 중심이 같은 두 개의 정 $2n$각형에서 큰 정 $2n$각형의 꼭짓점, 작은 정 $2n$각형의 꼭짓점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정 $2n$각형의 꼭짓점까지의 거리는 각각 10, 20이다.[그림 1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든[그림 2]와 같은 도형의 넓이를 S_n이라 하자. $\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.[4점]



[그림 1][그림 2]

[난이도 : ★☆☆] [2005년 7월 학력평가]

161 두 함수 $f(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))}{g(f(x))}$의 값은?[3점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

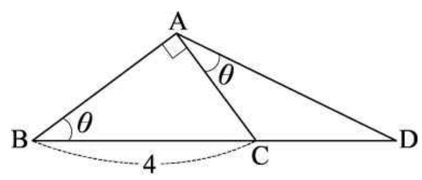
[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

162 $\lim_{x\to 0}\frac{ax\sin 2x}{\cos x - 1} = 8$일 때, a의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

163 그림과 같이 $\overline{BC} = 4$, $\angle BAC = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 선분 BC의 연장선 위에 $\angle ABC = \angle CAD$가 되도록 점 D를 잡는다. $\angle ABC = \theta$라 할 때, 다음 중 선분 AD의 길이를 나타내는 것은?(단, $\angle ABC < 45^\circ$)[4점]



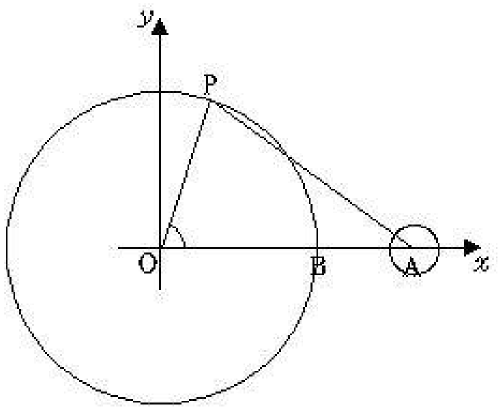
① $2\tan\theta$ ② $2\tan 2\theta$ ③ $\cos 2\theta$
④ $2\cos 2\theta$ ⑤ $4\sin\theta$

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

164 [++]그림과 같이 두 직각삼각형 $\triangle ABC$와 $\triangle ADE$가 있다. $\overline{AB}=\overline{DE}=3$, $\overline{BC}=\overline{AD}=4$, $\overline{BC}//\overline{DE}$, $\angle CAE=\theta$일 때, $48\tan\theta$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

165 그림과 같이 제 1사분면에서 중심이 원점이고 반지름이 1인 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $2\angle PAO=\angle POA$가 되도록 x축 위에 점 A를 잡는다. 이때, $\lim_{P\to B}\overline{OA}$의 값은?(단, $B(1, 0)$)[4점]



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

166 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $P(2, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=3x-5$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(2+\frac{1}{3n}\right)-f(2)\right\}$의 값은?[3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

167 $\tan\theta=-\sqrt{8}$일 때, $\sin\frac{\theta}{2}$의 값은?(단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)[3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

168 $\cos 310^\circ+\cos 190^\circ$ 의 값을 간단히 하면?

① $\sin 20^\circ$ ② $\cos 20^\circ$ ③ $-\sin 70^\circ$
④ $\cos 70^\circ$ ⑤ $-\cos 70^\circ$

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

169 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{5}$일 때, $\sin 2\theta$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

170 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$일 때, $\sqrt{2}\sin\alpha+2\cos\beta$의 최댓값은?[4점]

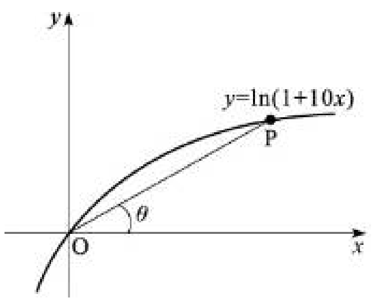
① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

171 $2x^2-px+1=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)=3$을 만족시키는 p의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

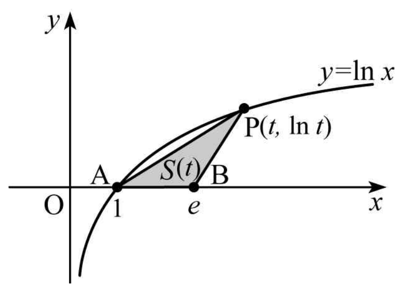
172 곡선 $y=\ln(1+10x)$ 위를 움직이는 점 P와 원점 O를 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 한다. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때 $\tan\theta$의 극한값은?[3점]



① 1　② 5　③ 10
④ e　⑤ $\ln 10$

[난이도 : ★★★] [2005년 0월 학력평가]

173 곡선 $y=\ln x$ 위를 움직이는 점 $P(t, \ln t)$와 두 점 $A(1, 0)$, $B(e, 0)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{S(t)}{t-1}$의 값은?(단, e는 자연로그의 밑)[4점]



① $e-1$　② $2(e-1)$　③ $\dfrac{e-1}{2}$
④ $\dfrac{e-1}{2e}$　⑤ $\dfrac{e(e-1)}{2}$

[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

174 등식 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$을 만족하는 θ에 대하여 $\cos^2 2\theta=\dfrac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 4월 학력평가]

175 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$일 때, $\tan\dfrac{\alpha}{2}$의 값은?(단, α는 제 4사분면의 각이다.)[3점]

① -1　② $-\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{3}$
④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

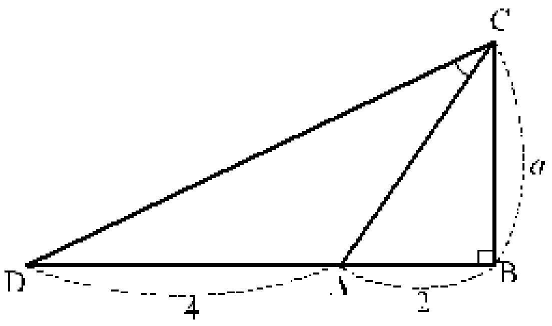
[난이도 : ★☆☆] [2004년 4월 학력평가]

176 함수 $y=\sqrt{3}\sin x-3\cos x$의 주기를 a, 최댓값을 b, 최솟값을 c라 할 때, abc의 값은?[3점]

① -24π　② -12π　③ 0
④ 12π　⑤ 24π

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

177 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=a$, $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 연장선 위에 $\overline{AD}=4$, $\overline{BD}=6$ 인 점 D를 정한다.



$\tan(\angle DCA)=\dfrac{4}{7}$ 를 만족하는 a의 값을 p, q라고 할 때, 곱 pq의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

178 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $\cos 2\theta$의 값은?(단, $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$)[3점]

① $-\dfrac{7}{9}$　② $-\dfrac{2}{3}$　③ $-\dfrac{5}{9}$
④ $-\dfrac{4}{9}$　⑤ $-\dfrac{1}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

179 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ 의 값은?(단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점]

① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{e}{2}$
④ 2　⑤ e

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

180 삼각형 ABC에서 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 C$일 때, $\angle A$의 크기는?[4점]

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$
④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $\dfrac{3\pi}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

181 $\lim\limits_{x\to 0} 2x\cot x$의 값을 구하시오.[3점]

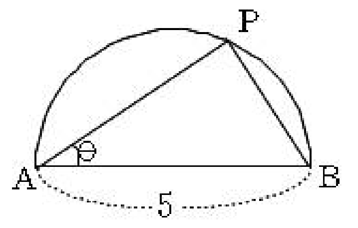
[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

182 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라고할 때, $\tan 2\theta=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ 를 만족하는 $\tan\theta$의 값은?[3점]

① $-2,\ \dfrac{1}{2}$　② $-1,\ \dfrac{1}{2}$　③ $2,\ -\dfrac{1}{2}$
④ $1,\ -\dfrac{1}{2}$　⑤ $2,\ \dfrac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

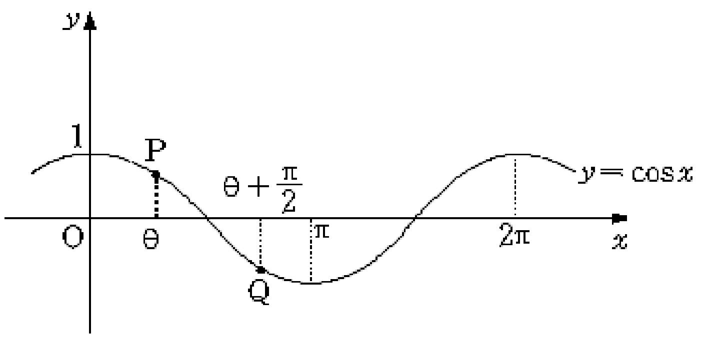
183 그림과 같이 길이가 5인 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위의 임의의 점 P에 대하여, $\overline{AP}+2\overline{BP}$가 최대가 되는 $\angle PAB$의 크기를 θ라 할 때 $\cos\theta$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

184 그림과 같이 곡선 $y=\cos x\,(0 \le x \le 2\pi)$위의 두 점 $P(\theta, \cos\theta)$, $Q\left(\theta+\frac{\pi}{2}, \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$에 대하여 선분 PQ의 길이를 l이라고 할 때, l^2의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오.[3점]



정답 및 해설

1) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+12)^x-a^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\{(a+12)^x-1\}-\{a^x-1\}}{x}$$
$$=\ln(a+12)-\ln a=\frac{\ln\{a+12\}}{a}=\ln 3$$
$$\therefore\ \frac{a+12}{a}=3,$$

$a+12=3a$

$\therefore\ a=6$

2) 답 : ①

[해설]

$g(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$0\le x\le\pi$일 때 $-\frac{\pi}{6}\le x-\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$이므로

$-\frac{1}{2}\le\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\le 1$

$\therefore\ -1\le g(x)\le 2$

$(f\circ g)(x)=\frac{1}{g(x)+2}$에서 $\frac{1}{4}\le(f\circ g)(x)\le 1$

따라서, 최댓값은 1이다.

3) 답 : ③

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin x+g(x)}{x}=1$에서

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=0\cdots$ ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x+g(x)}{x^2}=1$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=1\cdots$ ②

$g(x)$는 다항함수이므로 ①, ②에 의해 $g(x)=x^2$

ㄱ. $g(x)=x^2$이므로 $g(0)=0$ ∴ 참

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ ∴ 참

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sin x+x^2}{x^2}=$ (발산)

∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4) 답 : 12

[해설]

$\triangle POQ=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\triangle ROQ=\frac{1}{2}\sin\theta$

$\frac{1}{2}\sin 2\theta:\frac{1}{2}\sin\theta=3:2$

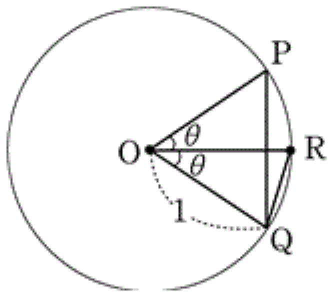
$2\sin 2\theta=3\sin\theta$

$4\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta$

$\sin\theta(4\cos\theta-3)=0$

$\sin\theta\ne 0$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 16\cos\theta=16\times\frac{3}{4}=12$



5) 답 : ④

[해설]

주어진 조건에서

$\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=\overline{P_nP_{n+1}}=\overline{P_nQ_n}\cdot\cos\theta$이므로

$a_{n+1}=a_n\cdot\cos\theta$

$\therefore\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\cos\theta$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1=\overline{P_1Q_1}=1$, 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-\cos\theta}=4$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{4}$ [정답]④

6) 답 : 20

[해설]

$\overline{AC}=4\sqrt{2}$이고, $\triangle APB$는 직각삼각형이므로

$\overline{AP}=4\cos\theta$이다.

$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AP}\sin(\angle\cap)$

$=8\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=8\sqrt{2}\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$

$=8\sqrt{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)=8\cos^2\theta-8\cos\theta\sin\theta$

$\therefore\ 8-f(\theta)=8\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta$

한편, $\angle BOP=2\theta$이므로 $g(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot 2\theta=4\theta$이다.

$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{8-f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{8\sin^2\theta+8\sin\theta\cos\theta}{4\theta}$

$=2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta+\cos\theta)=2\cdot 1\cdot 1=2$

$\therefore\ 10\alpha=20$ [정답] 20

7) 답 : ③

[해설]
$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$이다.

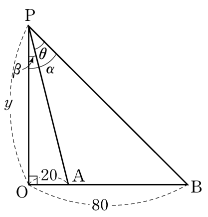
$$a=\lim_{x\to1}\frac{\sin2(x-1)}{x-1}\ (x-1=\theta)\text{라 두면}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2$$

$$=2$$

8) 답 : 40
[해설]



위의 그림에서 $\angle BPO=\alpha$, $\angle APO=\beta$라 하면
$\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{80}{y}-\frac{20}{y}}{1+\frac{80}{y}\times\frac{20}{y}}$$

$$=\frac{60y}{y^2+1600}$$

$$=\frac{60}{y}\cdots①$$

따라서, $\tan\theta$의 값이 최대가 되려면
$y+\frac{1600}{y}$이 최솟값을 가져야 한다.
이때, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$$y+\frac{1600}{y}\ge2\sqrt{y\cdot16}\cdots②$$

즉, ①, ②에서 $y=\frac{1600}{y}$, 즉 $y=40$일 때 최솟값을 가지므로
$\tan\theta$는 $y=40$일 때, 최댓값을 갖는다.
따라서, 점 P의 y좌표는 40이다.

9) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]함수의 극한
$\lim_{x\to0}xf(x)=1$에서 $xf(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to0}h(x)=1$, $f(x)=\frac{1}{x}h(x)\,(x\ne0)\ldots$㉠

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot\sin x$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot h(x)$$

$$=1\times1=1$$

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot\cos x$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\cos\frac{x}{x}\right\}\cdot h(x)\ldots㉡$$

그런데, $\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{x}$의 값이 존재하지 않으므로 ㉡의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot\ln(x+1)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot h(x)$$

$$=1\times1$$

$$=1$$

따라서, $\lim_{x\to0}f(x)\cdot g(x)$가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

10) 답 : ④
[해설]

$$y=5\sin x+\cos2x=5\sin x+1-2\sin^2x$$
$$=-2\sin^2x+5\sin x+1$$

$t=\sin x$라 두면

$$y=-2t^2+5t+1\,(-1\le t\le1)$$
$$=-2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$$

∴ $t=1$일 때, 최댓값: 4이다.

11) 답 : ④
[해설]

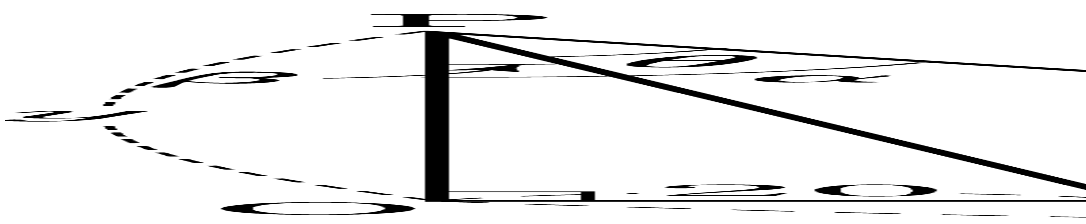
$$y=5\sin x+\cos2x=5\sin x+1-2\sin^2x$$
$$=-2\sin^2x+5\sin x+1$$

$t=\sin x$라 두면

$$y=-2t^2+5t+1\,(-1\le t\le1)$$
$$=-2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$$

∴ $t=1$일 때, 최댓값: 4이다.

12) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]삼각함수



위의 그림에서 $\angle BPO=\alpha$, $\angle APO=\beta$라 하면
$\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$=\frac{\frac{80}{y}-\frac{20}{y}}{1+\frac{80}{y}\times\frac{20}{y}}=\frac{60y}{y^2+1600}=\frac{60}{y}\ldots①$$

따라서, $\tan\theta$의 값이 최대가 되려면
$y+\frac{1600}{y}$이 최솟값을 가져야 한다.

이때, $y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$$y+\frac{1600}{y}\geq 2\sqrt{y\cdot 16}\ ...②$$

즉, ①, ②에서 $y=\frac{1600}{y}$, 즉 $y=40$일 때 최솟값을 가지므로

$\tan\theta$는 $y=40$일 때, 최댓값을 갖는다.

따라서, 점 P의 y좌표는 40이다.

13) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 극한

$\lim_{x\to 0} xf(x)=1$에서 $xf(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0} h(x)=1$, $f(x)=\frac{1}{x}h(x)(x\neq 0)$ ...①

ㄱ.

$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot \sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot h(x)=1\times 1=1$$

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot \cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$ ...②

그런데, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$의 값이 존재하지 않으므로 ②의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ.

$$\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot \ln(x+1)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot h(x)=1\times 1=1$$

따라서, $\lim_{x\to 0} f(x)\cdot g(x)$가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14) 답 : ①

[해설]

총 공사비를 $f(\theta)$라 두면

$\overline{AP}=60\cos\theta$, $\overline{BP}=60\sin\theta$이므로

$$\begin{aligned}f(\theta)&=60\sin\theta\times 8+60\cos\theta\times 6\,(\text{억원})\\&=120(4\sin\theta+3\cos\theta)\\&=600\left(\sin\theta\cdot\frac{4}{5}+\cos\theta\cdot\frac{3}{5}\right)\\&=600\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\right)$

$\therefore$ $f(\theta)$는 $\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때, 최댓값 600억원이다.

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\\&=\cot\alpha\\&=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\&=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

15) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]함수의 극한과 연속성

$f(x)=\begin{cases}2, & (x>0)\\1, & (x=0)\\0, & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\sin\pi x$

ㄱ. $f(f(x))=\begin{cases}2, & (x\geq 0)\\1, & (x<0)\end{cases}$이므로 상수함수가 아니다.

$\therefore$ 거짓

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\sin\pi x=0$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(g(x))=0$

$\lim_{x\to 0+} f(g(x))=2$

$\lim_{x\to 0-} f(g(x))\neq\lim_{x\to 0+} f(g(x))$이므로

$\lim_{x\to 0} f(g(x))$의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $g(f(0))=g(1)=\sin\pi=0$이고,

$\lim_{x\to 0-} g(f(x))=g(0)=\sin 0=0$

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=g(2)=\sin 2\pi=0$

이므로 $g(f(0))=\lim_{x\to 0} g(f(x))$

따라서, $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore$ 참

16) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 미분계수를 계산한다.

$f(x)=x+2\sin x$에서 $f'(x)=1+2\cos x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+2\cos\frac{\pi}{3}=1+2\times\frac{1}{2}=2$$

17) 답 : 11

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.

탄젠트 함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4+(-2)}{1-4\times(-2)}=\frac{2}{9}$$

$p=9$, $q=2$이므로 $p+q=11$

18) 답 : 9

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin^2 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1\\&=1-\cos^2 x+\cos x+1=-\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

이때 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로

함수 $f(x)$는 $\cos x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

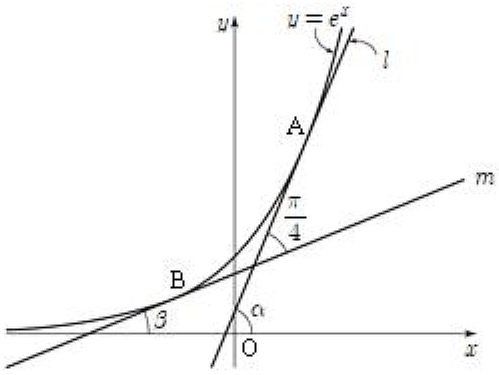
따라서 $M=\frac{9}{4}$이므로 $4M=9$

19) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

$y'=e^x$ 이므로 곡선 $y=e^x$ 위의 두 점 $A(t,\ e^t)$, $B(-t,\ e^{-t})$에서의 접선 l, m의 기울기는 각각 e^t, e^{-t}이다.



두 직선 l, m이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=e^t$, $\tan\beta=e^{-t}$

$\tan\frac{\pi}{4}=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{e^t-e^{-t}}{1+e^te^{-t}}=1$

$e^t-e^{-t}=2$

$(e^t)^2-2e^t-1=0$

$e^t>0$이므로 $e^t=1+\sqrt{2}$

$\therefore\ t=\ln(1+\sqrt{2})$

따라서 직선 AB의 기울기는

$\frac{e^t-e^{-t}}{t-(-t)}=\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$

20) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.

$\angle BPA=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle QBR=\alpha$라 하면

$3\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\alpha=\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}$

$\overline{BP}=\sin\theta$이므로

$\overline{PQ}=\sin\theta\tan2\alpha$

$\overline{PR}=\sin\theta\tan\alpha$

이다. 따라서

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PQ}-\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{PR}=\frac{1}{2}\sin^2\theta(\tan2\alpha-\tan\alpha)$

$=\frac{1}{2}\sin^2\theta\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=1$이므로

[구하는 값] $=\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta}{3}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

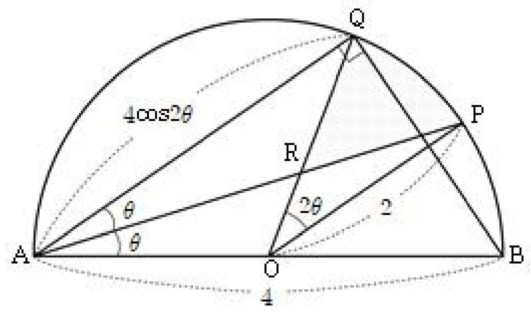
$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

21) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



부채꼴 OPQ는 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 2θ이므로

부채꼴 OPQ의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2^2\times2\theta=4\theta$

직각삼각형 ABQ에서 $\overline{AQ}=4\cos2\theta$

삼각형 AOQ에서 $\overline{AO}=\overline{OQ}=2$, $\overline{RQ}=2-\overline{OR}$선분 AR는 각 QAO의 이등분선이므로 $\overline{AO}:\overline{AQ}=\overline{OR}:\overline{RQ}$

$2:4\cos2\theta=\overline{OR}:(2-\overline{OR})$

$\overline{OR}=\frac{2}{2\cos2\theta+1}$

삼각형 OPR의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OR}\times\sin2\theta=\frac{2\sin2\theta}{2\cos2\theta+1}$

호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분은 부채꼴 OPQ에서 삼각형 OPR를 제외한 부분이므로

$S(\theta)=4\theta-\frac{2\sin2\theta}{2\cos2\theta+1}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}\left\{4-\frac{2\sin2\theta}{\theta(2\cos2\theta+1)}\right\}=4-4\times\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

22) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 미분 이해하기

$f'(x)=\cos x$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

23) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)+\cos\theta$

$=\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

24) 답 : 48

[해설]

[출제 의도] 여러 가지 함수의 미분 이해하기

$f'(x)=12\sec^2 2x$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=12\sec^2\frac{\pi}{3}=12\times4=48$

25) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 평행이동을 이해하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.

함수 $f(x)=a\sin x+1$의 그래프는 함수 $y=a\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

조건 $a>0$에서

$y=a\sin x$가 최대일 때 $f(x)$는 최대이고,

$y=a\sin x$가 최소일 때 $f(x)$는 최소이므로

함수 $f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값 $M=a+1$,

$\sin x=-1$일 때 최솟값 $m=-a+1$을 갖는다.

따라서 $M-m=(a+1)-(-a+1)=2a$

$2a=6$이므로 $a=3$이다.

26) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 미분계수의 정의를 이용하여 미지수를 구하고, 함숫값을 구한다.

$f(x)=\sin x+a\cos x$에서

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+a\cos\frac{\pi}{2}=1$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$f'(x)=\cos x-a\sin x$에서

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-a\sin\frac{\pi}{2}=-a=3$

따라서 $a=-3$이므로 $f(x)=\sin x-3\cos x$

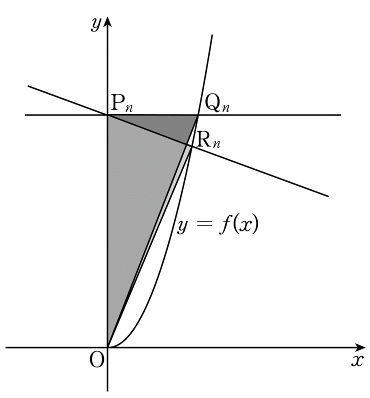
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}-3\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

27) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한값을 구하는 방법을 이해하여 그 값을 구한다.



삼각형 P_nOQ_n의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\overline{OP_n}\cdot\overline{P_nQ_n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}$이다.

점 R_n은 곡선 위의 점이고 y의 좌표가 자연수이므로

자연수 a에 대하여 $(\sqrt{a}, a)$로 놓을 수 있다.

그런데 직선 P_nR_n의 기울기가 음수이므로 $a<3n+1$

삼각형 P_nOR_n의 넓이가 최대가 되기 위해서는 R_n의 x좌표 $\sqrt{a}$가 최대일 때이다.

그러므로 $a=3n$인 경우이고, 이때 점 R_n의 좌표는 $(\sqrt{3n}, 3n)$이다.

즉, 삼각형 P_nOR_n의 넓이는

$T_n=\frac{1}{2}\overline{OP_n}\cdot\sqrt{3n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}$이다.

따라서

$$[\text{구하는 값}]=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\left\{\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}-\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}\frac{(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n})}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

28) 답 : 20

[해설]

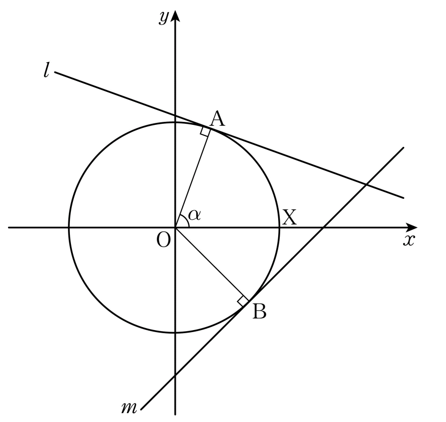
[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결한다.

두 직선 l과 m이 원 $x^2+y^2=1$과 접하는 점이 각각 A, B이므로

직선 $OA\perp l$, 직선 $OB\perp m$

원 $x^2+y^2=1$이 x축의 양의 방향과 만나는 점을 X라 하고,

$\angle AOX=\alpha$라 하자.



