I.지수함수와 로그함수

1.지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 최댓값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

2 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq 4$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

3 x에 대한 로그부등식 $\log_5(x-1) \leq \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 3일 때, 자연수 k의 값은? [3점][2016(A) /수능 11]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

4 [*공통]어느 금융상품에 초기자산 W_0을 투자하고 t년이 지난 시점에서의 기대자산 W가 다음과 같이 주어진다고 한다. $W=\frac{W_0}{2}10^{at}\left(1+10^{at}\right)$ (단, $W_0>0$, $t \geq 0$이고, a는 상수이다.)이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 15년이 지난 시점에서의 기대자산은 초기자산의 3배이다. 이 금융상품에 초기자산 w_0을 투자하고 30년이 지난 시점에서의 기대자산이 초기자산의 k배일 때, 실수 k의 값은? (단, $w_0>0$) [4점][2016(A) /수능 16]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

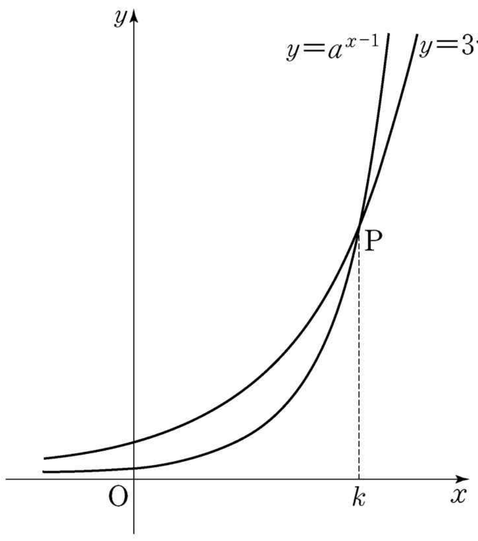
[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

5 로그방정식 $\log_2(x+6)=5$의 해를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

6 $a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때,

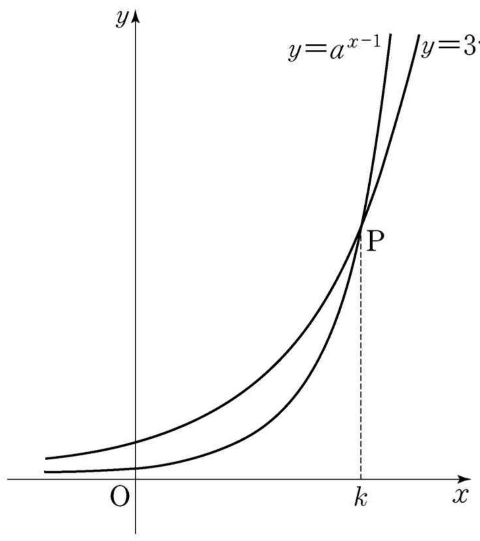
$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$의 값은?[3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

7 $a>3$인 상수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{x-1}$과 $y=3^x$이 점 P에서 만난다. 점 P의 x좌표를 k라 할 때, 점 P에서 곡선 $y=3^x$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 A, 점 P에서 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 $H(k,\ 0)$에 대하여 $\overline{AH}=2\overline{BH}$일 때, a의 값은?[4점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

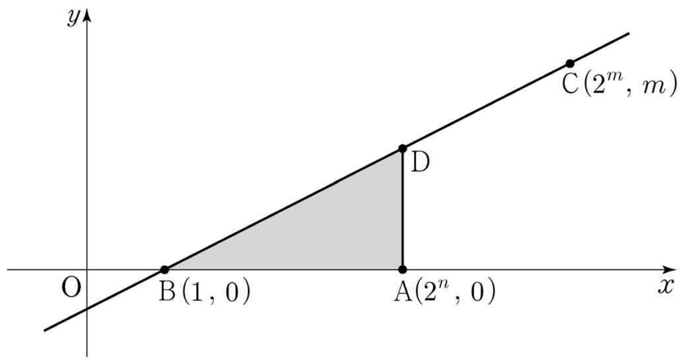
8 지수부등식 $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x}\le 5^{x+4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은?[4점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

9 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?[4점]

(가)점 A의 좌표는 $(2^n,\ 0)$이다.
(나)두 점 $B(1,\ 0)$과 $C(2^m,\ m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.



① 109 ② 113 ③
④ 115 ⑤ 117

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

10 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 삼각형 OAB의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]

(가)점 A의 좌표는 $(-2,\ 3^n)$이다.
(나)점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때, a와 b는 자연수이고 $b \le \log_2 a$를 만족시킨다.
(다)삼각형 OAB의 넓이는 50 이하이다.

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

11 [*공통]단면의 반지름의 길이가 $R(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $x(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v}=1=k\frac{\log x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^a만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\frac{1}{3}$이다. a의 값은? [3점]

① $\frac{39}{23}$ ② $\frac{37}{23}$ ③ $\frac{35}{23}$
④ $\frac{33}{23}$ ⑤ $\frac{31}{23}$

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

12 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

13 [공통]화재가 발생한 화재실의 온도는 시간에 따라 변한다.

어떤 화재실의 초기 온도를 T_0(℃), 화재가 발생한 지 t분 후의 온도를 T(℃)라고 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$T = T_0 + k\log(8t+1)$ (단, k는 상수이다.)

초기 온도가 20℃인 이 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도는 365℃이었고, 화재가 발생한 지 a분 후의 온도는 710℃이었다. a의 값은?[3점][2013학년도 수능]

① $\frac{99}{8}$ ② $\frac{109}{8}$ ③ $\frac{119}{8}$
④ $\frac{129}{8}$ ⑤ $\frac{139}{8}$

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

14 [공통]좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 $\{(x, y) | 2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\}$에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다.
(나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이다.

$\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오.[4점][2013학년도 수능]

[난이도 : ★☆☆] [2012 학년도 대수능]

15 방정식 $\log_3(x-11) = 3\log_3 2$를 만족하는 x의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

16 [공통]누에나방 암컷은 페로몬을 분비하여 수컷을 유인한다.

누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 t초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 x인 곳에서 측정한 페로몬 농도 y는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$\log y = A - \frac{1}{2}\log t - \frac{Kx^2}{t}$ (단, A와 K는 양의 상수이다.)

누에나방 암컷이 페로몬을 분비한 후 1초가 지났을 때 분비한 곳으로부터 거리가 2인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 a이고, 분비한 후 4초가 지났을 때, 분비한 곳으로부터 거리가 d인 곳에서 측정한 페로몬의 농도는 $\frac{a}{2}$이다.

d의 값은?[3점]

① 7 ② 6 ③ 5
④ 4 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

17 [공통]자연수 a, b에 대하여 곡선 $y = a^{x+1}$과 곡선 $y = b^x$이 직선 $x = t\,(t \ge 1)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.

예를 들어, $a=4$, $b=5$는 다음 조건을 만족시킨다.[4점]

(가) $2 \le a \le 10$, $2 \le b \le 10$
(나) $t \ge 1$인 어떤 실수 t에 대하여 $\overline{PQ} \le 10$이다.

[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

18 지수방정식 $2^x + 2^{2-x} = 5$의 모든 실근의 합은?[3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

19 로그부등식 $\log_2 x \le \log_4(12x+28)$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

20 [공통]조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 $w(g)$일 때, A조개와 B조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 Q_A, Q_B라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$Q_A = 0.01t^{1.25}w^{0.25}$$

$$Q_B = 0.05t^{0.75}w^{0.30}$$

수온이 20℃이고 A조개와 B조개의 개체중량이 각각 $8g$일 때, $\frac{Q_A}{Q_B}$의 값은 $2^a \times 5^b$이다. $a+b$의 값은?(단, a, b는유리수이다.)[3점]

① 0.15　② 0.35　③ 0.55
④ 0.75　⑤ 0.95

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

21 [공통]자연수 $n(n \ge 2)$에 대하여 직선 $y=-x+n$과 곡선 $y=|\log_2 x|$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 a_n, $b_n(a_n < b_n)$이라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_2 < \frac{1}{4}$
ㄴ. $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
ㄷ. $1 - \frac{\log_2 n}{n} < \frac{b_n}{n} < 1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

22 지수함수 $y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a, 5)$, $(3, b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

23 [공통]두 지수함수 $\begin{cases} f(x)=a^{bx-1} \\ g(x)=a^{1-bx} \end{cases}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가)두 함수 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
(나) $f(4)+g(4)=\frac{5}{2}$

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?(단, $0<a<1$)[3점]

① 1　② $\frac{9}{8}$　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{11}{8}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

24 함수 $y=3+\log_3\left(x^2-4x+31\right)$의 최솟값은?[3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

25 $0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a}x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자.

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.
ㄴ. $p<q$
ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

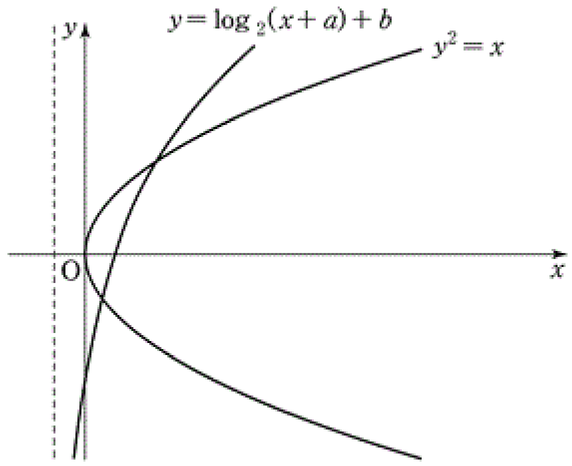
[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

26 지수함수 $f(x)=a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은?[3점]

① $2+\sqrt{3}$ ② 2 ③ $1+\sqrt{3}$
④ 3 ⑤ $2+\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

27 로그함수 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프가 포물선 $y^2=x$의 초점을 지나고, 이 로그함수의 그래프의 점근선이 포물선 $y^2=x$의 준선과 일치할 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?[3점]



① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{21}{8}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

28 부등식 $(\log_3 x)(\log_3 3x)\leq 20$을 만족시키는 자연수 x의 최댓값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

29 함수 $f(x)=2^x$ 의 그래프를 ...축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되고, 이 평행이동에 의하여 점 $A(1, f(1))$이 점 $A'(3, g(3))$으로 이동된다.

함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지날 때, $m+n$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{4}$　② 3　③ $\frac{13}{4}$
④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{15}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

30 로그방정식 $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x = 0$의 두 근을 각각 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

31 정의역이 $\{x|-1 \le x \le 3\}$인 두 지수함수

$f(x)=4^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?[3점]

① 8　② 6　③ 4
④ 2　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

32 [공통]주위가 순간적으로 어두워지더라도 사람의 눈은 그 변화를 서서히 지각하게 된다. 빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후 t초가 경과했을 때, 사람이 지각하는 빛의 세기 $I(t)$는 $I(t)=10+990\times a^{-5t}$ (단, a는 $a>1$인 상수)이라 한다.

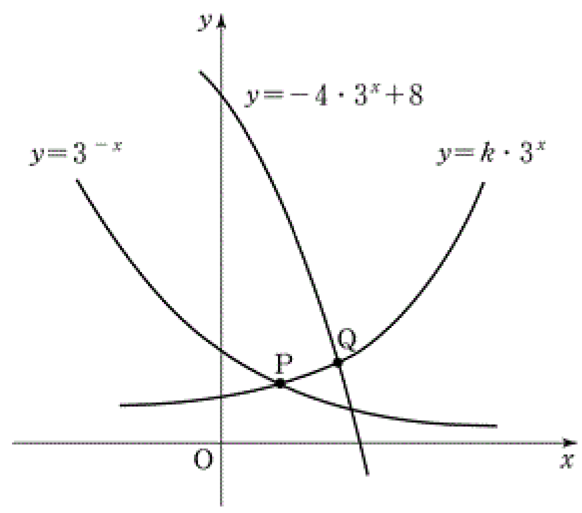
빛의 세기가 1000에서 10으로 순간적으로 바뀐 후, 사람이 빛의 세기를 21로 지각하는 순간까지 s초가 경과했다고 할 때, s의 값은?

(단, 빛의 세기의 단위는 Td(트롤랜드)이다.)[3점]

① $\frac{1+2\log 3}{5\log a}$　② $\frac{1+3\log 3}{5\log a}$
③ $\frac{2+\log 3}{5\log a}$　④ $\frac{2+2\log 3}{5\log a}$
⑤ $\frac{2+3\log 3}{5\log a}$

[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

33 [공통]함수 $y=k\cdot 3^x\,(0<k<1)$의 그래프가 두 함수 $\begin{cases} y=3^{-x} \\ y=-4\cdot 3^x+8 \end{cases}$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P와 점 Q의 x좌표의 비가 $1:2$일 때, $35k$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

34 [공통]정수 n에 대하여 두 집합 $A(n), B(n)$이

$A(n)=\{x|\log_2 x \le n\}$, $B(n)=\{x|\log_4 x \le n\}$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $A(1)=\{x|0<x\le 1\}$
ㄴ. $A(4)=B(2)$
ㄷ. $A(n)\subset B(n)$일 때, $B(-n)\subset A(-n)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

35 [문과]부등식 $a^m<a^n<b^n<b^m$을 만족시키는 양수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 옳은 것은?[3점]

① $a<1<b,\ m>n$
② $a<1<b,\ m<n$
③ $a<b<1,\ m<n$
④ $1<a<b,\ m>n$
⑤ $1<a<b,\ m<n$

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

36 [문과]방정식 $4^x-7\cdot 2^x+12=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $2^{2\alpha}+2^{2\beta}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

37 [문과]정의역이 $\{x|1\le x\le 81\}$인 함수

$y=(\log_3 x)\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)+2\log_3 x+10$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

38 [공통]어느 물탱크에 서식하고 있는 박테리아를 제거하기 위하여 약품을 투여하려고 한다. 물탱크에 있는 물 $1mL$당 초기 박테리아 수를 C_0, 약품을 투여한 지 t시간이 지나는 순간 $1mL$당 박테리아 수를 C라 할 때, 다음 관계식이 성립한다고 하자.

$\dfrac{\log\{C\}}{C_0}=-kt$ (k는 양의 상수)

물 $1mL$당 초기 박테리아 수가 8×10^5이고, 약품을 투여한 지 3시간이 지나는 순간 $1mL$당 박테리아 수는 2×10^5이 된다고 한다.

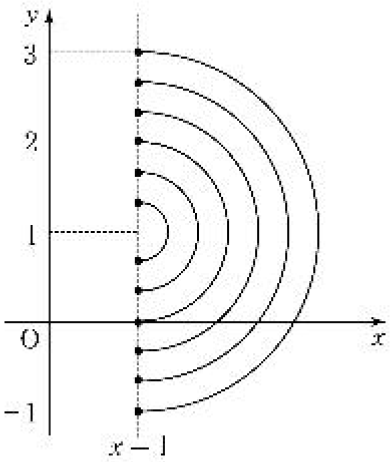
약품을 투여한 지 a시간 후에 처음으로 $1mL$당 박테리아 수가 8×10^3이하가 되었다. a의 값을 구하시오.(단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

39 [문과]아래 그림은 중심이 $(1, 1)$이고 반지름의 길이가 각각 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$인 6개의 반원을 그린 것이다. 세 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$, $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y=3^x$의 그래프가 반원과 만나는 교점의 개수를 각각 a, b, c라 하자.

a, b, c의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

(단, $x \geq 1$이고 반원은 지름의 양 끝점을 포함한다.)[4점]



① $a<b<c$ ② $a<c<b$
③ $b<c<a$ ④ $c<a<b$
⑤ $c<b<a$

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

40 [공통]연립방정식 $\begin{cases} \log_3|x-3|<4 \\ \log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

41 함수 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$
ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$
ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} f\left(\frac{k}{101}\right)=50$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

42 [공통]두 실수 a와 b가 1이 아닌 양수일 때, 함수 $y=a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 항상 만나는 경우를 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $a>1$이고 $b>1$
ㄴ. $a>1$이고 $0<b<1$
ㄷ. $0<a<1$이고 $0<b<1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

43 [공통] n이 자연수일 때, 다음 [보기]의 부등식 중 항상 성립하는 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $\log_2(n+3)>\log_2(n+2)$
ㄴ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+2)$
ㄷ. $\log_2(n+2)>\log_3(n+3)$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

44 [공통]다음 방정식 $(\log_2 x)^3+\log_2 x^3=4(\log_2 x)^2+\log_2 x$ 의 모든 해의 곱을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

45 [공통]지수함수의 그래프에 대한 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[2점]

[보기]
ㄱ. $y=2^x$ 의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\dfrac{1}{2^x}$ 의 그래프가 된다.
ㄴ. $y=2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^x$ 의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.
ㄷ. $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 $y=2^x$ 의 그래프를 얻을 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

46 [공통]시간 t에 따라 감소하는 함수 $f(t)$에 대하여 $f(t+c)=\dfrac{1}{2}f(t)$를 만족시키는 양의 상수 c를 $f(t)$의 반감기라 한다. 함수 $f(t)=3^{-t}$의 반감기는?[3점]

① $\dfrac{1}{3}\log_3 2$　② $\dfrac{1}{2}\log_3 2$　③ $\log_3 2$
④ $2\log_3 2$　⑤ $3\log_3 2$

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

47 [공통]함수 $f(x)=\log_9(5-x)+\log_3(x+4)$의 최댓값은?

① $\dfrac{7}{2}$　② 4　③ $\dfrac{2}{5}+\log_3 4$
④ $\dfrac{3}{2}+\log_3 2$　⑤ $4+\log_3 6$

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

48 [공통]지수방정식 $3^{x+2}=96$의 근을 α라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $0<\alpha<1$　② $1<\alpha<2$　③ $2<\alpha<3$
④ $3<\alpha<4$　⑤ $4<\alpha<5$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

49 부등식 $\dfrac{27}{9^x}\geq 3^{x-9}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

50 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

$\overline{AB}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

51 방정식 $3^{-x+2}=\frac{1}{9}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

52 부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

53 로그방정식 $\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 곱은?[3점]

① -10 ② -8 ③ -6

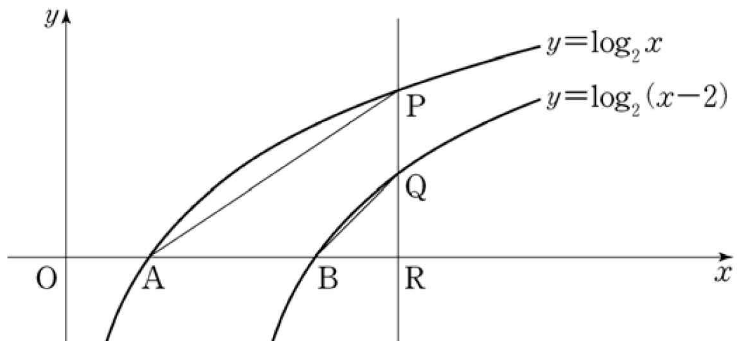
④ -4 ⑤ -2

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

54 그림과 같이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

직선 $x=k\,(k>0)$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-2)$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, x축과 만나는 점을 R라 하자.

점 Q가 선분 PR의 중점일 때, 사각형 $ABQP$의 넓이는? [3점]



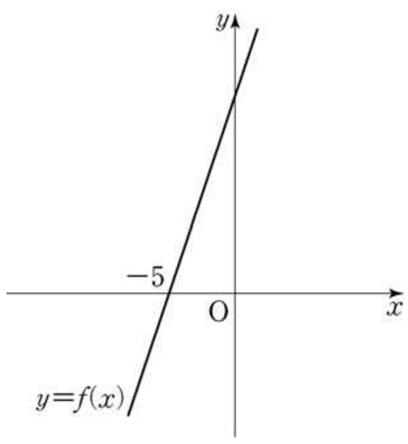
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

55 일차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(-5)=0$이다.

부등식 $2^{f(x)}\le 8$의 해가 $x\le -4$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

56 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 양의 방향으로 a만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$일 때, 상수 a의 값은?[4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

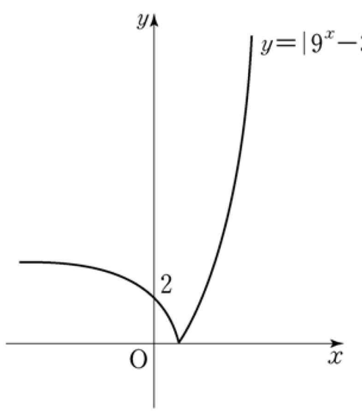
[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

57 2이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수가 300이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)\times f(3)\times f(4)$의 값을 구하시오.[4점]

(가) $a<n^k$이면 $b\le\log_n a$이다.
(나) $a\ge n^k$이면 $b\le-(a-n^k)^2+k^2$이다.

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

58 좌표평면 위의 두 곡선 $y=|9^x-3|$과 $y=2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

59 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수

$$f(x)=2^x,\quad g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

의 최댓값을 각각 a, b라 하자. ab의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

60 $0<a<1<b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$f(x)=\log_a(bx-1)$, $g(x)=\log_b(ax-1)$이 있다.

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있도록 하는

a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은? [4점]

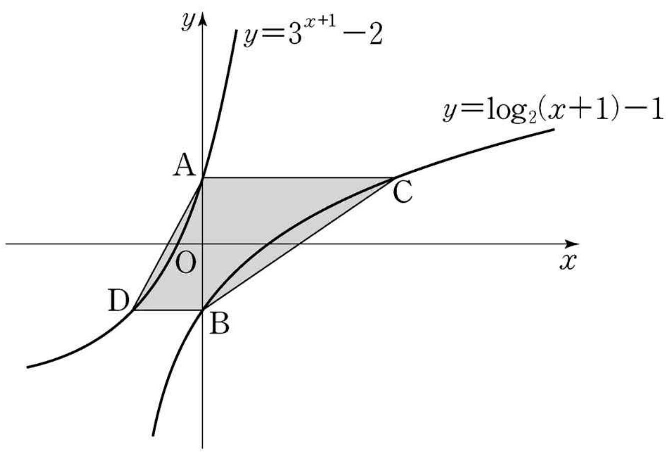
① $b=-2a+2$ $(0<a<\frac{1}{2})$ ② $b=2a$ $(0<a<\frac{1}{2})$
③ $b=2a$ $(\frac{1}{2}<a<1)$ ④ $b=2a+1$ $(0<a<\frac{1}{2})$
⑤ $b=2a+1$ $(\frac{1}{2}<a<1)$

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

61 로그방정식 $\log_8 x-\log_8(x-7)=\frac{1}{3}$의 해를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

62 그림과 같이 두 곡선 $y=3^{x+1}-2$, $y=\log_2(x+1)-1$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)-1$과 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^{x+1}-2$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 $ADBC$의 넓이는? [3점]



① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

63 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [4점]

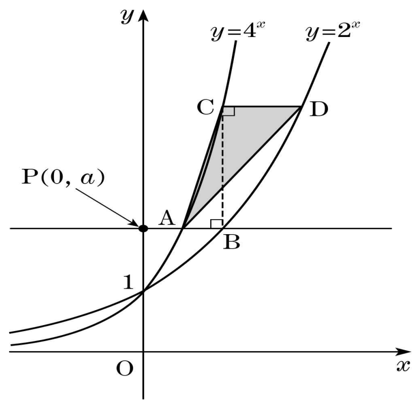
(가) $1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 100$
(나)곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 만나지 않는다.
(다)곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$와 적어도 한 점에서 만난다.

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 모의평가]

64 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 y축 위의 점 $P(0, a)$ $(a>1)$가 있다.

점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

또, 점 B를 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 C라 하고, 점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 D라 하자.



$a=2$일 때, 직선 AD의 기울기는? [3점]

① 1　② $\frac{7}{6}$　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

65 로그부등식 $\log_2(7-x)+\log_2(7+x)>4$를 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.[3점][2012년 6월]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

66 [공통]지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

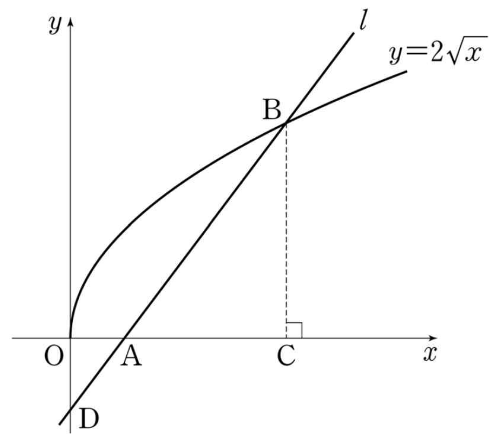
$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 $m/$초이다.)

A지역에서 지면으로부터 $12m$와 $36m$인 높이에서 풍속이 각각 $2(m/$초$)$와 $8(m/$초$)$이고, B지역에서 지면으로부터 $10m$와 $90m$인 높이에서 풍속이 각각 $a(m/$초$)$와 $b(m/$초$)$일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다. $\frac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, a, b는 양수이다.) [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

67 점 $A(1, 0)$을 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 곡선 $y=2\sqrt{x}$와 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 직선 l이 y축과 만나는 점을 D라 하자.



점 $B(t, 2\sqrt{t})$에 대하여 삼각형 BAC의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f'(9)$의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

68 밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속도로 일어나는 동적 평형 상태의 증기압을 포화 증기압이라 한다.

밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 $P(mmHg)$와 용기 속의 온도 $t(℃)$사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\log P = 8.11 - \frac{1750}{t+235} \ (0 < t < 60)$$

용기 속의 온도가 15℃일 때의 포화 증기압을 P_1, 45℃일 때의 포화 증기압을 P_2라 할 때, $\frac{P_2}{P_1}$의 값은?[3점][2012년 6월]

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{2}}$ ③ $10^{\frac{3}{4}}$
④ 10 ⑤ $10^{\frac{5}{4}}$

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

69 방정식 $x^{\log_2 x} = 8x^2$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

70 [공통]공기 중의 암모니아 농도가 C일 때 냄새의 세기 I는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$I = k\log C + a$(단, k와 a는 상수이다.)공기 중의 암모니아 농도가 40일 때 냄새의 세기는 5이고, 공기 중의 암모니아 농도가 10일 때 냄새의 세기는 4이다.

공기 중의 암모니아 농도가 p일 때 냄새의 세기는 2.5이다.

$100p$의 값을 구하시오.(단, 암모니아 농도의 단위는 ppm이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

71 [공통]지면으로부터 H_1인 높이에서 풍속이 V_1이고 지면으로부터 H_2인 높이에서 풍속이 V_2일 때, 대기 안정도 계수 k는 다음 식을 만족시킨다.

$$V_2 = V_1 \times \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

(단, $H_1 < H_2$이고, 높이의 단위는 m, 풍속의 단위는 $m/$초이다.)

A지역에서 지면으로부터 $12m$와 $36m$인 높이에서 풍속이 각각 $2(m/$초$)$와 $8(m/$초$)$이고, B지역에서 지면으로부터 $10m$와 $90m$인 높이에서 풍속이 각각 $a(m/$초$)$와 $b(m/$초$)$일 때, 두 지역의 대기 안정도 계수 k가 서로 같았다.

$\frac{b}{a}$의 값은?(단, a, b는 양수이다.)[4점]

① 10 ② 13 ③ 16
④ 19 ⑤ 22

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

72 방정식 $4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$

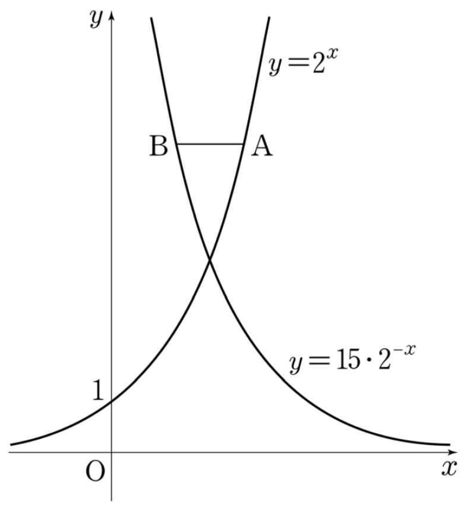
이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.[4점][2012년 6월]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

73 [공통]그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이

함수 $y=15\cdot 2^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자.

점 A의 x좌표를 a라 할 때, $1 < \overline{AB} < 100$을 만족시키는 2 이상의 자연수 a의 개수는? [4점]



① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

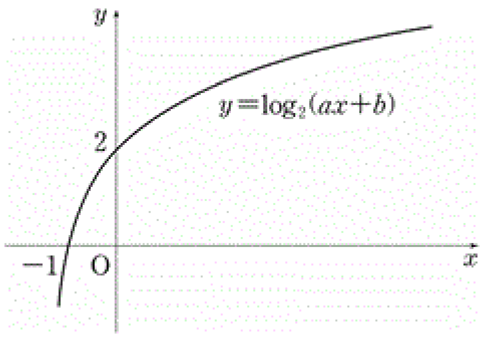
[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

74 방정식 $2^x + 2^{5-x} = 33$의 모든 실근의 합은?[3점][2011년 9월 평가원]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

75 곡선 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(-1, 0)$과 점 $(0, 2)$를 지날 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3점]



① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

76 [공통]특정 환경의 어느 웹사이트에서 한 메뉴 안에 선택할 수 있는 항목이 n개 있는 경우, 항목을 1개 선택하는 데 걸리는 시간 T(초)가 다음 식을 만족시킨다.

$$T=2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)$$

메뉴가 여러 개인 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 각 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 시간을 모두 더하여 구한다. 예를 들어, 메뉴가 3개이고 각 메뉴 안에 항목이 4개씩 있는 경우, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간은 $3\left(2+\frac{1}{3}\log_2 5\right)$초이다.

메뉴가 10개이고 각 메뉴 안에 항목이 n개씩 있을 때, 모든 메뉴에서 항목을 1개씩 선택하는 데 걸리는 전체 시간이 30초 이하가 되도록 하는 n의 최댓값은?[3점][2011년 9월 평가원]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

77 부등식 $\log_2 x^2-\log_2|x|\le 3$을 만족시키는 정수 x의 개수는?[4점]

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

78 [공통] 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n\in S$에 대하여 집합 $\{k|k\in S, \log_2 n-\log_2 k$는 정수 $\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자.

예를 들어, $f(10)=5$이고, $f(99)=1$이다.

이때, $f(n)=1$인 n의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2010년 6월 모의평가]

79 지수방정식 $\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$을 만족시키는 x의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

80 로그부등식 $\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

81 지수방정식 $(2^x-8)(3^{2x}-9)=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

82 1보다 큰 양수 a에 대하여 두 곡선 $y=a^{-x-2}$과 $y=\log_a(x-2)$가 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

$\overline{AB}=8$일 때, a의 값은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

83 로그부등식 $(1+\log_3 x)(a-\log_3 x)>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<9$일 때, 상수 a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

84 [공통]어느 세라믹 재료의 열전도 계수(κ)는 적절한 실험 조건에서 일정하고, 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$\kappa=C\frac{\log t_2-\log t_1}{T_2-T_1}$$

(단, C는 0보다 큰 상수, T_1(℃), T_2(℃)는 실험을 시작한 후 각각 t_1(초), t_2(초)일 때 세라믹 재료의 측정 온도이다.)

이 세라믹 재료의 열전도 계수를 측정하는 실험에서 실험을 시작한 후 10초일 때와 20초일 때의 측정 온도가 각각 200℃, 202℃ 이었다.

실험을 시작한 후 x초일 때, 측정 온도가 206℃가 되었다. x의 값은?[3점]

① 70 ② 80 ③ 90
④ 100 ⑤ 110

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

85 [공통]양수기로 물을 끌어올릴 때, 펌프의 1분당 회전수 N, 양수량 Q, 양수할 높이 H와 양수기의 비교회전도 S사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$ (단, N, Q, H의 단위는 각각 rpm, m^3/분, m이다.)

펌프의 1분당 회전수가 일정한 양수기에 대하여 양수량이 24, 양수할 높이가 5일 때의 비교회전도를 S_1, 양수량이 12, 양수할 높이가 10일 때의 비교회전도를 S_2라 하자.

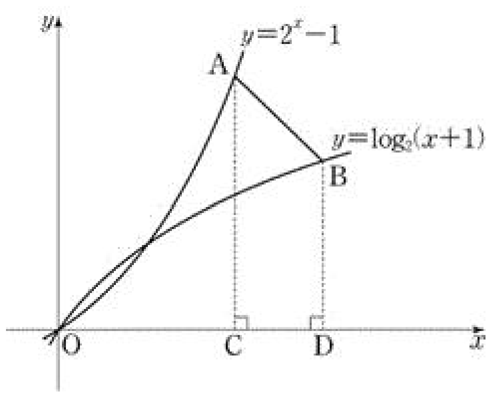
$\frac{S_1}{S_2}$의 값은?[3점]

① $2^{\frac{3}{4}}$ ② $2^{\frac{7}{8}}$ ③ 2
④ $2^{\frac{9}{8}}$ ⑤ $2^{\frac{5}{4}}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

86 [공통]곡선 $y=2^x-1$ 위의 점 $A(2,3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자.

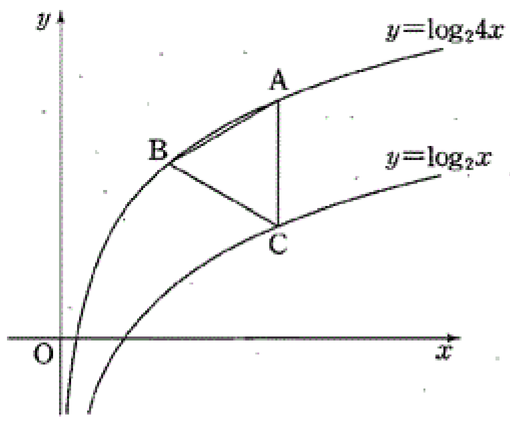
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 $ACDB$의 넓이는?[3점]



① $\frac{5}{2}$　② $\frac{11}{4}$　③ 3
④ $\frac{13}{4}$　⑤ $\frac{7}{2}$

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

87 [공통]함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^2\times 2^q$의 값은?[4점]



① $6\sqrt{3}$　② $9\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$　⑤ $18\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

88 로그부등식 $\log_3 x+\log_3(12-x)\le 3$을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

89 지수방정식 $6-2^x=2^{3-x}$의 모든 실근의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

90 지수방정식 $9^x-3^{x+2}+8=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $3^{2\alpha}+3^{2\beta}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

91 부등식 $1+\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.[3점]

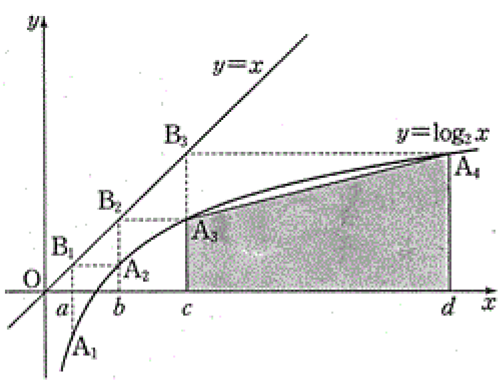
[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

92 [공통]그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 한 점 A_1에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x$와 만나는 점을 B_1이라 하고, 점 B_1에서 x축에 평행한 직선을 그어 이 그래프와 만나는 점을 A_2라 하자.

이와 같은 과정을 반복하여 점 A_2로부터 점 B_2와 점 A_3을, 점 A_3으로부터 점 B_3와 점 A_4를 얻는다.

네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 차례로 a, b, c, d라 하자.

네 점 $(c, 0)$, $(d, 0)$, $(d, \log_2 d)$, $(c, \log_2 c)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 함수 $f(x)=2^x$을 이용하여 a, b로 나타낸 것과 같은 것은?[3점]



① $\frac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

② $\frac{1}{2}\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

③ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

④ $\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

⑤ $\{f(b)-f(a)\}\{(f\circ f)(b)+(f\circ f)(a)\}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

93 [공통]어느 도시의 중심온도 u(℃), 근교의 농촌온도 r(℃), 도시화된 지역의 넓이 $a(km^2)$사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$u=r+0.05+1.6\log a$

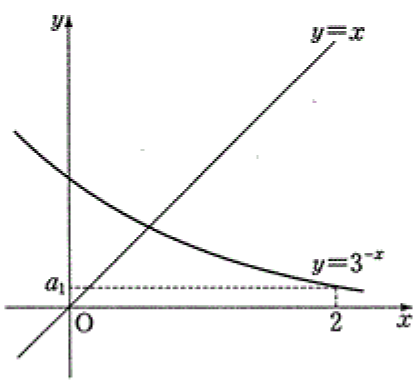
10년 전에 비하여 이 도시의 도시화된 지역의 넓이가 25% 확장되었고 근교의 농촌온도는 변하지 않았을 때, 도시의 중심온도는 10년 전에 비하여 x℃ 높아졌다.

x의 값은?(단, 도시 중심의 위치는 10년 전과 같고, $\log 2=0.30$으로 계산한다.)[3점]

① 0.12 ② 0.13 ③ 0.14 ④ 0.15 ⑤ 0.16

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

94 지수함수 $f(x)=3^{-x}$에 대하여 $a_1=f(2)$, $a_{n+1}=f(a_n)(n=1, 2, 3)$일 때, a_2, a_3, a_4의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?[3점]



① $a_2 < a_3 < a_4$

② $a_4 < a_3 < a_2$

③ $a_2 < a_4 < a_3$

④ $a_3 < a_2 < a_4$

⑤ $a_3 < a_4 < a_2$

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

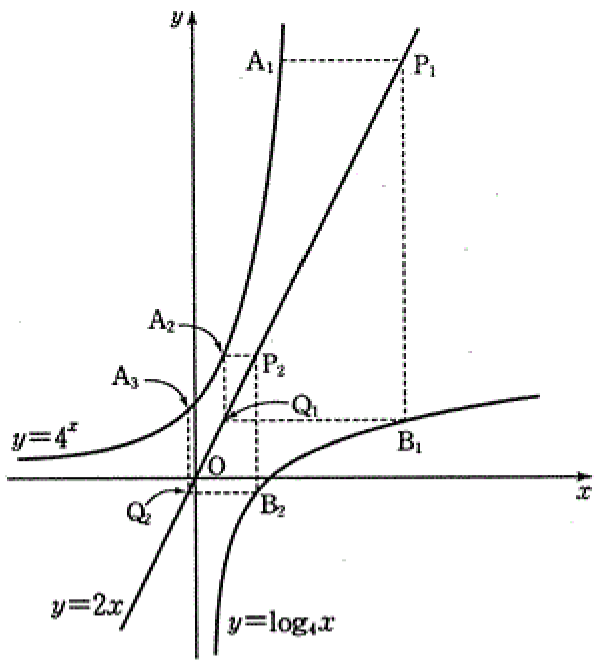
95 좌표평면에서 세 점 $(15, 4)$, $(15, 1)$, $(64, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 로그함수 $y=\log_k x$의 그래프가 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

96 [공통]자연수 n에 대하여 점 A_n이 함수 $y=4^x$의 그래프 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가)점 A_1의 좌표는 $(a,\ 4^a)$이다. (나)(1)점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 P_n이라 한다. (2)점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 B_n이라 한다. (3)점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 Q_n이라 한다. (4)점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_4 x$와 만나는 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$의 값은?[4점]



① $-\frac{3}{4}$　② $-\frac{11}{16}$　③ $-\frac{5}{8}$
④ $-\frac{9}{16}$　⑤ $-\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

97 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고, $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1,\ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$이다.

자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?[4점]

① 7　② 9　③ 11
④ 13　⑤ 15

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

98 두 곡선 $y=3^{x+m}$, $y=3^{-x}$이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라고 하자.

$\overline{AB}=8$일 때, m의 값은?[3점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

99 부등식 $|a-\log_2 x|\le 1$을 만족시키는 x의 최댓값과 최솟값의 차가 18일 때, 2^a의 값은?[3점]

① 10　② 12
③ 14　④ 16
⑤ 18

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

100 연립방정식 $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \\ 2^{x-2} - 3^{y-1} = -1 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

101 로그방정식 $\left(\log_3 \dfrac{x}{3}\right)^2 - 20\log_9 x + 26 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?[3점]

① 3^8　　② 3^9　　③ 3^{10}
④ 3^{11}　　⑤ 3^{12}

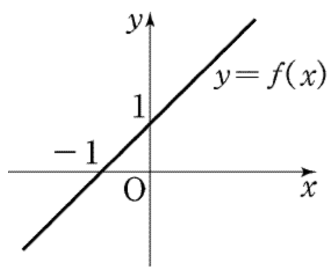
[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

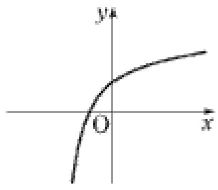
102 함수 $f(x)=2^{-x}$에 대하여 $f(2a)f(b)=4$, $f(a-b)=2$일 때, $2^{3a}+2^{3b}$의 값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점]

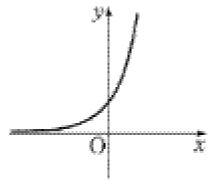
[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

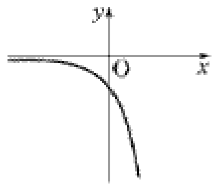
103 아래 그림은 일차함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

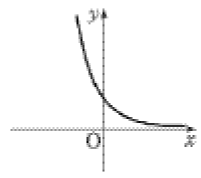
함수 $y=2^{2-f(x)}$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?[3점]

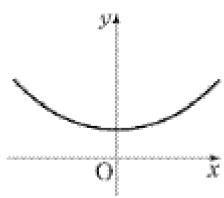


①


②


③


④


⑤


[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

104 [공통]지진의 규모 R와 지진이 일어났을 때 방출되는 에너지 E사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$R=0.67\log(0.37E)+1.46$

지진의 규모가 6.15일 때 방출되는 에너지를 E_1, 지진의 규모가 5.48일 때 방출되는 에너지를 E_2라 할 때, $\dfrac{E_1}{E_2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

105 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 $P_n(n,\ 2^n)$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q_n, R_n이라 하자. 원점 O와 점 $A(0,\ 1)$에 대하여 사각형 AOQ_nP_n의 넓이를 S_n, 삼각형 AP_nR_n의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}$의 값은?[3점]

① 1 ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

106 [공통]두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f^{-1}(5)\cdot\{g(5)+1\}=20$이다. ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

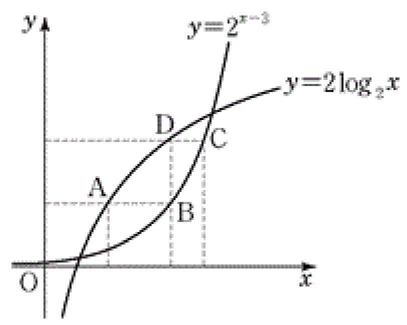
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 모의평가]

107 그림과 같이 곡선 $y=2\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 점 D를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-3}$과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AB}=2$, $\overline{BD}=2$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?[4점]



① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $2+\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

108 자연수 n에 대하여 함수 $y=2^{x+n}$의 그래프가 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 P_n이라 하자. 점 P_n의 x좌표를 a_n, y좌표를 b_n이라 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. ㄴ. 임의의 자연수 $m,\ n$에 대하여 $b_mb_n=b_{m+n}$이다. ㄷ. $2b_n<b_{n+1}$을 만족하는 자연수 n이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 모의평가]

109 [공통]함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 하자.

$m>2$인 자연수 m에 대하여 함수 $y=\log_2|5x|$의 그래프와 함수 $y=\log_2(x+m)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점을 각각 $C(p,\ q)$, $D(r,\ s)$라고 하자.

다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작고 $p<r$이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $p<-\frac{1}{3},\ r>\frac{1}{2}$ ㄴ. 직선 AB의 기울기와 직선 CD의 기울기는 같다. ㄷ. 점 B의 y좌표와 점 C의 y좌표가 같을 때, 삼각형 CAB의 넓이와 삼각형 CBD의 넓이는 같다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 모의평가]

110 [공통]실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03%일 때, 실내 공간에서 공기 중의 초기 이산화탄소 농도 $c(0)(\%)$를 측정한 후, t시간 뒤의 실내 공간의 이산화탄소 농도 $c(t)(\%)$와 환기량 $Q(m^3/\text{시})$의 관계는 다음과 같다.

$$Q=k\times\frac{V}{t}\log\frac{c(0)-0.03}{c(t)-0.03}$$

(단, k는 양의 상수이고, $V(m^3)$는 실내 공간의 부피이다.)

실외 공기 중의 이산화탄소 농도가 0.03%이고 환기량이 일정할 때, 초기 이산화탄소 농도가 0.83%인 빈 교실에서 환기를 시작한 후 1시간 뒤의 이산화탄소 농도를 측정하였더니 0.43%이었다. 환기를 시작한 후 t시간 뒤에 이산화탄소 농도가 0.08%가 되었다. t의 값은?[4점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

111 부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)+\log_{\frac{1}{2}}(x-6)>-1$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?[3점]

① 7　② 10　③ 13
④ 16　⑤ 19

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

112 $1\le\log n<3$인 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$이 정수가 되도록 하는 n의 개수는?[3점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

113 두 함수 $y=2^x,\ y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다.

선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$일 때, 상수 k의 값은?[3점]

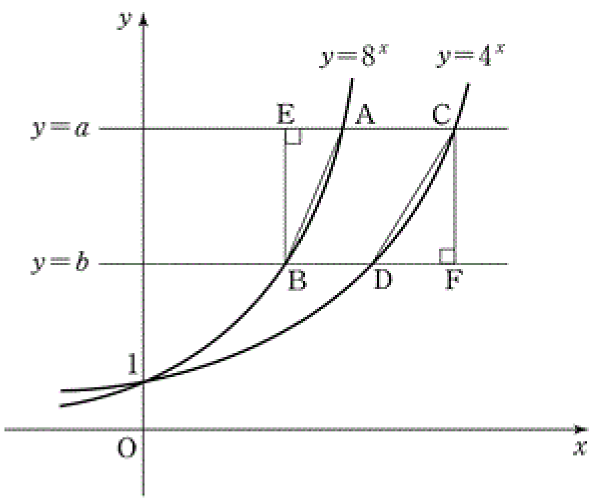
① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

114 [공통]그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자.

삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?(단, $a>b>1$이다.)[3점]



① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

115 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\log_b x$의 그래프와 점 $(9,\ 2)$에서 만날 때, $10a+b$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

116 함수 $f(x)=\log_5 x$이고 $a>0,\ b>0$일 때, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2$
ㄴ. $f(a+1)-f(a)>f(a+2)-f(a+1)$
ㄷ. $f(a)<f(b)$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2006년 9월 모의평가]

117 지수부등식 $2^{x^2}<4\cdot 2^x$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

118 [공통]$a>1$일 때, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 함수 $y=a^{x-1}$의 그래프와 함수 $y=1+\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=-a^x$의 그래프와 함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 만난다.
ㄷ. 함수 $y=ka^x$의 그래프와 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나도록 하는 양의 실수 k가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

119 두 함수 $f(x)=\log x$, $g(x)=10^x$과 실수의 부분집합 C에 대하여 두 집합 A, B를 각각
$A=\{x|f(x)\in C\}$, $B=\{x|g(x)\in C\}$라고 하자.

다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $C=\left\{\frac{1}{10}, 1, 10\right\}$이면 $B=\{-1, 0, 1\}$이다.
ㄴ. 집합 C가 자연수 전체의 집합이면 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀있다.
ㄷ. 집합 C가 공집합이 아니면 $\{g(x)|x\in C=A\}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

120 어느 나라의 기상청에서는 기온이 T(℃)이고 풍속이 v(km/시간)일 때, 체감온도 B(℃)를 다음과 같이 계산하여 발표한다.

$B=14+0.6T+(0.4T-12)v^{0.16}$

기온이 -15℃이고 풍속이 x(km/시간)인 경우, 이 기상청에서 체감온도가 -25℃라고 발표하였을 때, x의 값은?(단, 다음 로그표를 사용하고, 계산은 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.)[4점]

x	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\log x$	0.30	0.34	0.38	0.42	0.45	0.48

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 모의평가]

121 [공통]함수 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, & (0<x<1)\\ \log_4 x, & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여 $f(x)=4$를 만족하는 모든 실수 x의 곱을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

122 함수 $y=5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=25\cdot 5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. 이때, $m+n$의 값은?[3점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

123 세 집합 A, B, C는 다음과 같다.

$A=\left\{x\middle\vert\frac{x^2-2x+4}{x^2-x+1}>0\right\}$
$B=\{x\mid\sqrt{\lvert x\rvert+x}\neq 0\}$
C는 함수 $y=\log\lvert x\rvert$의 정의역

다음 중 옳은 것은?[3점]

① $A\subset B\subset C$
② $B\subset A\subset C$
③ $B\subset C\subset A$
④ $C\subset A\subset B$
⑤ $C\subset B\subset A$

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

124 함수 $f(x)=\log_4 x$일 때 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 양수 x에 대하여 $f\left(\frac{x}{4}\right)=f(x)+1$이다. ㄴ. 수열 $\{f(2^n)\}$은 등차수열이다. ㄷ. $x>1$일 때, $f(f(x))>0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

125 로그부등식 $(\log_2 x)^2-\log_2 x^5+6<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?[3점]

① 6 ② 8 ③ 16
④ 24 ⑤ 32

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

126 두 실수 x, y에 관한 연립방정식 $x^2+y^2=25 \cdots$ ①
$\log_2 x+\log_2 y=(\log_2 xy)^2 \cdots$ ② 의 해의 개수는?[4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2005년 09월 모의평가]

127 집합 $G=\{(x, y)|y=5^x,\ x\text{는 실수}\}$에 대하여 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

[보 기]
ㄱ. $(a, b)\in G$이면 $\left(\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right)\in G$이다. ㄴ. $(-a, b)\in G$이면 $\left(a, \frac{1}{b}\right)\in G$이다. ㄷ. $(2a, b)\in G$이면 $(a, b^2)\in G$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2005년 06월 모의평가]

128 두 실수 x, y에 관한 연립방정식

$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \log_2 x+\log_2 y=(\log_2 xy)^2 \end{cases}$의 해의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 모의평가]

129 [공통]어떤 물질의 시각 t에서의 농도 $M(t)$는 함수 $M(t)=ar^t+24$ (a, r은 양의 상수)로 나타내어진다고 한다. 다음 표는 이 물질의 농도를 1분 간격으로 측정한 것이다.

t	0	1	2	3	…
$M(t)$	124	64	40	30.4	…

이 물질의 농도가 처음으로 24.001 이하가 되는 시각은 n분과 $(n+1)$분 사이이다.

자연수 n의 값을 구하시오.(단, $\log 2$는 0.3010으로 계산한다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

130 로그부등식 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6$의 해가 α, β일 때, $\alpha\beta$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 16
④ 24 ⑤ 32

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

131 함수 $y=5^{2x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=25 \cdot 5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. $m+n$ 의 값은? [3점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

[난이도 : ★★☆] [2004년 6월 모의평가]

132 [공통] x축 위의 점 $A(2, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 세 함수 $y=8^x$, $y=a^x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{AP}, \overline{AQ}, \overline{AR}$가 차례로 등비수열을 이룰 때, a^4의 값을 구하시오.(단, $2<a<8$)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

133 집합 $G=\{(x, y)|y=5^x, x$는 실수 $\}$에 대하여 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $(a, b)\in G$이면 $\left(\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right)\in G$이다.
ㄴ. $(-a, b)\in G$이면 $\left(a, \frac{1}{b}\right)\in G$이다.
ㄷ. $(2a, b)\in G$이면 $(a, b^2)\in G$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

134 [공통]어떤 물질의 시각 t에서의 농도 $M(t)$는 함수 $M(t)=ar^t+24$ (a, r은 양의 상수)로 나타내어진다고 한다.

다음 표는 이 물질의 농도를 1분 간격으로 측정한 것이다.

t	0	1	2	3	$\cdots$
$M(t)$	124	64	40	30.4	$\cdots$

이 물질의 농도가 처음으로 24.001 이하가 되는 시각은 n분과 $(n+1)$분 사이이다. 자연수 n의 값을 구하시오.(단, $\log 2$는 0.3010으로 계산한다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

135 [공통]함수 $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}} x, & (0<x<1)\\ \log_4 x, & (x\ge 1)\end{cases}$ 에 대하여 $f(x)=4$를 만족하는 모든 실수 x의 곱을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

136 정의역이 $\{x|-1<x<1\}$일 때, 함수 $y=\log\frac{2001+x}{1-x}$의 치역은?[4점]

① $\{y|y>1\}$　② $\{y|y>2\}$
③ $\{y|y>3\}$　④ $\{y|y>4\}$
⑤ 실수 전체의 집합

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

137 함수 $f(x)=\log_4 x$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 양수 x에 대하여 $f\left(\frac{x}{4}\right)=f(x)+1$이다.
ㄴ. 수열 $\{(f(2^n))\}$은 등차수열이다.
ㄷ. $x>1$일 때, $f(f(x))>0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

138 어떤 용액의 수소 이온 농도를 $[H^+]$라 할 때, 이 용액의 산성도를 나타내는 pH는 $pH=-\log[H^+]$로 정의된다. 사탕 한 개를 먹은 직후 채취한 타액의 pH는 6.6이었다. 10분 후 채취한 타액의 수소 이온 농도가 처음 채취한 타액의 50배이었다면, 이때의 pH는?(단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)[4점]

① 3.7　② 4.0　③ 4.3
④ 4.6　⑤ 4.9

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

139 두 실수 x, y에 관한 연립방정식

$\begin{cases} x^2+y^2=25, \ \dots CL11 \\ \log_2 x+\log_2 y=(\log_2 xy)^2, \ \dots CL12 \end{cases}$의 해의 개수는?[4점]`

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

140 부등식 $\log_2(x-2)<2$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

141 닫힌 구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{1}{32}$　② $\frac{1}{16}$　③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

142 방정식 $\log_3(x+2)=3$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

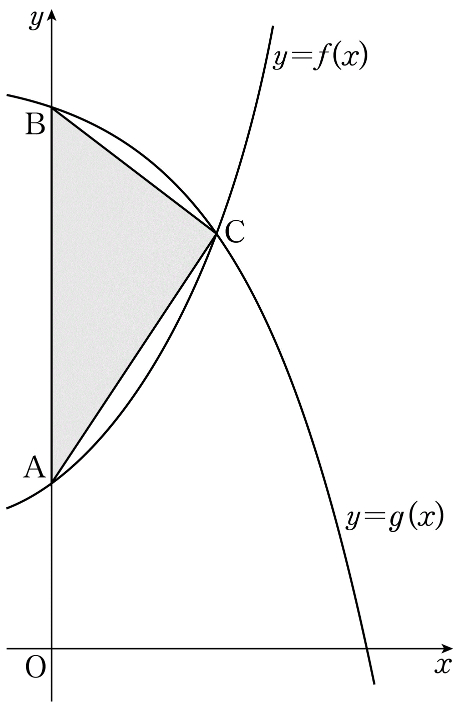
[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

143 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 곱은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

144 그림과 같이 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=-2^{x-1}+7$의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는? [3점]



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

145 최대 충전 용량이 Q_0 $(Q_0>0)$인 어떤 배터리를 완전히 방전시킨 후 t시간 동안 충전한 배터리의 충전 용량을 $Q(t)$라 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

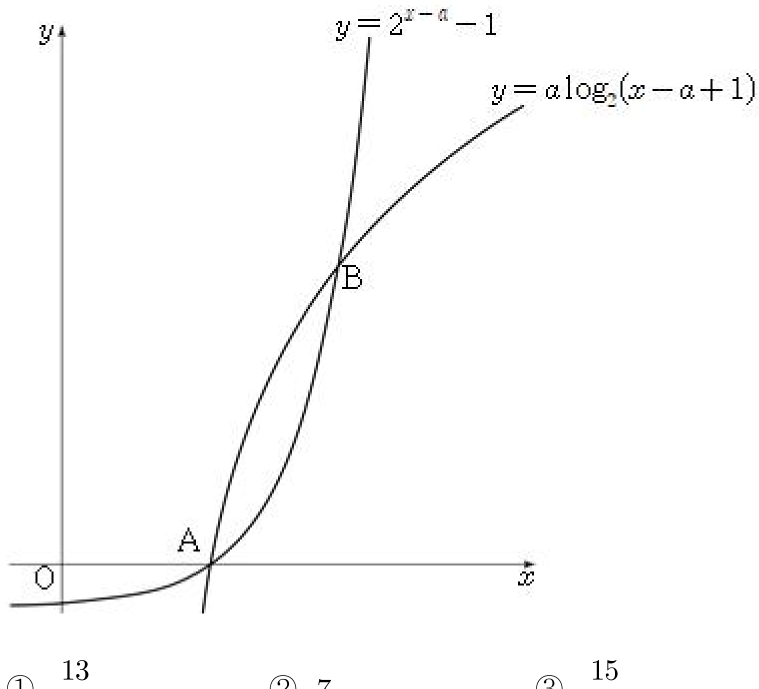
$Q(t)=Q_0\left(1-2^{-\frac{t}{a}}\right)$ (단, a는 양의 상수이다.)

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$일 때, a의 값은? (단, 배터리의 충전 용량의 단위는 mAh이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

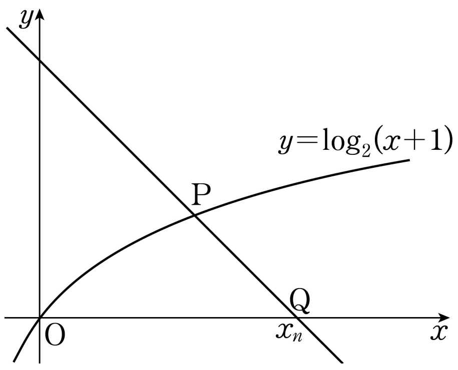
146 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$과 $y=2^{x-a}-1$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가 x축 위에 있고 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$일 때, 선분 AB의 중점은 $M(p,\ q)$이다. $p+q$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$
④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

147 그림과 같이 제1사분면에 있는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{PQ}=\sqrt{2}n$이 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} x_k$의 값은? [4점]



① 72 ② 84 ③ 96
④ 108 ⑤ 120

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

148 방정식 $2^{\frac{1}{8}x-1}=16$의 해를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

149 좌표평면에서 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4 x$가 직선 $x=16$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

두 점 P, Q 사이의 거리는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

150 자연수 n에 대하여 $f(n)=\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\left(\frac{1}{9}\right)^r$일 때, $\log f(n)>1$을 만족시키는 n의 최솟값은?(단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)[3점]

① 18 ② 22 ③ 26
④ 30 ⑤ 34

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

151 두 곡선 $y=2^x$, $y=-4^{x-2}$이 y축과 평행한 한 직선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자.

$\overline{OA}=\overline{OB}$일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

152 두 함수 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\frac{\ln 1}{x}$의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보 기]
ㄱ.점 P의 좌표는 $(1, 0)$이다. ㄴ.두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다. ㄷ.$t>1$일 때, $-1<\frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

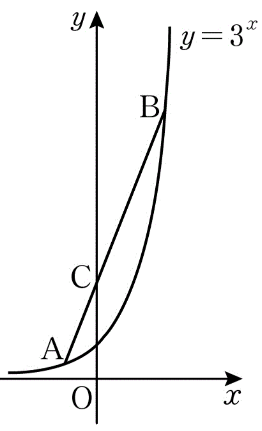
[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

153 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=a\times 2^x$의 그래프가두 점 $(0,\ 4)$, $(b,\ 16)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

154 지수함수 $y=3^x$의 그래프 위의 한 점 A의 y좌표가 $\frac{1}{3}$이다. 이 그래프 위의 한 점 B에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 C가 y축 위에 있을 때, 점 B의 y좌표는? [3점]



① 3 ② $3\sqrt[3]{3}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $3\sqrt[3]{9}$ ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

155 방정식 $(\log_3 x)^2+4\log_9 x-3=0$의 모든 실근의 곱은? [3점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{7}{9}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

156 함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로b만큼 평행이동시킨 그래프가 두 점 $(4,\ b)$, $(13,\ 11)$을 지날 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

157 지수부등식 $(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

158 모든 항이 양의 실수인 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=k$, $a_n a_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^2+ka_n\ (n\geq 1)$을 만족시키고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$일 때, 실수 k의 값은?(단, $0<k<1$)[3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

159 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 함수 $y=a\times 2^x$의 그래프가 두 점 $(0, 4)$, $(b, 16)$을 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

160 지수부등식 $4^x-10\cdot 2^x+16\le 0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

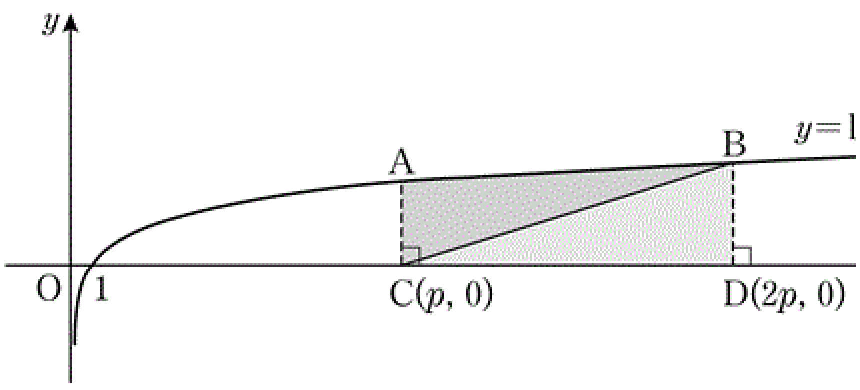
① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

161 지수방정식 $4^x+2^{x+3}-128=0$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

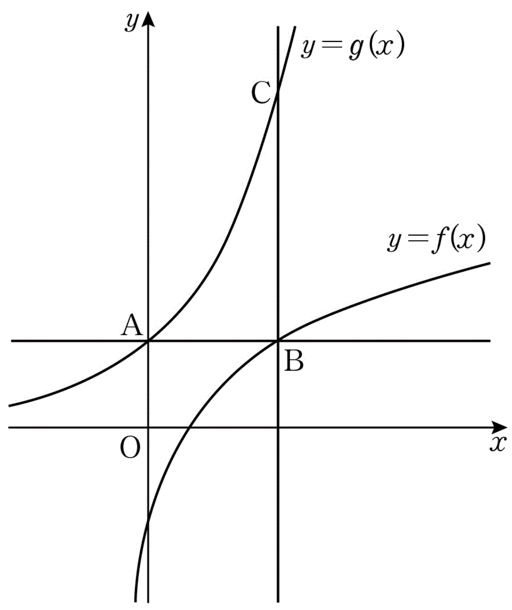
162 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $C(p, 0)$, $D(2p, 0)$이라 하자. 삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 넓이의 차가 8일 때, 실수 p의 값은?(단, $p>1$)[3점]



① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

163 그림과 같이 함수 $f(x)=\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$의 그래프와 함수 $g(x)=a^x\,(a>1)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=g(x)$가 y축과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 C라 하자.



삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{21}{4}$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

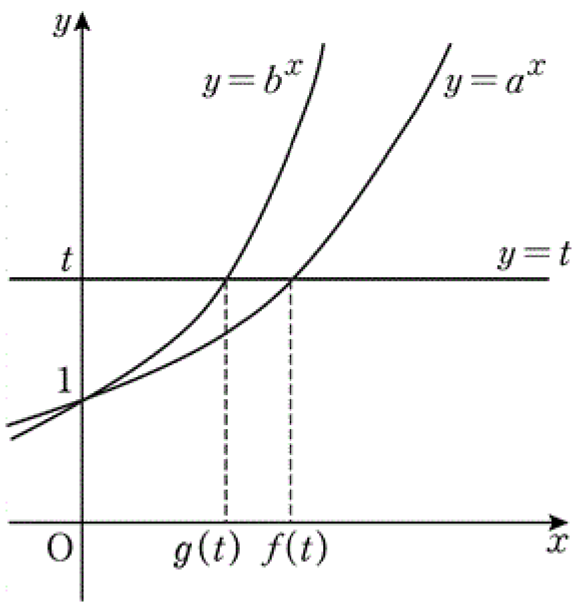
[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

164 지수부등식 $(2^x-32)\left(\frac{1}{3^x}-27\right)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

165 (공통)그림과 같이 두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x\,(1<a<b)$가 직선 $y=t\,(t>1)$과 만나는 점의 x좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $2f(a)=3g(a)$가 성립한다. $f(c)=g(27)$을 만족시키는 실수 c의 값은? [4점]



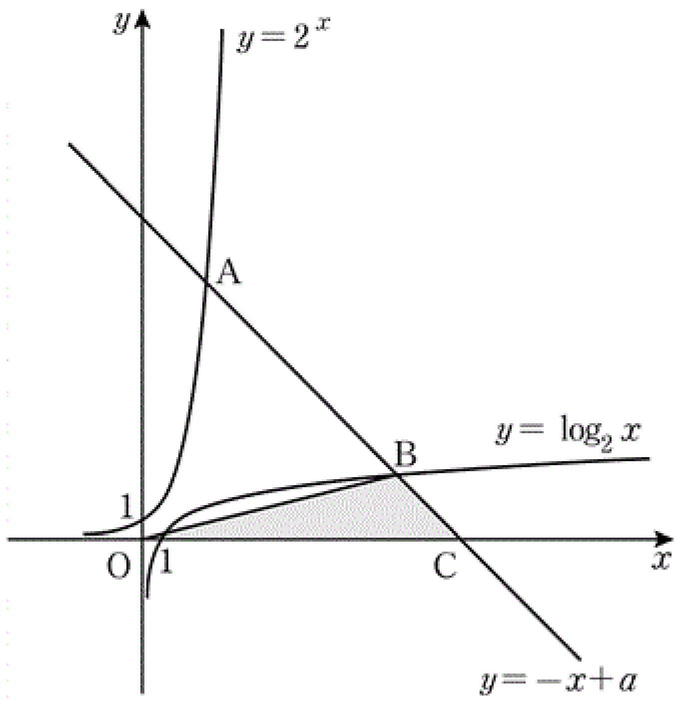
① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

166 그림과 같이 직선 $y=-x+a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 할 때, 점 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$
> (나)삼각형 OBC의 넓이는 40이다.

점 A의 좌표를 $A(p,q)$라 할 때, $p+q$의 값은?(단, O는 원점이고, a는 상수이다.)[4점]



① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

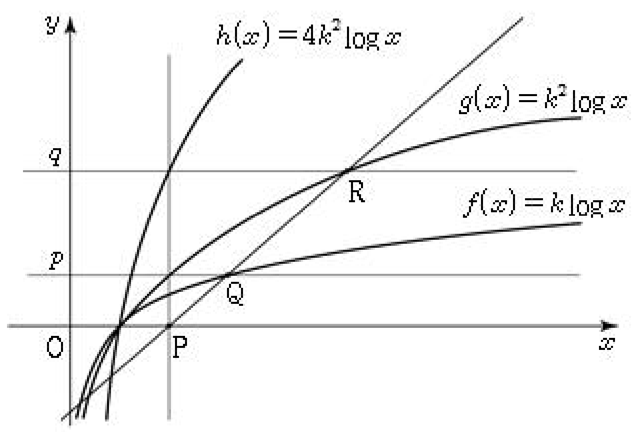
167 그림과 같이 세 로그함수 $f(x)=k\log x$, $g(x)=k^2\log x$, $h(x)=4k^2\log x$의 그래프가 있다.

점 $P(2,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점의 y좌표를 각각 p, q라 하자.

직선 $y=p$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 $Q(a,\ p)$,

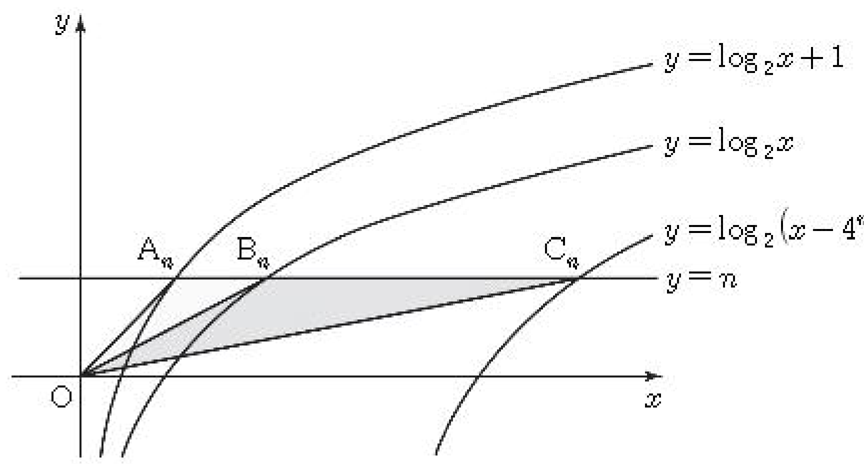
직선 $y=q$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 $R(b,\ q)$라 하자.

세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있을 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, $k>1$) [4점]



[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

168 자연수 n에 대하여 그림과 같이 세 곡선 $y=\log_2 x+1$, $y=\log_2 x$, $y=\log_2(x-4^n)$이 직선 $y=n$과 만나는 세 점을각각 A_n, B_n, C_n이라 하자. 두 삼각형 A_nOB_n, B_nOC_n의 넓이를각각 S_n, T_n이라 할 때, $\dfrac{T_n}{S_n}=64$를 만족시키는 n의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

169 방정식 $9^x=27^{2x-4}$을 만족시키는 실수 x의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

170 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=10$, $a_4-a_2=4$일 때, a_8의 값은? [3점]

① 18　② 20　③ 22
④ 24　⑤ 26

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

171 부등식 $\left(2^x-\frac{1}{4}\right)(2^x-1)<0$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

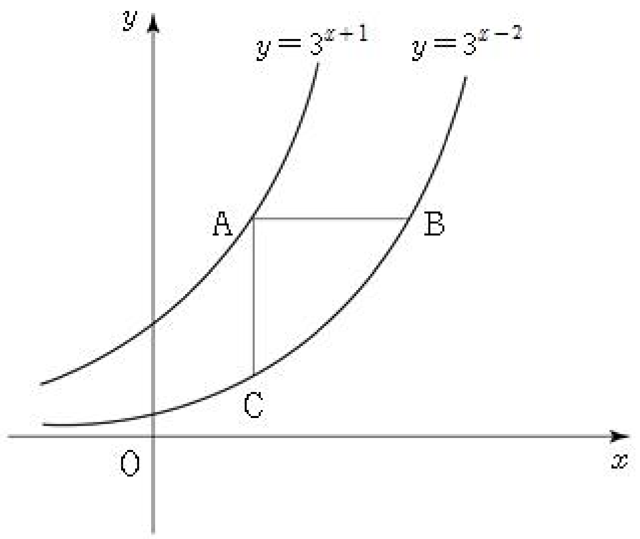
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

172 방정식 $\log_2 x=1+\log_2(x-6)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

173 그림과 같이 함수 $y=3^{x+1}$의 그래프 위의 한 점 A와 함수 $y=3^{x-2}$의 그래프 위의 두 점 B, C에 대하여 선분 AB는 x축에 평행하고 선분 AC는 y축에 평행하다. $\overline{AB}=\overline{AC}$가 될 때, 점 A의 y좌표는?(단, 점 A는 제1사분면 위에 있다.)[3점]



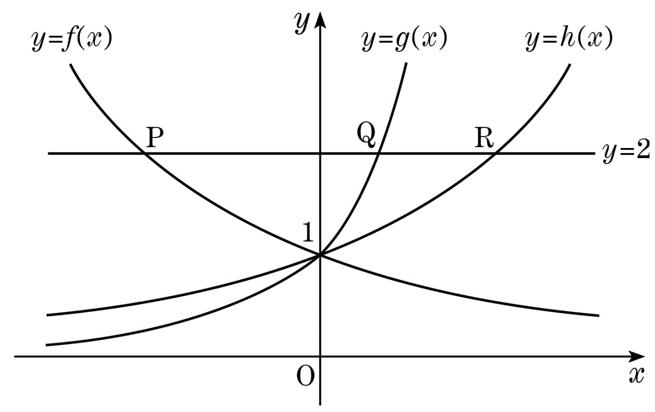
① $\frac{81}{26}$ ② $\frac{44}{13}$ ③ $\frac{95}{26}$
④ $\frac{101}{26}$ ⑤ $\frac{54}{13}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

174 세 지수함수

$f(x)=a^{-x}$, $g(x)=b^x$, $h(x)=a^x\ (1<a<b)$

에 대하여 직선 $y=2$가 세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. $\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$이고 $h(2)=2$일 때, $g(4)$의 값은? [3점]



① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32
④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 64

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

175 함수 $f(x)=x^2-x-4$에 대하여 부등식

$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$

을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 4월 학력평가]

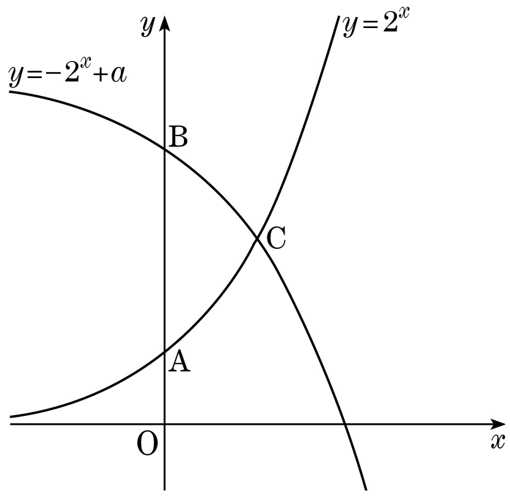
176 x에 대한 부등식

$2^{2x+1}-(2n+1)2^x+n\le 0$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 7일 때, 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

177 2보다 큰 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+a$가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선의 교점을 C라 하자.



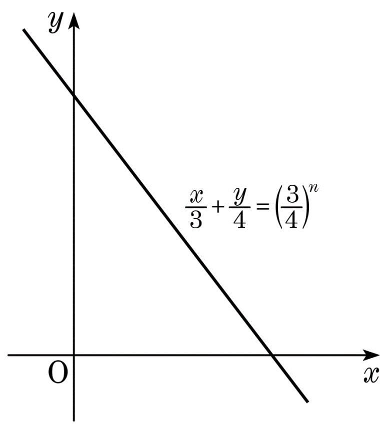
$a=6$일 때, 삼각형 ACB의 넓이는? [3점]

① $2\log_2 3$　② $\frac{5}{2}\log_2 3$　③ $3\log_2 3$　④ $\frac{7}{2}\log_2 3$　⑤ $4\log_2 3$

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

178 자연수 n에 대하여 좌표평면에서 직선

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 을 l_n이라 하자.



직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은?