ⅰ)점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때 직선 OA가 직선 l과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 3이다. 따라서

$\tan\alpha=3$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB=\frac{\pi}{4}$

$\cos(\angle AOB)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

ⅱ)점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$\tan\alpha = 3$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB = \frac{3}{4}\pi$

$$\cos(\angle AOB) = \cos\left(\frac{3}{4}\pi - \alpha\right)$$

$$= \cos\frac{3}{4}\pi\cos\alpha + \sin\frac{3}{4}\pi\sin\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ⅲ)점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$\cos(\angle AOB) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

ⅳ)점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

$\cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)로부터

$\cos(\angle AOB) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos(\angle AOB) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$$100\cos^2(\angle AOB) = 100\times\frac{1}{5} = 20$$

29) 답 : ⑤

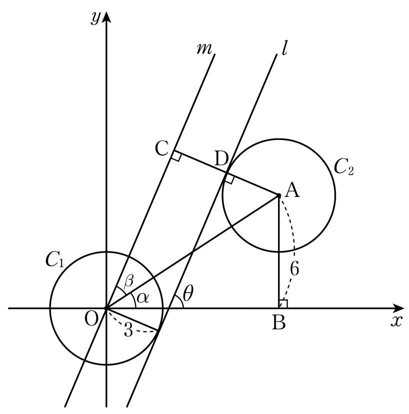
[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 직선의 기울기를 구하는 과정을 추론한다.

직선 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, 점 O를 지나고

직선 l에 평행한 직선 m이 직선 OA와 이루는 각의 크기를 β라 하자.

점 A에서 x축과 직선 m에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하고, 선분 AC가 원 C_2와 만나는 점을 D라 하자.



직각삼각형 OAC에서 $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 3+3 = 6$이므로

직각삼각형 AOB와 직각삼각형 OAC에서

$\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 6$,

선분 OA는 공통이므로 $\triangle AOB \equiv \triangle AOC$이다.

$\angle AOB = \angle AOC$이므로 $\alpha = \beta$이다.

따라서 $\tan\alpha = \tan\beta = \frac{6}{t}$ 이다.

직선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때,

두 직선 l, m이 평행하므로 $\theta = \alpha + \beta$

$$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{\frac{6}{t} + \frac{6}{t}}{1 - \frac{6}{t}\times\frac{6}{t}}$$

$$= \frac{12t}{t^2 - 36}$$

따라서 $f(t) = \frac{6}{t}$, $g(t) = \frac{12t}{t^2-36}$ 이므로

$$\frac{g(8)}{f(7)} = \frac{\frac{12\times 8}{64-36}}{\frac{6}{7}} = \frac{\frac{96}{28}}{\frac{6}{7}} = 4$$

30) 답 : 4

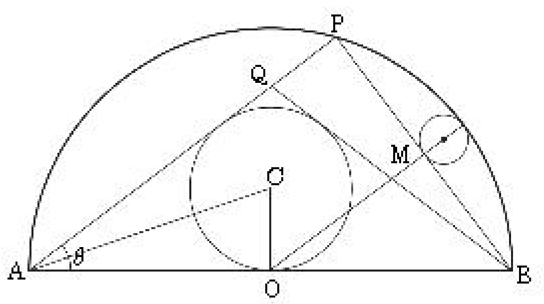
[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

그림과 같이 선분 AB의 중점을 O,

선분 PB와 호 PB에 접하는 원의 반지름의 길이를 r_1,

삼각형 ABQ에 내접하는 원의 중심을 C, 반지름의 길이를 r_2라 하자.



$\angle MOB = \theta$이고 $\overline{OB} = 1$이므로 $\overline{OM} = \cos\theta$

$$\therefore\ r_1 = \frac{1-\cos\theta}{2},\quad S(\theta) = \pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2$$

삼각형 CAO는 $\angle AOC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\angle CAO = \frac{\theta}{2}$,

$\overline{OA}=1$

$\therefore\ r_2=\tan\frac{\theta}{2}$, $T(\theta)=\pi\tan^2\frac{\theta}{2}$

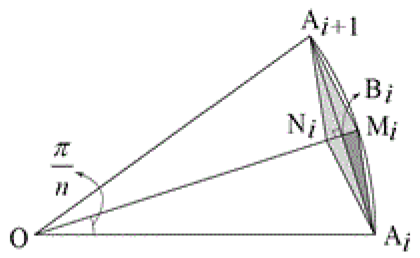
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^2\times\pi\tan^2\frac{\theta}{2}}{\pi\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\theta^2\times\tan^2\frac{\theta}{2}}{(1-\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{4\times\frac{\theta^4}{\sin^4\theta}\times\frac{1}{4}\times\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\times(1+\cos\theta)^2\right\}=4\times\frac{1}{4}\times4=4$$

31) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한값 추론하기



선분 M_iN_i의 중점을 B_i라 하면 $\angle A_iOM_i=\frac{\pi}{n}$이므로

$\overline{A_iB_i}=\sin\frac{\pi}{n}$, $\overline{B_iM_i}=1-\overline{OB_i}=1-\cos\frac{\pi}{n}$

$\square A_iM_iA_{i+1}N_i=4\times\triangle A_iM_iB_i$

$=4\times\frac{1}{2}\times\sin\frac{\pi}{n}\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$S_n=n\times\square A_iM_iA_{i+1}N_i=2n\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$n^2\times S_n=2n^3\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$$=2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos^2\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi^3}{n^3}\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$=2\pi^3\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\times\frac{1}{1+\cos\frac{\pi}{n}}\right\}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(n^2\times S_n)=\pi^3$

32) 답 : ④

[해설]

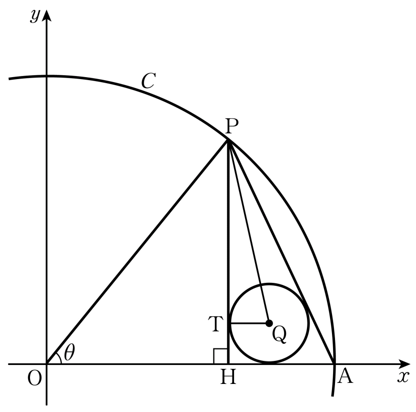
[출제 의도] 삼각형과 내접원의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한 문제를 해결한다.

삼각형 OAP가 이등변삼각형이므로

$\angle OAP=\angle OPA=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ 이고 삼각형 APH에서

$\angle APH+\angle PAH=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle APH=\frac{\theta}{2}$ 이다.

내접원의 중심을 Q라 하고, 내접원과 선분 PH의 교점을 T라 하면 $\angle QPT=\frac{\theta}{4}$ 이다.



$\overline{PH}=\sin\theta$ 이므로 삼각형 QPT에서

$\tan\frac{\theta}{4}=\frac{\overline{QT}}{\overline{PT}}=\frac{r(\theta)}{\sin\theta-r(\theta)}$

$\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)r(\theta)=\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}$ 이므로

$$r(\theta)=\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{1+\tan\frac{\theta}{4}}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta\tan\frac{\theta}{4}}{\theta^2\left(1+\tan\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{\tan\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(\left\{1+\tan\frac{\theta}{4}\right\}\right)}\right\}$$

$=1\times1\times\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$

[다른 풀이]

내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하면

$\triangle APH=\frac{1}{2}\times$ ($\triangle APH$의 둘레의 길이) $\times r(\theta)$

$\triangle APH=\frac{1}{2}r(\theta)\left(\overline{PH}+\overline{AH}+\overline{AP}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}$

따라서

$$\frac{\sin\theta+(1-\cos\theta)+2\sin\frac{\theta}{2}}{2}\times r(\theta)$$

$=\frac{1}{2}\sin\theta\times(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{2}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\right)r(\theta)$

$=\frac{1}{2}\times2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}(1-\cos\theta)$

따라서 $\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}+1\right)r(\theta)=\left\{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}\right\}$

$$r(\theta)=\frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}$$ 이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{(1-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+}\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{1+\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin^2\theta}{\{\theta\}^2} \times \frac{1}{1+\cos\theta}\right\}$$

$$= \frac{1}{1+1+0} \times 1^2 \times \frac{1}{1+1} = \frac{1}{4}$$

33) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 값을 계산한다.

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

34) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 계산하기

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

35) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 배각공식 계산하기

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$$

36) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

$\overline{PC} = 6\tan\theta$, $\overline{CQ} = 6\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\overline{PQ} = \overline{PC} + \overline{CQ} = 15$

$$6\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + 6\tan\theta = 15$$

$$\frac{6}{\tan\theta} + 6\tan\theta = 15$$

$$2\tan^2\theta - 5\tan\theta + 2 = 0$$

$$(2\tan\theta - 1)(\tan\theta - 2) = 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \tan\theta = 2$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ 이므로 } \tan\theta = \frac{1}{2}$$

따라서 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{4}{3}$

37) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (1+\cos x) = 2$$

38) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 원의 접선의 기울기를 구하는 문제를 해결한다.

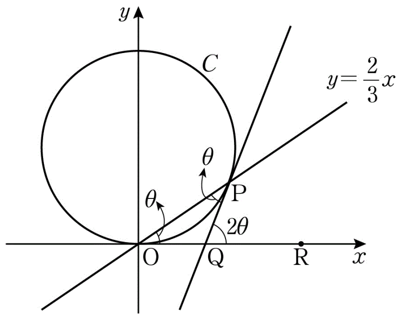
원 C 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 그림과 같이 x축에 점 R를 잡자.

(단, 점 R의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 크다.)

점 Q에서 원 C 에 그은 두 접선 OQ, PQ에 대하여

$\overline{OQ} = \overline{PQ}$이므로 $\angle POQ = \theta$라 하면

$\angle POQ = \angle QPO = \theta$이고 $\angle PQR = 2\theta$이다.



이때 $\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ 이므로 원 C 위의 점 P에서의 접선 PQ의 기울기는

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{12}{5}$$

39) 답 : 8

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한 이해하기

$$\lim_{x \to 0} x^2 f(x) = \lim_{x \to 0} \left\{ f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) \times \frac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}} \right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left\{ f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) \times \frac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)} \right\}$$

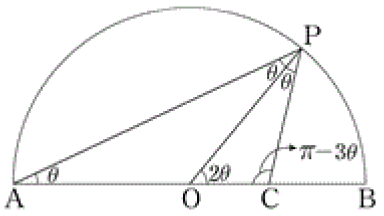
$$= \lim_{x \to 0} \left\{ f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) \times \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}} \times 4 \times \left(1+\cos\frac{x}{2}\right) \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 4 \times 2 = 8$$

40) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 사인법칙을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.



삼각형 POC에서 사인법칙을 적용하면

$\overline{OC}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\overline{OC}=\lim_{\theta\to +0}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin 2\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

41) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$

직선 $y=x$가 x축과 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{4}$

$\angle POQ=\theta-\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

직각삼각형 OQP에서

$\overline{OQ}=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$Q\left(\overline{OQ}\cos\dfrac{\pi}{4},\ \overline{OQ}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$Q\left(\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\dfrac{\pi}{4},\ \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ 이므로

점 M의 y좌표는

$$\frac{1}{2}\left\{\sin\theta+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\theta+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

$\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\sin(\theta+\alpha)=1$, 즉 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 일 때

점 M의 y좌표는 최댓값을 갖는다.

따라서 $\tan\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

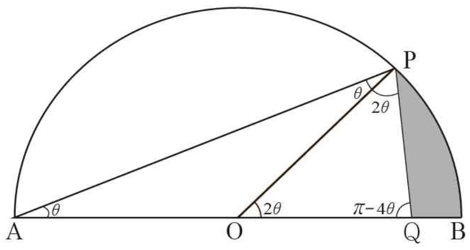
$$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=3$$

42) 답 : 18

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

반원의 중심을 O라 하자.



$\overline{OP}=6$, $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

$\angle POQ=\angle OPQ=2\theta$, $\angle OQP=\pi-4\theta$

삼각형 OQP에서 $\dfrac{\overline{PQ}}{\sin 2\theta}=\dfrac{6}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{PQ}=\dfrac{6\sin 2\theta}{\sin 4\theta}=\dfrac{6\sin 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}=\dfrac{3}{\cos 2\theta}$

삼각형 OQP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{3}{\cos 2\theta}\times\sin 2\theta=\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$S(\theta)=$ (부채꼴 OBP의 넓이)

$-$ (삼각형 OQP의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times 2\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$=36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to +0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to +0}\frac{36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}{\theta}=18$

43) 답 : 18

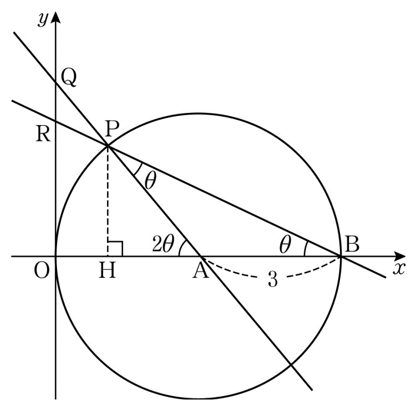
[해설]

[출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한 문제를 해결한다.

$\angle PBO=\theta$ 이므로 $\angle PAO=2\theta$ 이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AP}=3$, $\overline{AH}=3\cos 2\theta$, $\overline{HO}=3-3\cos 2\theta$ 이다.