(단, $\log 2=0.30$, $\log 3=0.48$로 계산한다.)[4점]

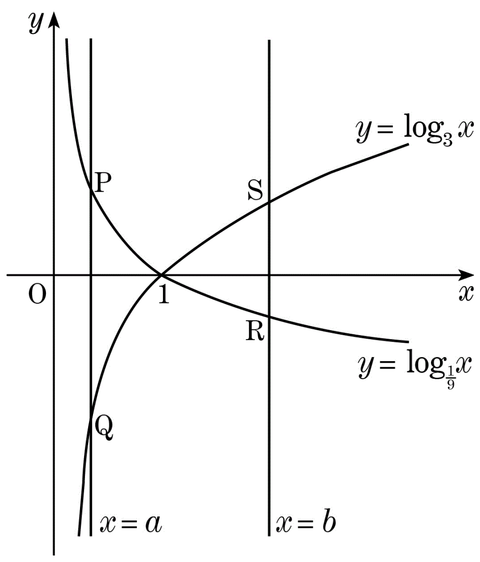
① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

179 좌표평면에서 직선 $x=a\,(0<a<1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}}x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 직선 $x=b\,(b>1)$가 두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{9}}x$, $y=\log_3 x$와 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 네 점 P, Q, R, S는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{PQ}:\overline{SR}=2:1$
(나)선분 PR의 중점의 x좌표는 $\frac{9}{8}$이다.

두 상수 a, b에 대하여 $40(b-a)$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★☆☆] [2012년 9월 학력평가]

180 지수방정식 $4^x-3\cdot 2^{x+2}+32=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★☆☆] [2012년 7월 학력평가]

181 [공통]지수부등식 $3^{x^2}<9\cdot 3^x$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? [2점][2012년 7월]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2012년 9월 학력평가]

182 지수방정식 $(2^x-2)(2^x+2)=4$의 해는? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

183 지수방정식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=\sqrt[3]{4}$의 해는? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

184 로그부등식 $\log_2(x-1)\le 3$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 5 ③ 8
④ 11 ⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

185 방정식 $\log_2(2x-5)=2\log_2 3$의 해를 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

186 지수부등식 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+6} \le 27^{2-x}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은? [3점]

① 6 ② 10 ③ 15
④ 21 ⑤ 28

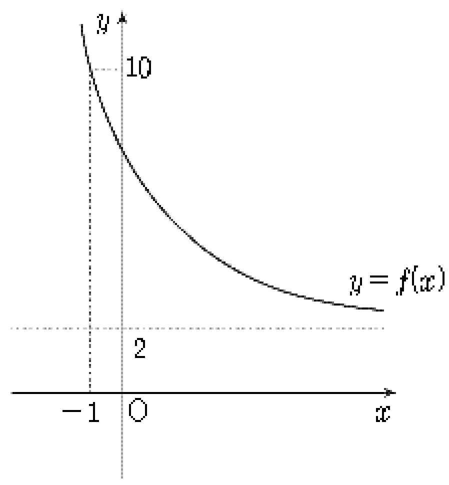
[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

187 로그부등식 $\log_{\frac{1}{6}}(x-8)+\log_{\frac{1}{6}}(x-3)>-2$를 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2012년 4월 학력평가]

188 [공통] 점근선의 방정식이 $y=2$인 지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-1, 10)$을 지날 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

189 지수방정식 $5^{2x}-5^{x+1}+k=0$이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

190 방정식 $x^{\log x}=\left(\frac{x}{10}\right)^4$의 실근을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

191 정의역이 $\{x|-1 \le x \le 2\}$인 함수 $y=9^x-2 \cdot 3^{x+1}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은? [3점]

① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

192 연립부등식 $\begin{cases} 2^{x+1} \ge 16 \\ \log_3(x-1) \le 2 \end{cases}$를 만족시키는 모든 정수 x 의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

193 로그방정식 $\log_2(x-3)=\log_4(5x-9)$의 근을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

194 로그함수 $y=\log_7(x+a)$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

195 지수방정식 $3^{2x+2}-10 \cdot 3^x=-1$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? [3점]

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

196 함수 $y=\log_3\left(\frac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 것이라 할 때, $10(m+n)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

197 로그방정식 $(\log_3 x)\left(\log_3\frac{x}{2}\right)-\left(\log_3\frac{81}{2}\right)(\log_3 x)+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

198 지수방정식 $3^{2x}-k \cdot 3^x+4=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

199 부등식 $3 \le [\log_3 n] \le 4$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수는?

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점]

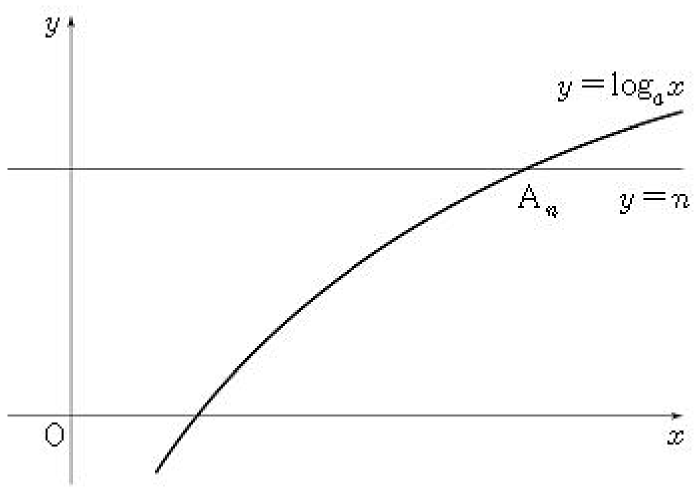
① 186 ② 196 ③ 206
④ 216 ⑤ 226

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

200 지수방정식 $a^{2x} - 9a^x + 8 = 0$ 의 두 실근의 합이 2일 때, a^2 의 값을 구하시오.(단, a 는 1이 아닌 양수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

201 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 직선 $y=n$ 과 곡선 $y=\log_a x$ ($a>1$ 인 상수)의 교점을 점 A_n 이라 할 때,



$a=3$ 일 때, 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자.

S_5 의 값은? [3점]

① 361 ② 363 ③ 365
④ 367 ⑤ 369

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

202 지수부등식 $3^{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{5x}$ 을 만족시키는 자연수 x 의 최솟값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

203 [공통] 로그방정식 $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은? [3점]

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

204 로그방정식 $(\log_4 x)^2 + \log_4 \frac{1}{x^3} - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값은? [3점]

① 8 ② 16 ③ 32
④ 64 ⑤ 128

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

205 연립방정식 $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 7 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = -1 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta$ 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

206 [공통] 어느 도시의 인구가 P_0명에서 P명이 될 때까지 걸리는 시간 T(년)은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$T=C\frac{\log P(K-P_0)}{P_0(K-P)}$$

(단, C는 상수, K는 최대 인구 수용 능력이다.)

이 도시의 최대 인구 수용 능력이 30만 명이고, 인구가 6만 명에서 10만 명이 될 때까지 10년이 걸렸다고 한다.

인구가 처음으로 15만 명 이상이 되는 것은 인구가 6만 명일 때부터 몇 년 후인가? [3점]

① 18년 후 ② 20년 후 ③ 22년 후
④ 24년 후 ⑤ 26년 후

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

207 [공통] 좌표평면에서 지수함수 $y=a\cdot 3^x\,(a\neq 0)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\,-6)$을 지난다. 이때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

208 함수 $y=10^x$의 그래프 위에 x좌표가 정수인 두 점 A, B가 있다.

두 점 A, B의 y좌표를 각각 a, b라 하자.

$(\log a)(\log b)+\log a+\log b=1$을 만족시키는 a, b에 대하여 ab의 최댓값은? [3점]

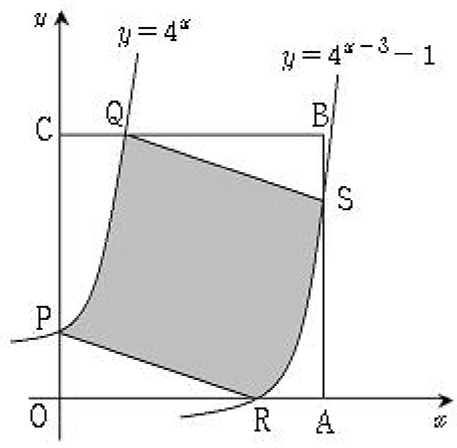
① 10^{-5} ② 10^{-1} ③ 10
④ 10^{3} ⑤ 10^{5}

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

209 [공통] 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 $O(0,\,0)$, $A(4,\,0)$, $B(4,\,4)$, $C(0,\,4)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OABC$가 있다.

곡선 $y=4^x$이 변 OC, 변 BC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=4^{x-3}-1$이 변 OA, 변 AB와 만나는 점을 각각 R, S라 하자.

두 곡선 $\begin{cases} y=4^x \\ y=4^{x-3}-1 \end{cases}$과 두 선분 PR, QS로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]



[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

210 [공통]식품의 부패 정도를 수치화한 식품손상지수 G와 상대습도 $H(\%)$, 기온 $T(℃)$사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$G=\frac{H-65}{14}\times(1.05)^T$$

상대습도가 80%, 기온이 35℃일 때의 식품손상지수를 G_1, 상대습도가 70%, 기온이 20℃일 때의 식품손상지수를 G_2라 할 때, $\frac{G_1}{G_2}$의 값은?

(단, $1.05^{15}=2$로 계산.)[3점][2012년 7월]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

211 일정한 온도에서 어느 기체의 부피 V와 압력 P 사이에는

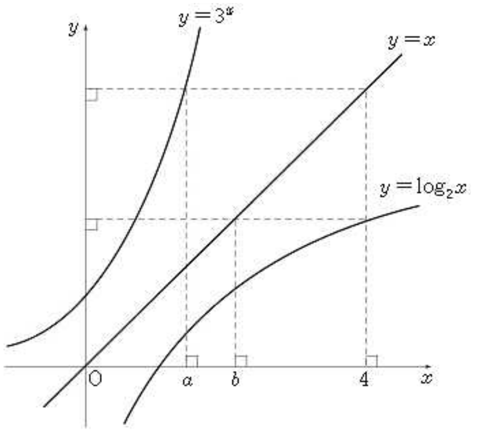
$\log V = C - \frac{2}{3}\log P$ (C는 상수)인 관계가 성립한다고 한다.

일정한 온도에서 이 기체의 압력이 처음 압력의 k배가 되면 부피는 처음 부피의 4배가 된다고 할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{7}$
④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{9}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

212 그림은 세 함수 $y=3^x$, $y=\log_2 x$, $y=x$의 그래프와 x축 위의 세 점의 x좌표 $a, b, 4$를 나타낸 것이다. $a+b$의 값은? [3점]



① $2+\log_3 2$　② $1+3\log_3 2$　③ $2+2\log_3 2$
④ $4-\log_3 2$　⑤ $3+\log_3 2$

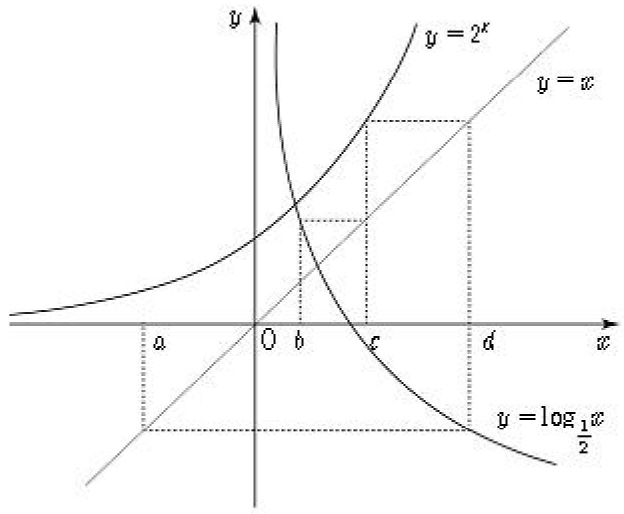
[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

213 이차부등식 $x^2-2^{a+1}x+9\cdot 2^a \ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

214 그림은 세 함수 $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=x$의 그래프와 $a<0<b<c<d$인 네 실수 a, b, c, d의 관계를 나타낸 것이다.

(단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, x축, 그리고 직선 $x=d$로 둘러싸인 영역의 넓이를 S라 하고 곡선 $y=2^x$, x축, y축, 그리고 직선 $x=c$로 둘러싸인 영역의 넓이를 T라 하자. $a=-3$일 때, $S+T$의 값은? [3점]

① 16　② 18　③ 20
④ 22　⑤ 24

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

215 [공통] 전기 집진 장치는 고압 직류의 전원을 사용하여, 고압 직류 전압을 방전극(-)과 집진극(+)에 보내어 적당한 불평등 전기장을 이루게 함으로써 가스 중의 먼지에 전하를 주어 집진극(+)으로 이동하여 부착된 먼지를 탈진시켜 포집하는 장치이다.

어떤 종류의 전기 집진기는 먼지 입자의 이동 속도 $W(m/s)$와 유량 $Q(m^3/s)$가 일정하고, $k=\frac{Q}{W}$ 이다. 집진극의 넓이 $S(m^2)$와 효율 $\eta(\%)$사이에는 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$S=k\log_a\left(1-\frac{\eta}{100}\right)$(단, a, k는 상수이다.)

위와 같은 종류의 두 전기 집진기 A, B에서 전기 집진기 A의 집진극의 넓이는 전기 집진기 B의 집진극의 넓이의 2 배이다. 전기 집진기 B의 효율이 80%일 때, 전기 집진기 A의 효율$(\%)$은? [3점]

① 90 ② 92 ③ 94
④ 96 ⑤ 98

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

216 연기 속을 투과하는 빛의 양을 측정하여 연기의 농도를 표시하는 연기감광계수 C는 광원으로부터 측정기계까지의 거리를 L, 연기가 없을 때 광원으로부터 측정기계까지 도착한 빛의 세기를 I_0, 연기가 있을 때 광원으로부터 측정기계까지 도달하는 빛의 세기를 I라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$C=\frac{1}{L}\log_k\frac{I_0}{I}$ ($k>1$인 상수)

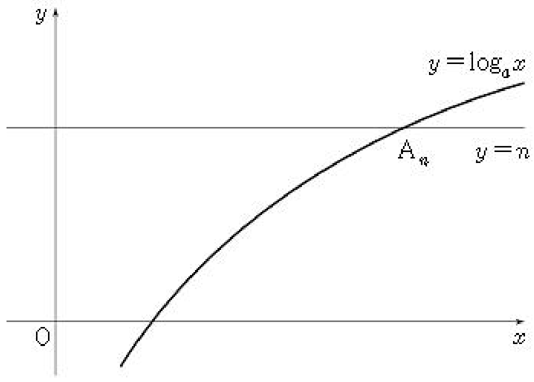
$L=5$, $I=\frac{1}{4}I_0$일 때의 연기감광계수를 C_1이라 하고,

$L=10$, $I=\frac{1}{2}I_0$일 때의 연기감광계수를 C_2라 할 때, C_1은 C_2의 a배이다. 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

217 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 곡선 $y=\log_a x$($a>1$인 상수)의 교점을 점 A_n이라 할 때,



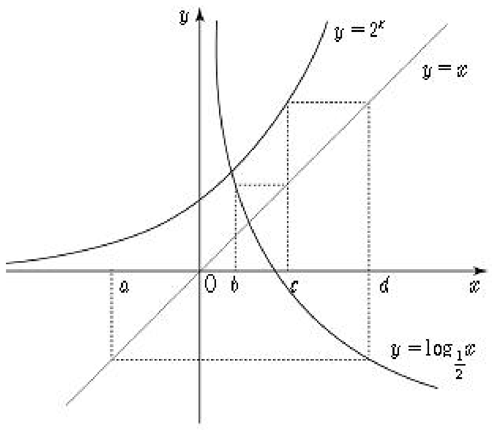
$a=2$일 때, 점 A_n의 좌표를 (t_n, n)이라 하자.

x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} t_n^2, & -12 \\ t_n, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -32x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0, y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

218 그림은 세 함수 $y=2^x$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$, $y=x$의 그래프와 $a<0<b<c<d$인 네 실수 a, b, c, d의 관계를 나타낸 것이다.(단, 점선은 모두 좌표축에 평행하다.)



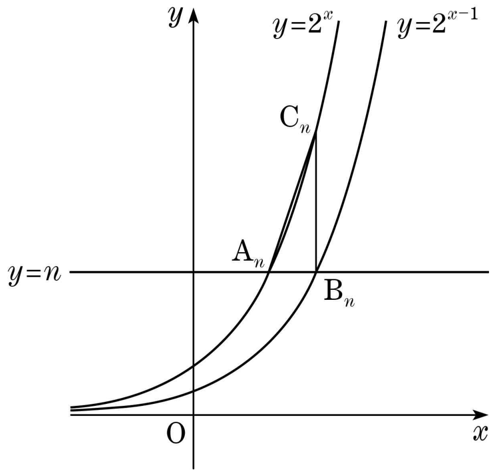
세 수 $b, 2c, 5d$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a의 값은?[3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ -1

④ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　⑤ $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

219 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-1}$과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 또, 점 B_n을 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C_n이라 하자.



$n=3$일 때, 직선 A_nC_n의 기울기는? [3점]

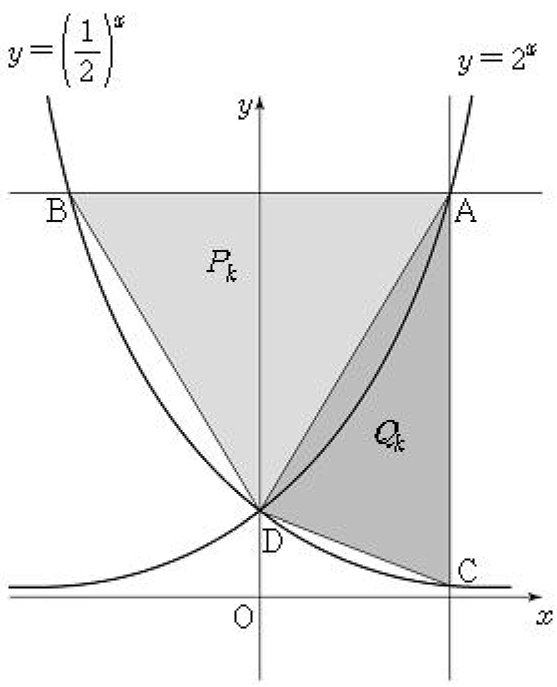
① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3

④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

220 그림과 같이 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점 $A(k,\ 2^k)$을 지나고 x축, y축과 각각 평행한 두 직선이 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하고, 점 D의 좌표를 $(0,\ 1)$이라 하자.

삼각형 ABD, 삼각형 ADC의 넓이를 각각 P_k, Q_k라 할 때, $P_k=\frac{3}{2}Q_k$를 만족시키는 상수 k의 값은?(단, $k>0$)[3점]



① $\log_2 3$　② 2　③ $\log_2 5$
④ $\log_2 6$　⑤ $\log_2 7$

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

221 이차부등식 $x^2-2(3^a+1)x+10(3^a+1)\geq 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

222 평행한 두 전선에 교류 전류가 흐르면 각 전선에 전류의 흐름을 방해하는 기전력이 발생하고, 이 기전력의 크기를 결정하는 값을 인덕턴스라고 한다.

평행한 두 전선 사이의 거리가 $D(m)$, 평행한 두 전선의 반지름이 모두 $r(m)$일 때, 인덕턴스 $L(\mu H/m)$는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$L=0.46\frac{\log\{D\}}{r}+0.05$$

평행하고 반지름이 같은 두 전선 사이의 거리가 $K(m)$일 때의 인덕턴스는 L_1이고, 이 두 전선 사이의 거리가 $8K(m)$일 때의 인덕턴스는 L_2이다.

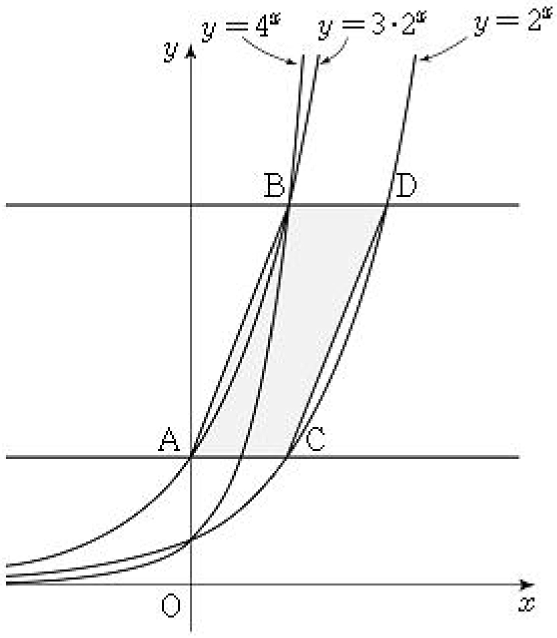
이때, L_2-L_1의 값은?(단, $\log 2=0.30$으로 계산한다.)[3점]

① 0.114　② 0.214　③ 0.314
④ 0.414　⑤ 0.514

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

223 그림과 같이 함수 $y=3\cdot2^x$의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 함수 $y=4^x$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자.

점 A를 지나고 x축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 $ACDB$의 넓이는? [4점]

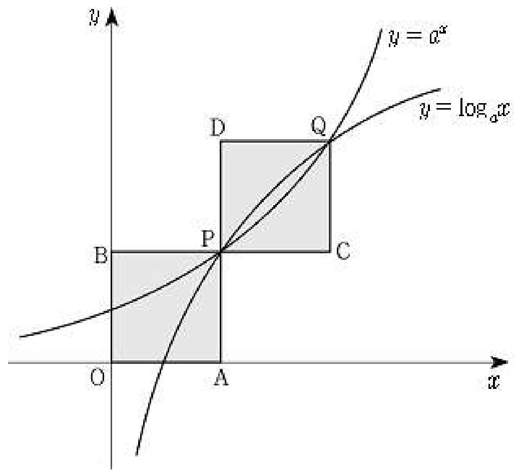


① $3\log_2 3$ ② $4\log_2 3$ ③ $5\log_2 3$
④ $6\log_2 3$ ⑤ $7\log_2 3$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

224 [공통] 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.

점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 $OAPB$와 $PCQD$는 합동이다. a의 값은?(단, O는 원점이다.)[4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

225 지수방정식 $3^{2x}-k\cdot3^{x+1}+3k+15=0$의 두 실근의 비가 $1:2$일 때, 실수 k의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

226 함수 $f(x)=\log_2 x+1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 $1, 2$ 이다.
ㄴ. $1<\alpha<2<\beta$ 이면 $\{f(\alpha)-g(\alpha)\}\{f(\beta)-g(\beta)\}<0$ 이다.
ㄷ. 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_2-x_1 \le g(x_2)-g(x_1)$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

227 두 함수 $f(x), g(x)$를

$f(x)=x^2-6x+3,\ g(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$이라 하자.

$1\le x\le 4$에서 함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값은 27, 최솟값은 m이다. m의 값은? [4점]

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ 3 ⑤ $3\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

228 방정식 $4^x+4^y=2$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 2^x+2^{y+1}의 최댓값은? [4점]

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

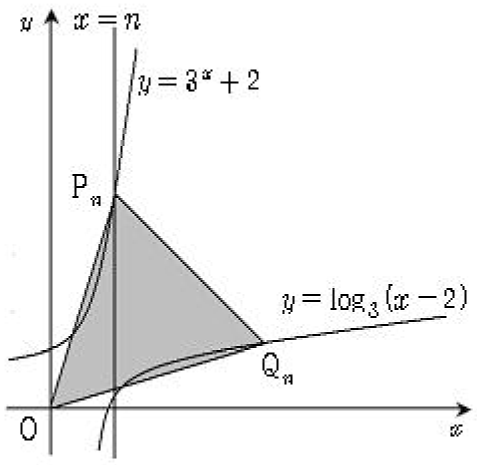
[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

229 로그부등식 $\log_2 30<\log_2(7-x)+\log_2(y-5)<5$를 만족시키는 자연수 x, y에 대하여 $x+y$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

230 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$과 곡선 $y=3^x+2$가 만나는 점을 P_n이라 하고, 점 P_n을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_3(x-2)$와 만나는 점을 Q_n이라 하자.

삼각형 P_nOQ_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2S_n+n^2}{9^{n-2}}$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]

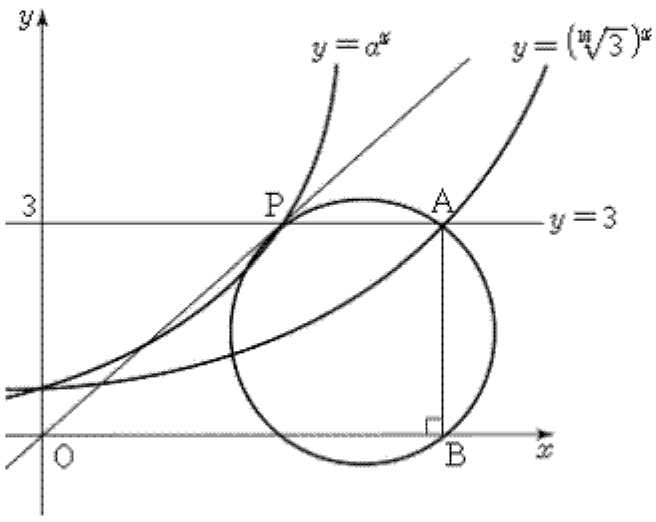


[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

231 그림과 같이 지수함수 $y=(\sqrt[10]{3})^x$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자.

두 점 A, B를 지나는 원이 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=3$의 교점 P에서 직선 OP와 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

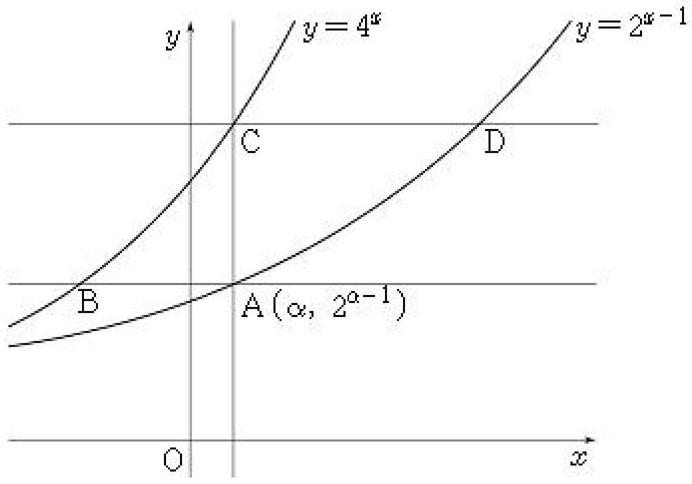
(단, $a>\sqrt[10]{3}$)[4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

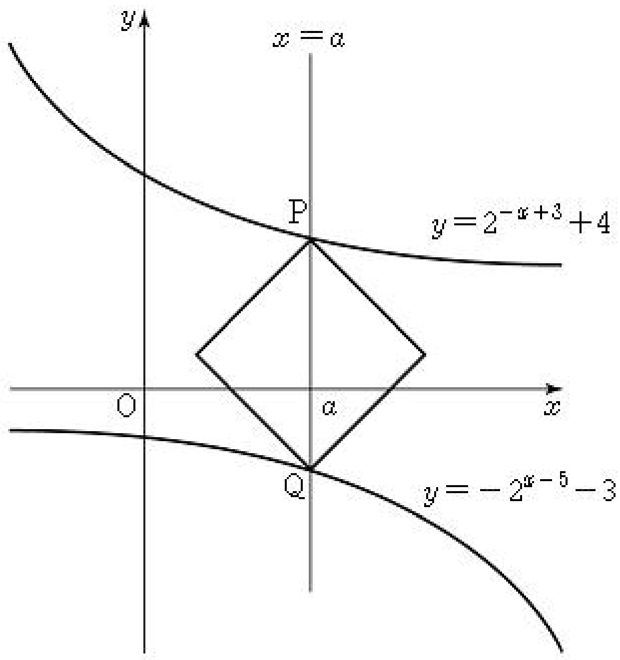
232 그림과 같이 함수 $y=2^{x-1}$의 그래프 위의 점 $A(\alpha, 2^{\alpha-1})$을 지나고 x축, y축과 각각 평행한 직선이 함수 $y=4^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 함수 $y=2^{x-1}$의 그래프와 만나는 점을 D라 할 때, 두 점 B, D의 x좌표를 각각 β, γ라 하자. α, β, γ가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\alpha=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, $\alpha>0$, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

233 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$, $y=-2^{x-5}-3$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ⑤ 48

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

234 이차 함수 $f(x)=x^2+1$과 두 실수 x_1, x_2에 대하여 다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]

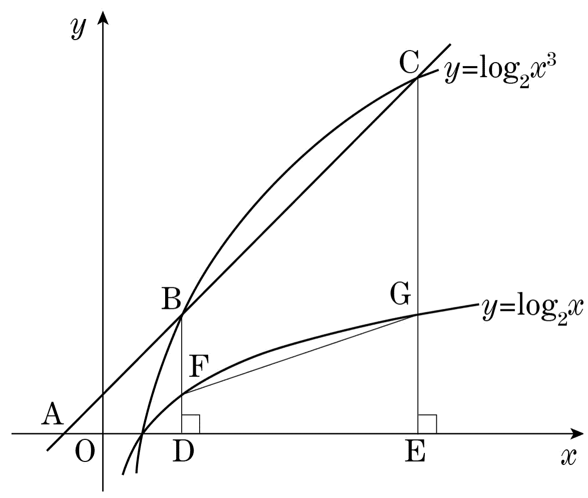
ㄱ. $0<x_1<x_2$이면 $2^{f(x_1)}<2^{f(x_2)}$이다.
ㄴ. $x_1<x_2<0$이면 $\log_2 f(x_1)>\log_2 f(x_2)$이다.
ㄷ. $x_1<0<x_2$이면 $\log_{\frac{1}{2}} f(x_1)<\log_{\frac{1}{2}} f(x_2)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

235 [공통]그림과 같이 x축 위의 한 점 A를 지나는 직선이 곡선 $y=\log_2 x^3$과 서로 다른 두 점 B, C에서 만나고 있다. 두 점 B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 두 선분 BD, CE가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 F, G라 하자.

$\overline{AB}:\overline{BC}=1:2$이고, 삼각형 ADB의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 사각형 $BFGC$의 넓이를 구하시오.(단, 점 A의 x좌표는 0보다 작다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

236 기온이 T(℃)에서 대기 중의 물에 대한 포화수증기압 $P(hPa)$은

$P=6.11\times 10^{\frac{7.5T}{280+T}}$을 만족시킨다고 한다.

기온이 20(℃)에서 대기 중의 물에 대한 포화수증기압은 $K(hPa)$이다.

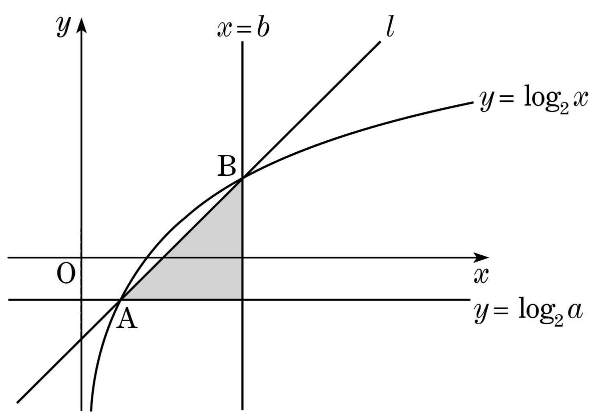
기온이 x(℃)에서 대기 중의 물에 대한 포화 수증기압이 $\frac{K}{10}(hPa)$일 때, x의 값은? [4점]

① -17.5 ② -15 ③ -12.5
④ -10 ⑤ -7.5

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

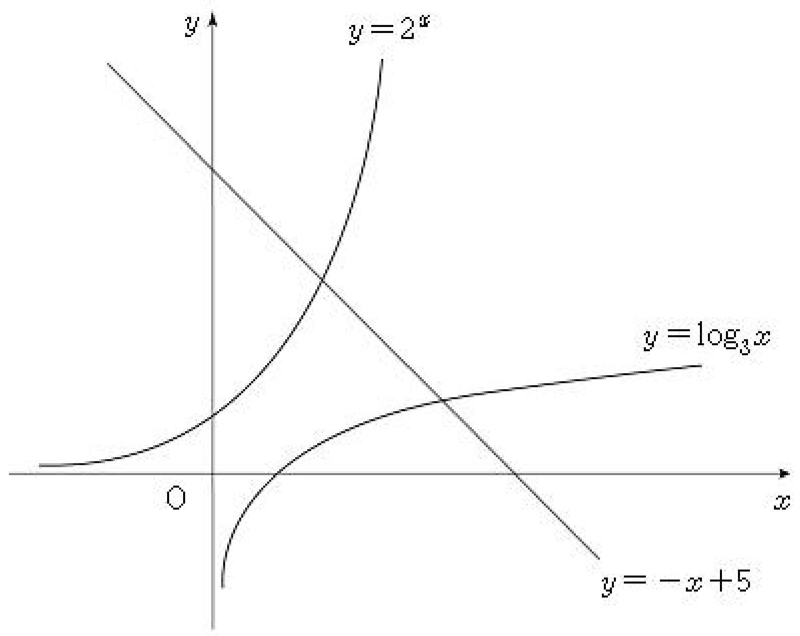
237 그림과 같이 기울기가 1인 직선 l이 곡선 $y=\log_2 x$와 서로 다른 두 점 $A(a, \log_2 a)$, $B(b, \log_2 b)$에서 만난다.

직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 2일 때, $a+b$의 값은?(단, $0<a<b$이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

238 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점을 각각 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점][2012년 7월]



[보기]
ㄱ. $a_1 > b_2$
ㄴ. $a_1+a_2=b_1+b_2$
ㄷ. $\frac{a_1}{a_2}<\frac{b_2}{b_1}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

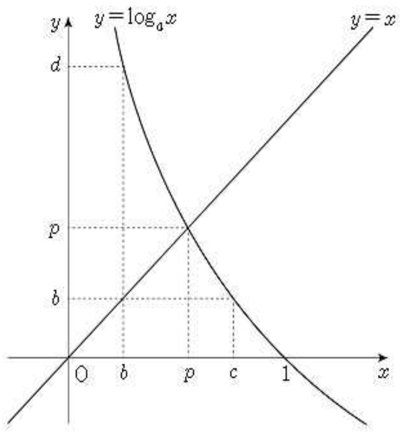
239 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제 1사분면에서 만나도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.

(단, 좌표축은 어느 사분면에도 속하지 않는다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

240 그림과 같이 $0 < a < 1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y = \log_a x$가 두 점 (b, d), (c, b)를 지나고, 직선 $y = x$와 점 (p, p)에서 만날 때, 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르시오.

(단, $0 < b < p < c < 1$) [4점]



[보기]
ㄱ. $p = \frac{1}{2}$ 이면 $a = \frac{1}{4}$ 이다.
ㄴ. $a^{b+d} = bc$
ㄷ. $\frac{p-b}{p-a^c} < \frac{c-b}{c-a^c}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

241 다음은 $10 \le x < 10^7$ 일 때, 방정식

$(\log x)^2 - [(\log x)^2] = (\log x - [\log x])^2 \cdots (★)$

의 근의 개수를 구하는 과정이다.(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

$\log x$의 정수부분을 n, 소수부분을 α라 하면 $(\log x)^2 - [(\log x)^2] = (n+\alpha)^2 - [(n+\alpha)^2]$ =[(가)] $\times \alpha + \alpha^2 - [2n\alpha + \alpha^2]$ 이고 $(\log x - [\log x])^2 = \alpha^2$ 이다. 방정식(★)은 [(가)] $\times \alpha = [2n\alpha + \alpha^2]$ 이므로 $2n\alpha$는 정수이고, $\log x$의 소수부분 α는 $\frac{0}{2n}, \frac{1}{2n}, \cdots,$ $\frac{2n-1}{2n}$ 이다. $10 \le x < 10^7$ 에서 $1 \le \log\{x\} < 7$ 이므로 $\log x$의 정수부분 n의 범위는 $1 \le n \le 6$ 이다. $1 \le n \le 6$ 인 각각의 자연수 n에 대하여 $\log x = n + \frac{k}{2n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1)$ 이다. 따라서 방정식(★)의 근의 개수는 [(나)]이다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)$의 값은? [4점]

① 76 ② 80 ③ 84
④ 88 ⑤ 92

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

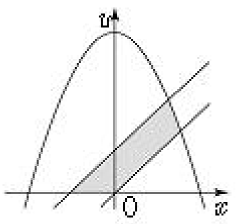
242 x에 대한 로그부등식 $\left(\log_2 \frac{x}{a}\right)\left(\log_2 \frac{x^2}{a}\right) + 2 \ge 0$이 모든 양의 실수 x 에 대하여 성립할 때, 양의 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할때, $M + 16m$의 값을 구하시오.[4점]

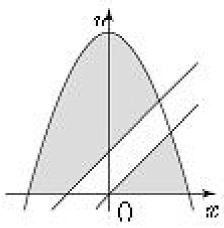
[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

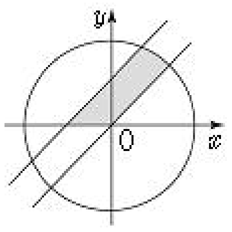
243 [공통] 두 실수 x, y가 다음 조건을 만족시킨다.