$\overline{OA}=3$, $\angle PAO=2\theta$ 이므로

$\overline{OQ}=3\tan 2\theta$

$\overline{OB}=6$, $\angle PBO=\theta$ 이므로

$\overline{OR}=6\tan\theta$

$\overline{RQ}=\overline{OQ}-\overline{OR}$

$=3\tan 2\theta-6\tan\theta$

$\overline{HO}=3-3\cos 2\theta$ 이므로

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{RQ}\times\overline{HO}$

$=\dfrac{1}{2}(3\tan 2\theta-6\tan\theta)(3-3\cos 2\theta)$

$= \frac{9}{2}(\tan 2\theta - 2\tan\theta)(1-\cos 2\theta)$

$= 9\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} - 2\tan\theta\right)\sin^2\theta$

$= \frac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

따라서

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{\theta^5(1-\tan^2\theta)}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{18}{1-\tan^2\theta}\times\frac{\tan^3\theta}{\theta^3}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$

$= 18\times 1\times 1 = 18$

[다른 풀이]

$\triangle PAH \backsim \triangle QAO$이므로

$\overline{AP}:\overline{PQ} = \overline{AH}:\overline{HO}$

$3:\overline{PQ} = 3\cos 2\theta : 3-3\cos 2\theta$ 이므로

$\overline{PQ} = \frac{3(3-3\cos 2\theta)}{3\cos 2\theta}$

또, $\triangle PBH \backsim \triangle RBO$이므로

$\overline{BP}:\overline{PR} = \overline{BH}:\overline{HO}$

$6\cos\theta : \overline{PR} = 3+3\cos 2\theta : 3-3\cos 2\theta$ 이므로

$\overline{PR} = \frac{6\cos\theta(3-3\cos 2\theta)}{3+3\cos 2\theta}$

$\angle QPR = \angle APB = \angle PBA = \theta$ 이므로

$S(\theta) = \frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}\times\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\times\frac{6\cos\theta(3-3\cos 2\theta)}{(3+3\cos 2\theta)}\times\frac{3(3-3\cos 2\theta)}{3\cos 2\theta}\times\sin\theta$

$= \frac{9\cos\theta(1-\cos 2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

$= \frac{9\cos\theta(2\sin^2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

$= \frac{36\cos\theta\sin^5\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

따라서

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{36\cos\theta\sin^5\theta}{\theta^5(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{36\cos\theta}{(1+\cos 2\theta)\cos 2\theta}\times\frac{\sin^5\theta}{\theta^5}\right\}$

$= \frac{36}{2\times 1}\times 1$

$= 18$

44) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{x}+\frac{\tan x}{x}\right)$

$= 3+1 = 4$

45) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$(1+\tan\theta)\tan 2\theta$

$= (1+\tan\theta)\times\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta} = 3$

따라서 $\tan\theta = \frac{3}{5}$

46) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구한다.

$\tan\theta = \frac{1}{4}$ 이므로

$\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\frac{1}{16} = \frac{17}{16}$

$\cos^2\theta = \frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{16}{17}$, $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{1}{17}$

$\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 4\times\frac{1}{17}\times\frac{16}{17}$

$= \left(\frac{8}{17}\right)^2$

$\tan\theta = \frac{1}{4} > 0$ 이므로 $\sin\theta\cos\theta > 0$

$\therefore\ \sin 2\theta = \frac{8}{17}$

47) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각방정식 이해하기

$3(2\cos^2 x-1)-2(1-\cos^2 x)-4\cos x+5 = 0$

$8\cos^2 x-4\cos x = 0$

$\cos x = 0$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$

$0 \le x < \pi$ 에서 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{\pi}{3}$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{5}{6}\pi$

48) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 합성을 이해하고 함수의 최댓값을 구한다.

$f(x) = 4\sin x+6\cos^2\frac{x}{2}+1$

$= 4\sin x+6\times\frac{1+\cos x}{2}+1$

$= 4\sin x+3\cos x+4$

$= 5\left(\sin x\times\frac{4}{5}+\cos x\times\frac{3}{5}\right)+4$

$= 5\sin(x+\alpha)+4$ (단, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$)

$5\sin(x+\alpha)$의 최댓값이 5이므로 $f(x)$의 최댓값은 9이다.

49) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

사다리꼴 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$의 꼭짓점의 좌표는

$P_n(n,\ 2^n)$, $Q_n\left(n,\ \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $Q_{n+1}\left(n+1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$,

$P_{n+1}(n+1,\ 2^{n+1})$이므로

사다리꼴 $P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}$의 넓이

$$A_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left\{\left(2^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+\left(2^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right\}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n+2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=3$

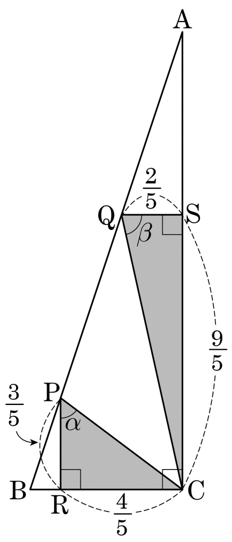
50) 답 : 61

[해설]

[출제 의도] 삼각형의 닮음비와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결한다.

점 P가 선분 AB를 $4:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{PR}=\frac{1}{5}\overline{AC}=\frac{3}{5}$, $\overline{RC}=\frac{4}{5}\overline{BC}=\frac{4}{5}$



삼각형 PRC가 직각삼각형이므로

$$\tan\alpha=\frac{\overline{RC}}{\overline{PR}}=\frac{4}{3}$$

점 Q가 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점이므로

$\overline{QS}=\frac{2}{5}\overline{BC}=\frac{2}{5}$, $\overline{SC}=\frac{3}{5}\overline{AC}=\frac{9}{5}$

삼각형 QCS가 직각삼각형이므로

$$\tan\beta=\frac{\overline{SC}}{\overline{QS}}=\frac{9}{2}$$

따라서 $\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}}$

$=\dfrac{\frac{27-8}{6}}{\frac{6+36}{6}}=\dfrac{19}{42}$이므로

$p+q=42+19=61$이다.

51) 답 : 120

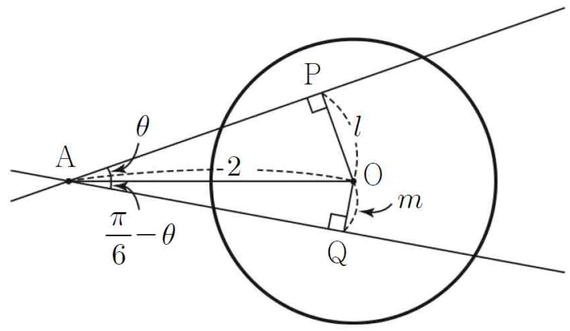
[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 합성을 활용하여 문제 해결하기

점 O에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하자.

$\angle OAP=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$라 하면 $\angle OAQ=\frac{\pi}{6}-\theta$

$l=2\sin\theta$, $m=2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$



$$\begin{aligned}2l^2+m^2&=8\sin^2\theta+(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)^2\\&=8\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta\\&=1+10\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta\\&=6-5\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta\\&=6-2\sqrt{7}\sin(2\theta+\alpha)\end{aligned}$$

(단, $\sin\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{14}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{14}$)

$\tan\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\therefore$ $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고 $\alpha<2\theta+\alpha<\frac{\pi}{3}+\alpha$이므로

$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$일 때 $\sin(2\theta+\alpha)=1$

$2l^2+m^2$의 최솟값은 $6-2\sqrt{7}$이므로 $p=6$, $q=-2$

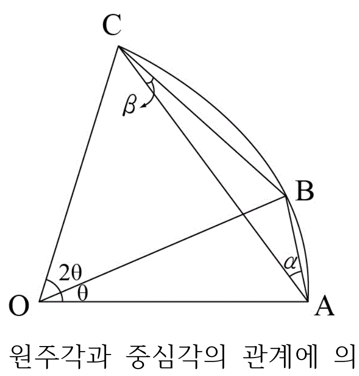
따라서 $30(p+q)=120$

52) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 반각공식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

O를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{OA}$인 원을 그리면



원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle BOC=2\theta$이므로 $\alpha=\theta$

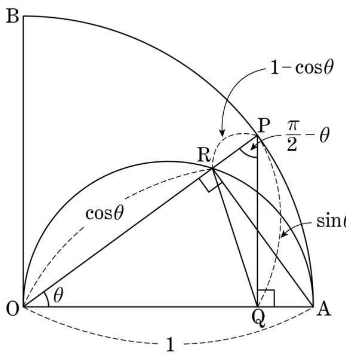
$\angle AOB=\theta$이므로 $\beta=\frac{\theta}{2}$

따라서 $\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{20}$

53) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.



$\overline{PR} = \overline{OP} - \overline{OR} = 1-\cos\theta$

$\overline{PQ} = \sin\theta$

$\angle QPR = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times (1-\cos\theta) \times \sin\theta \times \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$= \dfrac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2}$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+} \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$= \displaystyle\lim_{\theta\to0+} \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)} = \frac{1}{4}$

[다른 풀이]

(삼각형 PRQ의 넓이) = (삼각형 POQ의 넓이) − (삼각형 ROQ의 넓이)이므로

$S(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \dfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)$

$\therefore \displaystyle\lim_{\theta\to0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+} \frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$

$= \displaystyle\lim_{\theta\to0+} \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)} = \frac{1}{4}$

54) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 성질과 매개변수의 미분법을 이용하여 문제를 해결한다.

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$인 직선의 방정식은

$y = \tan(\sin t)x$ ⋯ ㉠

점 P는 원과 직선의 교점이므로

원의 방정식 $x^2+y^2 = e^{2t}$과 연립하면

$x^2 + \{\tan(\sin t)x\}^2 = e^{2t}$

$\{1+\tan^2(\sin t)\}x^2 = e^{2t}$

$\dfrac{x^2}{\cos^2(\sin t)} = e^{2t}$

$x^2 = e^{2t}\cos^2(\sin t)$

$x = e^t\cos(\sin t)$ ($\because$ $x>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$y = e^t\sin(\sin t)$

그러므로 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$x = e^t\cos(\sin t)$, $y = e^t\sin(\sin t)$

$\dfrac{dx}{dt} = e^t\cos(\sin t) - \{e^t\sin(\sin t)\}\cos t$

$= e^t\{\cos(\sin t) - \sin(\sin t)\times\cos t\}$

$\dfrac{dy}{dt} = e^t\sin(\sin t) + \{e^t\cos(\sin t)\}\cos t$

$= e^t\{\sin(\sin t) + \cos(\sin t)\times\cos t\}$

$t=\pi$일 때, 점 P의 좌표는

$(e^\pi\cos(\sin\pi),\ e^\pi\sin(\sin\pi))$이므로

$P(e^\pi, 0)$

$t=\pi$일 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{e^\pi\{\sin(\sin\pi) + \cos(\sin\pi)\times\cos\pi\}}{e^\pi\{\cos(\sin\pi) - \sin(\sin\pi)\times\cos\pi\}}$

$= \dfrac{-e^\pi}{e^\pi} = -1$

그러므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $y = -(x-e^\pi)$

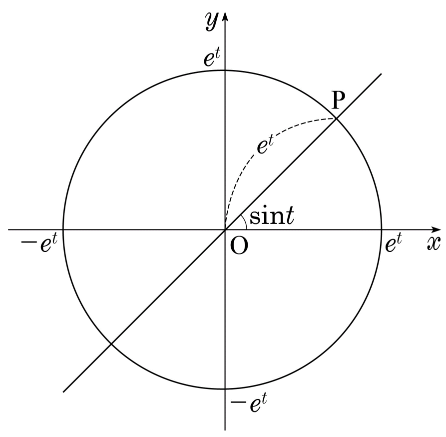
이때 접선의 x절편은 e^π, y절편은 e^π이므로

접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times e^\pi \times e^\pi = \dfrac{1}{2}e^{2\pi}$

따라서 $a = \dfrac{1}{2}$, $b=2$이므로

$10(a+b) = 10\left(\dfrac{1}{2}+2\right) = 25$



[참고]

원 $x^2+y^2 = (e^t)^2$은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 e^t인 원이고,

점 P가 원 위의 점이므로 $\overline{OP} = e^t$이다.

직선 OP의 기울기가 $\tan(\sin t)$이므로

직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\sin t$이다.

따라서 점 P의 좌표는 $P(e^t\cos(\sin t), e^t\sin(\sin t))$이다.

55) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

$\triangle ABP$에서 $\angle ABP = \dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{AB} = 2$이므로

$\overline{AP}=2\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{BP}=2\cos\frac{\theta}{2}$

$\triangle AOP$의 외접원의 반지름의 길이를 R_1 ,

$\triangle BOP$의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$R_1=\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ 이고 $f(\theta)=\dfrac{\pi}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$R_2=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ 이고 $g(\theta)=\dfrac{\pi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\dfrac{\pi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\pi}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}$$

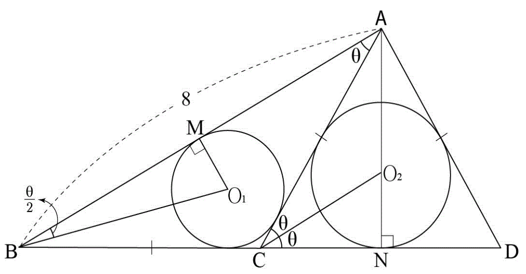
$\frac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\frac{\pi}{2}-$ 일 때 $t\to 0+$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin 2\theta}=\lim_{t\to 0+}\frac{\pi\sin t}{t\cos^2 t}=\pi$

56) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 도형과 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1 , 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 BO_1M에서 $r_1=4\tan\frac{\theta}{2}$

삼각형 BCM에서 $\overline{BC}=\dfrac{4}{\cos\theta}=\overline{AC}$

삼각형 ACN에서 $\overline{CN}=\dfrac{4}{\cos\theta}\times\cos 2\theta$

삼각형 CNO_2 에서 $r_2=\overline{CN}\tan\theta=\dfrac{4\tan\theta\cos 2\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{r_1r_2}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{16\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta\cos 2\theta}{\theta^2\cos\theta}=8$

57) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 성질을 알고 계산하기

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{8}$

58) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 성질을 알고 계산하기

$\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{8}$

59) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x}{x^2}=2$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차 함수이고

$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1}=3$에서 $\displaystyle\lim_{x\to -1}f(x)=0$이므로

$f(x)=2(x+1)(x+a)$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+a)}{x-1}=\frac{2(-1+a)}{-2}=3$

$\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-2)$이므로 $f(1)=-4$

60) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속 이해하기

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x-2}-1}{x-1}, & (x\neq 1)\\ a, & (x=1)\end{cases}$$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로

$a=\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$

따라서 $x-1=t$라 하면

$a=\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}2\cdot\frac{e^{2t}-1}{2t}=2$

61) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리 계산하기

$(\sin 165^\circ-\cos 165^\circ)(\sin 105^\circ+\cos 105^\circ)$

$=\sin 165^\circ\cos 105^\circ-\cos 165^\circ\sin 105^\circ+\sin 165^\circ\sin 105^\circ-\cos 165^\circ\cos 105^\circ$

$=\sin(165^\circ-105^\circ)-\cos(165^\circ+105^\circ)$

$=\sin 60^\circ-\cos 270^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-0$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

62) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한 이해하기

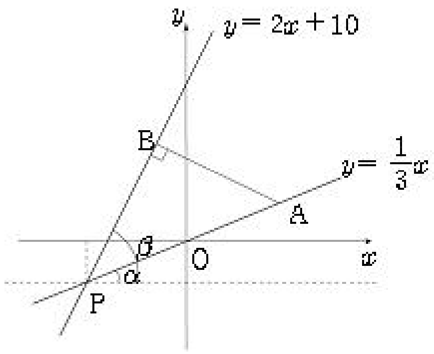
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\tan x}{x}=2$

63) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하

기



$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}}=1,\ \beta-\alpha=45^\circ$$

삼각형 PAB는 직각이등변삼각형이므로

$\therefore\ \overline{PA}=12\sqrt{2}$

64) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속 이해하기

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x-2}-1}{x-1}, & (x\neq 1)\\ a, & (x=1)\end{cases}$$

$f(x)$가 $x=1$에서 연속일 때, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이므로

$$a=\lim_{x\to 1}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}$$

따라서 $x-1=t$라 하면

$$a=\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to 0}2\cdot\frac{e^{2t}-1}{2t}=2$$

65) 답 : 24

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\angle OLM=\angle PLN$ ($\because$ 맞꼭짓각)

$\triangle LNP$와 $\triangle LMO$는 닮음이므로 $\angle LOM=\alpha$

피타고라스 정리에 의해 $\overline{OL}=2\sqrt{5}$이고,

$\triangle LOM$과 $\triangle NOQ$의 닮음비가 $2:3$이므로 $\overline{LN}=\sqrt{5}$

$\triangle LNP$와 $\triangle LMO$는 닮음이므로 $\overline{PN}=2\sqrt{5}$

$\tan\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\beta=\frac{2}{3}$이므로

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ \frac{3}{\tan(\beta-\alpha)}=24$$

66) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$25x^2-25x+4=0$의 두 근이 $\frac{4}{5},\ \frac{1}{5}$이고 주어진 조건에 의하여

$\sin(a-b)<\sin(a+b)$이므로

$$\sin(a+b)=\frac{4}{5},\ \sin(a-b)=\frac{1}{5}\text{ 이다.}$$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b=\frac{4}{5}\ \cdots㉠$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b=\frac{1}{5}\ \cdots㉡$$

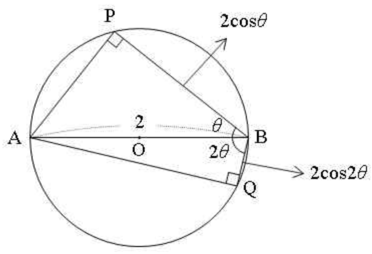
㉠, ㉡에 의하여 $\sin a\cos b=\frac{1}{2},\ \cos a\sin b=\frac{3}{10}$

따라서 $\frac{\tan a}{\tan b}=\frac{\sin a\cos b}{\cos a\sin b}=\frac{5}{3}$

67) 답 : 30

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 배각의 공식 이해하기



$\overline{PB}=2\cos\theta$이므로

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cos\theta\cdot\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$$

$\overline{QB}=2\cos 2\theta$이므로

$$\triangle AQB=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cos 2\theta\cdot\sin 2\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta$$

$\triangle ABP=4\triangle AQB$이므로

$\sin 2\theta=4\cdot 2\sin 2\theta\cos 2\theta$이며 이항하여 정리하면

$\sin 2\theta(1-8\cos 2\theta)=0$이며 $\sin 2\theta\neq 0$이므로

$\cos 2\theta=\frac{1}{8}$이다.

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\frac{1}{8}$이므로

$$\cos^2\theta=\frac{9}{16},\ \cos\theta=\frac{3}{4}\ (\because\ \cos\theta>0)$$

따라서 $40\cos\theta=30$

68) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1+}\{f(x)-f(-x)\}=-1-1=-2$ (거짓)

ㄷ. $|f(-1)|\cdot\sin\{\pi\times(-1)\}=0$,

$\lim_{x\to -1+}|f(x)|\cdot\sin\pi x=\lim_{x\to -1-}|f(x)|\cdot\sin\pi x=0$

이므로 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 $x=-1$에서 연속이다.

같은 방법으로 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 $x=0,\ x=1$에서 연속이다.

함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

69) 답 : 8

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속을 이해하여 문제 해결하기

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}$ 에서

$f(x)=\begin{cases} x, & (|x|>1) \\ 1, & (|x|<1) \\ 1, & (x=1) \\ 0, & (x=-1) \end{cases}$ 이므로 함수 $f(x)g(x-a)$가 모든 실수 x에서

연속이려면

$x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to-1-} f(x)g(x-a)$

$=\lim\limits_{x\to-1-} x\{(x-a)^2+10(x-a)\}$

$=-(a+1)(a-9)\cdots$㉠

$\lim\limits_{x\to-1+} f(x)g(x-a)$

$=\lim\limits_{x\to-1+} 1\cdot\{(x-a)^2+10(x-a)\}$

$=(a+1)(a-9)\cdots$㉡

$f(-1)g(-1-a)=0\times g(-1-a)=0\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢의 값이 모두 같아야 하므로

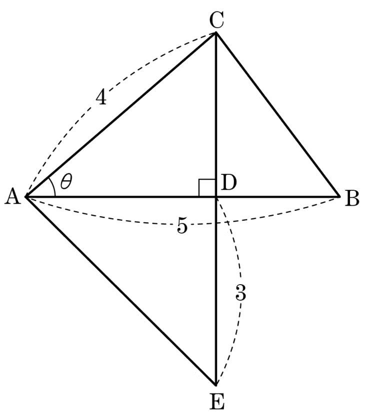
$a=-1$또는 $a=9$이다.

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 8

70) 답 : 136

[해설]

[출제 의도]도형의 성질과 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구한다.



$\angle CAB=\theta$라 하면 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이고

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot4\sin\theta,\ S_2=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\cos\theta$

$S_1+S_2=10\sin\theta+6\cos\theta$

$=\sqrt{136}\sin(\theta+\alpha)$, $\left(\cos\alpha=\dfrac{10}{\sqrt{136}},\ \sin\alpha=\dfrac{6}{\sqrt{136}}\right)$

따라서 S_1+S_2의 최댓값은 $\sqrt{136}$ 이다.

$\therefore\ M^2=136$

71) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 합성을 활용하여 문제 해결하기

$y=\sin2x+\sin x+\cos x$에서 $\sin x+\cos x=t$라 하면

$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$이므로

$-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$ 이다.

또 $\sin2x=(\sin x+\cos x)^2-1=t^2-1$이므로

$y=t^2+t-1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$ $(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2})$이다.

그러므로 $t=\sqrt{2}$ 일 때 함수의 최댓값은 $1+\sqrt{2}$,

$t=-\dfrac{1}{2}$일 때 함수의 최솟값은 $-\dfrac{5}{4}$ 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}$

72) 답 : 30

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

원의 중심을 O라 하면

$\angle POB=2\theta$

직선 OP와 선분 AC가 만나는 점을 R, $\angle BAC=\alpha$라 하면

$\angle PRQ=\alpha+2\theta$이고 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$

$\angle QPR=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle PQA=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$\angle PRQ=\alpha+2\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\tan2\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+1\cdot\tan\alpha}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $60\tan2\theta=30$

73) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}x(\sqrt{x+1}+2)$

$=3(\sqrt{3+1}+2)$

$=3\cdot4=12$

74) 답 : ④

[해설]

(주어진 식) $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x}{x}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

75) 답 : ②

[해설]

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\dfrac{9}{16}-1=\dfrac{1}{8}$

76) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이해하기

$y=\frac{\pi}{3}-x$ 이므로

(준식) $=\sqrt{3}\cos x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=2\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=\sqrt{13}\sin(\alpha-x)$ (단, $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{39}}{13}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}$

따라서 최댓값은 $\sqrt{13}$

77) 답 : 6

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\beta+\cos\beta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left\{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{6}$

$=\sqrt{6}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

그러므로 $\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$ 일 때

최댓값 $M=\sqrt{6}$ 이고, $M^2=6$

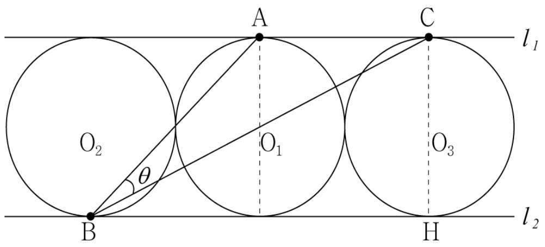
[참고]

$\alpha=\frac{5}{12}\pi$ 이고 $\beta=\frac{\pi}{12}$ 일 때

두 식 $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{4}$ 과 $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\pi}{6}$ 를 만족시킨다.

78) 답 : 27

[해설]



원의 반지름의 길이를 a라 하고

$\angle CBH=\alpha$라 하면 $\theta=\frac{\pi}{4}-\alpha$

$\tan\alpha=\frac{2a}{4a}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cot^3\theta=\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)^3=3^3=27$

79) 답 : 90

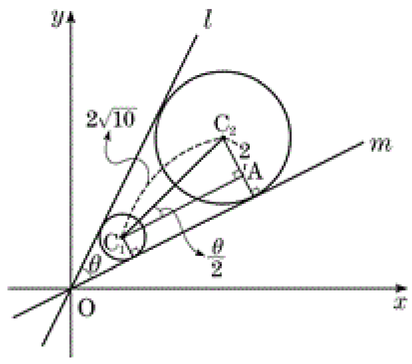
[해설]

[출제 의도]삼각함수와 관련된 수학 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 $\overline{AC_2}=2$, $\overline{C_1C_2}=2\sqrt{10}$ 이므로

$\overline{AC_1}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{36}=6$

$\angle C_2C_1A=\frac{\theta}{2}$ 이므로 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$



$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 120\tan\theta=90$

80) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 배각공식을 이해하여 문제 해결하기

$\angle CAD=\angle BAD=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{5}{8}$

이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\sin\theta=p\sqrt{3}$

따라서 $\frac{1}{p^2}=16$

81) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]주기함수와 연속함수의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ⅰ)함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1-0}(2x+a)=\lim_{x\to 1+0}(x^2+bx+3)$

$2+a=1+b+3$

따라서 $a-b=2$

ⅱ) $f(x+5)=f(x)$ 이므로

$f(3)=f(-2)$

$3^2+3b+3=2\times(-2)+a$

따라서 $a-3b=16$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 $a=-5$, $b=-7$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}2x-5, & (-2\le x<1)\\ x^2-7x+3, & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

$$f(2011)=f(402\times5+1)$$
$$=f(1)=1-7+3=-3$$

82) 답 : ②

[해설]

$\overline{AB}=3a$, $\overline{BC}=4a$ $(a>0)$라 할 때

$\overline{PQ}=\sqrt{5}a$, $\overline{PB}=\sqrt{20}a$, $\overline{BQ}=\sqrt{13}a$

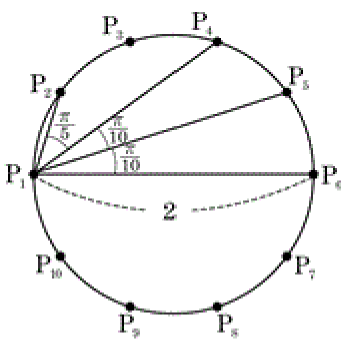
코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

따라서 $\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=-\dfrac{7}{25}$

83) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 배각 공식을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.