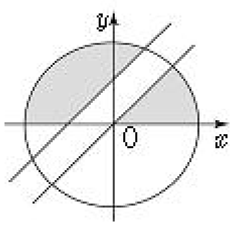
(가) $\log_2(y-x)<0$
(나) $\log_2 y<\log_4(4-x^2)$

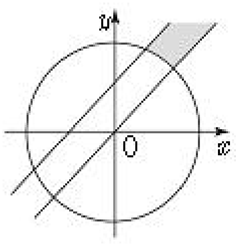
이때, 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$가 존재하는 영역을 어두운 부분으로 바르게 나타낸 것은?(단, 경계선은 제외한다.)[4점]

①


②


③


④


⑤


[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

244 [공통] k가 자연수일 때, $\log k$의 정수부분 n과 소수부분 α에 대하여 좌표평면 위의 점 P_k를 $P_k(n, \alpha)$라 하자.

$10<m<100$인 자연수 m에 대하여 사각형 $P_1P_{10}P_mP_3$ 의 넓이의 최댓값을 $\log M$이라 할 때, $10M^2$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

245 [공통]지수방정식 $4^x-2^{x+3}+15=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $2^{\alpha+\beta}$의 값은?[3점]

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

246 $3^x+3^{1-x}=10$일 때, 9^x+9^{1-x}의 값은?[3점]

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

247 지수방정식 $2^x-6+2^{3-x}=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+2\beta$의 값은?(단, $\alpha<\beta$)[3점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

248 로그방정식 $\log_a(\log_2 3)+\log_a(\log_9 5)+\log_a(\log_5 16)=4$를 만족하는 a에 대하여 a^{16}의 값을 구하시오.[3점]

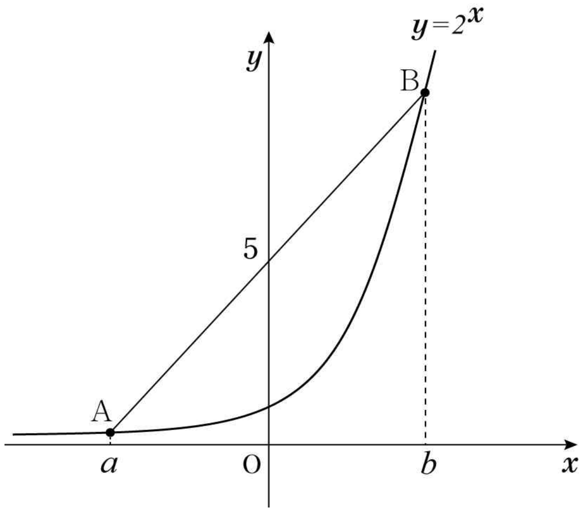
[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

249 로그부등식 $(\log x)^2 - \log x - 12 \le 0$를 만족하는 x에 대하여 $\log_{\sqrt{10}} x^3$의 최댓값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

250 [공통]함수 $y = 2^x$의 그래프 위에 두 점 A, B가 있다. 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $a, b\,(a < b)$라 하자.

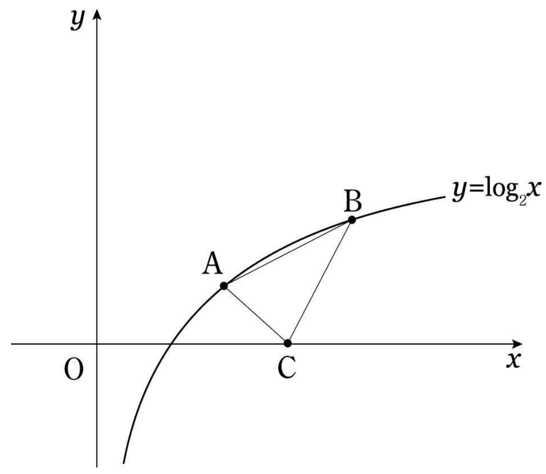
$\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(0, 5)$일 때, $2^{2a} + 2^{2b}$의 값은?[3점]



① 94 ② 96 ③ 98
④ 100 ⑤ 102

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

251 [공통]그림과 같이 로그함수 $y = \log_2 x$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B와 x축 위의 점 $C(3, 0)$에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 1)$일 때, 직선 AB의 기울기는?[3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

252 [공통]어떤 음원에서 나오는 음향출력이 $x\,(W)$일 때, 음향파워레벨 $L_w\,(dB)$는 다음과 같이 계산한다.

$L_w = 10\log\frac{x}{x_0}$ (단, x_0은 기준 음향출력을 나타내는 상수이다.)일반적인 대화에서 나오는 음향출력이 $\frac{1}{10^5}\,(W)$일 때, 음향파워레벨은 $70\,(dB)$이라고 한다.

비행기 엔진 소리에서 나오는 음향출력이 $10^2\,(W)$일 때, 음향파워레벨은 $a\,(dB)$이다. 이때, a의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

253 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \log_2(n+1)$일 때, 항상 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $a_2 - a_1 > 0$
ㄴ. $2a_{n+1} > a_{n+2} + a_n$
ㄷ. $a_{n+1}^2 > a_n a_{n+2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

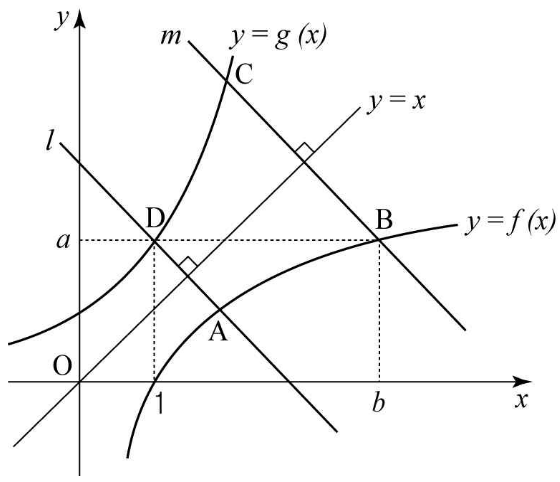
254 함수 $y = \dfrac{3^{2x} + 3^x + 9}{3^x}$의 최솟값은?[3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

255 그림과 같이 직선 $y = x$와 수직으로 만나는 평행한 두 직선 l, m이 있다.

두 직선 l, m이 함수 $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$의 그래프와 만나는 교점을 A, B, C, D라 하자. $f(b) = g(1) = a$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?[3점]

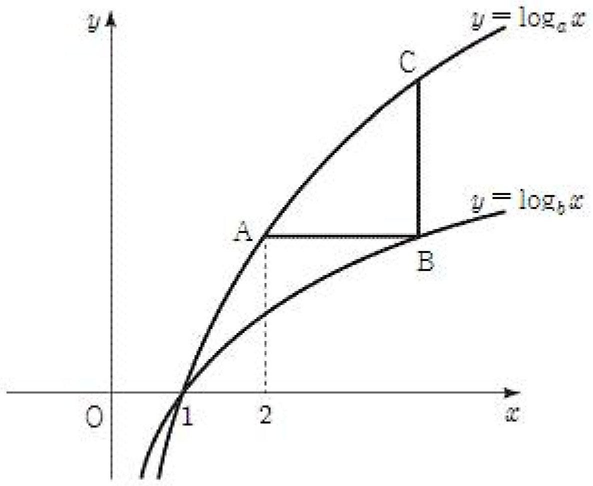


① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

256 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점 $A(2, \log_a 2)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AB}=\overline{BC}=2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, $1<a<b$)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

257 이상기체 1몰의 부피가 V_0에서 V_i로 변할 때, 엔트로피 변화량 $S_i(J/K)$는 다음과 같이 구할 수 있다고 한다.

$S_i = C\dfrac{\log\{V_i\}}{V_0}$ (단, C는 상수이고 부피의 단위는 m^3이다.)

이상기체 1몰의 부피가 V_0에서 V_1로 a배 변할 때 $S_1=6.02$이고, 이상기체 1몰의 부피가 V_0에서 V_2로 b배 변할 때, $S_2=36.02$이다.

이때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

(단, 몰은 기체입자수의 단위이고 $C=20(J/K)$으로 계산한다.)[3점]

① 10 ② $6\sqrt{6}$ ③ $10\sqrt{10}$
④ $15\sqrt{15}$ ⑤ 100

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

258 연립부등식 $x\ge 0,\ y\ge 0,\ 2^y \le 4^{2-x},\ \left(\frac{1}{4}\right)^y \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$을 만족시키는 좌표평면 위의 점 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값은?[3점]

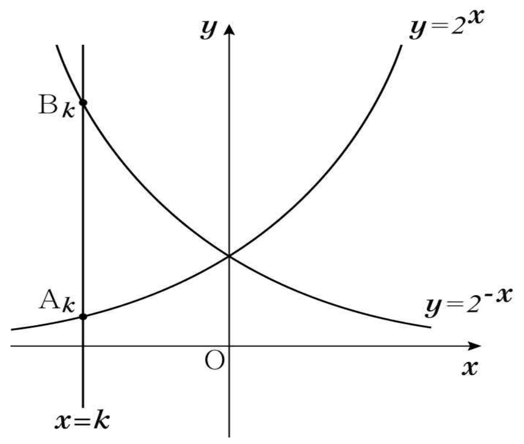
① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

259 연립방정식 $\begin{cases}\log_2 x+\log_3 y=5\\ \log_3 x\cdot\log_2 y=6\end{cases}$의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta$라 할 때, $\beta-\alpha$의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

260 두 함수 $y=2^x,\ y=2^{-x}$의 그래프와 직선 $x=k$(단, $k\ne 0$인 실수)와의 교점을 각각 $A_k,\ B_k$라 하자. $\overline{A_kB_k}$를 $1:2$로 내분하는 점의 y좌표의 값이 최소가 되는 k의 값은?[4점]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

261 [공통]액체의 끓는 온도 T(℃)와 증기압력 P($mmHg$)사이에 $\log P = a + \frac{b}{c+T}$ (a, b, c는 상수이고 $T > -c$)인 관계가 성립한다.

표는 어떤 액체의 끓는 온도에 대한 증기압력을 나타낸 것이다.

끓는 온도(°C)	0	5	10
증기압력(mmHg)	4.8	6.6	8.8

이 표를 이용하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

(단, $\log 2 = 0.301$로 계산한다.)[4점]

[보기]

ㄱ. $0.602 < a + \frac{b}{c} < 0.699$

ㄴ. $b < 0$

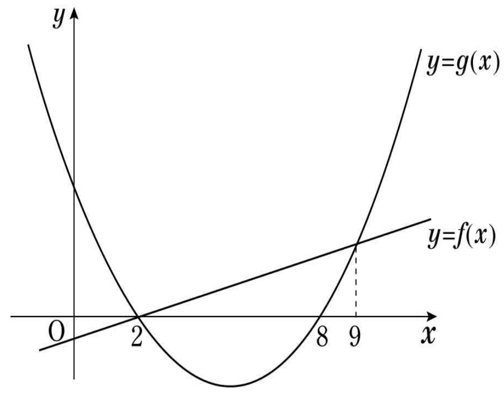
ㄷ. $P < 10^a$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

262 [공통]그림은 일차함수 $y = f(x)$와 이차 함수 $y = g(x)$의 그래프이다.

로그부등식 $\log_2 f(x) > \log_2 g(x)$의 해가 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$의 해와 같을 때, 실수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

263 x에 대한 로그방정식 $(\log x + \log 2)(\log x + \log 4) = -(\log k)^2$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$일 때, $10(\alpha^2 + \beta^2)$의 값을 구하여라.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

264 [공통] 2 이상의 자연수 n에 대하여 n의 서로 다른 양의 약수가 m개이고 그 약수를 $d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m$ 이라 할 때, $f(n)=\log_n d_1+\log_n d_2+\cdots+\log_n d_m$ 이라 하자.

다음 [보기]에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

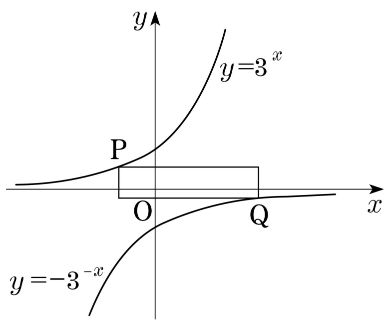
[보기]
ㄱ. $f(24)=4$
ㄴ. n이 소수이면 $f(n)=1$이다.
ㄷ. $f(n)$은 자연수이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

265 [공통]함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점 $P(\alpha,\ 3^\alpha)$과 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프 위의 점 $Q(\beta,\ -3^{-\beta})$에 대하여 $\beta-\alpha=4$가 성립한다.

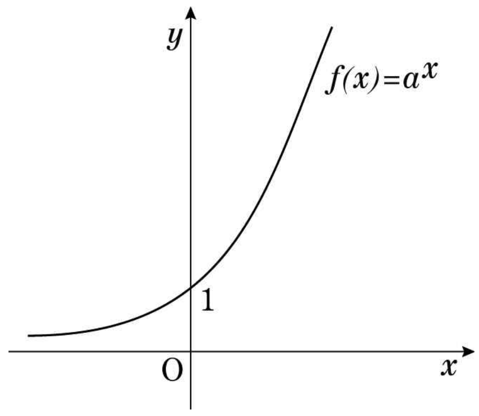
그림과 같이 두 점 $P,\ Q$를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은?[4점]



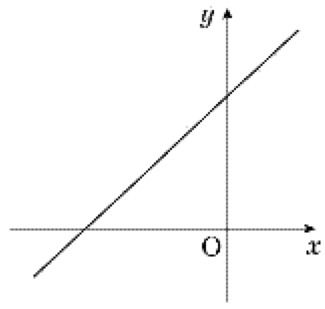
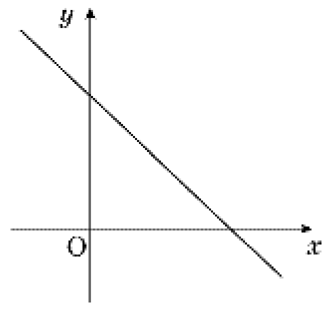
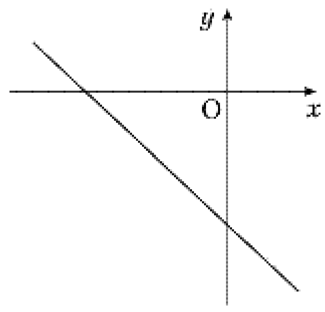
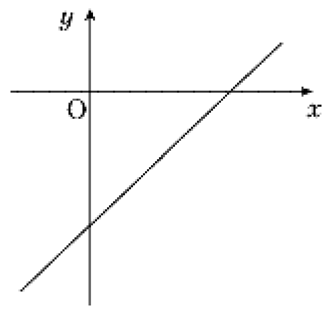
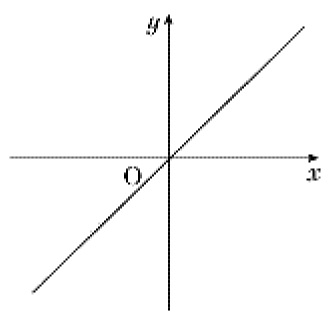
① $\frac{2}{9}$　② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$　③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　⑤ $\frac{8}{9}$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

266 [공통]그림은 지수함수 $f(x)=a^x$의 그래프이다.



다음 중 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{8f(x)}$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?[4점]

①

②

③

④

⑤


[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

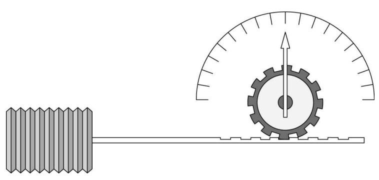
267 2이상의 자연수 m, n에 대하여 항상 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\sqrt[n]{2^m} < \sqrt[m]{2^n}$ 이면 $m < n$이다.
ㄴ. $\sqrt[n]{5^m} < \sqrt[m]{3^n}$ 이면 $m < n$이다.
ㄷ. $0 < x < 1$이고 $m < n$이면 $\sqrt[m]{x^n} < \sqrt[n]{x^m}$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

268 [공통]기압고도계는 지면으로부터의 고도에 따라 대기압이 달라지는 현상을 이용하여 고도를 측정하는 기기이다.



해수면에서의 대기압을 p_0, 측정하고자 하는 고도에서의 대기압을 p라 할 때, 기압고도계로 측정한 고도 $h(m)$는 다음과 같다.

$$h = 44000\left\{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0.2}\right\}$$

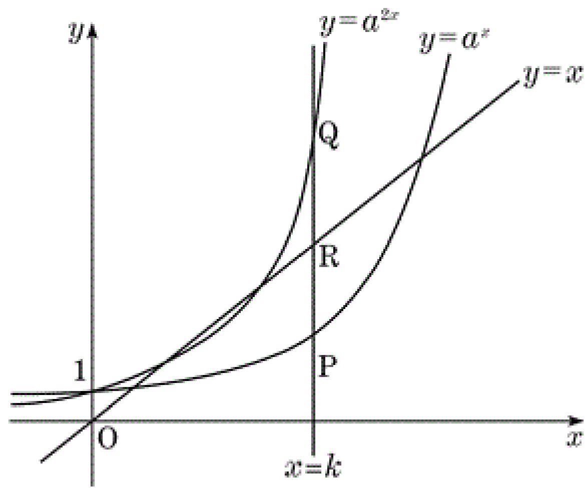
측정하고자 하는 고도에서의 대기압이 해수면에서의 대기압의 $\frac{1}{5}$배일 때, 기압고도계로 측정한 고도 $h(m)$는?(단, $\log 2 = 0.30$, $\log 7.25 = 0.86$으로 계산한다.)[4점]

① 12100 ② 12200 ③ 12300
④ 12400 ⑤ 12500

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

269 [공통]그림과 같이 지수함수 $y = a^x$와 $y = a^{2x}$의 그래프는 직선 $y = x$와 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

$y = a^x$의 그래프, $y = a^{2x}$의 그래프와 직선 $x = k$의 교점을 각각 P, Q라 하고 직선 $y = x$와 직선 $x = k$의 교점을 R라 하자.



$k = 2$이면 두 점 Q와 R가 일치할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, $a > 1$)[4점]

[보기]
ㄱ. $k = 4$이면 두 점 Q와 R가 일치한다.
ㄴ. $\overline{PQ} = 12$이면 $\overline{QR} = 8$이다.
ㄷ. $\overline{PQ} = \frac{1}{8}$을 만족시키는 실수 k의 값의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

270 [공통]모든 실수 x에 대하여 지수부등식 $3^{2x} - k \cdot 3^x + k + 3 \geq 0$이 성립하도록 하는 정수 k의 개수는?[4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

271 자연수 n에 대하여 연립부등식

$\dfrac{|x|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}+\dfrac{|y|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}\le 1,\ \dfrac{|x|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}+\dfrac{|y|}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}\ge 1$을 만족시키는

좌표평면 위의 점 (x, y)가 나타내는 영역의 넓이를 a_n이라 하자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $\log_{\frac{1}{2}}(1-5S_{10})$의 값을 구하시오[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

272 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음의 세 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\le x\le 0$일 때, $f(x)=2^x-1$
(나)모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다)모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-2)+1$

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=4$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?[4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★☆☆] [2010년 9월 학력평가]

273 [공통] $2^x=3$, $3^y=5$일 때, 2^{xy}의 값은?[3점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

274 [공통] $\log_2\sin\theta+\log_2\cos\theta=-4$일 때,

$\log_2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{1}{2}(\log_2 x-4)$를 만족하는 x의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

275 지수방정식 $4^x-3\cdot 2^{x+3}+k=0$의 두 근을 α, β라 하자.

$\alpha+\beta=7$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.(단, k는 실수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

276 방정식 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{3x}=9^{3-x}$의 해를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

277 부등식 $2^{\frac{1}{7}}\times 2^{\frac{3}{7}}\times 2^{\frac{5}{7}}\times\cdots\times 2^{\frac{2n-1}{7}}>1024$를 만족시키는 양의 정수 n의 최솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

278 부등식 $a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x<-2$일 때, 부등식 $\log_a(x-2) < \log_a(4-x)$의 해는?(단, 상수 a는 1이 아닌 양수이다.)[3점]

① $2<x<3$ ② $3<x<4$ ③ $2<x<4$
④ $x<3$ ⑤ $x>3$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

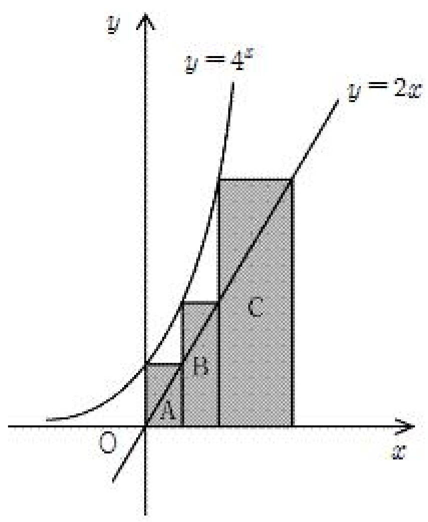
279 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+(2^a+2)x+2^{a+1}+1 \geq 0$가 성립하도록 하는 실수 a의 최댓값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

280 그림과 같이 두 함수 $y=4^x$, $y=2x$의 그래프와 좌표축에 평행한 직선으로 만들어진 세 직사각형 A, B, C의 넓이의 합을 S라 할 때, $4S^2$의 값을 구하시오.

(단, $y=4^x$과 y축이 만나는 점은 직사각형 A의 한 꼭짓점이다.)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

281 방정식 $2^x+2^{3-x}=6$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+2\alpha)(1+2\beta)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

282 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=2^{ax+b}$이 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, a, b는 상수이다.)[3점]

(가) $f\left(\frac{5}{2}\right)=2\sqrt{2}$
(나)임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=2f(x)f(y)$이다.

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

283 달걀의 신선도를 결정하는 중요한 요소 중 하나가 HU(호우 유니트)값이다.

농후단백의 높이(뭉쳐있는 흰자의 높이)가 $h(mm)$이고 무게가 $w(g)$일 때, HU는 다음과 같이 계산한다.

$HU=100\log\left(h+7.57-1.7w^{0.37}\right)$

$HU=90$이고 무게가 $50g$일 때 농후단백의 높이 h의 값은?

(단, $1.7\times 50^{0.37}=7.24$, $\log 2=0.30$으로 계산한다.)[3점]

① 6.24 ② 6.50 ③ 6.87
④ 7.13 ⑤ 7.67

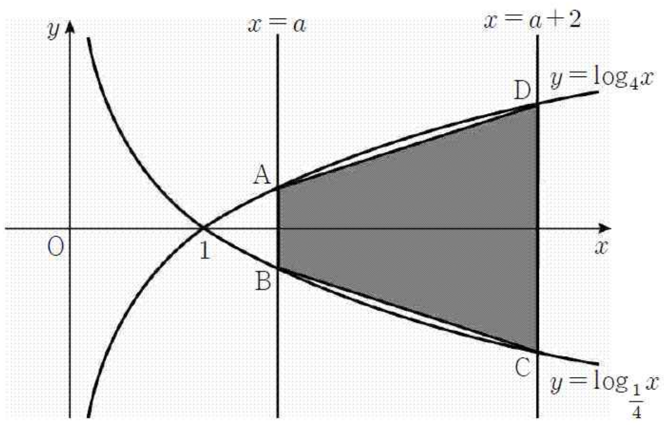
[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

284 $(\log_3 x)^2 - 12 = \log_3 x^4$ 을 만족하는 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

285 [공통]그림과 같이 두 곡선 $y=\log_4 x$, $y=\log_{\frac{1}{4}} x$와 두 직선 $x=a$, $x=a+2$가 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자.

사각형 $ABCD$의 넓이가 3일 때, 상수 a의 값은?(단, $a>1$)[3점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

286 두 양수 a, b에 대하여 $\log_2 ab = 4$, $\log_2 \frac{a}{b} = 2$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

287 [공통]부등식 $\log_2 \cos x + \log_4 \frac{2}{3} < \log_4 \sin x$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? 단, $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$[3점]

① $\frac{5}{12}\pi$ ② $\frac{1}{2}\pi$ ③ $\frac{7}{12}\pi$
④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

288 [공통]기체의 압력이 P_0일 때 온도가 T_0이고 P일 때 온도가 T이면 온도와 압력의 관계는 $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$이다.

(단, γ는 비열비이고, 압력의 단위는 atm, 온도의 단위는 K이다.)

표는 어떤 기체의 압력에 따른 온도를 나타낸 것이다.

압력(atm)	온도(K)
$P_0=81$	$T_0=900$
$P=3$	$T=300$

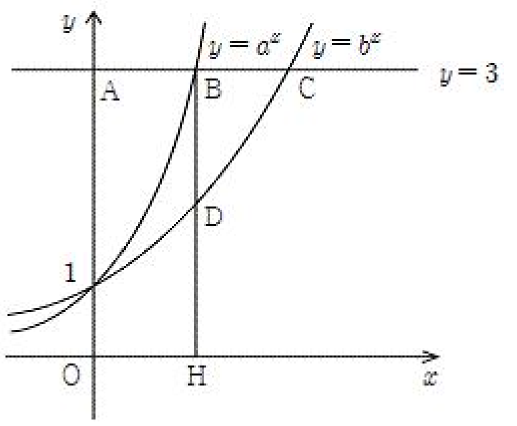
이때, 이 기체의 비열비 γ의 값은?[3점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{13}{10}$ ③ $\frac{7}{5}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

289 그림과 같이 직선 $y=3$이 $x=0$, $y=a^x$, $y=b^x$(단, $1<b<a$)의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, $\overline{BH}$가 $y=b^x$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자.

$\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DH}}$의 값은?[3점]



① $\sqrt{2}-1$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\sqrt{3}-1$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

290 [공통]소리의 세기가 $I(W/m^2)$인 음원으로부터 $r(m)$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기 P(데시벨)는 $P=10\left(12+\dfrac{\log\{I\}}{r^2}\right)$이다.

어떤 음원으로부터 $1m$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 80(데시벨)일 때, 같은 음원으로부터 $10m$만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 상대적 세기가 a(데시벨)이다. a의 값은?[3점]

① 50 ② 55 ③ 60

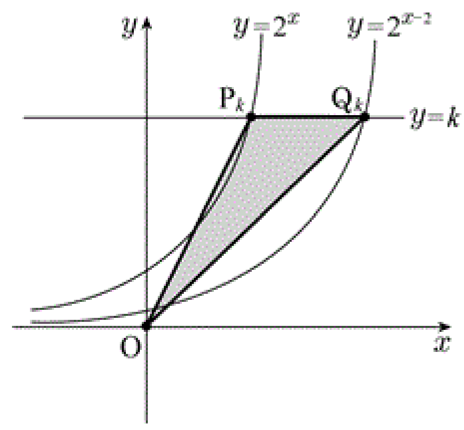
④ 65 ⑤ 70

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

291 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=2^{x-2}$과 직선 $y=k$의 교점을 각각 P_k, Q_k라 하고, 삼각형 OP_kQ_k의 넓이를 A_k라 하자.

$A_1+A_4+A_7+A_{10}$의 값을 구하시오.

(단, k는 자연수이고, O는 원점이다.)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

292 x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} 2^{x+3}-3^{y-1}=k \\ 2^{x-1}+3^{y+2}=2 \end{cases}$가 근을 갖기 위한 정수 k의 최댓값은?[3점]

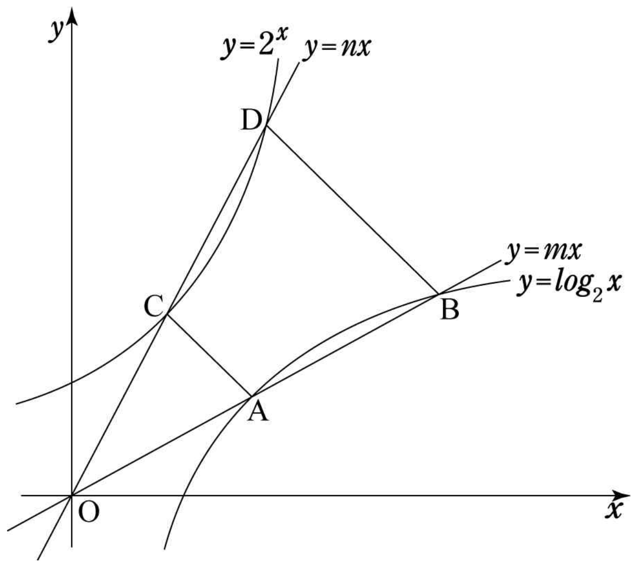
① 25 ② 27 ③ 29

④ 31 ⑤ 33

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

293 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점을 A, B라 하고, 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=nx$의 두 교점을 C, D라 하자.

사각형 $ABDC$는 등변사다리꼴이고 삼각형 OBD의 넓이는 삼각형 OAC의 넓이의 4배일 때, $m+n$의 값은?(단, O는 원점)[3점]



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3
④ $\frac{10}{3}$　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

294 [공통]과학전문 학술지에 "공룡의 속도 측정"이라는 논문이 발표됐다.

이 논문에서는 중력가속도를 g, 공룡이 달릴 때의 보폭을 s, 공룡의 다리 길이를 h라 할 때, 공룡이 달리는 속도 v가 다음과 같다고 주장했다.

$v=0.25g^{0.5}s^{1.67}h^{-1.17}$

위의 식을 이용하여 보폭이 8이고 다리 길이가 4인 공룡의 달리는 속도 v를 구할 때, $\log v^{1000}$의 값은?(단, 중력가속도 $g=10$, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)[3점]

① 601　② 651　③ 701
④ 751　⑤ 801

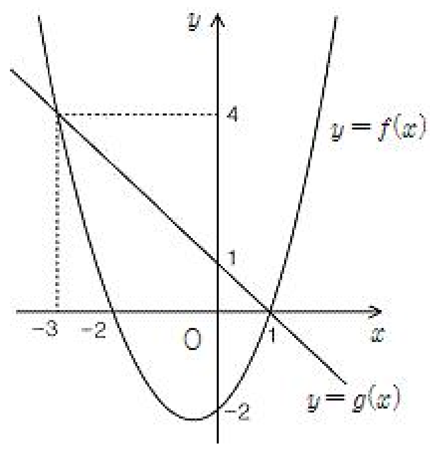
[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

295 x에 대한 지수방정식 $16\cdot 3^{-x}+3^{x+2}=2a$가 단 하나의 해를 가질 때, 실수 a의 값은?[3점]

① 6　② 9　③ 12
④ 15　⑤ 18

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 학력평가]

296 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x-2)}<2^{-g(x+1)}$의 해는?[3점]



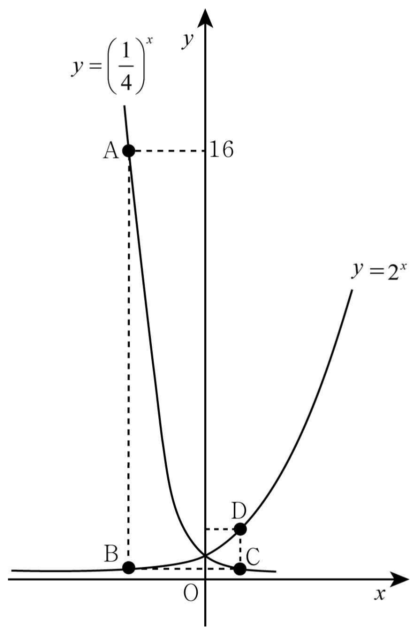
① $x<-2$ 또는 $x>2$
② $x<0$ 또는 $x>1$
③ $x<0$ 또는 $x>2$
④ $-3<x<1$
⑤ $0<x<2$

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

297 [공통]그림과 같이 y축 위의 점 $(0,\ 16)$을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 만나는 점을 A, 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 D라 하자.

사각형 $ABCD$의 넓이를 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점]



[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

298 [공통]실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$
(나) $f(x)=\begin{cases} 4^{-x+1}-1, & (0 \le x < 1) \\ 4^{x-1}-1, & (1 \le x < 2) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프와 만나는 점의 개수는?[4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

299 부등식 $y \ge x^2$의 영역에 속하는 점 $P(x,\ y)$에 대하여 $\log_2(y+1)-\log_2|x|$의 최솟값은?[4점]

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

300 $\frac{1}{3} \le x \le 3$에서 정의된 함수 $f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.[4점]

정답 및 해설

1.지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

중단원 기출문제

1) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 주어진 구간에서 지수함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 최댓값은 $f(1)=1+\left(\frac{1}{3}\right)^{0}=2$

2) 답 : 6

[해설]

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$x-5 \leq -2$

$x \leq 3$

모든 자연수 x의 값은 $1, 2, 3$이므로 그 합은 $1+2+3=6$이다.

3) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 로그부등식의 해를 구할 수 있는가?

진수조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$이므로

$x>1 \ldots$㉠

$\log_5(x-1) \leq \log_5\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서

$x-1 \leq \frac{1}{2}x+k$이며 정리하면

$\frac{1}{2}x \leq k+1$

$\therefore\ x \leq 2(k+1) \ldots$㉡

㉠, ㉡에서 $1<x \leq 2(k+1)$이고 모든 정수 x의 개수가 3이므로

$2(k+1)-1=2k+1=3$

$\therefore\ k=1$

4) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 실생활에서 주어진 관계식을 이용하여 실수의 값을 구할 수 있는가?

$\frac{W}{W_0}=\frac{1}{2}\times 10^{at}(1+10^{at})$

$3=\frac{1}{2}\times 10^{15a}(1+10^{15a})$에서

$(10^{15a})^2+10^{15a}-6=0$

$(10^{15a}+3)(10^{15a}-2)=0$

$10^{15a}>0$이므로 $10^{15a}=2$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}\times 10^{30a}(1+10^{30a})=\frac{1}{2}\times 4\times(1+4)=10$

5) 답 : 26

[해설]

[해설] 로그의 진수조건으로부터 $x+6>0$, $\therefore\ x>-6$

$\log_2(x+6)=5=\log_2 2^5$, $x+6=2^5$,

$\therefore\ x=26$

6) 답 : ③

[해설]

두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=3^x$의 교점의 x좌표가 k이고,

y좌표가 같으므로 $a^{k-1}=3^k$,

$\therefore\ \left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}=3$

그런데 $a>3$이므로 $\frac{a}{3}>1$이고, 그래서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=\infty$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+k}}{\left(\frac{a}{3}\right)^{n+1}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^k}{\frac{a}{3}+\frac{1}{\left(\frac{a}{3}\right)^n}}=\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^k}{\frac{a}{3}+0}=\left(\frac{a}{3}\right)^{k-1}=3$$

7) 답 : ④

[해설]

$y=3^x$를 x에 관해 미분하면 $y'=3^x\ln3$이므로

곡선 $y=3^x$ 위의 점 $P(k, 3^k)$에서의 접선의 방정식은

$y-3^k=3^k\ln3(x-k)$,

이 직선이 x축과 만나는 점 A의 x좌표는

$-3^k=3^k\ln3(x-k) \Leftrightarrow -1=\ln3(x-k)$

$x=k-\frac{1}{\ln3}$

또한 $y=a^{x-1}$을 x에 관해 미분하면 $y'=a^{x-1}\ln a$이므로

곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점 $P(k, a^{k-1})$에서의 접선의 방정식은

$y-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a(x-k)$

이 직선이 x축과 만나는 점 B의 x좌표는

$-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a(x-k)$

$-1=\ln a(x-k)$

$x=k-\frac{1}{\ln a}$

$\therefore\ \overline{AH}=k-\left(k-\frac{1}{\ln3}\right)=\frac{1}{\ln3}$

$\overline{BH}=k-\left(k-\frac{1}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}$

조건에서 $\overline{AH}=2\overline{BH}$이므로

$\frac{1}{\ln3}=2\cdot\frac{1}{\ln a} \Leftrightarrow 2\ln3=\ln a$

$\therefore\ a=9$

8) 답 : ⑤

[해설]

$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-2x} \le 5^{x+4}$ 이며 정리하면

$5^{2x-1} \le 5^{x+4} \Rightarrow 2x-1 \le x+4$

$\therefore\ x \le 5$

문제의 조건에서 x는 자연수이므로

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$\therefore\ 1+2+3+4+5=15$

9) 답 : ①

[해설]

[해설] 두 점 $B(1,\ 0)$, $C(2^m,\ m)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$ 이므로

점 D의 좌표는 $D\left(2^n,\ \frac{m(2^n-1)}{2^m-1}\right)$ 이고,

조건 ㈏로부터 $\triangle ABD$의 넓이가 $\frac{m}{2}$ 보다 작거나 같으므로

$\frac{1}{2}\cdot(2^n-1)\cdot\frac{m(2^n-1)}{(2^m-1)}=\frac{m(2^n-1)^2}{2(2^m-1)} \le \frac{m}{2}$,

$\therefore\ (2^n-1)^2 \le 2^m-1$

(i) $n=1$ 이면 $(2^1-1)^2=1 \le 2^m-1$, $2 \le 2^m$ 으로

이 부등식을 만족하는 가장 작은 자연수 m은 $m=1$ 이므로 $\therefore$ $a_1=1$

(ii) $n \ge 2$ 이면 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2 \le 2\cdot 2^n$ 이 항상 성립하므로

이를 변형하여 정리하면 $-2\cdot 2^n+1 \le -1$,

$2^{2n}-2\cdot 2^n+1 \le 2^{2n}-1$,

$\therefore\ (2^n-1)^2 \le 2^{2n}-1$ 즉, 부등식 $(2^n-1)^2 \le 2^m-1$ 을 항상 만족하려면

$(2^n-1)^2 \le 2^{2n}-1 \le 2^m-1$ 이면 되므로

$\therefore\ 2n \le m$

따라서 $n \ge 2$ 일 때, 부등식 $(2^n-1)^2 \le 2^m-1$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 m은 $m=2n$ 이다.

$\therefore\ a_1=1$, $a_n=2n$ ($n \ge 2$)

$\therefore\ \sum_{n=1}^{10} a_n = a_1+\sum_{n=2}^{10} a_n = 1+\sum_{n=2}^{10} 2n = -1+\sum_{n=1}^{10} 2n$

$=-1+2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}=109$

[다른 풀이]

직선 BC의 기울기는 $\frac{m}{2^m-1}$ 이므로 직선 BC의 방정식은

$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$

따라서, 점 D의 좌표는 $\left(2^n,\ \frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\right)$

삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{1}{2}(2^n-1)\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)$

삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$ 보다 작거나 같으므로

$\frac{1}{2}(2^n-1)\frac{m}{2^m-1}(2^n-1) \le \frac{m}{2}$

$(2^n-1)^2 \le 2^m-1$

이때, $n=1$ 이면 $1 \le 2^m-1,\ 2 \le 2^m$ 이므로 $a_1=1$

또한, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(2^n-1)^2 \le 2^{2n}-1 \le 2^m-1$ 이므로 $2n \le m$ 이면 된다

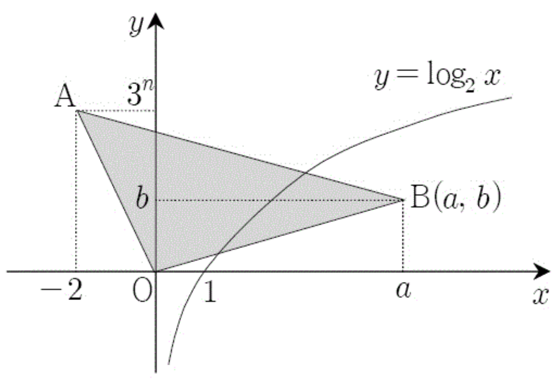
$\therefore\ a_1=1,\ a_n=2n(n \ge 2)$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10} a_n = a_1+\sum_{n=2}^{10} 2n = 1+\frac{9(4+20)}{2}=109$

10) 답 : 120

[해설]

[해설] 조건 ㈎, ㈏, ㈐를 만족하는 삼각형을 좌표평면 위에 그려보면 다음과 같다.



$\triangle OAB$의 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\cdot(3^n+b)\cdot(a+2)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3^n-\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$

$=\frac{1}{2}(a\cdot 3^n+2b)=\frac{3^n}{2}a+b$

조건 ㈐로부터 $\triangle OAB$의 넓이가 50 이하이므로

$\frac{3^n}{2}a+b \le 50$ 이며 정리하면

$\therefore\ 3^n a+2b \le 100$ ⋯ ㉠

(i) $n=1$ 일 때, ㉠에서 $3a+2b \le 100$ 이므로

조건 ㈏로부터 a의 값은 2, 3, ⋯ , 32의 값이 가능하고

여기서 $b \le \log_2 a$를 만족해야 하므로

$2^1 \le a < 2^2$ 일 때, $b=1$

$2^2 \le a < 2^3$ 일 때, $b=1,\ 2$

$2^3 \le a < 2^4$ 일 때, $b=1,\ 2,\ 3$

$2^4 \le a \le 30$ 일 때, $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$a=31$ 일 때, $b=1,\ 2,\ 3$ ($\because\ 3a+2b \le 100$)

$a=32$ 일 때, $b=1,\ 2$ ($\because\ 3a+2b \le 100$)

점 $A(-2,\ 3)$, $O(0,\ 0)$ 이므로

점 $B(a,\ b)$의 개수가 $\triangle OAB$의 개수, 곧 $f(1)$ 이다.

$\therefore\ f(1)=1\cdot(2^2-2^1)+2\cdot(2^3-2^2)+3\cdot(2^4-2^3)$

$+4\cdot(30-2^4+1)+3+2$

$=2+8+24+60+3+2=99$

(ii) $n=2$ 일 때, ㉠에서 $9a+2b \le 100$ 이므로

조건 ㈏로부터 a의 값은 2, 3, ⋯ , 10의 값이 가능하고

여기서 $b \le \log_2 a$를 만족해야 하므로

$2^1 \le a < 2^2$ 일 때, $b=1$

$2^2 \le a < 2^3$ 일 때, $b=1,\ 2$

$2^3 \le a \le 10$일 때, $b=1, 2, 3$

점 $A(-2, 3^2)$, $O(0, 0)$이므로

점 $B(a, b)$의 개수가 $\triangle OAB$의 개수, 곧 $f(2)$이다.

$\therefore\ f(2)=1 \cdot (2^2-2^1)+2 \cdot (2^3-2^2)+3 \cdot (10-2^3+1)$

$=2+8+9=19$

(iii) $n=3$일 때, ㉠에서 $27a+2b \le 100$이므로

조건 ㈏로부터 a의 값은 2, 3의 값이 가능하고

여기서 $b \le \log_2 a$를 만족해야 하므로

$a=2$일 때, $b=1$이고

$a=3$일 때, $b=1$이다.

점 $A(-2, 3^3)$, $O(0, 0)$이므로

점 $B(a, b)$의 개수가 $\triangle OAB$의 개수,

곧 $f(3)$이다. $\therefore\ f(3)=2$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)에 의해 $f(1)+f(2)+f(3)=99+19+2=120$

11) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 식이 주어진 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

$x=R^{\frac{27}{23}}$일 때, $v=\frac{1}{2}v_0$이므로

$\frac{v_c}{v}=1-k\frac{\log x}{R}$에서 $2=1-k\log R^{\frac{4}{23}}$이며 정리하면

$k\log R=-\frac{23}{4}$

$x=R^a$일 때, $v=\frac{1}{3}v_0$이므로

$3=1-k\log R^{a-1}=1-(a-1)k \cdot \log R$

$\therefore\ 2=\frac{23}{4}(a-1)$

$\therefore\ a=\frac{31}{23}$

12) 답 : 15

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프를 이해하고 주어진 영역에서 x좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 구할 수 있는가?

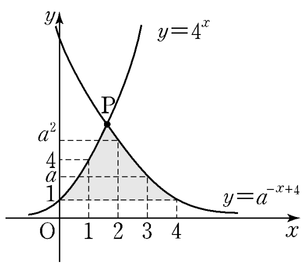
두 지수함수 $\begin{cases} y=4^x \\ y=a^{-x+4} \end{cases}$의 교점을 $P(\alpha, 4^\alpha)$이라 하면

$4^\alpha=a^{-\alpha+4}$, $\alpha=\frac{4\log a}{\log 4a}$

교점의 위치에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각하면

i) $1 \le \alpha < 2$일 때

$1 \le \frac{4\log a}{\log 4a} < 2$를 풀면 $\sqrt[3]{4} \le a < 4$ ...... ㉠



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은

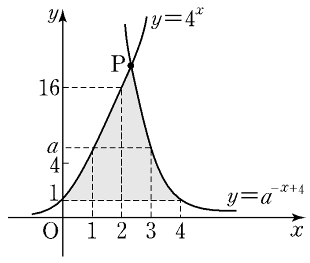
$1+4+a^2+a+1$이므로

$20 \le a^2+a+6 \le 40$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 자연수 a는 없다.

ii) $2 \le \alpha < 3$일 때

$2 \le \frac{4\log a}{\log 4a} < 3$을 풀면 $4 \le a < 64$ ...... ㉢



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은

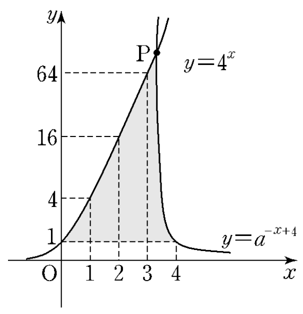
$1+4+16+a+1$이므로

$20 \le a+22 \le 40$ ...... ㉣

㉢, ㉣을 모두 만족하는 a의 범위는 $4 \le a \le 18$이므로

자연수 a의 개수는 15개이다.

iii) $3 \le \alpha < 4$일 때



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3인 점의 개수의 합이 $1+4+16+64$이므로

조건을 만족하지 않는다.

i), ii), iii)으로부터 a의 개수는 15개이다.

13) 답 : ①

[해설]

$T_0=20$이고 $t=\frac{9}{8}$일 때 $T=365$이므로

$365=20+k\log\left(8\times\frac{9}{8}+1\right)$

$\therefore\ k=365-20=345$

또, $t=a$일 때, $T=710$이므로

$20+345\log(8a+1)=710$이며 정리하면

$345\log(8a+1)=690$

$\log(8a+1)=2$이며 정리하면

$8a+1=100$

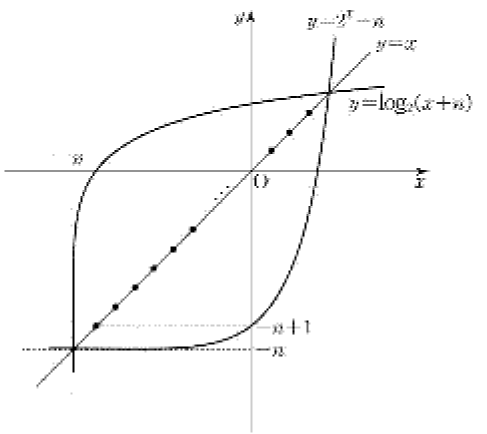
[구하는 값]$=a=\frac{99}{8}$

14) 답 : 573

[해설]

$y=2^x-n$과 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계에 있으므로

직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



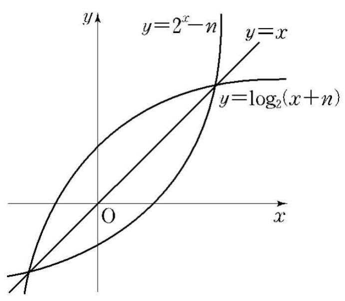
a_n은 $-n<x$이고 $2^x-n\le x$를 만족시키는 정수 x의 개수이다.
$n=k$일 때 만족하는 x는 $-k+1,\ -k+2,\ \cdots,\ -1,\ 0$까지의 k개와

$2^x-x\le k$를 만족시키는 자연수 x가 있다.

이때, $\begin{cases} 2^1-1=1 \\ 2^2-2=2 \\ 2^3-3=5 \\ 2^4-4=12 \\ 2^5-5=27 \end{cases}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{30} a_n=\sum_{k=1}^{30} k+(2-1)\times 1+(5-2)\times 2$$
$$+(12-5)\times 3+(27-12)\times 4+(30-27+1)\times 5$$
$$=573$$

[다른 풀이]



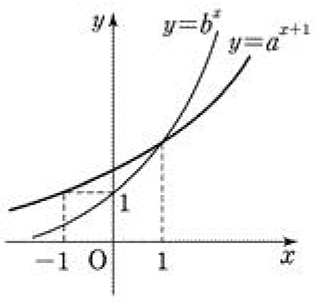
a_n은 $2^x-n\le x\le \log_2(x+n)$을 만족하는 정수의 개수이다.
두 함수 $f(x)=2^x-n,\ g(x)=\log_2(x+n)$이라 놓으면
$f(x),\ g(x)$는 증가함수이고 서로 역함수이다.
위 그림에서 $2^x-n\le x$를 만족하는 정수 x의 개수를 구하면 된다.
ⅰ) $x<0$일 때
$-n<2^x-n\le 1-n$이므로
$-n+1\le x\le 0$이면 주어진 조건을 만족한다.
(n개 존재)
ⅱ) $x>0$일 때
$2^x-x\le n$을 만족하는 양수 x를 구하면 된다.
$h(x)=2^x-x$라 하면
$h(1)=1,\ h(2)=2,\ h(3)=5,\ h(4)=12,\ h(5)=27$,
$h(6)=58$이므로
$n=1$일 때 $x=1$
$n=2,\ 3,\ 4$일 때 $x=1,\ 2$
$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$일 때 $x=1,\ 2,\ 3$
$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$일 때, $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$
$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$일 때 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
따라서 ⅰ), ⅱ)에서
$n=1$이면 $a_n=n+1$
$n=2,\ 3,\ 4$이면 $a_n=n+2$
$n=5,\ 6,\ \cdots,\ 11$이면 $a_n=n+3$
$n=12,\ 13,\ \cdots,\ 26$이면 $a_n=n+4$
$n=27,\ 28,\ 29,\ 30$이면 $a_n=n+5$

$$\sum_{n=1}^{30} a_n=\left(\sum_{n=1}^{30} n\right)+(1\times 1)+(3\times 2)+(7\times 3)+(15\times 4)+(4\times 5)$$
$$=465+108=573$$

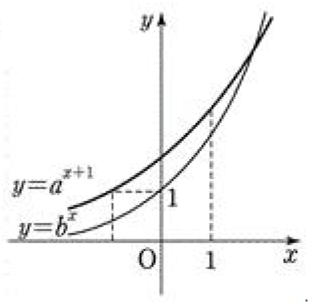
15) 답 : 19
[해설]
$\log_3(x-11)=3\log_3 2=\log_3 2^3=\log_3 8$
$x-11=8$
$\therefore\ x=19$

16) 답 : ④
[해설]
$\log y=A-\dfrac{1}{2}\log t-\dfrac{Kx^2}{t}$ 에서
$t=1,\ x=2,\ y=a$일 때
$\log a=A-4K\ldots$①
$t=4,\ x=d,\ y=\dfrac{a}{2}$ 일 때
$\log a=A-\dfrac{Kd^2}{4}\ldots$②
①, ②에서 $A-4K=A-\dfrac{Kd^2}{4}\Rightarrow d^2=16$
$\therefore\ d=4\,(\because\ d>0,\ K>0)$

17) 답 : 39
[해설]
$f(x)=a^{x+1}-b^x$라 하자. $f(x)=b^x\left\{a\left(\dfrac{a}{b}\right)^x-1\right\}$이므로,
$a\ge b$이면 $x\ge 1$에서 $f(x)$는 증가함수
(ⅰ) $a\ge b$일 때,
$x\ge 1$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이고
$f(1)=a^2-b\ge a^2-a>0$이므로
$\therefore\ a^2-b\le 10$
가능한 경우는
$a=2$일 때 $b=2$
$a=3$일 때 $b=2,\ 3$
$a\ge 4$이면 $a^2-b\ge a^2-a\ge 12$
따라서 $(2,\ 2),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3)$의 3가지
(ⅱ) $a<b$일 때,



[그림 1]



[그림 2]

$f(x)=0$의 근을 α라 하자.

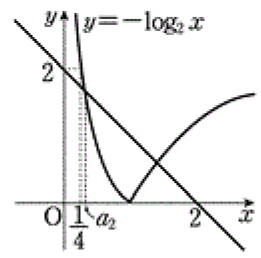
$\alpha<1$이면 [그림 1]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 $f(1)$
$\alpha\geq1$이면 [그림 2]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 0
$\therefore$ $f(1)<0$이면 $-10\leq f(1)<0$이어야 하고,
$f(1)\geq0$이면 항상 성립한다.
$\therefore$ $f(1)\geq-10$이면 항상 성립한다.
그런데, $f(1)=a^2-b\geq2^2-10\geq-10$이므로
$\therefore$ $a<b$이면 항상 성립한다.
$2\leq a<b\leq10$에서 (a,b)의 순서쌍은 ${}_9C_2=36$개
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍은 $3+36=39$개다.

18) 답 : ⑤
[해설]
$2^x=t(>0)$이라 하면
$t+\frac{4}{t}=5$이며 정리하면
$t^2-5t+4=0$
$(t-1)(t-4)=0$
$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=4$
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$
따라서, 모든 실근의 합은 2이다.

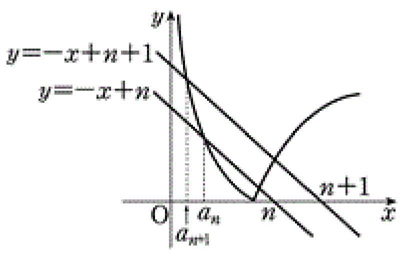
19) 답 : 14
[해설]
진수는 양수이므로 $\begin{cases}x>0\\12x+28>0\end{cases}$
$\therefore$ $x>0$
$\log_2 x\leq\log_4(12x+28)=\frac{1}{2}\log_2(12x+28)$
$2\log_2 x\leq\log_2(12x+28)$
$\log_2 x^2\leq\log_2(12x+28)$
$x^2\leq12x+28$
$x^2-12x-28\leq0$
$(x+2)(x-14)\leq0$
$\therefore$ $-2\leq x\leq14$
$x>0$이므로 $0<x\leq14$
따라서, 자연수 x의 개수는 14개이다.

20) 답 : ②
[해설]
$\frac{Q_A}{Q_B}=\frac{0.01\times20^{1.25}\times8^{0.25}}{0.05\times20^{0.75}\times8^{0.30}}=\frac{20^{0.50}}{5\times8^{0.05}}$
$=5^{-1}(2^2\cdot5)^{0.5}(2^3)^{-0.05}=2^{0.85}\times5^{-0.50}$
$\therefore$ $a+b=0.85+(-0.50)=0.35$

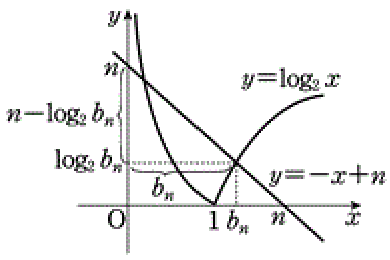
21) 답 : ④
[해설]
ㄱ. $-\log_2\frac{1}{4}=2$이므로



그림에서 $\frac{1}{4}<a_2$ $\therefore$ 거짓
ㄴ. $0<a_{n+1}<a_n$이므로



$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$
$\therefore$ 참
ㄷ. $1<b_n<n$이므로 $\frac{b_n}{n}<1$



$-b_n+n=\log_2 b_n$이므로 $b_n=n-\log_2 b_n$이고
$\log_2 b_n<\log_2 n$
이므로
$\frac{b_n}{n}=1-\frac{\log_2 b_n}{n}>$
$1-\frac{\log_2 n}{n}$
$\therefore$ 참
따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22) 답 : 27
[해설]
$y=5^{x-1}$의 그래프가 두 점 $(a,5)$, $(3,b)$을 지나므로 대입하면
$\begin{cases}5=5^{a-1}\\b=5^{3-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=25\end{cases}$
$\therefore$ $a+b=27$

23) 답 : ①
[해설]
㈎에 의하여 $f(2-x)=g(2+x)$가 모든 실수 ...에 대하여 성립한다.
즉, 모든 실수 ...에 대하여
$a^{b(2-x)-1}=a^{1-b(2+x)}$이며 정리하면
$b(2-x)-1=1-b(2+x)$ 이고 정리하여
$-bx+2b-1=-bx-2b+1$
$\therefore$ $2b-1=-2b+1$이며 정리하면

$b=\frac{1}{2}$

㈏에 의해서 $a^{4b-1}+a^{1-4b}=\frac{5}{2}$

그런데 $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$a+a^{-1}=\frac{5}{2}$ 이며 정리하면

$2a^2-5a+2=0$

$(a-2)(2a-1)=0$

$0<a<1$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

24) 답 : ③

[해설]

$y=3+\log_3(x^2-4x+31)$

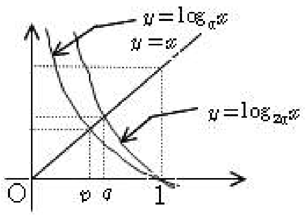
$=3+\log_3\{(x-2)^2+27\}$

$x=2$ 일 때 y의 최솟값은 $3+\log_3 27=6$

25) 답 : ⑤

[해설]

아래 그림에서



ㄱ(참)

$\log_a p=p$ 이므로 $p=\frac{1}{2}$ 이면

$\log_a \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$

ㄴ(참)그림에서

ㄷ(참) $\log_a p=p$ 에서 $a^p=p$

$\log_{2a} q=q$ 에서 $(2a)^q=q\Leftrightarrow a^q=\frac{q}{2^q}$

변변 곱하면 $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

26) 답 : ③

[해설]

$a^{x-m}=x$

$a^{1-m}=1$, $1-m=0$

$\therefore\ m=1$

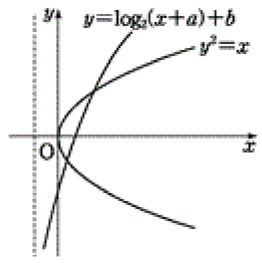
$a^{3-1}=3$, $a^2=3$ $\therefore\ a=\sqrt{3}$

$\therefore\ a+m=1+\sqrt{3}$

27) 답 : ①

[해설]

아래 그림에서



포물선 $y^2=x$의 촛점과 준선은

$F\left(\frac{1}{4},0\right)$, 준선 $x=-\frac{1}{4}$

$y=\log_2(x+a)+b$의 점근선이 $x=-a$이므로

$-a=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$

점 $\left(\frac{1}{4},0\right)$을 지나므로,

$0=\log_2\left(\frac{1}{4}+a\right)+b$

$0=\log_2\frac{1}{2}+b,\ b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

28) 답 : 81

[해설]

$(\log_3 x)(\log_3 x+1)\le 20$ 에서

$t=\log_3 x$ 라 하면

$t(t+1)\le 20\Leftrightarrow t^2+t-20\le 0$ 이며 인수분해하면

$(t+5)(t-4)\le 0$ 이므로 $\therefore -5\le t\le 4$

$-5\le \log_3 x\le 4$

따라서, $3^{-5}\le x\le 3^4$ 이므로 자연수 x의 최댓값은 81이다.

29) 답 : ①

[해설]

조건에서 $g(x)=2^{x-m}+n$ 이다.

점 $A(1,2)$를 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 이동하면

$A'(1+m,2+n)$ 이므로 $1+m=3$

$\therefore\ m=2$

또한, $y=g(x)$가 점 $(0,1)$을 지나므로

$g(0)=2^{-m}+n=1$

$2^{-2}+n=1$

$\therefore\ n=\frac{3}{4}$

$\therefore\ m+n=2+\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$

30) 답 : 17

[해설]

$\log_2 x(\log_2 x-4)=0$

$\log_2 x=0$ $\therefore\ x=1$

$\log_2 x=4$ $\therefore\ x=16$

$\therefore\ \alpha+\beta=17$

정답 및 해설

31) 답 : ①

[해설]

$f(x)$는 밑 gt 1이므로 증가함수이다.

따라서 $x=3$일 때 최댓값 $4^3=64$를 갖는다. $M=64$

$g(x)$는 $0<$ 밑 <1이므로 감소함수이다.

따라서 $x=3$일 때 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$을 갖는다.

$m=\frac{1}{8}$

$\therefore\ Mm=64\times\frac{1}{8}=8$

32) 답 : ①

[해설]

$21=10+990\times a^{-5s}$

$\therefore\ 11=990\times a^{-5s},\ a^{5s}=\frac{990}{11}=90$

양변에 상용로그를 취하면

$5s\log a=\log 90=1+2\log 3$

$\therefore\ s=\frac{1+2\log 3}{5\log a}$

33) 답 : 20

[해설]

$y=k\cdot 3^x$

$P,\ Q$의 x좌표를 각각 $\alpha,\ 2\alpha$라 놓으면

$3^{-\alpha}=k\cdot 3^{\alpha}\cdots$ ①

$-4\cdot 3^{2\alpha}+8=k\cdot 3^{2\alpha}\cdots$ ②

① 에서 $k=3^{-2\alpha}$이며 ②에 대입하면

$-4\cdot 3^{2\alpha}+8=3^{-2\alpha}\cdot 3^{2\alpha}=1$

$\therefore\ 3^{2\alpha}=\frac{7}{4}$

$\therefore\ k=\frac{4}{7}$

$\therefore\ 35k=20$

34) 답 : ⑤

[해설]

주어진 조건에서

$A(n)=\{x|0<x\leq 2^n\}$

$B(n)=\{x|0<x\leq 4^n\}$이다 .

ㄱ. $A(1)=\{x|0<x\leq 2\}$ (거짓)

ㄴ. $A(4)=\{x|0<x\leq 2^4\}$

$=\{x|0<x\leq 16\}$ (참)

ㄷ. $A(n)\subset B(n)$이면

$2^n\leq 4^n\ \therefore\ n\geq 0$

$\therefore\ B(-n)=\{x|0<x\leq 4^{-n}\}\subset A(-n)=\{x|0\leq x\leq 2^{-n}\}$

(참)

35) 답 : ①

[해설]

주어진 조건에서 $a\neq 1,\ b\neq 1$이다.

자연수 n에 대하여 $a^n<b^n$이므로

$a<b$

$0<a<b<1$ 또는 $1<a<b$일 때,

i) $m>n$이면 $a^m>a^n,\ b^m>b^n$이고,

ii) $m<n$이면 $a^m<a^n,\ b^m<b^n$이다.

그런데, i), ii)는 모두 주어진 조건에 모순이다.

$\therefore\ 0<a<1<b$

주어진 조건에서 $b^n<b^m$이므로 $n<m$이어야 하고, 이때 $a^m<a^n$이 성립한다.

$\therefore\ n<m$

이상에서 $0<a<1<b,\ m>n$이다.

36) 답 : 25

[해설]

$4^x-7\cdot 2^x+12=0$에서

$(2^x-3)(2^x-4)=0$

따라서 $2^{\alpha}=3,\ 2^{\beta}=4$로 놓을 수 있다.

$\therefore\ 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^{\alpha}+2^{\beta})^2-2\cdot 2^{\alpha}\cdot 2^{\beta}$

$=(3+4)^2-2\cdot 3\cdot 4$

$=49-24=25$

37) 답 : 13

[해설]

$\log_3 x=t\ (1\leq x\leq 81)$로 놓으면 $0\leq t\leq 4$이고,

$y=(\log_3 x)(-\log_3 x)+2\log_3 x+10$

$=-t^2+2t+10$

$=-(t-1)^2+11$

이때, $t=1$일 때 최댓값 $M=11$,

$t=4$일 때 최솟값 $m=2$를 갖는다.

$\therefore\ M+m=11+2=13$

38) 답 : 10

[해설]

$\frac{\log\{C\}}{C_0}=-kt$에 $C_0=8\times 10^5,\ t=3,\ C=2\times 10^5$을 대입하면

$\frac{\log 1}{4}=-3k$

$\therefore\ k=\frac{\log 4}{3}=\frac{2}{3}\log 2$

따라서 $\frac{\log\{C\}}{C_0}=-kt$에 $C_0=8\times 10^5,\ t=a,\ C=8\times 10^3$을 대입하면

$\frac{\log 1}{100}=-\frac{2a}{3}\log 2$

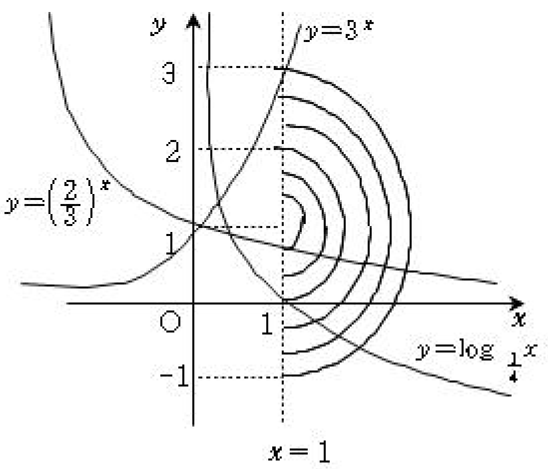
$\therefore\ -2=-\frac{2a}{3}\times 0.3$

$\therefore\ a=10$

39) 답 : ④

[해설]

세 함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^x,\ y=3^x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\therefore\ a=4,\ b=6,\ c=1$

$\therefore\ c<a<b$

40) 답 : 80

[해설]

$$\begin{cases}\log_3|x-3|<4\cdots①\\ \log_2 x+\log_2(x-2)\geq 3\cdots②\end{cases}$$

① 에서 $x\neq 3$이고

$|x-3|<3^4,\ -81<x-3<81,$

$-78<x<84\,(x\neq 3)\cdots$ ①

② 에서

$\log_2 x(x-2)\geq 3$

$x(x-2)\geq 2^3$

$x^2-2x-8\geq 0$

$(x-4)(x+2)\geq 0$

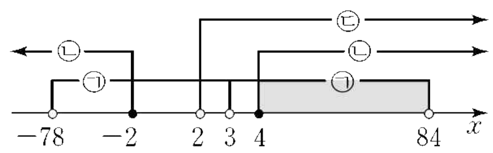
$\therefore\ x\leq -2$ 또는 $x\geq 4\cdots$②

진수는 양수이므로

$x>0$이고 $x-2>0$

$\therefore\ x>2\cdots$③

① , ②, ③의 공통 범위를 구하면



$\therefore\ 4\leq x<84$

따라서, 정수 x의 개수는 $84-4=80$

41) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ 에 대하여

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$

$=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4}{4+2\cdot 4^x}$

$=\dfrac{4^x+2}{4^x+2}=1$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}f\left(\frac{k}{101}\right)=f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{2}{101}\right)+\cdots+f\left(\frac{100}{101}\right)$

$=\left\{f\left(\dfrac{1}{101}\right)+f\left(\dfrac{100}{101}\right)\right\}+\left\{f\left(\dfrac{2}{101}\right)+f\left(\dfrac{99}{101}\right)\right\}$

$+\cdots+\left\{f\left(\dfrac{50}{101}\right)+f\left(\dfrac{51}{101}\right)\right\}$

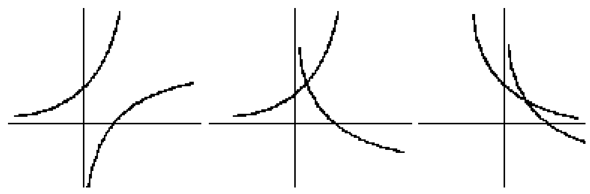
$=1+1+\cdots+1$, ($\because$ ㄴ에 의해)

$=50$ (참)

42) 답 : ⑤

[해설]

각각의 경우를 그래프로 그리면 다음과 같다.



ㄱ ㄴ ㄷ

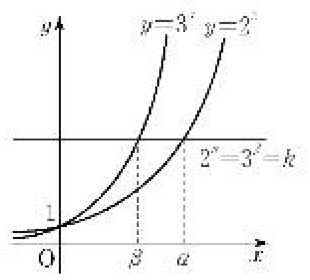
그림에서 두 그래프가 항상 만나는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

43) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $n+3>n+2$에서 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2(n+3)>\log_2(n+2)\ \therefore$ 참



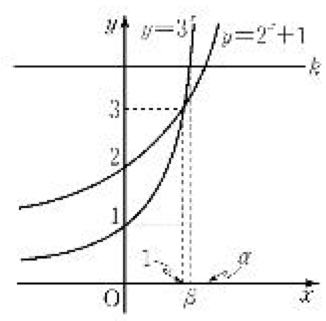
ㄴ. $\log_2(n+2)=\alpha,\ \log_3(n+2)=\beta$로 놓으면

$n+2=2^\alpha,\ n+2=3^\beta$

즉, $2^\alpha=3^\beta$이고 이때, 그림에서 알 수 있듯이

$2^\alpha=3^\beta=k$이면 $\alpha>\beta$이므로

$\log_2(n+2)>\log_3(n+2)\ \therefore$ 참



ㄷ. $\log_2(n+2)=\alpha,\ \log_3(n+3)=\beta$로 놓으면

$n+2=2^\alpha,\ n+3=3^\beta$

즉, $2^\alpha-2=3^\beta-3$에서 $2^\alpha+1=3^\beta$

이때, n이 자연수이므로 $\alpha>1,\ \beta>1$이고 또,

$y=2^\alpha+1,\ y=3^\beta$의 그래프는 다음과 같다.

$2^\alpha+1=3^\beta=k$일 때, $\alpha>\beta$이므로

$\log_2(n+2)>\log_3(n+3)\ \therefore$ 참

44) 답 : 16

[해설]

$(\log_2 x)^3+3\log_2 x=4(\log_2 x)^2+\log_2 x$

$\log_2 x=t$ 로 치환하면 $t^3+3t=4t^2+t$

$t^3-4t^2+2t=0$

$t(t^2-4t+2)=0$

$\therefore\ t=0,\ t^2-4t+2=0$

(i) $t=0$ 일 경우 $\log_2 x=0$

$\therefore\ x=1$

(ii) $t^2-4t+2=0$ 일 경우 $(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2=0$

위 식을 만족하는 x 의 값을 α,β 라 하면

$\log_2\alpha+\log_2\beta=4$

$\log_2\alpha\beta=4$

$\therefore\ \alpha\beta=2^4=16$

(i), (ii)에서 구하는 해의 곱은 $1\times 16=16$

45) 답 : ③

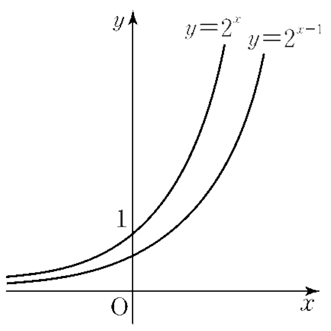
[해설]

① . $y=2^x$ 의 x 축 대칭은 $-y=2^x\ \therefore\ y=-2^x$

또, $y=\dfrac{1}{2^x}=2^{-x}$ 즉, 옳지 않다.

② . $y=2^x\to y=2^{x-1}$ (x 축 방향으로 1만큼 평행이동)

즉, 그 그래프는 아래와 같으므로 옳다.



③ . $y=\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^x=x^{2+\frac{1}{2}}$

즉, $y=2^x\to y=2^{x+\frac{1}{2}}$

(즉, x 축 방향으로 $-\dfrac{1}{2}$ 만큼 평행이동)

$\therefore$ 옳다.

46) 답 : ③

[해설]

$f(t+c)=3^{-t-c},\ \dfrac{1}{2}f(t)=\dfrac{1}{23^{-t}}$

$\therefore\ 3^{-t-c}=\dfrac{1}{23^{-t}}$

$3^{-c}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $3^c=2$

$\therefore\ c=\log_3 2$

47) 답 : ④

[해설]

$f(x)=\log_9(5-x)+\log_3(x+4)\ =\dfrac{1}{2}\log_3(5-x)+\log_3(x+4)$

$=\dfrac{1}{2}\{\log_3(5-x)+2\log_3(x+4)\}$

$=\dfrac{1}{2}\log_3(5-x)(x+4)^2$

진수 조건에서 $5-x>0,\ x+4>0\Rightarrow -4<x<5$

$g(x)=(5-x)(x+4)^2$ 이라 놓으면

$g'(x)=-(x+4)^2+(5-x)\cdot 2(x+4)=-3(x-2)(x-4)$

$-4<x<5$ 에서 $g'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=2$

증감을 조사하면 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이면서 최대이고,

최댓값은 $g(2)=3\cdot 6^2=108$

$f(x)$ 의 최댓값은

$\dfrac{1}{2}\log_3 108=\dfrac{1}{2}\log_3(3^3\cdot 2^2)=\dfrac{1}{2}(3+2\log_3 2)=\dfrac{3}{2}+\log_3 2$

48) 답 : ③

[해설]

$3^{x+2}=96$ 이고 $3^4=81,\ 3^5=243$ 이며

그런데 $81<96<243$ 이므로

$3^4<3^{\alpha+2}<3^5\to 4<\alpha+2<5$

$\therefore\ 2<\alpha<3$

49) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 대소관계를 묻는 문제이다.

$\dfrac{27}{9^x}\geq 3^{x-9}$ 양 변에 양수 9^x 를 곱한다.[그냥 지수법칙을 써도 된다.]

$3^3\geq 9^x\times 3^{x-9}=3^{2x}\times 3^{x-9}=3^{3x-9}$

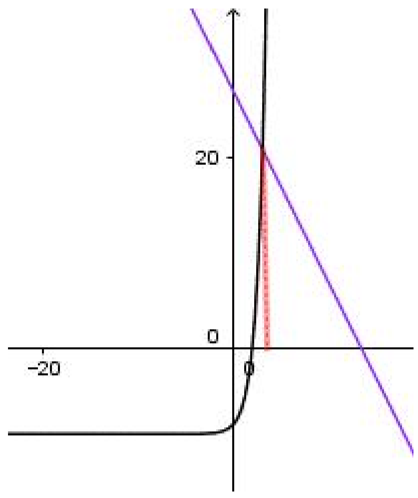
$3^3\geq 3^{3x-9}$

$3\geq 3x-9$

$4\geq x$

만족하는 자연수 x 는 4개이다.

[참고] $3^{3-2x}\geq 3^{x-9}$ 의 양변의 그래프는 아래와 같다.



[다른 풀이]

$\dfrac{27}{9^x}\geq 3^{x-9}$ 를 정리하면

$3^x\times 3^{2x}\leq 3^3\times 3^9$ 이므로

$3x\leq 12$ 이다.

$x\leq 4$ 인 자연수는 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 이다.