$\overline{P_1P_2}=\overline{P_5P_6}=2\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\overline{P_1P_4}=2\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\overline{P_1P_5}=2\cos\dfrac{\pi}{10}$

$$\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_1P_4}\cdot\overline{P_1P_5}=8\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}$$
$$=4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$
$$=2\sin\frac{2}{5}\pi$$

[다른 풀이]

$\overline{P_1P_2}=2\cos\dfrac{2}{5}\pi$, $\overline{P_1P_4}=2\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\overline{P_1P_5}=2\cos\dfrac{\pi}{10}$

$S=\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_4}\times\overline{P_1P_5}$라고 하면

$$=\sin\frac{\pi}{10}S=\sin\frac{\pi}{10}\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi\cdot2\cos\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{\pi}{10}$$
$$=\sin\frac{\pi}{10}\cdot2\cos\frac{\pi}{10}\cdot2\cos\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi$$
$$=\sin\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{\pi}{5}\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi$$
$$=\sin\frac{2}{5}\pi\cdot2\cos\frac{2}{5}\pi$$

$=\sin\dfrac{4}{5}\pi$이므로

$$S=\frac{\sin\frac{4}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\pi}{10}}$$
$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{\pi}{10}}$$
$$=2\cos\frac{\pi}{10}$$
$$=2\sin\frac{2\pi}{5}$$

84) 답 : ②

[해설]

$\overline{AP}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore\ S(\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\tan\theta}=2$

85) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$이고

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$이다.

$x=1$에서 함숫값 $f(1)+g(1)=0$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$이므로

$f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.(참)

ㄷ.(반례) $\displaystyle\lim_{x\to1-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=-1$이고

$\displaystyle\lim_{x\to1+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to-1+}f(x)=-1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}(f\circ g)(x)=-1$,

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(0)=0$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1}(f\circ g)(x)\ne(f\circ g)(1)$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.(거짓)

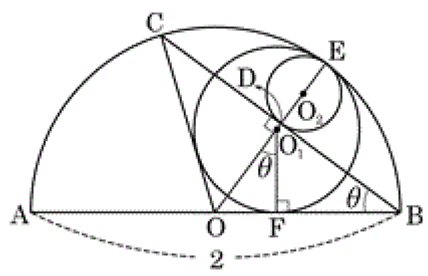
86) 답 : 17

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 O_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 F, 직선 O_1O_2와 현 BC,

호 BC의 교점을 각각 D, E라 하자.



$\overline{O_1F}=\overline{O_1E}=f(\theta)$, $\angle OO_1F=\theta$

$\overline{OE} = \overline{OO_1} + \overline{O_1E} = \dfrac{f(\theta)}{\cos\theta} + f(\theta) = 1$

$f(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\overline{OD} = \sin\theta$, $\overline{ED} = 1-\sin\theta$ 이므로

$g(\theta) = \dfrac{1-\sin\theta}{2}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{g(\theta)}{\{f(\theta)\}^2} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{1-\sin\theta}{2}}{\left(\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\right)^2}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-} \frac{(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)^2}{2\cos^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2} - \theta = t$ 라 하면, $\theta = \dfrac{\pi}{2} - t$ 이고

$\sin\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$, $\cos\theta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$

$\theta \to \dfrac{\pi}{2}-$ 일 때, $t \to 0+$ 이다.

(주어진 식) $= \displaystyle\lim_{t\to 0+} \frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2\sin^2 t}$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{(1-\cos t)(1+\sin t)^2}{2(1-\cos^2 t)}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{(1+\sin t)^2}{2(1+\cos t)}$$

$$= \frac{1}{4} = \frac{q}{p}$$

따라서 $p=4$, $q=1$ 이므로 $p^2+q^2=17$ 이다.

87) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{3(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{3(x+1)} = -\frac{1}{9}$$

88) 답 : ⑤

[해설]

$\displaystyle\lim_{x\to 3}(x-3) = 0$ 이고, $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{ax^2+b} = \frac{1}{6}$ 이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 3}(ax^2+b) = 0$ 이다. 즉,

$9a+b=0$ 이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{a(x^2-9)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{a(x+3)} = \frac{1}{6a}$ 이다.

$a=1$, $b=-9$ 이므로

$a-b=10$ 이다.

89) 답 : ②

[해설]

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta = \frac{5}{4}$$

$$\therefore\ \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

90) 답 : ③

[해설]

$f(x) = \ln\sqrt[3]{x}$ 이므로 $g(x) = e^{3x}$ 이다.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(g(x))}{g(x)-1} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{e^{3x}-1} = \frac{1}{3}$$

91) 답 : ②

[해설]

두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ, 점 $(6, 2)$와 원점을 지나는 직선이

x축과 이루는 예각의 크기를 γ라 하자.

$\alpha < \beta$일 때, $\dfrac{\theta}{2} + \alpha = \gamma$, $\dfrac{\theta}{2} + \gamma = \beta$ 이므로

$\alpha + \beta = 2\gamma$ 이고 $\tan\gamma = \dfrac{1}{3}$ 이다.

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{3}{4}$$

92) 답 : ③

[해설]

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$ 이므로

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{4-\sqrt{14}}{12}$$

93) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\sin x} + e^{x\sin 2x} - 2}{x\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$+ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\sin 2x}-1}{x\sin 2x} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 \times \frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$= 1 + 2 = 3$$

94) 답 : ③

[해설]

접점을 $Q(t, 1+\ln t)$라 하면, 접선 l의 방정식은 다음과 같다.

$l : y = \dfrac{1}{t}(x-t) + 1 + \ln t = \dfrac{1}{t}x + \ln t$

따라서 두 점 P, R의 좌표는 $P(0, \ln t)$, $R(0, 1+\ln t)$ 이다.

ㄱ. $\overline{PR} = (1+\ln t) - \ln t = 1$ (참)

ㄴ. $a = -t\ln t$ 에서 $a \to 0-$ 이면, $t \to 1+$ 이므로

$\displaystyle\lim_{n\to 0-} S(a) = \lim_{t\to 1+} \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. $a = -t\ln t$ 에서 $a \to -\infty$ 이면, $t \to +\infty$ 이므로

$\displaystyle\lim_{a\to -\infty} \frac{S(a)}{a} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\frac{t}{2}}{-t\ln t} = \lim_{t\to +\infty} -\frac{1}{2\ln t} = 0$ 이다. (거짓)

95) 답 : ④

[해설]

정 $2n$다각형의 한 변의 길이는 $1-\cos\frac{\pi}{n}$이고, 정 $2n$다각형의 중심에서 한 변까지의 길이를 l이라 하면

$$\tan\frac{\pi}{2n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{l}\text{이므로, } l=\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2\tan\frac{\pi}{2n}}\text{이다.}$$

따라서,

$$S_n=2n\times\left\{\frac{1}{2}\times l\times\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right\}=\frac{n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$$\frac{2n\times\sin^4\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}\text{이다. 그러므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3\times\sin^4\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin^4\pi x}{x^3\times\tan\pi x}$$

($\frac{1}{2n}=x$ 치환)

$$\frac{1}{4}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)\times\lim_{x\to0}\frac{\sin\pi x}{\tan\pi x}=\frac{1}{4}\times\pi^3\times1=\frac{1}{4}\pi^3$$

96) 답 : 11

[해설]

$$\cos\alpha=\frac{4}{5}\text{ 이고 }\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}=\frac{1}{9}\text{ 이므로}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}\cdots①$$

$$\cos\beta=\frac{12}{13}\text{ 이고 }\tan^2\frac{\beta}{2}=\frac{\frac{1}{13}}{\frac{25}{13}}=\frac{1}{25}\text{ 이므로}$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{5}\cdots②$$

따라서, ①, ②에 의하여 $\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}$

$\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$ 이므로 $p+q=11$이다.

97) 답 : ③

[해설]

호 AD에 대한 원주각이 α이므로 $\angle AOD=2\alpha$이다.

$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로 $\tan2\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}=2$이다.

$\tan\alpha=t\,(t>0)$라 하면 $\tan2\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=2$이다.

$\therefore\ t^2+t-1=0$에서 $\tan\alpha=t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

98) 답 : ⑤

[해설]

ㄴ. $\lim_{x\to+0}f(f(x))=\lim_{t\to-1+0}f(t)=0$이고

$\lim_{x\to-0}f(f(x))=\lim_{t\to1-0}f(t)=0$이므로 $\lim_{x\to0}f(f(x))=0$

$f(f(0))=0$이므로 $x=0$에서 연속이다.(참)

ㄷ. $a\neq0$일 때, $\lim_{x\to a}f(x)f(-x)=-\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2$

$a=0$일 때, $-\lim_{x\to+0}\{f(x)\}^2=-\lim_{x\to-0}\{f(x)\}^2=-1$

따라서 $-2<a<2$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}f(x)f(-x)$의 값이 존재한다.(참)

99) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값 계산하기

$x\to0$일 때, $a^x+b\to0$이므로 $b=-1$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x+b}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(x+1)}\times\frac{a^x-1}{x}$$

$\ln a=\ln3$

$\therefore\ a=3$이므로 $a-b=4$

100) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 배각공식 이해하기

$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$ 이고,

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{12}{13}\text{ 이다.}$$

101) 답 : ③

[해설]

$$\text{(주어진 식)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1-\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+1}=\frac{1}{2}$$

102) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2+\sqrt{15}}{6}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{2-\sqrt{15}}{6}$

$x^2+\frac{a}{3}x+\frac{b}{36}=0$

두 근의 합 $-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$ $\therefore\ a=-2$

두 근의 곱 $\frac{b}{36}=-\frac{11}{36}$ $\therefore\ b=-11$

따라서, $ab=22$

103) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성 이해하기

$y=\sqrt{2}\sin x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$=\sqrt{5}\cos(x+\alpha)$ (이때, $\tan\alpha=\frac{1}{3}$)

주어진 함수는 $x=2n\pi-\alpha$ (n은 정수)일 때 최댓값을 가지므로

$\tan\theta=\tan(2n\pi-\alpha)=-\frac{1}{3}$ 이다.

104) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값 구하기

정육각형의 한 변의 길이를 $4a$라 하면

$\overline{CE}=4\sqrt{3}a$, $\overline{EM}=2a$, $\overline{EN}=a$이고,

$\angle MCE=\alpha$, $\angle NCE=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $\tan\beta=\frac{1}{4\sqrt{3}}$ 이다.

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2\sqrt{3}}{25}$$

105) 답 : ②

[해설]

$\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{AE}=\frac{a}{\cos(45^\circ+\theta)}=\frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta-\sin\theta}$

$\overline{AD}=\frac{a}{\cos(45^\circ-\theta)}=\frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta+\sin\theta}$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

106) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 변형하기

$\sin(x+y)\geq\cos(x-y)$에서

$$\sin(x+y)-\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(x-y)\right\}\geq 0$$

$$2\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$$

i) $\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$인 경우

$\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$이고 $0\leq y\leq\frac{\pi}{4}$ 이다.

ii) $\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$인 경우

$0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$이고 $\frac{\pi}{4}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ 이다.

따라서 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $x+2y$의 최댓값은 $\frac{5}{4}\pi$이다.

107) 답 : ①

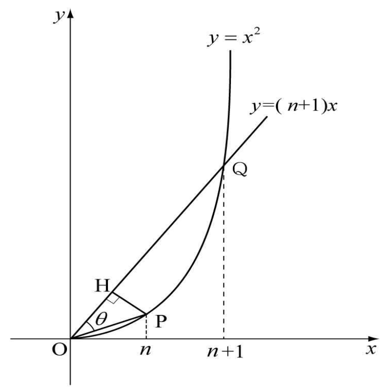
[해설]

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cot\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{2}(\cot\theta+\cos\theta)}{\theta-\frac{\pi}{2}}=-1$$

108) 답 : ②

[해설]



직각삼각형 OPH에서 $\sin\theta=\frac{\overline{PH}}{\overline{OP}}$

$\overline{PH}=\frac{n}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$, $\overline{OP}=\sqrt{n^4+n^2}$

[구하는 값] $=\lim_{n\to\infty}n^2\sin\theta$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\sqrt{n^2(n^2+1)(n^2+2n+2)}}=1$$

109) 답 : 11

[해설]

[출제 의도]반각의 공식 이용하여 값 구하기

삼각형 EAB가 이등변삼각형이므로

$\beta=\frac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$$\sin^2\beta=\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1}{10}$$

$\therefore$ $a+b=11$

110) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]합의 공식 이용하여 식 정리하기

$\sin\alpha+\cos\beta=-\sin\gamma$과

$\cos\alpha+\sin\beta=-\cos\gamma$의 양변을 제곱하여 더하면

$2+2\sin(\alpha+\beta)=1$

$\therefore$ $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$

111) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성을 이용한 최댓값 구하기

$\angle DBC=\theta$, 사각형 $ABCD$의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$=15\sin\theta+12\cos\theta=3\sqrt{41}\sin(\theta+\alpha)$

(단, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{41}}$)

따라서, 최댓값은 $3\sqrt{41}$ 이다.

112) 답 : ②

[해설]

$f(x) = -2\sin^2 x + \sin 2x + 1$

$= -2\dfrac{1-\cos 2x}{2} + \sin 2x + 1 = \sin 2x + \cos 2x$

$= \sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$이고 $-1 \le \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

이므로 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

113) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합을 곱으로 고쳐 계산하기

$\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 이다.