따라서 x의 개수는 4개다

50) 답 : ②

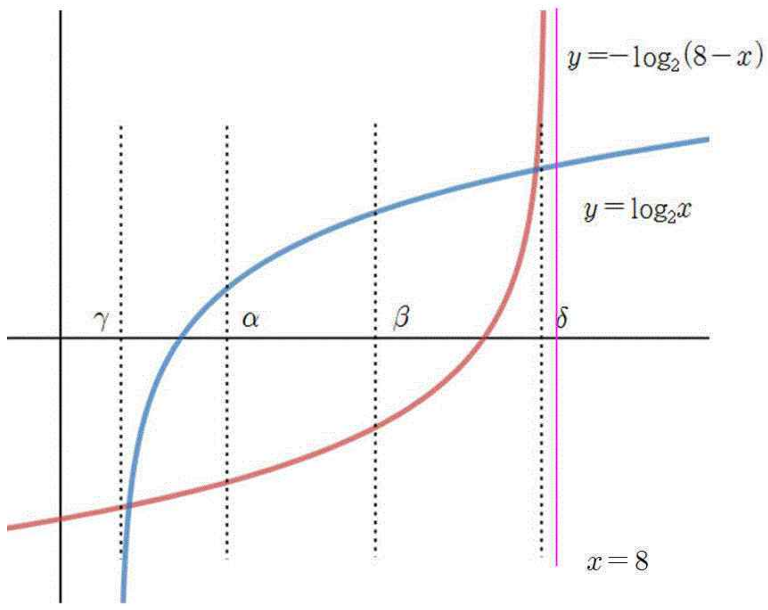
[해설]

$|\log_2 x-(-\log_2(8-x)|=2$

i) $\log_2 x>-\log_2(8-x)$ $\left(x>\dfrac{1}{8-x}\right)$일 때,

$\log_2 k-(-\log_2(8-k))=2$

$k(8-k)=2^2$



$k^2-8k+4=0$의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta=4$

ii) $\log_2 x<-\log_2(8-x)$ $\left(x<\dfrac{1}{8-x}\right)$일 때,

$-\log_2(8-k)-\log_2 x=2$

$k(8-k)=2^{-2}$

$k^2-8k+\dfrac{1}{4}=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma\delta=\dfrac{1}{4}$이다.

$\therefore$ $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=1$

51) 답 : 4

[해설]

방정식 $3^{-x+2}=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$에서

$-x+2=-2$

$\therefore$ $x=4$

52) 답 : ③

[해설]

i) 진수조건에 의해 $\begin{cases}x-1>0\\4x-7>0\end{cases}$이므로 $x>\dfrac{7}{4}$

ii) 부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$에서

$\log_3(x-1)(4x-7)\le\log_3 27$

$(x-1)(4x-7)\le 27$

$4x^2-11x-20=(x-4)(4x+5)\le 0$

따라서 $-\dfrac{5}{4}\le x\le 4$

i) ii) 에 의해 $\dfrac{7}{4}<x\le 4$이므로

따라서, 만족하는 정수 $x=2, 3, 4$이므로 3개이다.

53) 답 : ②

[해설]

주어진 식의 진수 조건에 의해

$-4<x<4$이다.

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$

$\Leftrightarrow\log_2(16-x^2)=\log_2 8$

따라서 $x^2=8$

$x=\pm 2\sqrt{2}$ 이고

두 근 모두 진수조건의 범위 안에 들어가므로

따라서, 두 근의 곱은 -8

54) 답 : ③

[해설]

$A(1,0)$, $B(3,0)$, $P(k,\log_2 k)$, $Q(k,\log_2(k-2))$로부터

점 Q가 선분 PR의 중점이므로

$2\times\log_2(k-2)=\log_2 k\Rightarrow(k-2)^2=k$

$\therefore$ $k=4$ ($\because$ $k>3$)

$\square ABQP=\triangle ARP-\triangle BRQ$

$=\dfrac{1}{2}\times3\times2-\dfrac{1}{2}\times1\times1$

$=\dfrac{5}{2}$

55) 답 : 15

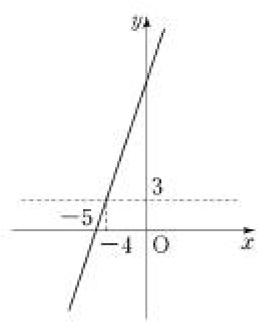
[해설]

$y=f(x)$는 일차함수이므로 $f(x)=ax+b$라 하면,

$f(-5)=-5a+b=0$ ⋯ ①

$2^{f(x)}\le 8=2^3$에서 $f(x)\le 3$의 해가

$x\le -4$이므로



위 그림에서 $f(-4)=3$임을 알 수 있고,

$f(-4)=-4a+b=3$ ⋯ ②

① , ②를 연립하면

$a=3$, $b=15$

$f(0)=b=15$

56) 답 : ④

[해설]

[해설]

$y=\log_3 x$를 x축으로 a만큼, y축으로 2만큼 평행이동시키면

함수 $y=\log_3(x-a)+2$이므로

$x-a=3^{f(x)-2}$

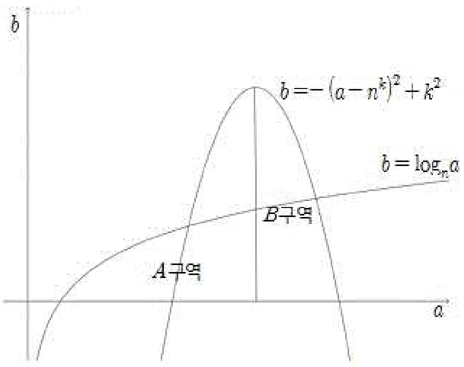
$x=3^{f(x)-2}+a$

$\therefore$ 역함수 $f^{-1}(x)=3^{f(x)-2}+a$

$\therefore$ $a=4$

57) 답 : 120

[해설]



$\therefore$ A구역에서의 순서쌍의 개수

$=k\times n^k-(n+n^2+\cdots+n^k)$

$=k\times n^k-\dfrac{n(n^k-1)}{n-1}$

$=\left(k-\dfrac{n}{n-1}\right)\times n^k+\dfrac{n}{n-1}$

B구역에서 순서쌍의 개수를 b_k라 하면,

$b_k=k^2+(k^2-1^2)+(k^2-2^2)+\cdots+\{k^2-(k-1)^2\}$

$=k^3-\dfrac{(k-1)\times k(2k-1)}{6}$

$=\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$

$\therefore$ $n=2$일 때 순서쌍의 개수는

$(k-2)\times 2^k+2+b_k>300 : k\geq 6$

$n=3$일 때

$\left(k-\dfrac{3}{2}\right)\times 3^k+\dfrac{3}{2}+b_k>300 : k\geq 5$

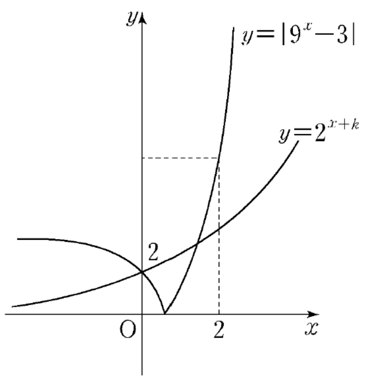
$n=4$일 때

$\left(k-\dfrac{4}{3}\right)\times 4^k+\dfrac{4}{3}+\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}b_k>300 : k\geq 4$

$f(2)\times f(3)\times f(4)=120$

58) 답 : ②

[해설]



주어진 두 함수를

$f(x)=|9^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$라 하면

i) $x<0$에서

$f(x)$는 $y=3$에 점근하고 $f(0)=2$이고, $g(x)$는 x축에 점근하고 $g(0)=2^k$이다. 이때, $f(x)=g(x)$를 만족하는 $x<0$인 실수가 존재하려면, $2<2^k$이어야 한다.

$\therefore$ $k>1$ $\cdots$ ㉠

ii) $x>0$에서

$f(0)=2$, $f(2)=78$이고 $g(0)=2^k$

$g(2)=2^{2+k}$이다.

$f(0)<g(0)$ ($\because$㉠)이므로 $f(x)=g(x)$를 만족하는 $0<x<2$인 실수가 존재하려면 $f(2)>g(2)$이어야 하므로 $78>2^{2+k}$

$\therefore$ $k<\log_2 78-2=4.\times\times$

i), ii)에 의하여 조건을 만족하는 자연수 k는 2, 3, 4이므로 자연수 k의 합은 9이다.

59) 답 : 32

[해설]

지수함수 $f(x)$는 증가함수이고, 지수함수 $g(x)$는 감소함수이므로 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 각각 $f(3), g(-1)$이 최댓값을 갖는다.

따라서 $ab=8\times 4=32$이다.

60) 답 : ③

[해설]

곡선 $y=g(x)$의 점근선은 $x=\dfrac{1}{a}$이고

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점은 $\left(\dfrac{2}{b}\ ,0\right)$이므로

만족하는 관계식은 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}$ $\therefore$ $b=2a$

이때, $0<a<1<b$이고 $b>1$이므로 $2a>1$ $\therefore$ $\dfrac{1}{2}<a<1$

따라서 구하는 정답은 $b=2a$ $\left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$

61) 답 : 14

[해설]

$\log_8 x-\log_8(x-7)=\dfrac{1}{3}$

$\log_8\dfrac{x}{x-7}=\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{x}{x-7}=2$

$x=2x-14$

$\therefore$ $x=14$

62) 답 : ⑤

[해설]

$A(1\ ,0)$이고, $\log_2(x+1)-1=1$에서 $x+1=4$,

즉 $x=3$이므로 $C(3\ ,1)$

또, $B(0, -1)$이고 $3^{x+1}-2=-1$에서 $x+1=0$,

즉 $x=-1$이므로 $D(-1, -1)$

따라서 $\overline{AC}=3$, $\overline{DB}=1$, $\overline{AB}=2$이므로 사다리꼴 $ABCD$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times(3+1)\times 2=4$

63) 답 : 196

[해설]

$(x-a)^2+(y-b)^2=1=2^0$ ⋯⋯ ㉠

$(x-a)^2+(y-b)^2=4=2^2$ ⋯⋯ ㉡

곡선 $y=2^x$ 이 원 과 만나지 않는다.

(다) 곡선 $y=2^x$ 이 원 ㉠과는 만나지 않고 원 ㉡과 적어도 한 점에서 만나므로

$a=1$ 일 때, $2^2<b\le 2^3$

$a=2$ 일 때, $2^0<b\le 2^1$ 또는 $2^3<b\le 2^4$

$a=3$ 일 때, $2^1<b\le 2^2$ 또는 $2^4<b\le 2^5$

$a=4$ 일 때, $2^2<b\le 2^3$ 또는 $2^5<b\le 2^6$

$a=5$ 일 때, $2^3<b\le 2^4$ 또는 $2^6<b\le 100$

$a=6$ 일 때, $2^4\le b<2^5$

$a=2$ 일 때, $2^5\le b<2^6$

$a=2$ 일 때, $2^6\le b<100$

이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 (a,b)의 개수는

$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)+(2^3+36)+2^4+2^5+37$

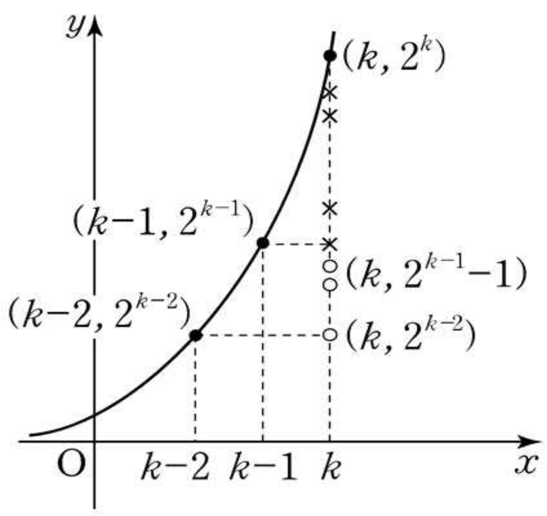
$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+37+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36$

$=\dfrac{1(2^6-1)}{2-1}+\dfrac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73$

$=63+60+73=196$

[다른 풀이]

i) 순서쌍 (a,b)가 영역 $y<2^x$ 에 있을 때



$a=k$ 일 때 조건을 만족하는 b는

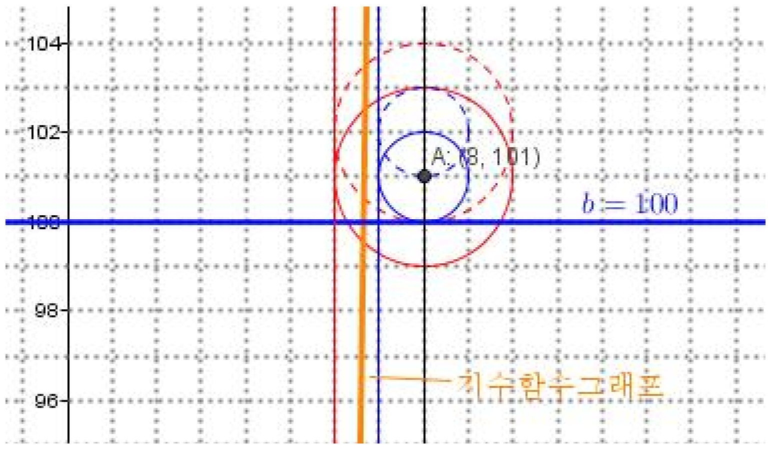
$b=2^{k-2},\ 2^{k-2}+1,\ \ldots,\ 2^{k-1}-1$ 이므로

순서쌍 (a,b)의 개수는 $2^{k-1}-2^{k-2}$ 이다.

(단, $b\le 100$ 이다.)

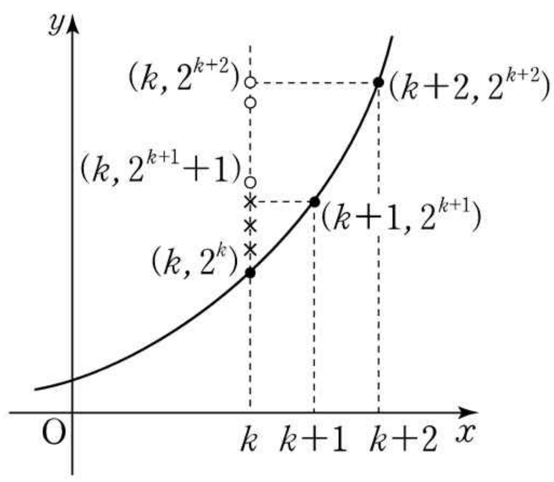
k	순서쌍 (a,b)의 개수
1	0
2	2^1-2^0
3	2^2-2^1
4	2^3-2^2
5	2^4-2^3
6	2^5-2^4
7	2^6-2^5
8	$101-2^6$
합계	100

중심이 (8, 101)일 때에도 아래 그림처럼 반지름이 2인 빨간 원은 지수함수와 만나고 작은 원과 만나지 않는다.



(a,b)가 영역 $y<2^x$ 에 있을 때는 100개이다.

ii) 순서쌍 (a,b)가 영역 $y>2^x$ 에 있을 때



$a=k$ 일 때 조건을 만족하는 b는

$b=2^{k+1}+1,\ 2^{k+1}+2,\ \cdots,\ 2^{k+2}$ 이므로

순서쌍 (a,b)의 개수는 $2^{k+2}-2^{k+1}$ 이다.

(단, $b\le 100$ 이다.)

k	순서쌍 (a,b)의 개수
1	2^3-2^2
2	2^4-2^3
3	2^5-2^4
4	2^6-2^5
5	$100-2^6$
합계	96

(a,b)가 영역 $y>2^x$ 에 있을 때는 96개이다.

i), ii)에서 순서쌍 (a,b)의 개수는 196이다.

64) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 직선의 기울기를 구한다.

$2=4^x$ 에서 $x=\log_4 2=\dfrac{1}{2}$ 이므로 점 A의 좌표는

$A\left(\dfrac{1}{2},\ 2\right)$

$2=2^x$ 에서 $x=1$ 이므로 점 B의 좌표는

$B(1,\ 2)$

C의 y좌표는 $y=4^1=4$ 이므로

$C(1,\ 4)$

$4=2^x$ 에서 $x=2$ 이므로 점 D의 좌표는

$D(2,\ 4)$

따라서 직선 AD의 기울기는

$$\frac{4-2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

65) 답 : 11

[해설]

진수 조건에서 $-7<x<7$

부등식을 풀면 $(7-x)(7+x)>16 \Leftrightarrow x^2<33$

$-\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$

따라서 $-\sqrt{33}<x<\sqrt{33}$ 인 x는 11개다.

66) 답 : 16

[해설]

$12m$에서의 풍속이 $2m/s$이고 $36m$에서의 풍속이 $8m/s$이다.' 를

주어진 식에 대입하면, $8=2\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 이다. 정리하면

$4=3^{\frac{2}{2-k}}$ ...①

$10m$에서의 풍속이 am/s이고 $90m$에서의 풍속이 bm/s이다.' 를

주어진 식에 대입하면

$b=a\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 이다.

따라서

$\frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=\left\{3^{\frac{2}{2-k}}\right\}^2=4^2$(왜냐하면 ①)$=16$

67) 답 : ⑤

[해설]

$A(1,\ 0),\ B(t,\ 2\sqrt{2}),\ C(t,\ 0)$ 이므로

$f(t)=\frac{1}{2}(t-1)\cdot 2\sqrt{t}=(t-1)\sqrt{t}$

$f'(t)=\sqrt{t}+\frac{t-1}{2\sqrt{t}}$ 이므로

$f'(9)=3+\frac{8}{6}=\frac{13}{3}$

68) 답 : ③

[해설]

$\log P_1=8.11-7$ ⋯㉠

$\log P_2=8.11-\frac{25}{4}$ ⋯㉡

㉡-㉠에서 $\frac{\log\{P_2\}}{P_1}=\frac{3}{4}$

$\therefore\ \frac{P_2}{P_1}=10^{\frac{3}{4}}$

69) 답 : 4

[해설]

방정식 $x^{\log_2 x}=8x^2$의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$(\log_2 x)^2=3+2\log_2 x$ 이다.

방정식 $(\log_2 x)^2-2(\log_2 x)-3=0$의 두 실근이 α,β이므로,

$\log_2 x=t$라고 치환하면

$t^2-2t-3=0$의 두 실근은 $\log_2\alpha,\ \log_2\beta$이다.

근과 계수와의 관계에 의해서

$\log_2\alpha+\log_2\beta=\log_2\alpha\beta=2$ 이다.

$\therefore\ \alpha\beta=4$

70) 답 : 125

[해설]

[출제 의도] 로그방정식으로 표현된 관계식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$C=40$일 때 $I=5$이므로

$5=k\log 40+a$ ⋯ ①

$C=10$일 때 $I=4$이므로

$4=k\log 10+a$ ⋯ ②

① − ② 에서

$1=k(\log 40-1)=k\log 4$

$\therefore\ k=\frac{1}{\log 4}=\log_4 10$

② 에 대입하면

$a=4-\log_4 10$

$\therefore\ I=(\log_4 10)\log C+4-\log_4 10$

$C=p$일 때 $I=2.5$이므로

$2.5=\log_4 10\times\log p+4-\log_4 10$

$-1.5=(\log p-1)\log_4 10$

$\therefore\ \frac{\log\{p\}}{10}=-1.5\log 4=\log 4^{-\frac{3}{2}}=\frac{\log\{1\}}{8}$

따라서 $\frac{p}{10}=\frac{1}{8}$ 이므로 $p=1.25$

$\therefore\ 100p=125$

71) 답 : ③

[해설]

[해설] ' $12m$에서의 풍속이 $2m/s$이고 $36m$에서의 풍속이 $8m/s$이다.' 를

주어진 식에 대입하면, $8=2\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 이다.

정리하면, $4=3^{\frac{2}{2-k}}$ ⋯ ①

주어진 식에 대입하면, $b=a\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ 이다.

따라서

$\frac{b}{a}=9^{\frac{2}{2-k}}=\left\{3^{\frac{2}{2-k}}\right\}^2=4^2(BECAUSE①)=16$

72) 답 : 36

[해설]

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$에서 $2^x-2^{-x}=t$라고 치환하면

$4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=t^2+2$이므로

원래의 주어진 방정식은 $t^2+at+9=0$이 실근을 가지면 되므로 판별식 $D\geq 0$이면 된다.

$a^2-4\cdot 9>0\Leftrightarrow(a+6)(a-6)\geq 0\Leftrightarrow a\leq -6$ 또는 $6\leq a$

따라서 양수 a의 최솟값 $m=6$이므로 $m^2=36$

73) 답 : ④

[해설]

$\overline{AB}=a-k=a-(-a+\log_2 15)=2a-\log_2 15$

$1<\overline{AB}<100$에서 $1<2a-\log_2 15<100$

$1+\log_2 15<2a<100+\log_2 15$

$3<\log_2 15<4$이므로 $4.\cdots<2a<103.\cdots$

$2.\cdots<a<51.\cdots$

따라서, $a=3,4,5,\cdots,51$ 즉, 49개다.

74) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]지수방정식의 해를 구할 수 있는가?

$2^x+2^{5-x}=33$에서 양변에 2^x을 곱하고 식을 정리하면

$(2^x)^2-33\cdot 2^x+32=0$

$(2^x-1)(2^x-32)=0$

따라서 $2^x=1$ 또는 $2^x=32$이므로

$x=0$ 또는 $x=5$이다.

따라서 모든 실근의 합은 5이다.

75) 답 : ②

[해설]

해설

주어진 함수 $y=\log_2(ax+b)$가 점 $(-1,0)$과 $(0,2)$를 지나므로,

$0=\log_2(-a+b)$

$2=\log_2(0+b)$를 만족한다.

따라서, $a=3, b=4$

그러므로 구하는 $a+b=7$

76) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]로그부등식을 풀 수 있는가?

메뉴가 10이고 항목이 n개씩이므로 걸리는 전체시간은

$10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}$

이때 $10\left\{2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\right\}\leq 30$에서

$2+\frac{1}{3}\log_2(n+1)\leq 3, \log_2(n+1)\leq 3$

$n+1\leq 2^3, n\leq 7$

따라서 n의 최댓값은 7이다.

77) 답 : ⑤

[해설]

해설

(1) $x>0$일 때,

$\log_2 x^2-\log_2 x\leq 3$

$\log_2 x\leq 3$

$\therefore\ 0<x\leq 8$

(2) $x<0$일 때,

$\log_2 x^2-\log_2(-x)\leq 3$

$\log_2(-x)\leq 3$

$\therefore\ -8\leq x<0$

(1)과(2)에서 정수 x의 개수는 16개

78) 답 : 25

[해설]

해설

$1\leq k\leq 100, n\in S$인 자연수에서

$S=\{k|k\in S$이고 $\log_2 n-\log_2 k$는 정수 $\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이므로

$f(n)=1$은 $\log_2 n-\log_2 k=m$(m은 정수)인 집합 S의 원소(k)가

1개인 n의 값을 구하는 문제이다.

$\log_2 n-\log_2 k=\log_2\frac{n}{k}=m$에서

$\frac{n}{k}=2^m$ ($1\leq k, n\leq 100$인 자연수)

이때, $\log_2\frac{n}{k}$이 정수여야 한다.

$k=n$이면 $\log_2\frac{n}{n}=1$(정수)이므로,

항상 $f(n)\geq 1$을 만족하게 된다.

그런데, $f(n)\geq 2$인 경우는 주어진 식의 값이 정수가 되는 k가 2개 이상 존재한다.

⑴ $k=2n$인 경우

$\log_2\frac{n}{2n}=-1$으로 정수가 된다.

$\therefore\ n\in S$이고, $2n\in S$을 만족

따라서 $0^\circ 2n\leq 100, 0\leq n\leq 50$

⑵ $k=\frac{n}{2}$인 경우

$\log_2\frac{n}{\frac{n}{2}}=1$으로 정수가 된다.

$\therefore\ n\in S$이고, $\frac{n}{2}\in S$을 만족

$\frac{n}{2}$이 정수가 되므로 n은 짝수

따라서 n이 짝수 또는 50이하의 정수이면, $f(n)\geq 2$가 된다.

그러므로, $f(n)=1$을 만족하도록 하는

자연수 n은 50이상의 홀수여야 한다.

$\therefore$ 25개

79) 답 : ④

[해설]

$\frac{16^x}{2}=2^{x+3}$에서 $16^x=2^{x+4}$

$\therefore\ 2^{4x}=2^{x+4}$에서 $4x=x+4$

$\therefore\ x=\frac{4}{3}$

80) 답 : ④

[해설]

$\log_2(x^2+x-2)<\log_2(-2x+2)$ 이므로

$x^2+x-2<-2x+2$

$x^2+3x-4<0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1)<0$

$\therefore\ -4<x<1 \cdots ①$

또 진수 조건에서

$x^2+x-2>0:(x+2)(x-1)>0$

$\therefore\ x<-2,\ x>1 \cdots ②$

$-2x+2>0:x<1 \cdots ③$

① , ②, ③을 만족하는 x범위는 $-4<x<-2$

$\alpha=-4,\ \beta=-2\ \therefore\ \alpha\beta=8$

81) 답 : 10

[해설]

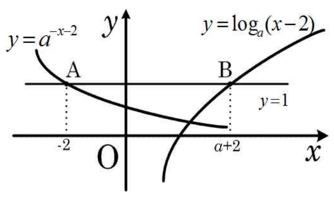
$2^x-8=0$에서 $x=3$

$3^{2x}-9=9^x-9=0$에서 $x=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=3^2+1^2=10$

82) 답 : ②

[해설]



$y=a^{-x-2}$에서 $y=1$일 때 x좌표는 -2

$y=\log_a(x-2)$에서 $y=1$일 때 x좌표는 $a+2$

$\overline{AB}=(a+2)-(-2)=a+4$

$a+4=8$이므로 $a=4$

83) 답 : ②

[해설]

$\frac{1}{3}<x<9$에서 $\log_3\frac{1}{3}<\log_3x<\log_3 9,\ -1<\log_3x<2 \cdots ①$

$(1+\log_3x)(a-\log_3x)>0$에서 $(\log_3x+1)(\log_3x-a)<0$

이 부등식의 해가 ①이므로 $a=2$

84) 답 : ②

[해설]

$t_1=10$일 때, $T_1=200,\ t_2=20$일 때, $T_2=202$이므로

$k=c\times\frac{\log t_2-\log t_1}{T_2-T_1}=c\times\frac{\log 2}{2}$

한 편, $t=x$일 때 $T=206$이므로

$k=c\times\frac{\log x-\log 20}{T-T_2}$ 이고

$c\times\frac{\log 2}{2}=c\times\frac{\log x-\log 20}{4}$

$\log 4=\log x-\log 20\ \therefore\ x=80$

85) 답 : ⑤

[해설]

$S=NQ^{\frac{1}{2}}H^{-\frac{3}{4}}$에서

$Q=24,\ H=5$일 때, $S_1=N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}$

$Q=12,\ H=10$일 때,

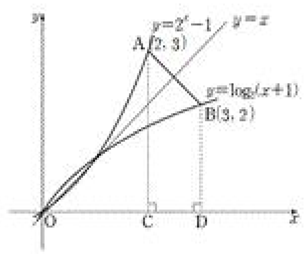
$S_2=N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{N\times24^{\frac{1}{2}}\times5^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}}$

$=\frac{N\times2^{\frac{1}{2}}\times12^{\frac{1}{2}}\times10^{-\frac{3}{4}}}{N\times12^{\frac{1}{2}}\times2^{-\frac{3}{4}}\times5^{-\frac{3}{4}}}$

$=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{-\frac{3}{4}}}=2^{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=2^{\frac{5}{4}}$

86) 답 : ①

[해설]



$y=\log_2(x+1)$는 $y=2^x-1$의역함수이고

$\overline{AB}$를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로

점 B는 점 A의 $y=x$에 관한 대칭점이다.

$\therefore\ B=(3,2)$

$\{\square ACDB\}=\frac{1}{2}(3+2)\times1=\frac{5}{2}$

87) 답 : ③

[해설]

선분 AC가 y축에 평행하므로

두 점 $A,\ C$의 좌표를 각각 $A(t,\log_2 4t),\ B(t,\log_2 t)\ (t>1)$라고 하면

$\overline{AB}=\log_2 4t-\log_2 t=\log_2\frac{4t}{t}=2$

선분 AC의 중점을 M이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$

따라서 점 B의 좌표는 $B(t-\sqrt{3},\ \log_2 4(t-\sqrt{3})$이고

$\overline{AB}=\sqrt{(t-\sqrt{3}-t)^2+\{\log_2 4(t-\sqrt{3})-\log_2 4t\}^2}$

$=\sqrt{3+\left\{\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}\right\}^2}=2$이므로

$\log_2\frac{(t-\sqrt{3})}{t}=\pm1$이다.

그런데 $t>1$이므로 $\frac{t-\sqrt{3}}{t}<1$

따라서 $\log_2 \dfrac{(t-\sqrt{3})}{t}=-1$ 이고 $\dfrac{(t-\sqrt{3})}{t}=\dfrac{1}{2}$, $2(t-\sqrt{3})=t$

$\therefore\ t=2\sqrt{3}$

이때 점 B의 좌표는 $B(\sqrt{3},\ \log_2 4\sqrt{3})$이므로

$p=\sqrt{3},\ q=\log_2 4\sqrt{3}$

$\therefore\ p^2\times 2^q=(\sqrt{3})^2\times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}=3\times 4\sqrt{3}=12\sqrt{3}$

88) 답 : 36

[해설]

(1)진수조건에 의하여 $0<x<12$인 정수이고

(2) $\log_3 x+\log_3(12-x)\leq 3$

$\log_3 x(12-x)\leq 3$

$x(12-x)\leq 3^3$

$x^2-12x+27\geq 0$

$x\leq 3,\ x\geq 9$

(1)과(2)에 의하여 만족하는 x는 1, 2, 3, 9, 10, 11이므로

x값의 합은 36

89) 답 : 3

[해설]

$2^x=t$라 가정하고 주어진 식의 양변에 t를 곱하면

$6t-t^2=8$

$\therefore\ t^2-6t+8=(t-2)(t-4)=0$이므로 $t=2$또는 4이다.

$\therefore\ 2^x=2,\ 2^x=4$이어야 한다.

따라서 $x=1$또는 $x=2$이므로 모든 실근의 합은 3이다.

90) 답 : 65

[해설]

$9^x-3^{x+2}+8=0$에서 $3^x=t(t>0)$이라 놓으면

$t^2-9t+8=0$에서 $(t-1)(t-8)=0$

$\therefore\ t=1,\ 8$이므로 $3^x=1,\ 8=3^{\alpha},\ 3^{\beta}$

따라서, $3^{2\alpha}+3^{2\beta}=1^2+8^2=65$

91) 답 : 16

[해설]

$1+\log_{\frac{1}{2}}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$에서

(1)진수조건에 의해 $x^2>0$, $5x-8>0$

$\therefore\ x>\dfrac{8}{5}\cdots$①

(2)준식을 정리하면 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}x^2>\log_{\frac{1}{2}}(5x-8)$

따라서, $\dfrac{1}{2}x^2<5x-8$이며 정리하면 $x^2-10x+16<0$

$(x-2)(x-8)<0$

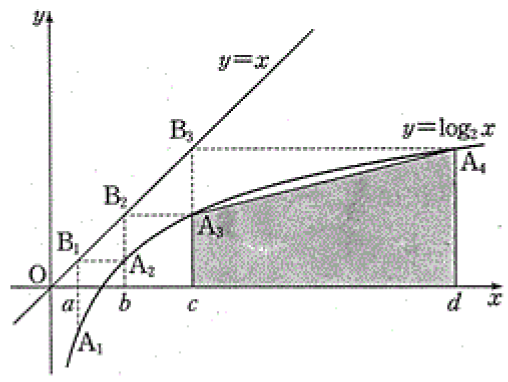
$\therefore\ 2<x<8\cdots$②

① , ②에 의하여 $2<x<8$

따라서, $\alpha\beta=2\times 8=16$

92) 답 : ①

[해설]



$y=\log_2 x$의 역함수는 $y=2^x$이므로 위 그림에서

$f(a)=2^a=b$

$f(b)=2^b=c=f(f(a))=(f\circ f)(a)$

$f(c)=2^c=d=f(f(b))=(f\circ f)(b)$

위 그림의 사다리꼴의 넓이는

$\dfrac{1}{2}(b+c)(d-c)=\dfrac{1}{2}\{f(b)+f(a)\}\{(f\circ f)(b)-(f\circ f)(a)\}$

93) 답 : ⑤

[해설]

10년전의 중심온도를 u_A, 현재의 중심온도를 u_B, 농촌온도를 r,

도시화된 지역의 넓이를 a라 하면

$u_A=r+0.65+1.6\log a\cdots$①

$u_B=r+0.65+1.6\log 1.25a\cdots$②로 나타낼 수 있다.

이때, $x=u_B-u_A$이므로

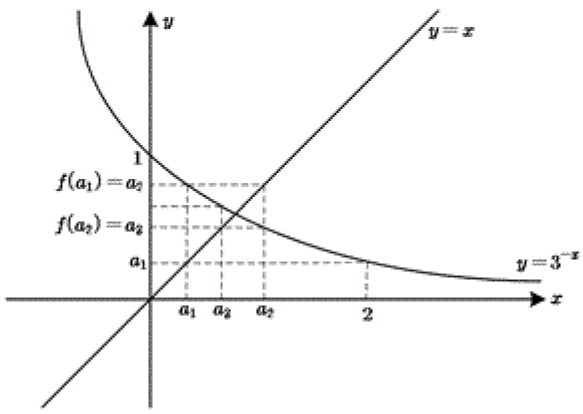
② -①에 의해

$x=1.6\dfrac{\log 5}{4}=1.6\dfrac{\log 10}{8}=1.6(1-3\log 2)$

$=1.6\times 0.1=0.16$

94) 답 : ⑤

[해설]



위의 그림에서 $a_{n+1}=f(a_n)$이다.

$a_2=f(a_1)$

$a_3=f(a_2)=f(f(a_1))$

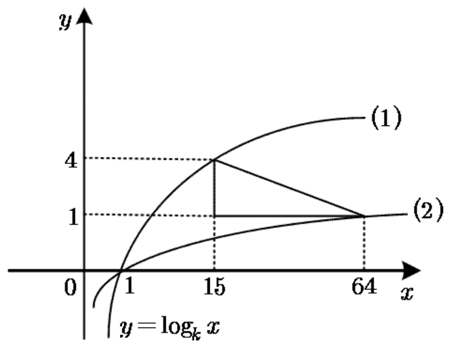
$a_4=f(a_3)=f(f(a_2))=f(f(f(a_1)))$이므로

위의 그림에서 y축상의 $a_2,\ a_3,\ a_4$ 사이의 대소관계는

$a_2>a_4>a_3$이다.

95) 답 : 63

[해설]



$y=\log_k x$ 에서 k는 자연수이므로 증가함수이다.

$y=\log_k x$ 는 $(15,\ 4)$와 $(64,\ 1)$사이를 지날 때 만나므로

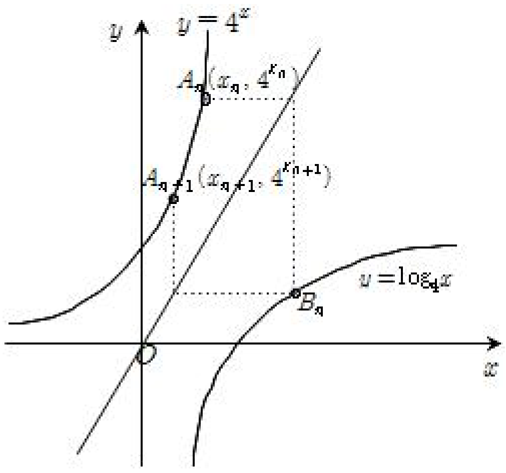
$(15,\ 4)$를 지날 때 $4=\log_k 15$ 이므로 $k=\sqrt[4]{15}$

$(64,\ 1)$을 지날 때 $1=\log_k 64$ 이므로 $k=64$

$\sqrt[4]{15}\le k\le 64$ 이고 $1<\sqrt[4]{15}<2$ 이므로 자연수의 개수는 2부터 64까지 63개다.

96) 답 : ⑤

[해설]



A_n의 x좌표를 x_n이라고 가정하면 $A_n=\left(x_n,\ 4^{x_n}\right)$이고

$y=2x$ 와의 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\times 4^{x_n},\ 4^{x_n}\right)$이다.

따라서 $y=\log_4 x$에 $x=\frac{1}{2}\times 4^{x_n}$를 대입하면

B_n의 y좌표는 $y=\log_{2^2}2^{2x_n-1}=\frac{2x_n-1}{2}$ 이다.

따라서 $y=2x$에 다시 대입하면 $\frac{2x_n-1}{2}=2x_{n+1}$이다.

$\therefore\ x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{4}$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\alpha$라 놓으면 $\alpha=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}$

$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\frac{1}{2}$

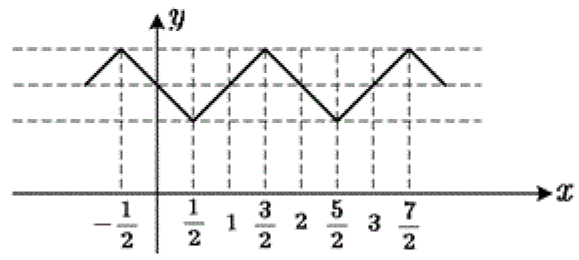
97) 답 : ②

[해설]

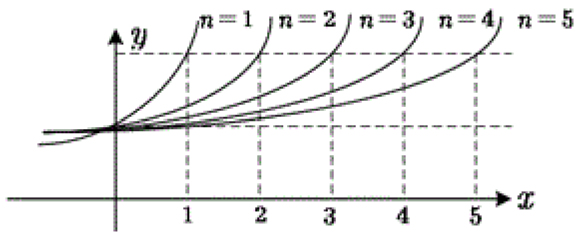
$y=f(x)$의 그래프는

$-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$ 에서 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1$ 이고

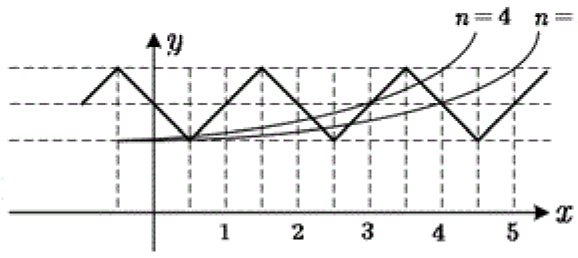
주기가 2인 주기함수이므로 다음과 같다.



그리고, $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프는 다음과 같다. .



이때, $y=f(x)$와 $y=2^{\frac{x}{n}}$ 의 교점의 개수가 5개이려면 다음의 그래프와 같이 $n=4$또는 $n=5$일 때 뿐이다.



따라서 n의 값의 합은 $4+5=9$이다.

98) 답 : ①

[해설]

y축 위의 점은 x좌표가 0이므로

$y=3^{x+m}$ 이 y축과 만나는 점은 $A\left(0,\ 3^m\right)$

$y=3^{-x}$ 이 y축과 만나는 점은 $B(0,\ 1)$

$\overline{AB}=\left|3^m-1\right|=8$ 에서 $m=2$

99) 답 : ②

[해설]

$\left|a-\log_2 x\right|\le 1$

$\Leftrightarrow -1\le a-\log_2 x\le 1$

$\Leftrightarrow a+1\le \log_2 x\le a-1$

$\Leftrightarrow 2^{a+1}\le x\le 2^{a-1}$

최댓값과 최솟값의 차는 $2^a\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot 2^a=18$

$\therefore\ 2^a=18\cdot\frac{2}{3}=12$

100) 답 : 13

[해설]

$2^x=X,\ 3^y=Y$라고 하면

$3X-2Y=6$

$\frac{1}{4}X-\frac{1}{3}Y=-1$

두 식을 연립하면

$X=8,\ Y=9$

$\therefore\ x=3,\ y=2$

$\alpha^2+\beta^2=13$

101) 답 : ⑤

[해설]

$\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)^2 - 20\log_9 x + 26 = 0$

$(\log_3 x - 1)^2 - 10\log_3 x + 26 = 0$

$(\log_3 x)^2 - 12\log_3 x + 27 = 0$

$(\log_3 x - 3)(\log_3 x - 9) = 0$

$\log_3 x = 3$ 또는 $\log_3 x = 9$

$\therefore\ x = 3^3,\ 3^9$

따라서, 두 근의 곱은 $3^3 \times 3^9 = 3^{12}$ 이다.

102) 답 : 17

[해설]

$f(2a)f(b) = 4,\ f(a-b) = 2$ 에서

$2^{-2a} \cdot 2^{-b} = 2^2,\ 2^{-(a-b)} = 2^1$ 이므로

$2a + b = -2 \cdots$①

$a - b = -1\ \cdots$②

$\therefore\ 3a = -3 \therefore\ a = -1\ b = 0$

$\therefore\ 2^{3a} + 2^{3b} = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$

$\therefore\ p + q = 17$

103) 답 : ④

[해설]

주어진 그래프는 $f(x) = x + 1$ 이므로

$y = 2^{2 - f(x)} = 2^{2 - (x+1)} = 2^{-(x-1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

따라서, 지수함수 중에서 감소하는 그래프를 찾으면 ④번이 된다.

104) 답 : 10

[해설]

$R = 0.67\log(0.37E) + 1.46$ 에서

지진의 규모가 6.15 일 때 방출되는 에너지가 E_1 이므로

$6.15 = 0.67\log(0.37E_1) + 1.46$

$\log(0.37E_1) = 7$

$0.37E_1 = 10^7 \cdots$①

지진의 규모가 5.48 일 때 방출되는 에너지가 E_2 이므로

$5.48 = 0.67\log(0.37E_2) + 1.46$

$\log(0.37E_2) = 6$

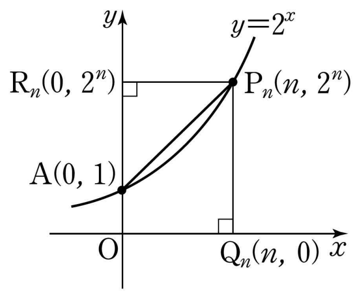
$0.37E_2 = 10^6 \cdots$②

① ÷②하면 $\frac{E_1}{E_2} = 10$

105) 답 : ①

[해설]

아래 그림에서



$\triangle AP_nR_n$ 의 넓이 $T_n = \frac{1}{2}(2^n - 1) \times n$

사각형 AOQ_nP_n 의 넓이 $S_n = \frac{1 + 2^n}{2} \times n$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{1 + 2^n} = 1$

106) 답 : ③

[해설]

두 함수 $f(x) = 2^{x-2} + 1,\ g(x) = \log_2(x-1) + 2$ 는 서로 역함수 관계이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수 관계이므로

$f^{-1}(5) = g(5)$

$f^{-1}(5) \cdot \{g(5) + 1\} = g(5) \cdot \{g(5) + 1\}$

$= 4 \cdot \{4 + 1\} = 20 \therefore$ 참

ㄴ. 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 서로 역함수 관계이므로

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $f(2) = 2,\ g(2) = 2$ 이므로

두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 점 $(2,\ 2)$ 에서 만난다.

$\therefore$ 거짓

107) 답 : ④

[해설]

점 A 의 x 좌표를 a, 점 B 의 x 좌표를 b 라 하면

$A(a,\ 2\log_2 a),\ B(b,\ 2^{b-3}),\ D(b,\ 2\log_2 b)$ 이고

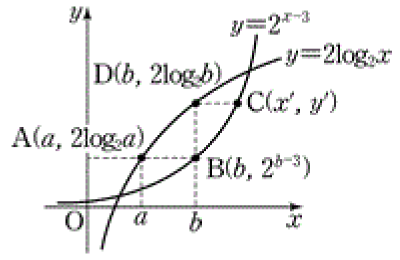
$\overline{AB} = 2$ 에서 $b - a = 2\ ...$①

$\overline{BD} = 2$ 에서 $2\log_2 b - 2\log_2 a = 2\ ...$②

($\because$ A 와 B 의 y 좌표가 같으므로)

① , ②에서 $\log_2 \frac{b}{b-2} = 1$ 이고 $b = 4,\ a = 2$

점 C 의 y 좌표가 점 D 의 y 좌표와 같으므로



점 C 의 좌표를 $(x',\ y')$ 라 하면

$y' = 2^{x'-3} = 2\log_2 4$ 이므로 $x' = 5,\ y' = 4$

$\therefore\ C(5,\ 4)$

$\triangle ABD$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\triangle BCD$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

따라서, 사각형 $ABCD$의 넓이는 3이다.

108) 답 : ③

[해설]

함수 $y=2^{x+n}$과 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의

교점의 좌표는 $2^{x+n}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에서 $x+n=-x$

$\therefore\ x=-\frac{n}{2},\ y=2^{\frac{n}{2}}$

$\therefore\ a_n=-\frac{n}{2},\ b_n=2^{\frac{n}{2}}$

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. ∴ 참

ㄴ. $b_mb_n=2^{\frac{m}{2}}2^{\frac{n}{2}}=2^{\frac{m+n}{2}}=b_{m+n}$ ∴ 참

ㄷ. $2b_n-b_{n+1}=2\cdot2^{\frac{n}{2}}-2^{\frac{n+1}{2}}=(2-\sqrt{2})2^{\frac{n}{2}}>0$이므로

$2b_n>b_{n+1}$ ∴ 거짓

109) 답 : ④

[해설]

$y=\log_2|5x|,\ y=\log_2(x+2)$의 교점의 x좌표를 구하면

$|5x|=x+2$에서

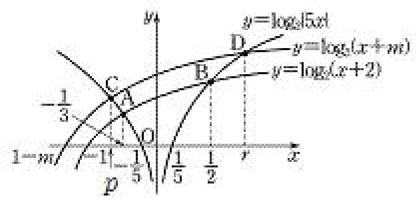
$x>0$일 때 $5x=x+2,\ x=\frac{1}{2}$

$x<0$일 때 $-5x=x+2,\ x=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ A\left(-\frac{1}{3},\ \log_2\frac{5}{3}\right)$ ∴ $B\left(\frac{1}{2},\ \log_2\frac{5}{2}\right)$

$y=\log_2|5x|$는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로

$y=\log_2|5x|,\ y=\log_2(x+2),\ y=\log_2(x+m)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $m>2$이므로 그림에서 $r>\frac{1}{2},\ p<-\frac{1}{3}$ ∴ 참

ㄴ. $y=\log_2|5x|,\ y=\log_2(x+m)$의 교점을 구하면

$|5x|=x+m$에서 $x=\frac{m}{4},\ -\frac{m}{6}$

$\therefore\ C\left(-\frac{m}{6},\ \log_2\frac{5m}{6}\right),\ D\left(\frac{m}{4},\ \log_2\frac{5m}{4}\right)$

직선 AB의 기울기는 $\dfrac{\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{6}{5}\log_2\frac{3}{2}$

직선 CD의 기울기는 $\dfrac{\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}}{\frac{m}{4}-\left(-\frac{m}{6}\right)}=\frac{12}{5m}\log_2\frac{3}{2}$

$m>2$이므로 $\frac{12}{5m}<\frac{6}{5}$

따라서, 두 직선의 기울기는 서로 다르다.

∴ 거짓

ㄷ. B의 y좌표와 C의 y좌표가 같으므로

$\log_2\frac{5}{2}=\log_2\frac{5m}{6}$ ∴ $m=3$

$\overline{BC}$가 공통이므로 $\overline{BC}$를 밑변으로 하면

$\triangle ABC$의 높이는 $\log_2\frac{5}{2}-\log_2\frac{5}{3}=\log_2\frac{3}{2}$

$\triangle DBC$의 높이는 $\log_2\frac{5m}{4}-\log_2\frac{5m}{6}=\log_2\frac{3}{2}$

따라서 $\triangle ABC,\ \triangle DBC$의 넓이는 같다.

∴ 참

110) 답 : ②

[해설]

초기 이산화탄소 농도 $C(0)=0.83$이고, 1시간 뒤

즉 $t=1$일 때 이산화탄소 농도 $C(1)=0.43$이므로

주어진 식에 $t=1$을 대입하면 환기량

$$Q=k\times\frac{V}{1}\frac{\log\{0.83-0.03\}}{0.43-0.03}=kV\cdot\log2\text{이다.}$$

이산화탄소 농도가 0.08%가 되는 t는

$$Q=k\times\frac{V}{t}\frac{\log\{0.83-0.03\}}{0.08-0.03}=\frac{4kV\log2}{t}\text{ 를 만족한다.}$$

그런데 환기량이 일정하므로

$$kV\log2=\frac{4kV\log2}{t}$$

$\therefore\ t=4$

111) 답 : ③

[해설]

진수 조건에서 $x-5>0,\ x-6>0$

$x>6\cdots$ ①

$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)(x-6)>\log_{\frac{1}{2}}2$

$(x-5)(x-6)<2$

$x^2-11x+28<0$

$(x-4)(x-7)<0$

$4<x<7\cdots$ ②

①, ②에서 $6<x<7$

$\therefore\ \alpha=6,\ \beta=7$

$\therefore\ \alpha+\beta=13$

112) 답 : ④

[해설]

$1\le\log n<3$에서 $10\le n<10^3$

$\log_2 10\le\log_2 n<\log_2 10^3$

따라서, $\log_2 n$의 정수값은 4에서 9까지 자연수이므로

만족하는 것은 6개다.

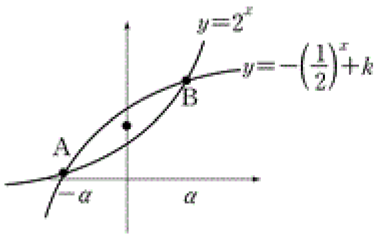
113) 답 : ⑤

[해설]

$2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+k$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$에서 $\beta=-\alpha$

선분 AB의 중점의 y좌표가 $\frac{5}{4}$이므로



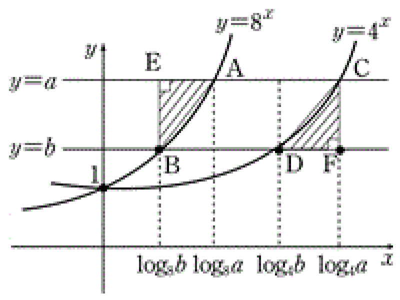
$$\frac{2^{\alpha}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}+k}{2}=\frac{5}{4}$$

$\frac{k}{2}=\frac{5}{4}$ ($\because$ $\beta=-\alpha$)

$\therefore$ $k=\frac{5}{2}$

114) 답 : ③

[해설]



$\triangle AEB=\frac{1}{2}(a-b)(\log_8 a-\log_8 b)=\frac{1}{2}(a-b)\cdot\frac{1}{3}\log_2 ab$

$\triangle CDF=\frac{1}{2}(a-b)(\log_4 a-\log_4 b)=\frac{1}{2}(a-b)\cdot\frac{1}{2}\log_2 ab$

$\therefore$ $\triangle CDF=\frac{3}{2}\triangle AEB=30$

115) 답 : 53

[해설]

$y=\log_2 x$를 x축의 양의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프는 $y=\log_2(x-a)$

점 $(9, 2)$는 곡선 $y=\log_2(x-a)$위의 점이므로

$2=\log_2(9-a)$ ...①

또, 점 $(9, 2)$는 $y=\log_b x$위의 점이므로

$2=\log_b 9$ ...②

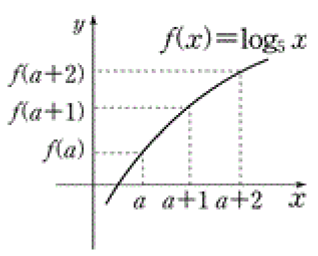
① 에서 $9-a=2^2$ $\therefore$ $a=5$

② 에서 $9=b^2$ $\therefore$ $b=3$ ($\because$ $b>0$)

$\therefore$ $10a+b=50+3=53$

116) 답 : ⑤

[해설]



ㄱ. $\left\{f\left(\frac{a}{5}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{a}{5}\right)^2=(\log_5 a-1)^2$

$\left\{f\left(\frac{5}{a}\right)\right\}^2=\left(\log_5\frac{5}{a}\right)^2=(1-\log_5 a)^2$

$\therefore$ 참

ㄴ. $f(a+1)-f(a)=\log_5(a+1)-\log_5 a=\log_5\left(1+\frac{1}{a}\right)$

$f(a+2)-f(a+1)=\log_5(a+2)-\log_5(a+1)$

$=\log_5\left(1+\frac{1}{a+1}\right)$

$1+\frac{1}{a}>1+\frac{1}{a+1}$ 이므로

$\log_5\left(1+\frac{1}{a}\right)>\log_5\left(1+\frac{1}{a+1}\right)$ $\therefore$ 참

ㄷ. $f^{-1}(x)=5^x$

$f(a)<f(b)$이면 $a<b$

$a<b$이면 $f^{-1}(a)<f^{-1}(b)$ $\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

117) 답 : ①

[해설]

$2^{x^2}<4\cdot 2^x=2^{x+2}$에서

$x^2<x+2 \Rightarrow x^2-x-2<0$

$\therefore$ $-1<x<2$

$\therefore$ $\alpha+\beta=-1+2=1$ [정답]①

118) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $y=a^{x-1}$를 x에 대하여 정리하면 $x-1=\log_a y$ 즉, $x=\log_a y+1$이다.

이제 x, y를 바꾸면 $y=\log_a x+1$이므로

함수 $y=a^{x-1}$의 역함수는 $y=\log_a x+1$이다.

따라서 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $a=3$이면 두 함수 $y=3^x$, $y=\log_3 x$의 그래프는 만나지 않는다.

따라서 두 함수 $y=-3^x$, $y=-\log_3 x$의 그래프는 만나지 않는다.

이때, $-\log_3 x=\log_{\frac{1}{3}} x$이므로

두 함수 $y=-3^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 만나지 않는다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=\log_a x$의 그래프는 점 $(a, 1)$을 지난다.

이때, 1보다 큰 양수 a에 대하여 $k=\frac{1}{a^a}$라 하면

$k>0$이고 함수 $y=ka^x$의 그래프는 점 $(a, 1)$을 지나므로

두 함수의 그래프가 만난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. [정답]③

119) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $C=\left\{\frac{1}{10}, 1, 10\right\}$ 이므로 $10^x=\frac{1}{10}$ 에서 $x=-1$

$10^x=1$ 에서 $x=0$

$10^x=10$ 에서 $x=1$

$\therefore$ $B=\{-1, 0, 1\}$ (참)

ㄴ.(반례)

$x=\log_{10}2$, $y=\log_{10}2$ 이면 $10^x=10^y=2$ 이므로

$x\in B$, $y\in B$이다.

이때, $0<\log_{10}2<1$ 이므로 $\log_{10}1<(\log_{10}2)^2<\log_{10}2$

$\therefore$ $\log_{10}1<xy<\log_{10}2$ $\therefore$ $1<10^{xy}<2$

따라서 $10^{xy}=N$를 만족하는 자연수 N이 존재하지 않는다.

$\therefore$ $xy\notin B$

따라서 집합 B는 곱셈에 대하여 닫혀있지 않다.

ㄷ. $X=\{10^x|x\in C\}$ $(\neq\phi)$로 놓자.

i)임의의 $10^x\in X$에 대하여 $x\in C$를 만족하는 실수 x가 존재하고, 이 x에 대하여 $f(t)=\log t=x$를 만족하는 실수 $t\in A$도 존재한다.

이때, $10^x=t$ 이므로 $10^x\in A$

$\therefore$ $X\subset A$

ii)임의의 $t\in A$에 대하여 $f(t)=\log t=x$를 만족하는 실수 $x\in C$가 존재한다.

이 x에 대하여 $10^x\in X$이다.

그런데, $10^x=t$ 이므로 $t\in X$이다.

$\therefore$ $A\subset X$ $\therefore$ $X=A$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

참고)

ㄴ에서 집합 C가 자연수 전체의 집합이면

$A=\{10^1, 10^2, 10^3, \cdots\}$, $B=\{\log1, \log2, \log3, \cdots\}$

이다. 따라서 집합 A는 곱셈에 대하여 닫혀있고,

집합 B는 덧셈에 대하여 닫혀있다.

[정답]③

120) 답 : ②

[해설]

$B=14+0.6T+(0.4T-12)v^{0.16}$ 에서

$T=-15$, $v=x$, $B=-25$ 이므로

$-25=14+0.6\cdot(-15)+\{0.4\cdot(-15)-12\}x^{0.16}$

$18x^{0.16}=30$

$x^{0.16}=\frac{30}{18}=\frac{10}{6}$

양변에 상용로그를 취하면

$0.16\log x=1-(\log2+\log3)=1-(0.30+0.48)=0.22$

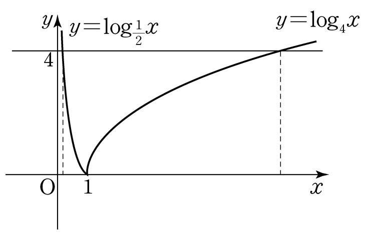
$\therefore$ $\log x\fallingdotseq1.38$

따라서 로그표에서 $\log2.4=0.38$ 이므로 $x=24$

[정답]②

121) 답 : 16

[해설]



(i) $0<x<1$ 일 때 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x=4$ 에서

로그의 정의에 의하여 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

(ii) $x\geq1$ 일 때 $f(x)=\log_4x=4$ 에서

로그의 정의에 의하여 $x=4^4$

$\therefore$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot4^4=\left(\frac{4}{2}\right)^4=16$

122) 답 : ②

[해설]

함수 $y=25\cdot5^{2x}+2=5^{2(x+1)}+2$ 이므로

$y=5^{2x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼,

y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

$\therefore$ $m+n=1$

123) 답 : ③

[해설]

i) A에서, $x^2-x+1>0$ 이므로 $x^2-2x+4>0$ 이므로

$A=\{x|x$는 모든 실수 $\}$

ii) B에서, $x\leq0$ 이면 $\sqrt{|x|+x}=0$ 이므로

$B=\{x|x>0\}$

iii) C에서, 함수 $y=\log|x|$ 의 정의역은

$C=\{x|x\neq0$ 인 모든 실수 $\}$

$\therefore$ $B\subset C\subset A$

124) 답 : ②

[해설]

ㄱ. 양수 x에 대하여

$f\left(\frac{x}{4}\right)=\log_4\frac{x}{4}=\log_4x-1=f(x)-1$

ㄴ. 수열 $\{(f(2^n))\}$에서

$f(2^n)=\log_4 2^n=\frac{1}{2}n$ 이므로 등차수열임.

ㄷ. $x>1$ 일 때, $f(x)>0$ 이므로 $f(f(x))$는 모든 실수이다.

125) 답 : ⑤

[해설]

$\log_2x=t$ 라 두면

$t^2-5t+6<0$ 의 해는 $\log_2\alpha<t<\log_2\beta$ 이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에서

$\log_2\alpha+\log_2\beta=5\Leftrightarrow\log_2\alpha\beta=5$

$\therefore$ $\alpha\beta=32$

126) 답 : ④

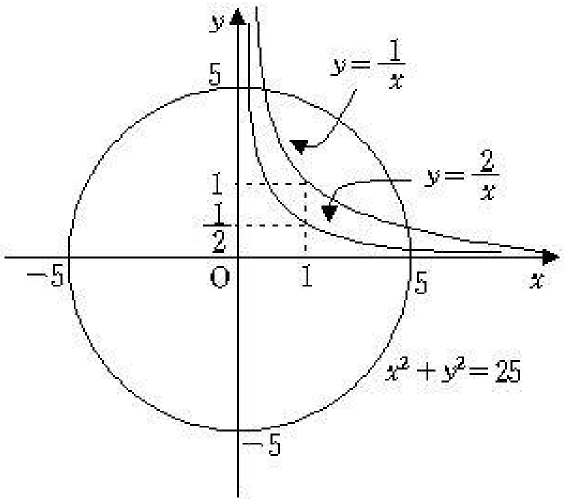
[해설]

② 에서 $\log_2xy=(\log_2xy)^2$

$\log_2 xy(\log_2 xy-1)=0$

∴ $\log_2 xy=0$ 또는 $\log_2 xy=1$

∴ $xy=1$ 또는 $xy=2$ ($x>0,\ y>0$)이므로



각 교점의 개수는 4(개)

127) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]지수와 로그

ㄱ. $(a,\ b)\in G$이므로 $b=5^a$ ... ㉠

㉠의 양변에 $\frac{1}{2}$ 제곱을 하면

$b^{\frac{1}{2}}=(5^a)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{a}{2}}$, $\sqrt{b}=5^{\frac{a}{2}}$

∴ $\left(\frac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in G$ ∴ 참

ㄴ. $(-a,\ b)\in G$이므로 $b=5^{-a}$ ... ㉡

㉡의 양변에 -1 제곱을 하면

$b^{-1}=5^a$, $\frac{1}{b}=5^a$

∴ $\left(a,\ \frac{1}{b}\right)\in G$ ∴ 참

ㄷ. $(2a,\ b)\in G$이므로 $b=5^{2a}$ ... ㉢

㉢의 양변에 2제곱을 하면

$b^2=5^{4a}$

∴ $(4a\ ,\ b^2)$ ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

128) 답 : ④

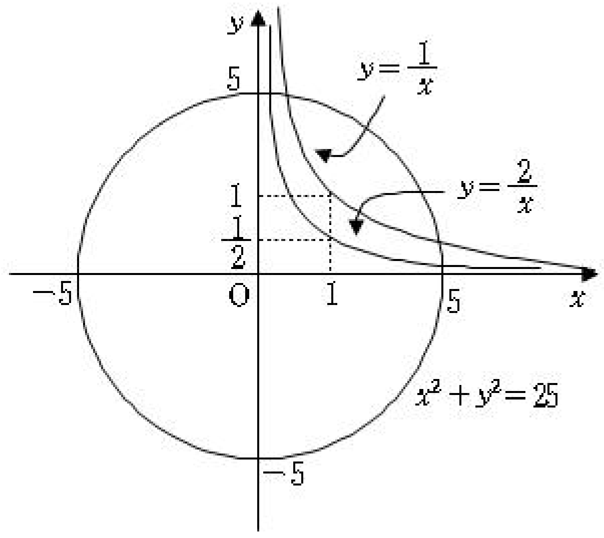
[해설]

② 에서 $\log_2 xy=(\log_2 xy)^2$ 이며 정리하면

$\log_2 xy(\log_2 xy-1)=0$

∴ $\log_2 xy=0$ 또는 $\log_2 xy=1$

∴ $xy=1$ 또는 $xy=2$ ($x>0,\ y>0$) 이므로



∴ 각 교점의 개수는 4(개)

129) 답 : 12

[해설]

주어진 표에서 $M(0)=124,\ M(1)=64$이므로

$a+24=124,\ ar+24=64$에서

$a=100,\ r=\frac{2}{5}$

∴ $M(t)=100\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t+24$

이때, 물질의 농도가 24.001 이하가 되는 시각을 t분이라 하면

$100\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t+24\le 24.001$

$100\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^t\le 0.001$

$\left(\frac{2}{5}\right)^t\le\left(\frac{1}{10}\right)^5$

양변에 상용로그를 취하면

$t\cdot\frac{\log 2}{5}\le 5\cdot\frac{\log 1}{10}$

$t(2\log 2-1)\le -5$

∴

$t\ge\frac{5}{1-2\log 2}=\frac{5}{1-2\times 0.3010}=\frac{5}{0.398}=12.5$

따라서, 12분과 13분 사이에 처음으로 물질의 농도가 24.001 이하가 되므로

n은 12이다.

130) 답 : ⑤

[해설]

$\log_2 x=t$ 라 두면

$t^2-5t+6<0$ 의 해는 $\log_2\alpha<t<\log_2\beta$ 이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에서

$\log_2\alpha+\log_2\beta=5 \Leftrightarrow \log_2\alpha\beta=5$

∴ $\alpha\beta=32$

131) 답 : ②

[해설]

함수 $y=25\cdot 5^{2x}+2=5^{2(x+1)}+2$ 이므로

$y=5^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로

2 만큼 평행이동한 그래프이다.

$\therefore\ m+n=1$

132) 답 : 64

[해설]

$\overline{AP}=8^2,\ \overline{BP}=a^2,\ \overline{CP}=\log_2 2=1$이 등비수열을 이루므로

$(a^2)^2=8^2\times 1$

$\therefore\ a^4=64$

133) 답 : ②

[해설]

ㄱ. $(a,\ b)\in G$이므로 $b=5^a\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{2}$ 제곱을 하면

$b^{\frac{1}{2}}=(5^a)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{a}{2}}\Leftrightarrow\sqrt{b}=5^{\frac{a}{2}}$

$\therefore\ \left(\dfrac{a}{2},\ \sqrt{b}\right)\in G$ $\qquad\therefore$ 참

ㄴ. $(-a,\ b)\in G$이므로 $b=5^{-a}\cdots$ ㉡

㉡의 양변에 -1제곱을 하면

$b^{-1}=5^a\Leftrightarrow\dfrac{1}{b}=5^a$

$\therefore\ \left(a,\ \dfrac{1}{b}\right)\in G$ $\qquad\therefore$ 참

ㄷ. $(2a,\ b)\in G$이므로 $b=5^{2a}\cdots$ ㉢

㉢의 양변에 2제곱을 하면

$b^2=5^{4a}$

$\therefore\ (4a,\ b^2)\in G$ $\qquad\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

134) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]지수함수와 로그함수

주어진 표에서 $M(0)=124,\ M(1)=64$이므로

$a+24=124,\ ar+24=64$에서

$a=100,\ r=\dfrac{2}{5}$

$\therefore\ M(t)=100\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^t+24$

이때, 물질의 농도가 24.001 이하가 되는 시각을 t분이라 하면

$100\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^t+24\le 24.001$

$100\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^t\le 0.001$

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^t\le\left(\dfrac{1}{10}\right)^5$

양변에 상용로그를 취하면

$t\cdot\dfrac{\log 2}{5}\le 5\cdot\dfrac{\log 1}{10}$

$t(2\log 2-1)\le -5$

$\therefore\ t\ge\dfrac{5}{1-2\log 2}=\dfrac{5}{1-2\times 0.3010}$

$=\dfrac{5}{0.398}=12.5xx$

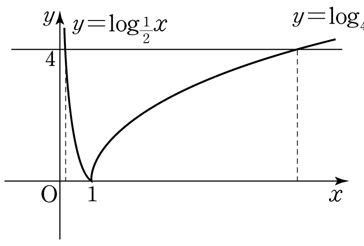
따라서, 12분과 13분 사이에 처음으로 물질의 농도가 24.001 이하가 되므로

n은 12이다.

135) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]지수함수와 로그함수



(ⅰ) $0<x<1$일 때

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x=4$에서 로그의 정의에 의하여 $x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

(ⅱ) $x\ge 1$일 때

$f(x)=\log_4 x=4$에서 로그의 정의에 의하여 $x=4^4$

$\therefore\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^4\cdot 4^4=\left(\dfrac{4}{2}\right)^4=16$

136) 답 : ③

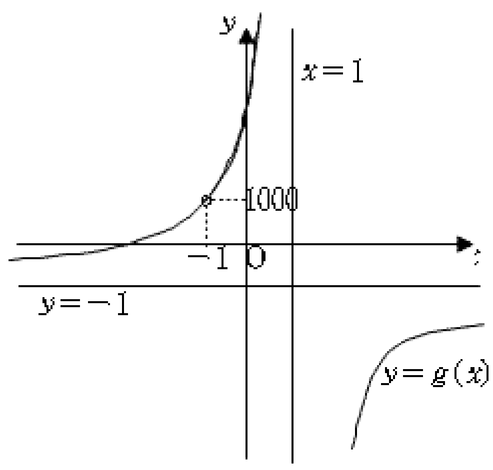
[해설]

$g(x)=\dfrac{2001+x}{1-x}\ (-1<x<1)$라 두고, $g(x)$의 치역을 구하면

$g(x)=-\dfrac{2002}{x-1}-1$ (점근선이 $x=1,\ y=-1$인 분수함수)

아래쪽 그래프에서 $-1<x<1$에서 $g(x)>1000$이므로

$y=\dfrac{\log\{2001+x\}}{1-x}$의 치역은 $\{y|y>3\}$



137) 답 : ②

[해설]

ㄱ. 양수 x에 대하여

$f\left(\dfrac{x}{4}\right)=\log_4\dfrac{x}{4}=\log_4 x-1=f(x)-1$

ㄴ. 수열 $\{(f(2^n))\}$에서

$f(2^n)=\log_4 2^n=\dfrac{1}{2}n$이므로 등차수열임.

ㄷ. $x>1$일 때, $f(x)>0$이므로 $f(f(x))$는 모든 실수이다.

138) 답 : ⑤

[해설]

ⅰ)사탕 한 개를 먹은 직후 채취한 타액의 수소이온 농도를 A라 두면

$6.6=-\log A$ 이며 정리하면

$\therefore\ \log A=-6.6\cdots$①

ⅱ)사탕 한 개를 먹고 10분 후 채취한 타액의 수소이온 농도는 $50A$ 이므로

이때의 농도 pH는

$pH=-\log 50A=-(\log 50+\log A)$

$=-(2-\log 2+\log A)$

$=-(2-0.3-6.6)=4.9$

139) 답 : ④

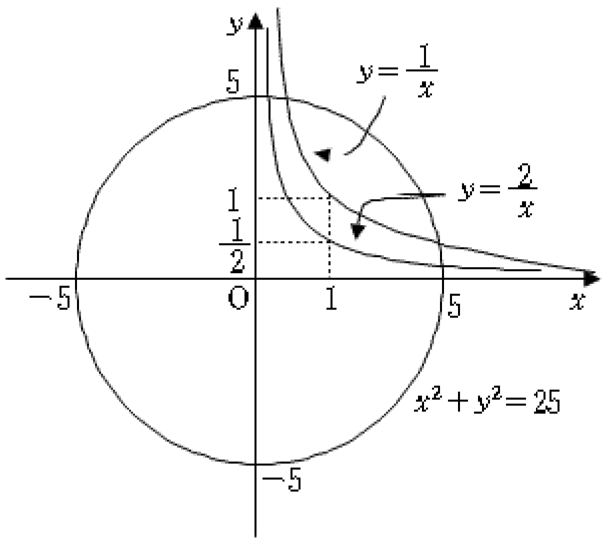
[해설]

② 에서 $\log_2 xy=(\log_2 xy)^2$ 이며 정리하면

$\log_2 xy(\log_2 xy-1)=0$

$\therefore\ \log_2 xy=0$ 또는 $\log_2 xy=1$

$\therefore\ xy=1$ 또는 $xy=2$ ($x>0,\ y>0$)이므로



각 교점의 개수는 4(개)

140) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 로그부등식의 해를 구한다.

진수의 조건에 의하여 $x-2>0$, $x>2$ ...㉠

$\log_2(x-2)<2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$x-2<2^2$, $x<6$ ...㉡

㉠, ㉡에서 $2<x<6$ 이다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x는 3, 4, 5이므로 그 합은

$3+4+5=12$

141) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$0<\frac{1}{2}<1$ 이므로 지수함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 은 닫힌 구간 $[2,\ 4]$ 에서 $x=4$ 일 때 최솟값을 갖는다. 따라서 최솟값은 $f(4)=\frac{1}{4}$

142) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 로그방정식 계산하기

$\log_3(x+2)=3$ 에서 $x+2=3^3$

따라서 $x=25$

143) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 닫힌 구간에서 지수함수의 최댓값을 구한다.

$f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$ 에서

(ⅰ) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$ 일 때,

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x=2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$f(2)=\left(\frac{3}{a}\right)^2=4$ 에서 $a^2=\frac{9}{4}$ $a=\pm\frac{3}{2}$ $0<a<3$ 이므로

$a=\frac{3}{2}$

(ⅱ) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$ 일 때,

$f(x)=1$ 이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 4가 아니다.

(ⅲ) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$ 일 때,

함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $x=-1$ 에서 최댓값을 갖는다.

$f(-1)=\left(\frac{3}{a}\right)^{-1}=\frac{a}{3}=4$ 에서 $a=12$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 양수 a의 값의 곱은 $\frac{3}{2}\times 12=18$

144) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$f(0)=2^0+1=2$, $g(0)=-2^{-1}+7=\frac{13}{2}$ 이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(0,2)$, $B\left(0,\ \frac{13}{2}\right)$ 이다.

따라서 $\overline{AB}=\frac{13}{2}-2=\frac{9}{2}$

두 식 $y=2^x+1$, $y=-2^{x-1}+7$ 을 연립하여 풀면

$2^x+1=-2^{x-1}+7$

$\frac{3}{2}\times 2^x=6$

$2^x=4$

$x=2$

$f(2)=2^2+1=5$ 이므로 점 C의 좌표는 $(2,5)$ 이다.

따라서 삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

145) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$a>0$ 에서 $0<2^{-\frac{2}{a}}<1$ 이므로 $1-2^{-\frac{2}{a}}>0$ 이다.

[중간 계산] $=\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)}{Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)}$

$$=\frac{1-\left(2^{-\frac{2}{a}}\right)^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$=\frac{\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)\left(1+2^{-\frac{2}{a}}\right)}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$=1+2^{-\frac{2}{a}}$$

$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$ 에서 $1+2^{-\frac{2}{a}}=\frac{3}{2}$

$2^{-\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}=2^{-1}$ 이므로 $-\frac{2}{a}=-1$ 에서

$a=2$

[다른 풀이] $\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{3}{2}$ 에서 $2Q(4)=3Q(2)$

$2Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)=3Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)$

$2^{-\frac{2}{a}}=t$ 로 놓으면 $a>0$ 이므로 $0<t<1$ 이다.

$2(1-t^2)=3(1-t)$

$2(1-t)(1+t)=3(1-t)$

$2(1+t)=3$

$t=\frac{1}{2}$

즉 $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$ 이므로 $-\frac{2}{a}=-1$ 에서

$a=2$

146) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 이 x축과 만나므로

$a\log_2(x-a+1)=0$ 에서 $x=a$

곡선 $y=2^{x-a}-1$ 이 x축과 만나므로

$2^{x-a}-1=0$ 에서 $x=a$

$\therefore$ $A(a,\ 0)$

점 B의 y좌표를 $k\,(k>0)$라 하면

삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times k=\frac{1}{2}\times a\times k=\frac{7}{2}a$ 이므로 $k=7$

$2^{x-a}-1=7$ 이므로 $x=a+3$

$\therefore$ $B(a+3,\ 7)$

점 B는 곡선 $y=a\log_2(x-a+1)$ 위의 점이므로

$a\log_2(a+3-a+1)=7$ 에서 $a=\frac{7}{2}$

$\therefore$ $A\left(\frac{7}{2},\ 0\right)$, $B\left(\frac{13}{2},\ 7\right)$

선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(5,\ \frac{7}{2}\right)$ 이므로

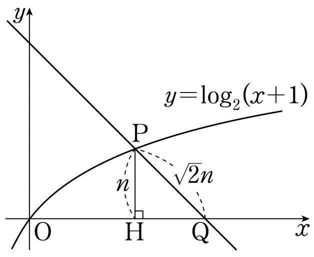
$p=5$, $q=\frac{7}{2}$

따라서 $p+q=\frac{17}{2}$

147) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.