$\sin\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{3\theta}{2} = 2\sin\theta\cos\dfrac{\theta}{2} = 4\sin\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$= 4\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5} = \dfrac{16\sqrt{5}}{25}$

114) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리 활용하기

$\cos(\alpha+\beta) = \left(-\dfrac{\sqrt{8}}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

115) 답 : 36

[해설]

[출제 의도]미분계수의 정의를 이용하여 미분계수 구하기

$\dfrac{1}{n} = h$라 하면

준식 $= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\left\{3\times\dfrac{f(1+3h)-f(1)}{3h} + \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$= 3f'(1) + f'(1) = 4f'(1) = 36$

116) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]배각공식을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{\theta_n}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\tan\dfrac{\theta_n}{2}}{1-\tan^2\theta_n/2 = 2\cdot 1/2/1-(1/2)^2 = 4/3}$

117) 답 : ③

[해설]

점 $A(-3, 1)$, 점 $B(-3, -1)$이고,

$\csc\alpha + \sec\beta = \dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\beta} = \sqrt{10} + \left(-\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

118) 답 : ③

[해설]

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = -\dfrac{1}{8}$

119) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한과 수열의 합 구하기

$f(n) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx}{x}$

$= 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{5}{f(k)} = 10\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 10$

120) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수 덧셈정리를 이용하여 함숫값 구하기

$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{5}$

121) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]지수함수의 극한 구하기

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}\cdot\dfrac{f(x)}{e^{2x}-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{e^{2x}-1}\right)$

$= 2\cdot 1004 = 2008$

122) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]로그함수의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A(t, \ln(2t+1))$이라 하면 $a\to\infty$일 때 $t\to 0$이다.

$S_1 = \dfrac{1}{2}\ln(2t+1),\ S_2 = \dfrac{t}{2}$ 이므로

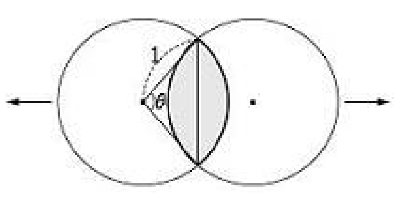
$\alpha = \lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{S_1}{S_2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(2t+1)}{t} = 2$

123) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 구하기

$l = 2\times 1\times\theta = 2\theta$,



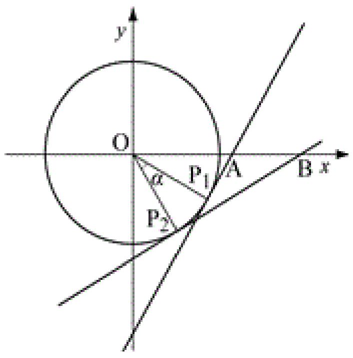
$m = 2\times 1\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{2\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times2=2$$

124) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 수학 내적문제 해결하기



두 직선 $y=x+a$, $y=\frac{1}{3}x+b$와 x축이 만나는 점을 각각 A, B라 하고

$\angle OAP_1=\theta_1$라 하면

$\tan\theta_1=1$이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$이다.

따라서 $\angle AOP_1=\frac{\pi}{4}$이다

같은 방법으로 $\angle OBP_2=\theta_2$, $\tan\theta_2=\frac{1}{3}$이고 $\overline{BP_2}=3r$이다.

$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$에 의해서

$\therefore\ \tan\alpha=\frac{1}{2}$

125) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리 활용하기

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{x}}=\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{x+\frac{3}{x}}$$

$x=\frac{3}{x}$일 때, $\tan\theta$값이 최대가 되므로

$\therefore\ x=\sqrt{3}\ (x>0)$

126) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 구하기

$$\lim_{x\to0}\frac{3x\sin(\sin2x)(1+\cos x)}{(1-\cos^2x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x\sin(\sin2x)(1+\cos x)}{\sin^2x}$$

$=12$

127) 답 : 32

[해설]

원 위의 점과 직선사이의 점 사이의 최소거리 l은

원의 중심 $O(5\sqrt{2},\ 5\sqrt{2})$에서 직선 $x+y=\sqrt{2}$까지의 거리

$\frac{|5\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=9$이다.

거리가 최소인 직선위의 점 P에서 원에 그은 한 접선의 접점을 Q라 하고,

$\angle OPQ$를 $\frac{\theta}{2}$라 하면 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{4}{9}$가 된다.

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$이 되어

$a-b=32$이다.

128) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성 활용하기

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$, $\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$

$\overline{AP}+\overline{BP}=2(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ a^2b=(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi$$

129) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 구하기

[해설] $\lim_{\theta\to0}\left(\frac{2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{2}{1-\cos^2\theta}-\frac{1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=\frac{1}{2}$$

130) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성을 이용한 최댓값, 최솟값 구하기

$$y=\cos x+2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\cos x+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{3}\sin x+2\cos x$$

$=\sqrt{7}\sin(x+\theta)$, (단, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$)

따라서, $M-m=\sqrt{7}-(-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$

131) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수 구하기

[해설] $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=1$이려면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이어야 한다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 하자.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$으로 수렴하려면 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로(분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 2} f(x)=4+2a+b=0$

$b=-2a-4$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}$

$4+a=3$

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ f(x)=x^2-x-2$ 이므로 $f(1)=-2$

132) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 1}\left\{\dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot -\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\right\}=-\dfrac{1}{2}$

133) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 구하기

[해설] $\overline{CD}=1$, $\angle CDB=2\theta$, $\angle CBD=\pi-3\theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\overline{DB}}{\sin\theta}$ 이므로

$\overline{DB}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이다.

$\lim_{\theta\to 0}\overline{DB}=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta}=\dfrac{1}{3}$ 이다.

따라서 $\lim_{\theta\to 0}\overline{AB}=\lim_{\theta\to 0}(1+\overline{DB})=\dfrac{4}{3}$

134) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]길이를 각으로 표현한 후, 삼각함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\angle B=\theta$, $\overline{AB}=4$ 이므로 $\overline{AC}=4\tan\theta$ 이다. $\angle CAH=\theta$ 이므로

$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=4\tan\theta\sin\theta$ 이다.

$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\overline{CH}}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{4\tan\theta\sin\theta}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}$

$=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{\tan\theta}{\theta}\cdot\dfrac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\dfrac{1}{2}\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}=1,\ \lim_{\theta\to 0}\dfrac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}=1$ 이므로

$\lim_{\theta\to 0}\dfrac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{\tan\theta}{\theta}\cdot\dfrac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\dfrac{1}{2}$

$=\lim_{\theta\to 0}\dfrac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\dfrac{\tan\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\dfrac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\dfrac{1}{2}=2$ 가 된다.

135) 답 : ⑤

[해설]

$y=\sin x-\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\sin x-\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x-\dfrac{\pi}{3}=\theta$ 라 하면

$0\le x\le\pi$ 이므로 $-\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{2}{3}\pi$ 이다.

따라서, 함수 $y=\sin\theta$ 에서

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 y의 최댓값은 1이고,

$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ 일 때 y의 최솟값은 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$\therefore\ M-m=1-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

136) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 배각공식을 이용하여 원의 반지름의 길이 구하기

$y=\dfrac{24}{7}x$ 와 x축의 양의 방향과 이루는 각을 2θ 라 하면

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{24}{7}$ 이며 정리하면

$\dfrac{24}{7}(1-\tan^2\theta)=2\tan\theta$

$12\tan^2\theta+7\tan\theta-12=0$

$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$ ($\because\ \tan\theta>0$)이다.

그림에서 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}=\dfrac{r}{\sqrt{225-r^2}}$

$4r=3\sqrt{225-r^2}$

$\therefore\ r=9$

137) 답 : 13

[해설]

[출제 의도]삼각방정식의 근을 이용한 등비급수 계산하기

$\alpha_2=\dfrac{1}{3}\alpha_1,\ \alpha_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\alpha_1,\ \ldots$ 이고,

$\beta_2=\dfrac{1}{3}\beta_1,\ \beta_3=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\beta_1,\ \ldots$ 이다.

$\sin\alpha_1=-\dfrac{1}{3}$ 의 근 $\alpha_1=\pi+\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$,

$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ 이므로,

$\cos\beta_1=\dfrac{1}{3}$ 의 근 $\beta_1=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ 이다.

따라서, $\alpha_1+\beta_1=\dfrac{3}{2}\pi$ 이고,

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$

$=\dfrac{\alpha_1}{1-\dfrac{1}{3}}+\dfrac{\beta_1}{1-\dfrac{1}{3}}$

$=\dfrac{3}{2}(\alpha_1+\beta_1)$

$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}\pi$

$=\dfrac{9}{4}\pi$

따라서, $p+q=13$

138) 답 : 14

[해설]

$b>0$이므로 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{2^{x+1}-a}=\dfrac{b}{2\ln 2}\neq 0$이고, $x\to0$일 때, (분자) $\to0$이므로(분모) $\to0$이어야 한다.

따라서, $\lim\limits_{x\to0}(2^{x+1}-a)=0$에서 $2-a=0$

$\therefore\ a=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{2^{x+1}-2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7}{\frac{2(2^x-1)}{x}}$$

$$=\frac{1\cdot 7}{2\cdot\ln 2}=\frac{7}{2\ln 2}$$

$\therefore\ b=7$

$\therefore\ ab=14$

139) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값 구하기

[해설] P, Q, R이 선분 AB의 4등분점이므로

$P\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right),\ Q\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right),\ R\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$이고, $\angle POB=\alpha$,

$\angle ROB=\beta$라 하면, $\tan\alpha=\dfrac{3}{2},\ \tan\beta=\dfrac{1}{6}$이다.

$$\therefore\ \tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{16}{15}$$

$$\therefore\ 30\times\frac{16}{15}=32$$

140) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]반각공식을 활용하여 식을 변형할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

㈎ $\dfrac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$을 정리하여보자.

$\sin\alpha_n=2\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\cos\dfrac{\alpha_n}{2}$ $\cos\alpha_n=\cos^2\dfrac{\alpha_n}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha_n}{2}$ 분자는

$\left(\sin\dfrac{\alpha_n}{2}+\cos\dfrac{\alpha_n}{2}\right)^2$ 이고

분모는 $\left(\cos\dfrac{\alpha_n}{2}-\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\right)\left(\cos\dfrac{\alpha_n}{2}+\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\right)$이므로

$\dfrac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}=\dfrac{\cos\frac{\alpha_n}{2}+\sin\frac{\alpha_n}{2}}{\cos\frac{\alpha_n}{2}-\sin\frac{\alpha_n}{2}}$이다.

분모, 분자를 $\cos\dfrac{\alpha_n}{2}$로 나누면

$$\frac{1+\tan\frac{\alpha_n}{2}}{1-\tan\frac{\alpha_n}{2}}=\frac{\tan 45^\circ+\tan\frac{\alpha_n}{2}}{1-\tan 45^\circ\tan\frac{\alpha_n}{2}}=\tan\left(45^\circ+\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

㈏ $\dfrac{\tan\beta_n}{1+\sec\beta_n}=\dfrac{\sin\beta_n}{1+\cos\beta_n}$에서 $\sin\beta_n=2\sin\dfrac{\beta_n}{2}\cos\dfrac{\beta_n}{2}$,

$\cos\beta_n=2\cos^2\dfrac{\beta_n}{2}-1$에 의하여 $\tan\dfrac{\beta_n}{2}$이 된다.

㈐ $\gamma_n=\dfrac{30^\circ}{2^{n-1}}$에서 n은 자연수이므로 $0<\gamma_n\leq 30^\circ$을 얻을 수 있다. 따라서 $0<\tan\gamma_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이 된다.

141) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

㈎: $r=\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

㈏: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)\sin^2\theta}=2$

142) 답 : 9

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 각의 크기 구하기

$\tan\theta_1=1,\ \tan\theta_2=\dfrac{1}{2},\ \tan\theta_p=\dfrac{1}{p},\ \tan\theta_q=\dfrac{1}{q}$

$\tan(\theta_1-\theta_2)=\tan(\theta_p-\theta_q)$이므로

$$\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\tan\theta_p-\tan\theta_q}{1+\tan\theta_p\tan\theta_q}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p}\times\frac{1}{q}}$$

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{q-p}{pq+1}$, $(p-3)(q+3)=-10$

p, q는 자연수이고 $1<p<q$이므로

$(p-3,\ q+3)=(-1,\ 10)$

$p-3=-1,\ q+3=10$

$p=2,\ q=7$

따라서 $p+q=9$

143) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 최댓값과 최솟값 구하기

[해설] $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$라 하면

$-1 \le t \le \sqrt{2}$ 이다.

$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$ 이므로 $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$

따라서 $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x$

$t - (t^2-1) = -t^2 + t + 1\ (-1 \le t \le \sqrt{2})$ 이므로

$t = \dfrac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\dfrac{5}{4}$ 이고

$t = -1$ 일 때, 최솟값 -1 이다.

따라서 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은 $-\dfrac{5}{4}$ 이다.

144) 답 : ②

[해설]

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ 일 때,

$f(\theta) = \dfrac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)$

$g(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\right)$ 이므로

$$\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta}$$

$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 일 때,

$f(\theta) = \dfrac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta)\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$g(\theta) = \dfrac{1}{2}\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로

$$\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta}$$

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin\theta\right)}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin\theta\right)(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin\theta\right)}{\left(\dfrac{1}{2} - \sin^2\theta\right)(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\sqrt{2} + 2\sin\theta)}{(1 - 2\sin^2\theta)(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta(\sqrt{2} + 2\sin\theta)}{\cos 2\theta(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} + 2\sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

145) 답 : ②

[해설]

$\tan\alpha\tan\beta + \sqrt{3}\tan\alpha - \sqrt{3}\tan\beta - 3 = -4$

$\sqrt{3}(\tan\alpha - \sqrt{3}\tan\beta) = -(1 + \tan\alpha\tan\beta)$

$\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = \tan(\alpha - \beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \alpha - \beta = -\dfrac{\pi}{6}$ ($\because$ α, β는 예각)

146) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리와 합성을 이용하여 삼각함수의 값 구하기

$y = \cos x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \cos x - \left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

y는 $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\pi}{3},\ \tan\alpha = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(별해)

$y = \cos x - \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

147) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]접선의 기하학적 의미를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{a \to 0}\tan\theta$는 곡선 $f(x) = 2^x - 1$ 위의 원점에서 그은 접선의 기울기이다.

$f'(x) = 2^x\ln 2$ 이므로 $a = f'(0) = 2^0\ln 2 = \ln 2$

148) 답 : ④

[해설]

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$$

149) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 배각공식을 이용하여 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{1}{2}$$

150) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1-\cos kx)}{2x^2\sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2x}\times\frac{(1-\cos kx)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{2x^2(1+\cos kx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2kx}{2x^2(1+\cos kx)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2kx}{4x^2}$$

$$=\frac{k^2}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2=\frac{k^2}{4}=1$$

$\therefore\ k=2\ (\because\ k>0)$

151) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]도형을 이용하여 반각 공식 증명하기

[해설]㈎ $\overline{DE}$, ㈏ $\overline{AC}\cdot\overline{CF}$, ㈐ $\cos\theta$

152) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]배각공식을 이용하여 삼각함수의 값 구하기

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta=\frac{2}{3}$$

$0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos2\theta>0$ 이고

$$\therefore\ \cos2\theta=\sqrt{1-\sin^22\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt5}{3}$$

153) 답 : ①

[해설]

조건에서 $\theta=\frac{\pi}{8}$ 이므로

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{2+\sqrt3}{4}$$

154) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$에서

주기는 4π, 최댓값 2, 최솟값 -2

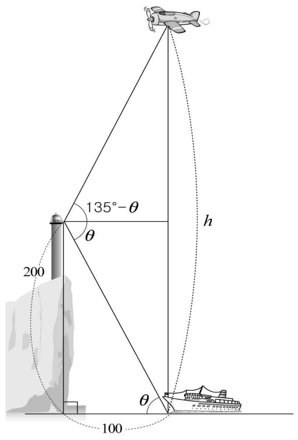
$y=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{1}{2}x$ 이므로 원점에 대하여 대칭

옳는 것은 ㄱ, ㄴ. ㄷ

155) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 높이 구하기



$$\tan\theta=\frac{200}{100}=2$$

$$\tan(135^\circ-\theta)=\frac{h-200}{100}$$

$$\tan(135^\circ-\theta)=\frac{\tan135^\circ-\tan\theta}{1+\tan135^\circ\tan\theta}=\frac{-1-\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$$

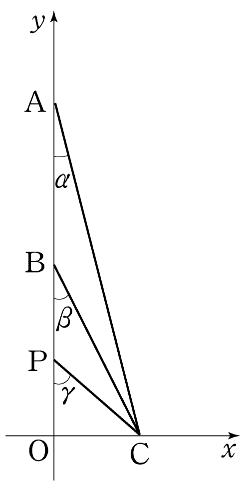
$$\therefore\ h=3\times100+200=500$$

156) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각함수

문제의 그림에서



$\tan\alpha=\frac{1}{4}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$, $\tan\gamma=\frac{1}{y}$ 이므로

$$\tan\gamma=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

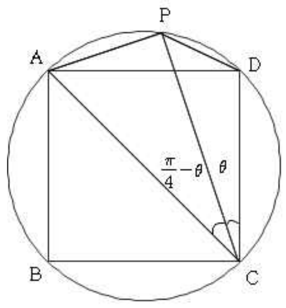
$$=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{6}{7}$$

$\tan\gamma=\frac{1}{y}=\frac{6}{7}$ 에서 $y=\frac{7}{6}$

157) 답 : 50

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 계산하기



$\angle DCP=\theta$, 외접원의 반지름을 R이라 하면

$\overline{AD}=2R\sin\frac{\pi}{4}$

$\overline{AP}=2R\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\overline{DP}=2R\sin\theta$

점 P가 점 D에 가까이 갈수록 $\theta\to0$이므로

$$\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\overline{AD}-\overline{AP}}{\overline{DP}}\right)=\lim_{\theta\to0}\frac{2R\sin\frac{\pi}{4}-2R\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{2R\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{\ }}$$

$\therefore\ 100\alpha^2=50$

158) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]배각공식을 이용하여 길이 구하기

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3}$

$\overline{AC}=x$, $\overline{CD}=\frac{4}{3}x$, $\overline{BC}=\frac{8}{3}x$

$$x^2+\left(\frac{8}{3}x\right)^2=(5\sqrt{73})^2$$

$\therefore\ x=15$

(별해) $\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{BC}=\sqrt{25\times73-x^2}$

$\overline{CD}=\overline{AC}\cdot\tan2\alpha=\overline{BC}\cdot\tan\alpha$

$x\tan2\alpha=\sqrt{25\times73-x^2}\tan\alpha$

$$x\cdot\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\sqrt{25\times73-x^2}\tan\alpha$$

$$\frac{8}{3}x=\sqrt{25\times73-x^2}$$

$x^2=25\times9$, $\therefore\ x=15$

159) 답 : 35

[해설]

$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2$이므로

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$일 때 $f(x)$가 최솟값을 갖는다.

즉

$a+\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}\pi$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$일 때 $f(x)$가 최댓값을 갖는다.

즉

$b+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ b=\frac{\pi}{3}$

$\frac{21}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4}{3}\pi\right)=35$

160) 답 : 250

[해설]

[출제 의도]함수의 극한

[그림 2]의 도형의 넓이는 두 변의 길이가 20인 이등변삼각형 n개의 넓이와 두 변의 길이가 10인 이등변삼각형 n개의 넓이의 합이다.

이때, 같은 두 변 사이의 끼인 각의 크기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이므로

$$S_n=n\cdot\frac{1}{2}\cdot20^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}+n\cdot\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

$$=250n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(250n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=250\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=250$$

161) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]합성함수의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(g(x))=2\sin x$, $g(f(x))=\sin2x$이므로

$$(\text{준식})=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{\sin2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sin2x}$$

$$=1\times1=1$$

162) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값 구하기

$\lim_{x\to0}\frac{ax\sin2x}{\cos x-1}=8$의 좌변을 변형하면

$$\text{좌변}=\lim_{x\to0}\frac{ax\sin2x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2ax\sin x\cos x(\cos x+1)}{-\sin^2x}$$

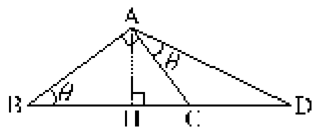
$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\{-2a\cos x(\cos x+1)\}=-4a=8$$

$\therefore\ a=-2$

[정답]①

163) 답 : ②

[해설]
[출제 의도]삼각함수의 여러 가지 공식을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\overline{AC} = \overline{BC}\sin\theta = 4\sin\theta$ 이고
점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면



$\angle CAH = \theta$ 이므로 $\overline{AD}\cos 2\theta = \overline{AH}$,
$\overline{AH} = \overline{AC}\cos\theta = 4\sin\theta\cos\theta = 2\sin 2\theta$

$\therefore\ \overline{AD} = \dfrac{2\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2\tan 2\theta$

164) 답 : 14
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이해하기
$\angle EAD = \alpha$라 하면

$\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ 이고,

$\tan(\theta+\alpha) = \dfrac{\tan\theta + \tan\alpha}{1-\tan\theta\cdot\tan\alpha} = \dfrac{4}{3}$ 이므로

$\tan\theta + \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{3} - \tan\theta$ 이며 정리하면

$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{7}{24}$

$\therefore\ 48\tan\theta = 14$

[정답] 14

165) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 극한을 이용하여 문제 해결하기

$\angle PAO = \theta$라 하면 사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{OA}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \dfrac{1}{\sin\theta}$

구하는 값 $= \lim\limits_{P\to B}\overline{OA} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 3$

[정답]①

166) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]미분계수의 의미를 알고, 이를 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(2) = 3$ 이고, $\dfrac{1}{3n} = h$로 놓으면

(준식) $= \dfrac{1}{6}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{1}{6}f'(2) = \dfrac{1}{2}$

167) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 반각의 공식을 이해하기

$\tan\theta = -\sqrt{8}$ 이므로 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}\ \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$

$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2} = \dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{2} = \dfrac{2}{3}$

[정답]⑤

168) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 합을 곱으로 고쳐서 계산하기
구하는 값

$= \cos 310^\circ + \cos 190^\circ = 2\cos\dfrac{310^\circ + 190^\circ}{2}\cos\dfrac{310^\circ - 190^\circ}{2}$

$= 2\cos 250^\circ\cos 60^\circ = \cos 250^\circ = -\cos 70^\circ$

[정답]⑤

169) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.
주어진 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 5(1 - 2\sin\theta\cos\theta)$

$1 + \sin 2\theta = 5(1 - \sin 2\theta)$

$\therefore\ \sin 2\theta = \dfrac{2}{3}$

170) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값 구하기
문제의 조건:

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$

구하는 값 $= \sqrt{2}\sin\alpha + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$= \sqrt{2}\sin\alpha + 2\left\{\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha\right\}$

$= 2\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha = \sqrt{10}\sin(\alpha + \theta)$

(단, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore$ 최댓값은 $\sqrt{10}$

[정답]③

171) 답 : 3
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제 해결하기
$2x^2 - px + 1 = 0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로 근과 계수 관계에서

$$\begin{cases} \tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{p}{2} \\ \tan\alpha\tan\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

구하는 값 $= \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\dfrac{p}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = p = 3$

[정답] 3

172) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]조건에 맞는 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
점 P의 좌표를 $P(x, \ln(1+10x))$라 하면

$\tan\theta = \dfrac{\ln(1+10x)}{x}$

이때, $P \to O$이면 $x \to 0$이므로

$$\lim_{P\to O}\tan\theta=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\times 10=10$$

173) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]초월함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\triangle PAB$의 넓이 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\ln t=\frac{1}{2}(e-1)\ln t$이므로

$$\lim_{t\to 1+}\frac{S}{t-1}=\lim_{t\to 1+}\frac{(e-1)\ln t}{2(t-1)}=\frac{e-1}{2}\lim_{t\to 1+}\frac{\ln t}{t-1}$$
$$\frac{e-1}{2}\times 1\ (\because \lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1)$$
$$\therefore\ \lim_{t\to 1+}\frac{S}{t-1}=\frac{e-1}{2}$$

174) 답 : 23

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 이배각공식을 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하여 정리하면

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{4}$에서

$\sin 2\theta=\frac{3}{4}$이므로

$$\cos^{22}\theta=1-\sin^{22}\theta=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$

$\therefore\ a+b=23$

175) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]반각의 공식을 이해하고 주어진 문제 풀기

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$이므로

$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}=\frac{1}{9}$ ($\because$ $\frac{\alpha}{2}$는 제 2사분면 또는 제 4분면의 각)

$\therefore\ \tan\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$

[정답]②

176) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 합성을 이해하고 주어진 문제 해결하기

삼각함수를 합성하면

(준식) $=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

주기 $a=2\pi$, 최댓값 $b=2\sqrt{3}$, 최솟값 $c=-2\sqrt{3}$

$\therefore\ abc=-24\pi$

[정답]①

177) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 덧셈정리를 알고 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\angle CDA=\alpha$, $\angle CAB=\beta$라 놓으면

$$\tan(\angle DCA)=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$
$$=\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{6}}{1+\frac{a}{2}\times\frac{a}{6}}=\frac{4}{7}$$

위 식을 정리하면 $a^2-7a+12=0$이므로 구하는 a의 값의 곱은 12이다.

178) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 배각, 반각의 공식을 이해하기

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{3}$$
$$\cos\theta=\frac{1}{3}$$
$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{7}{9}$$

[정답]①

179) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]초월함수의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$

180) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 곱을 합 또는 차로 고치는 공식을 이해하고 주어진 문제 풀기

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=-\frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 2B)=-\frac{1}{2}(1-2\sin^2A-1+2\sin^2B)$$
$$=\sin^2A-\sin^2B=\sin^2C$$

삼각형 ABC의 대변의 길이를 각각 a, b, c, 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$a^2=b^2+c^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle A$가 직각인 직각삼각형이다.

[정답]④

181) 답 : 2

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한값을 구하기

(준식) $=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan x}=2$ [정답] 2

182) 답 : ①

정답 및 해설

[해설]
[출제 의도]삼각함수의 배각, 반각의 공식이해하기
$\tan\theta = t$라하면(준식)$= \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{4}{3}$

$t = -2,\ t = \dfrac{1}{2}$ [정답]①

183) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 여러 가지 공식 사이의 관계를 이해하기
$5\cos\theta + 10\sin\theta = 5\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$
$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
[정답]③

184) 답 : 2
[해설]
제의도]반각의 공식을 활용하여 문제 해결하기
$l^2 = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \left\{\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) - \cos\theta\right\}^2$
$= \dfrac{\pi^2}{4} + (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{\pi^2}{4} + 1 + \sin 2\theta$

최댓값은 $\sin 2\theta = 1$일 때, $\dfrac{\pi^2}{4} + 2$

최솟값은 $\sin 2\theta = -1$일 때, $\dfrac{\pi^2}{4}$

[정답] 2