점 P의 좌표를 (a, b)(단, a, b는 양수)라 하고,

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 -1이므로

삼각형 PHQ는 $\overline{PH}=\overline{HQ}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{PQ}=\sqrt{2}n$ 이므로

$\overline{PH}=n$, 즉 $b=n$이다.

점 $P(a, n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$

$a=2^n-1$

이때 $\overline{OQ}=\overline{OH}+\overline{HQ}$, $\overline{HQ}=n$이므로

$x_n=a+n=2^n-1+n$

따라서

$$[\text{구하는 값}]=\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}\left(2^k-1+k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$$

$$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$$

$$=62-5+15=72$$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 (a, b)(단, a, b는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n, 0)$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로

$\frac{0-b}{x_n-a}=-1$ 에서 $x_n-a=b$

$x_n=a+b$

$\overline{PQ}=\sqrt{(x_n-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{b^2+b^2}=\sqrt{2}b$

$\overline{PQ}=\sqrt{2}n$ 에서 $b=n$이다.

점 $P(a, n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$ 에서 $a=2^n-1$

$x_n=a+b=2^n-1+n$

따라서

$$[\text{구하는 값}]=\sum_{k=1}^{5}x_k$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\left(2^k-1+k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$$

$$=\frac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\frac{5\times6}{2}$$

$=62-5+15 \ =72$

148) 답 : 40

[해설]

[출제 의도] 지수의 성질을 이용하여 지수방정식의 해를 구한다.

$2^{\frac{1}{8}x-1}=16$에서

$2^{\frac{1}{8}x-1}=2^4$이고,

$\frac{1}{8}x-1=4$, $\frac{1}{8}x=5$이므로 $x=40$

149) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프의 성질 이해하기

$\log_2 16=\log_2 2^4=4$, $\log_4 16=\log_4 4^2=2$이므로 $P(16,\ 4)$, $Q(16,\ 2)$이다.

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 2

150) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 이항정리를 이용하여 로그부등식의 해를 구한다.

$f(n)={}_nC_0+{}_nC_1\left(\frac{1}{9}\right)^1+{}_nC_2\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+{}_nC_n\left(\frac{1}{9}\right)^n$

$=\left(1+\frac{1}{9}\right)^n=\left(\frac{10}{9}\right)^n$

$\log f(n)=\log\left(\frac{10}{9}\right)^n$

$=n(\log 10-\log 9)$

$=n(1-2\log 3)$

$=n(1-2\times 0.4771)$

$=n(1-0.9542)$

$=0.0458n \ >1$

$n>\frac{1}{0.0458}=21.8\cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 22이다.

151) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수함수를 활용하여 문제 해결하기

y축과 평행한 한 직선을 $x=k$(k는 실수)라 하고,

직선 $x=k$와 x축이 만나는 점을 C라 하자.

삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{BC}$

$2^k=4^{k-2}$

$2^k=2^{2k-4}$

$k=2k-4$, $k=4$

$\overline{OC}=4$, $\overline{AB}=32$

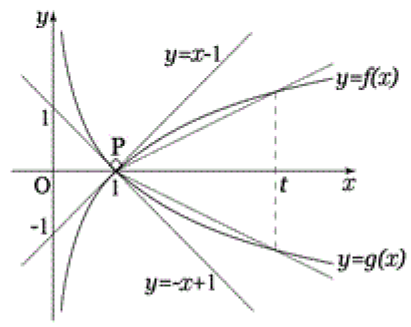
따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=64$

152) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프의 성질 추론하기



ㄱ. $\ln x=\frac{\ln 1}{x}$에서 $x=1$

점 P의 좌표는 $(1,0)$ (참)

ㄴ. $f'(1)=1$, $g'(1)=-1$이므로

$f'(1)\times g'(1)=1\times(-1)=-1$

그러므로 두 곡선 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다. (참)

ㄷ. $t>1$에서 함수 $f(t)$는 증가하고, $f'(t)=\frac{1}{t}$이고 $f'(1)=1$이므로

$t>1$인 t에 대하여 $0<\frac{f(t)-f(1)}{t-1}<1$

$t>1$에서 함수 $g(t)$는 감소하고, $g'(t)=-\frac{1}{t}$이고 $g'(1)=-1$이므로

$t>1$인 t에 대하여 $-1<\frac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$

그러므로

$-1<\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\frac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$

$-1<\frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

153) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수함수 이해하기

$y=a\times 2^x$에 $(0,\ 4)$를 대입하면

$4=a\times 2^0=a\times 1=a$

$\therefore\ a=4$

$y=4\times 2^x$에 $(b,\ 16)$을 대입하면

$16=4\times 2^b$

$\therefore\ b=2$

따라서 $a+b=4+2=6$

154) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프의 성질을 이해하고 내분점을 이용하여 좌표를 구한다.

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 D,

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 E라 하자.

점 $A\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$이므로 점 $D(-1,\ 0)$이다.

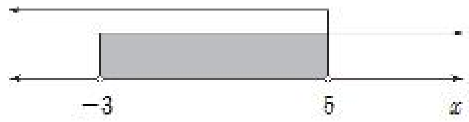
y축 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}:\overline{CB}=1:2$이므로

$\overline{DO}:\overline{OE}=1:2$가 되어 점 $E(2,\ 0)$이다.
따라서 점 B의 y좌표는 9이다.
[다른 풀이]
점 $A\left(-1,\ \frac{1}{3}\right)$이고 점 B의 x좌표를 b라 놓으면
점 $B(b,\ 3^b)$이다.
선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점 $C\left(\frac{b-2}{3},\ \frac{3^b+\frac{2}{3}}{3}\right)$에 대하여
점 C는 y축 위에 있으므로 $\frac{b-2}{3}=0$에서 $b=2$
따라서 점 B의 y좌표는 $3^2=9$이다.

155) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 로그방정식 이해하기
$\log_3 x=t$라 하면 $\log_9 x=\frac{1}{2}\log_3 x=\frac{1}{2}t$이므로
$t^2+2t-3=0$
$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$
$\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=1$
$\therefore\ x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$
따라서 모든 실근의 곱은 $\frac{1}{9}$

156) 답 : 30
[해설]
[출제 의도] 로그함수 그래프의 평행이동 이해하기
함수 $y=\log x$의 그래프를 x축의 방향으로 a,
y축의방향으로 b만큼 평행이동시킨 그래프의 방정식은
$y=\log(x-a)+b$이다.
함수 $y=\log(x-a)+b$의 그래프는 점 $(4,\ b)$를 지나므로
$\log(4-a)+b=b$
$\log(4-a)=0$
$4-a=1$
$\therefore\ a=3$
함수 $y=\log(x-3)+b$의 그래프는 점 $(13,\ 11)$을 지나므로
$\log 10+b=11$
$\therefore\ b=10$
따라서 $ab=30$

157) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 지수부등식 이해하기
ⅰ) $2^x-32>0$이고 $\frac{1}{3^x}-27>0$일 때,
$2^x>32$이므로 $x>5$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x<-3$


$\therefore$ 해가 없다.
ⅱ) $2^x-32<0$이고 $\frac{1}{3^x}-27<0$일 때,
$2^x<32$이므로 $x<5$
$\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x>-3$


$\therefore\ -3<x<5$
ⅰ), ⅱ)에서
$-3<x<5$를 만족시키는 정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$
따라서 개수는 7

158) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 무한등비급수의 성질을 이해하여
귀납적으로 정의된 수열의 공비를 구한다.
$a_n a_{n+1}+a_{n+1}=ka_n^2+ka_n$에서
$(a_n+1)a_{n+1}=ka_n(a_n+1)$이고 $a_n+1\neq 0$이므로
양변을 a_n+1로 나누면 $a_{n+1}=ka_n$
수열 $\{a_n\}$은 $a_1=k$, 공비가 k인 등비수열
그러므로 $a_n=k^n$
수열 $\{a_n\}$의 공비 k가 $0<k<1$이므로
무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 $\frac{k}{1-k}$로 수렴한다.
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}k^n=\frac{k}{1-k}=5$
따라서 $k=\frac{5}{6}$

159) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 지수함수 이해하기
$y=a\times 2^x$에 $(0,4)$를 대입하면
$4=a\times 2^0=a\times 1=a$
$\therefore\ a=4$
$y=4\times 2^x$에 $(b,16)$을 대입하면
$16=4\times 2^b$
$\therefore\ b=2$
따라서 $a+b=4+2=6$

160) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 지수부등식 이해하기
$2^x=t\ (t>0)$이라 하면
$t^2-10t+16\leq 0 \Leftrightarrow 2\leq t\leq 8$
$2\leq 2^x\leq 2^3 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 3$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 6

161) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 지수방정식 이해하기

$2^x = t\ (t>0)$라 하면

$t^2+8t-128=0$이며 정리하면

$(t-8)(t+16)=0$

$\therefore\ t=8$

따라서 $x=3$

162) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하여 좌표를 구한다.

(삼각형 BCD의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\cdot(2p-p)\cdot\log_2 2p$

$=\dfrac{p}{2}\cdot\log_2 2p$

(삼각형 ACB의 넓이) $=\dfrac{1}{2}\cdot(2p-p)\cdot\log_{2}p$

$=\dfrac{p}{2}\cdot\log_2 p$

$\dfrac{p}{2}\cdot\log_2 2p-\dfrac{p}{2}\cdot\log_2 p=8$이므로

$\dfrac{p}{2}(\log_2 2p-\log_2 p)=8 \Leftrightarrow \dfrac{p}{2}\cdot\log_2 2=8$

따라서 $p=16$

[다른 풀이]

선분 CD를 삼각형 BCD와 삼각형 ACB의 높이라 하면,

그 길이는 $2p-p=p$로 같다. 그러므로

(삼각형 BCD와 삼각형 ACB 넓이의 차)

$=\dfrac{p}{2}\times$(선분 BD와 선분 AC의 길이의 차)

$=8$

삼각형 BCD의 밑변인 선분 BD의 길이는 $\log_2 2p$이고,

삼각형 ACB의 밑변인 선분 AC의 길이는 $\log_2 p$이다.

그러므로 $\log_2 2p-\log_2 p=\log_2 2=1$

따라서 $p=16$

163) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]지수함수의 그래프를 이해하여 지수함수의 밑을 구한다.

곡선 $y=a^x$이 y축과 만나는 점 A의 좌표는 $(0,1)$이고, 점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 1이다.

$\log_2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=1,\ x=\dfrac{3}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ 1\right)$이다.

점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로

점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2}, a^{\frac{3}{2}}\right)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right)=\dfrac{21}{4}$

그러므로 $a^{\frac{3}{2}}=8$에서 $a=4$이다.

164) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수부등식 이해하기

ⅰ) $2^x-32>0$이고 $\dfrac{1}{3^x}-27>0$일 때,

$2^x>32$이므로 $x>5$

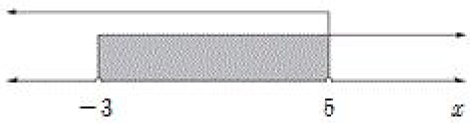
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x<-3$

$\therefore$ 해가 없다.

ⅱ) $2^x-32<0$이고 $\dfrac{1}{3^x}-27<0$일 때,

$2^x<32$이므로 $x<5$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$이므로 $x>-3$



$\therefore\ -3<x<5$

ⅰ), ⅱ)에서

$-3<x<5$를 만족시키는 정수는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 개수는 7

165) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 성질과 비례관계를 활용하여 미지수의 값 구하는 문제를 해결한다.

$a^{f(t)}=t$이므로 $f(t)=\log_a t$

$b^{g(t)}=t$이므로 $g(t)=\log_b t$

$2f(a)=3g(a)$이므로 $2\log_a a=3\log_b a$에서

$\log_b a=\dfrac{2}{3}$ 즉, $\log_a b=\dfrac{3}{2}$

$f(c)=g(27)$

$=\log_b 27=\dfrac{\log_a 27}{\log_a b}=\dfrac{2}{3}\log_a 27=\log_a 27^{\frac{2}{3}}=\log_a 9$

따라서 $c=9$

166) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 비례식의 성질과 로그함수의 성질을 활용하여 좌표 구하는 문제를 해결한다.

직선이 y축과 만나는 점을 D라 하면

두 곡선 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

점 $C(a,0)$이라 하면 점 $D(0,a)$이고, $\overline{BC}=\overline{AD}$

조건에 의해 $\overline{AB}:\overline{BC}=3:1$에서

$\triangle OBC = \frac{1}{5}\triangle OCD = \frac{1}{10}a^2 = 40$이므로 $a = 20$
점 A는 직선 $y = -x + a$ 위의 점이다.
따라서 $p + q = a = 20$
[다른 풀이]
두 곡선 $y = 2^x$과 $y = \log_2 x$는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로
점 A와 점 B는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.
점 $A(p, q)$이므로 점 $B(q, p)$이고, 점 $C(a, 0)$이다.
조건에 의해 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 1$
점 B는 선분 AC를 $3:1$로 내분하는 점이므로
$q = 3a + \frac{p}{4}$, $p = \frac{q}{4}$에서 $a = 5p$, $q = 4p$
또, 삼각형 OBC의 넓이가 40이므로
$\frac{1}{2}ap = \frac{5}{2}p^2 = 40$
$p^2 = 16$에서 $p = 4$이므로 $a = 20$
($p < 0$인 경우에는 문제의 조건을 만족시킬 수 없다.)
점 A는 직선 $y = -x + a$ 위의 점이다.
따라서 $p + q = a = 20$

167) 답 : 88
[해설]
[출제 의도] 로그함수를 활용하여 문제 해결하기
직선 $x = 2$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로
$p = k^2\log 2$
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로
$k^2\log 2 = k\log a$를 정리하면 $a = 2^k$
직선 $x = 2$와 곡선 $y = h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로
$q = 4k^2\log 2$
곡선 $y = g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로
$4k^2\log 2 = k^2\log b$를 정리하면 $b = 2^4$
세 점 $P(2,\ 0)$, $Q(2^k,\ k^2\log 2)$, $R(2^4,\ 4k^2\log 2)$가 한 직선 위에 있으므로
$\frac{k^2\log 2}{2^k - 2} = \frac{4k^2\log 2}{14}$를 정리하면 $2^k = \frac{11}{2}$
$a = \frac{11}{2}$, $b = 16$
따라서 $ab = 88$

168) 답 : 5
[해설]
[출제 의도] 로그함수를 활용하여 문제 해결하기
점 A_n은 곡선 $y = \log_2 x + 1$과 직선 $y = n$이 만나는 점이므로
$\log_2 x + 1 = n$ 이며 $x = 2^{n-1}$
$\therefore\ A_n(2^{n-1}, n) \ldots$①
점 B_n은 곡선 $y = \log_2 x$와 직선 $y = n$이 만나는 점이므로
$\log_2 x = n$ 이며 $x = 2^n$
$\therefore\ B_n(2^n, n) \ldots$②
점 C_n은 곡선 $y = \log_2(x - 4^n)$과 직선 $y = n$이 만나는 점이므로
$\log_2(x - 4^n) = n$ 이며 $x = 2^n + 4^n$
$\therefore\ C_n(2^n + 4^n, n) \ldots$③
$S_n = \frac{1}{2}\times n \times \overline{A_nB_n}$, $T_n = \frac{1}{2}\times n\times \overline{B_nC_n}$ 이며

$$\therefore\ \frac{T_n}{S_n} = \frac{\overline{B_nC_n}}{\overline{A_nB_n}} = \frac{2^n + 4^n - 2^n}{2^n - 2^{n-1}}$$
$$= \frac{4^n}{(2-1)\times 2^{n-1}}$$
$$= 2^{n+1} = 64$$

따라서 $n = 5$

169) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 지수함수의 성질을 이용하여 지수방정식의 해를 구한다.
$9^x = 27^{2x-4}$에서 $3^{2x} = 3^{3(2x-4)}$
지수함수는 일대일함수이므로
$2x = 3(2x - 4)$
$\therefore\ x = 3$

170) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 등차수열의 성질을 이해한다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3 = 10$ 에서 $a + 2d = 10$ ⋯ ㉠
$a_4 - a_2 = 4$에서 $(a + 3d) - (a + d) = 4$ $\therefore\ d = 2$
㉠에 대입하면 $a = 6$이다.
$\therefore\ a_8 = a + 7d = 6 + 7\times 2 = 20$

171) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 지수함수의 성질을 이용하여 지수부등식의 해를 구한다.
$\left(2^x - \frac{1}{4}\right)(2^x - 1) < 0$
$\frac{1}{4} < 2^x < 1$
$2^{-2} < 2^x < 2^0$
$\therefore\ -2 < x < 0$
따라서 부등식 $\left(2^x - \frac{1}{4}\right)(2^x - 1) < 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는 1이다.

172) 답 : 12
[해설]
[출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 로그방정식의 해를 구한다.
$\log_2 x = 1 + \log_2(x - 6)$
$\log_2 x = \log_2 2(x - 6)$
$x = 2(x - 6)$
$\therefore\ x = 12$

173) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $y=3^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면
함수 $y=3^{x-2}$의 그래프이다.
$\overline{AB}=3$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로 $\overline{AC}=3$
점 A의 좌표를 $(a,\ 3^{a+1})$이라 하면
점 C의 좌표는 $(a,\ 3^{a-2})$이므로
$\overline{AC}=3^{a+1}-3^{a-2}=3\cdot 3^{a}-\frac{1}{9}\cdot 3^{a}=\frac{26}{9}\cdot 3^{a}=3$

따라서 점 A의 y좌표 $3^{a+1}=\frac{81}{26}$

174) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도] 지수함수의 성질을 이해하여 문제를 해결한다.
곡선 $y=f(x)$와 $y=h(x)$는 y축 대칭이므로
$h(2)=f(-2)$에서 점 R의 x좌표는 2, 점 P의 x좌표는 -2이다.
점 Q의 x좌표를 α라 하면
$\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$에서 $\overline{PQ}=2\overline{QR}$이므로
$\alpha+2=2(2-\alpha)$
$\therefore\ \alpha=\frac{2}{3}$

$g(\alpha)=2$ 에서 $b^{\frac{2}{3}}=2$
$\therefore\ b=2^{\frac{3}{2}}$
$g(4)=b^{4}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{4}=2^{6}=64$

[다른 풀이]
세 점 P, Q, R의 y좌표는 모두 2이므로
세 점 P, Q, R의 x좌표는 각각 $-\log_{a}2$, $\log_{b}2$, $\log_{a}2$이다.
$\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$에서 $\overline{PQ}=2\overline{QR}$이므로
$\log_{b}2-(-\log_{a}2)=2(\log_{a}2-\log_{b}2)$
양변을 밑이 2인 로그로 변환하면
$\frac{1}{\log_{2}a}=\frac{3}{\log_{2}b}$
$\log_{2}b=3\log_{2}a=\log_{2}a^{3}$
$\therefore\ b=a^{3}$
$h(2)=2$에서 $a^{2}=2$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$ ($\because\ a>1$)
$\therefore\ b=a^{3}=(\sqrt{2})^{3}=2\sqrt{2}$
따라서 $g(x)=(2\sqrt{2})^{x}$이다.
$\therefore\ g(4)=(2\sqrt{2})^{4}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{4}=2^{6}=64$

175) 답 : ④
[해설]
[출제 의도] 지수부등식의 해를 구한다.
$4^{f(x)}-2^{1+f(x)}<8$에서
$2^{2f(x)}-2\times 2^{f(x)}-8<0$
$(2^{f(x)}+2)(2^{f(x)}-4)<0$
$-2<2^{f(x)}<4$
$2^{f(x)}>0$이므로 $0<2^{f(x)}<2^{2}$
$\therefore\ f(x)<2$
$x^{2}-x-4<2$에서 $(x+2)(x-3)<0$
$\therefore\ -2<x<3$
부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 4이다.

176) 답 : 63
[해설]
[출제 의도] 지수부등식을 활용하여 추론하기
지수법칙을 이용하여 주어진 부등식을 다시 정리하면
$2(2^{x})^{2}-(2n+1)2^{x}+n\le 0$이며 인수분해하면
$(2\times 2^{x}-1)(2^{x}-n)\le 0$이므로
$2^{-1}\le 2^{x}\le n$
부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 7이므로
정수 $x=-1$, 0, 1, 2, 3, 4, 5
$\therefore\ 2^{5}\le n<2^{6}$
따라서 자연수 n의 최댓값은 63

177) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 지수함수의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.
곡선 $y=2^{x}$이 y축과 만나는 점은 $A(0,\ 1)$
곡선 $y=-2^{x}+a$가 y축과 만나는 점은 $B(0,\ a-1)$
두 곡선 $y=2^{x}$과 $y=-2^{x}+a$가 만나는 점은
$2^{x}=-2^{x}+a \Leftrightarrow 2^{x+1}=a$

$x=\log_{2}a-1=\log_{2}\frac{a}{2}$, $y=2^{\log_{2}\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}$

$C\left(\log_{2}\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$

$a=6$일 때, $B(0,\ 5)$, $C(\log_{2}3,\ 3)$이므로

삼각형 ACB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times\log_{2}3=2\log_{2}3$

178) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 상용로그의 성질을 이용하여 부등식의 해를 구한다.
직선 l_{n}이 점 $\left(3\left(\frac{3}{4}\right)^{n},\ 0\right)$과 $\left(0,\ 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)$을 지나므로
직선 l_{n}과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\times 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

이고 이 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가 되어야 하므로

$6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\le\frac{1}{10}$
양변에 상용로그를 취하면
$\log 6+2n(\log 3-2\log 2)\le -1$
$n\ge\frac{1+\log 2+\log 3}{2(2\log 2-\log 3)}$
$n\ge\frac{1+0.30+0.48}{2(0.60-0.48)}$

$$n \ge \frac{1.78}{0.24} = 7.4\times\times$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

179) 답 : 70

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

$\overline{PQ} = \log_{\frac{1}{9}} a - \log_3 a = -\frac{3}{2}\log_3 a$

$\overline{SR} = \log_3 b - \log_{\frac{1}{9}} b = \frac{3}{2}\log_3 b$

$\overline{PQ} : \overline{SR} = 2:1$에서 $\overline{PQ} = 2\overline{SR}$이므로

$-\frac{3}{2}\log_3 a = 2 \times \frac{3}{2}\log_3 b$

$\log_3 a + 2\log_3 b = 0$

$\therefore\ ab^2 = 1 \ \cdots$ ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표가 $\frac{9}{8}$이므로

$a + \frac{b}{2} = \frac{9}{8} \ \cdots$ ㉡

㉡에서 $a = \frac{9}{4} - b$를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{9}{4} - b\right)b^2 = 1$

$4b^3 - 9b^2 + 4 = 0$

$(b-2)(4b^2 - b - 2) = 0$

$b = 2$ 또는 $b = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$b > 1$이므로 $b = 2$

따라서 $a = \frac{1}{4}$, $b = 2$이므로

$40(b-a) = 70$

180) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수방정식 계산하기

$(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$의 근을 α, β라 하면

근과 계수의 관계에서 $2^\alpha 2^\beta = 2^{\alpha+\beta} = 32$이다.

$\therefore\ \alpha + \beta = 5$

181) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 지수부등식 계산하기

$3^{x^2} < 3^{x+2} \Leftrightarrow x^2 < x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$이며 인수분해하면

$(x-2)(x+1) < 0$이므로

$-1 < x < 2$

$\therefore\ \alpha + \beta = 1$

182) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 지수방정식 계산하기

$(2^x - 2)(2^x + 2) = 4$을 전개하면

$(2^x)^2 - 4 = 4$이므로 $2^{2x} = 2^3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$

183) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수의 성질을 이해하고, 지수방정식의 해를 구한다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \sqrt[3]{4}$

이때 $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$이므로 주어진 방정식을 고쳐 쓰면 다음과 같다.

$2^{-(x-1)} = 2^{\frac{2}{3}}$

지수함수는 일대일함수이므로

$-(x-1) = \frac{2}{3}$

$\therefore\ x = \frac{1}{3}$

184) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 로그부등식의 성질을 이해한다.

로그의 정의에 의하여 $x-1 > 0$이고, 로그부등식의 밑을 같게 하면

$x - 1 \le 8$

$\therefore\ 1 < x \le 9$

따라서 구하는 정수의 개수는 8이다.

185) 답 : 7

[해설]

[출제 의도] 로그의 성질을 이용하여 로그방정식의 해를 구한다.

$\log_2(2x-5) = 2\log_2 3$

$\log_2(2x-5) = \log_2 3^2 = \log_2 9$

로그함수는 일대일함수이므로 $2x - 5 = 9$

$\therefore\ x = 7$

186) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수부등식 이해하기

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+6} \le 27^{2-x}$에서 $3^{-x-3} \le 3^{-3x+6}$이므로

$x \le \frac{9}{2}$이다.

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수는 1, 2, 3, 4이므로 x의 값의 합은 10

187) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 로그부등식 이해하기

$\log_{\frac{1}{6}}(x-8)(x-3) > \log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$이며 밑이 1보다 작으므로

$(x-8)(x-3) < 36$이며 전개하여 정리후 인수분해하면

$(x-12)(x+1) < 0$

$\therefore\ -1<x<12$

단, 진수조건으로부터 $x>8$이므로

$8<x<12$인 정수 x는 9, 10, 11이다.

$\therefore$ x의 개수는 3

188) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프 이해하기

지수함수 $y=2^{2x+a}+b$의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y=2$이므로

$b=2$이다.

$y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=2^{2x+a}+2$의 그래프를 y축에 대하여

대칭이동시킨 함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프이다.

함수 $y=2^{-2x+a}+2$의 그래프가 점 $(-1,10)$을 지나므로 $a=1$이다.

따라서 $a+b=3$

189) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]지수방정식의 풀이 방법을 이해하여 두 양의 실근을 가질 조건을 구한다.

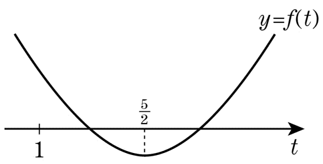
$5^x=t$로 치환하면 주어진 방정식은

$t^2-5t+k=0\cdots$①

$x>0$이면 $t>1$이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면

①이 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-5t+k$라 놓으면 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$f(1)=1-5+k>0\cdots$②

(판별식) = $25-4k>0\cdots$③

② , ③에서 $4<k<\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow k=5,6$

따라서 구하는 정수 k의 개수는 2이다.

190) 답 : 100

[해설]

[출제 의도] 로그방정식 계산하기

$x^{\log x}=\left(\dfrac{x}{10}\right)^4$의 양변에 로그를 취하면

$(\log x)^2=4\log x-4$ 즉, $(\log x-2)^2=0$

$\log x=2$

$\therefore\ x=100$

191) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]지수함수의 최대최소 구하기

[해설]

$3^x=t\ \left(\dfrac{1}{3}\le t\le 9\right)$라 하면 $y=t^2-6t$이다.

$t=9$일 때, y의 최댓값 27

$t=3$일 때, y의 최솟값 -9

$\therefore\ M+m=18$

192) 답 : 52

[해설]

[출제 의도]지수부등식과 로그부등식의 해 구하기

[해설] $2^{x+1}\ge 2^4$에서 $x+1\ge 4$이므로 $x\ge 3$이다.

$\log_3(x-1)\le 2$에서 $x-1\le 3^2$에서 $x\le 10$이다.

그러므로 구하는 해는 $3\le x\le 10$이다.

따라서 모든 정수의 합은 52이다.

193) 답 : 9

[해설]

[출제 의도]로그방정식의 해 구하기

주어진 식에서

$\log_2(x-3)^2=\log_2(5x-9)$

$(x-3)^2=5x-9$이며 전개하여 정리하면

$x^2-6x+9=5x-9$이며 이항하여 정리하면

$x^2-11x+18=0$이고 인수분해하면

$(x-2)(x-9)=0$

진수 >0이므로 $x>3$이므로 $x=9$이다.

194) 답 : 48

[해설]

[출제 의도] 로그함수 계산하기

함수 $y=\log_7(x+a)$의 그래프가 점 $(1,2)$을 지나므로

$2=\log_7(1+a)$

$\therefore\ a=48$

195) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수방정식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$3^x=t\,(t>0)$라 하면 $9t^2-10t+1=0$

$t=1,\ \dfrac{1}{9}$에서 $x=0,\ -2$

$\therefore$ 두 실근의 합은 -2

196) 답 : 70

[해설]

[출제 의도] 로그의 성질을 이해하여 로그함수의 그래프를 평행이동시킨 그래프의 식을 구한다.

$y=\log_3\left(\dfrac{x}{9}-1\right)$

$=\log_3\dfrac{x-9}{9}$

$=\log_3(x-9)-\log_3 9$

$=\log_3(x-9)-2$

이므로 함수 $y=\log_3\left(\dfrac{x}{9}-1\right)$의 그래프는 함수

$y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 9만큼, y축의 방향으로

-2만큼
평행이동시킨 것이다.
따라서 $m=9$, $n=-2$
$\therefore\ 10(m+n)=70$

197) 답 : 30
[해설]
[출제 의도] 로그방정식 이해하기
$\log_3 x = t$라 하면
$t(t-\log_3 2)-\log_3 \frac{81}{2}t+3=0$
$t^2-4t+3=0$
$t=\log_3 x=1, 3$이므로 $x=3, 27$
$\therefore$ 방정식을 만족시키는 두 근의 합은 30

198) 답 : 5
[해설]
[출제 의도] 지수방정식 이해하기
$3^{2x}-k\cdot 3^x+4=0$에서 $3^x=t\ (t>0)$라 하면
이차방정식 $t^2-kt+4=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로
ⅰ) 판별식 $D=k^2-16>0 \Leftrightarrow k<-4$ 또는 $k>4$
ⅱ) (두 근의 합) $=k>0$, (두 근의 곱) $=4>0$
$\therefore\ k>4$
따라서 자연수 k의 최솟값은 5

199) 답 : ④
[해설]
[출제 의도] 로그부등식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
$3\le[\log_3 n]\le 4$ 에서 $3\le \log_3 n<5$이므로
$3^3\le n<3^5$
$\therefore$ 자연수 n의 개수는 216

200) 답 : 8
[해설]
[출제 의도] 지수방정식 이해하기
$a^{2x}-9a^x+8=0$에서 $a^x=t(t>0)$로 놓으면 $t^2-9t+8=0$
$a^{2x}-9a^x+8=0$의 두 근을 α, β라 하면
이차방정식 $t^2-9t+8=0$의 두 근은 a^α, a^β
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a^\alpha a^\beta=8$, 즉 $a^{\alpha+\beta}=8$이고 $\alpha+\beta=2$이므로 $a^2=8$
$\therefore\ 8$

201) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 등비수열을 이용하여 추론하기
$b_n=3^n$이므로 $S_5=\frac{3(3^5-1)}{3-1}$
$\therefore\ S_5=363$

202) 답 : 12
[해설]
[출제 의도] 지수부등식 이해하기
$3^{11}\cdot 3^{-x^2}<3^{-10x}$에서 $11-x^2<-10x$이며 인수분해하면
$(x-11)(x+1)>0$
$x<-1$또는 $x>11$이므로
$\therefore$ 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 12

203) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 로그방정식 이해하기
$(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0 \Rightarrow (\log_3 x-1)(\log_3 x-3)=0$
$\log_3 x=1$ 또는 $\log_3 x=3$이므로
$x=3$ 또는 $x=27$이다.
따라서 $\alpha+\beta=30$

204) 답 : ④
[해설]
[출제 의도] 로그방정식 이해하기
$(\log_4 x)^2-3\log_4 x-1=0$에서
$\log_4 x=t$라 하면 $t^2-3t-1=0\cdots$㉠
t에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_4\alpha, \log_4\beta$이므로
근과 계수와의 관계에 의해
$\log_4\alpha+\log_4\beta=3\ \ \therefore\ \alpha\beta=4^3=64$

205) 답 : 36
[해설]
[출제 의도] 로그방정식 이해하기
준식에서
$\log_2 x+\log_2 y=7\cdots$①
$2\log_2 x-\log_2 y=-1\cdots$②
①, ②를 연립하면 $\log_2 x=2, \log_2 y=5$
따라서 $x=\alpha=4, y=\beta=32$
$\therefore\ \alpha+\beta=36$

206) 답 : ②
[해설]
[출제 의도] 로그함수와 관련된 실생활 문제를 해결한다.
$10=C\frac{\log 10(30-6)}{6(30-10)}$ 에서 $C=\frac{10}{\log 2}$
$T=\frac{10}{\log 2}\cdot\frac{\log 15(30-6)}{6(30-15)}=20$

207) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 지수함수의 그래프 이해하기
지수함수 $y=a\cdot 3^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭
이동시키면 함수 $y=-a\cdot 3^{-x}$의 그래프이고,
이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼,
y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면
함수 $y=-a\cdot 3^{-x+2}+3$의 그래프이다.
함수 $y=-a\cdot 3^{-x+2}+3$의 그래프가 점 $(1, -6)$을
지나므로 $-6=-a\cdot 3^{-1+2}+3$
따라서 $a=3$

208) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 로그방정식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$a=10^m$, $b=10^n$ 이라 하면,

주어진 방정식으로부터

$mn+m+n=1$ $(m+1)(n+1)=2$

m, n 이 정수이므로 방정식을 만족시키는 m, n 을 순서쌍으로 표현하면 (m, n) 은

$(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, -3)$, $(-3, -2)$ 이다.

$m+n$ 의 값이 최대일 때, $ab=10^m10^n=10^{m+n}$ 의 값이 최대가 된다.

$\therefore$ 최댓값은 10

209) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]지수함수의 그래프를 이용하여 도형의 넓이 구하기

주어진 곡선 $y=4^{x-3}-1$ 는 곡선 $y=4^x$ 을 x축으로 3만큼, y축으로 -1만큼

평행이동 한 것이다.

선분 $\overline{PQ}$와 $\overline{RS}$를 이은 평행사변형 $PRSQ$의 넓이가 구하는 넓이와 같다.

그러므로 구하는 넓이는 $16-\left(\frac{1}{2}\times3\times1\right)\times4=10$ 이다.

(별해)

네 점의 좌표는 $P(0, 1)$, $Q(1, 4)$, $S(4, 3)$, $R(3, 0)$ 이다. 따라서 정사각형이 된다.

210) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수의 성질을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$G_1=\frac{15}{14}(1.05)^{35}$, $G_2=\frac{5}{14}(1.05)^{20}$

$\frac{G_1}{G_2}=3(1.05)^{15}=6$

211) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 로그방정식을 활용한 수학

외적 문제 해결하기

처음 부피를 V_0, 처음 압력을 P_0라 하면

$\log V_0=C-\frac{2}{3}\log P_0$ ⋯㉠

$\log 4V_0=C-\frac{2}{3}\log kP_0$ ⋯㉡

㉡- ㉠을 풀면

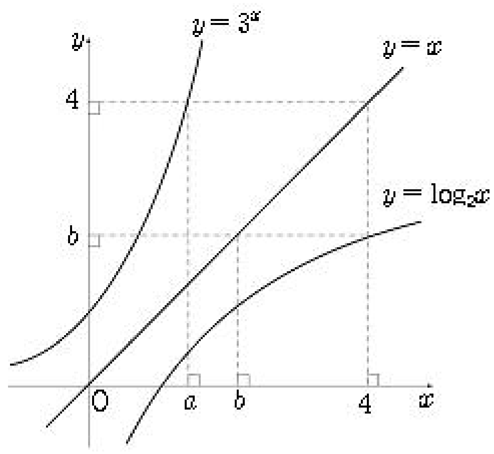
$\log 4=-\frac{2}{3}\log k$

$\therefore$ $k=\frac{1}{8}$

212) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수와 로그함수 그래프 이해하기



위 그래프에서 $3^a=4$ 이므로

$a=\log_3 4$, $b=\log_2 4=2$

$\therefore$ $a+b=2+2\log_3 2$

213) 답 : 6

[해설]

[출제 의도] 지수부등식 이해하기

$f(x)=x^2-2^{a+1}x+9\cdot2^a$ 라 하면 $f(x)\geq0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 에서

$\frac{D}{4}=(2^a)^2-9\cdot2^a\leq0$ 에서 $2^a=t$, $(t>0)$ 라 하면 $t^2-9t\leq0$

$0<t\leq9$ 이므로 $0<2^a\leq9$ ⋯㉠

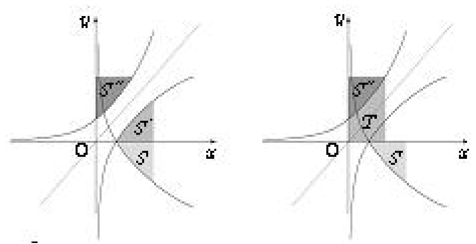
㉠을 만족시키는 자연수 a는 1, 2, 3

$\therefore$ 모든 자연수 a의 값의 합은 6

214) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 로그함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$a=-3$, $d=8$, $c=3$

두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 와 $y=\log_2 x$ 는 x축 대칭이므로

$S=S'$

두 곡선 $y=\log_2 x$ 와 $y=2^x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$S'=S''$

$\therefore$ $S+T=S''+T=cd=24$

215) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]로그를 이용한 실생활 문제 해결하기

[해설] B의 집진극의 넓이를 S라 하면, A의 집진극의 넓이는 $2S$이다.

$S=k\log_a\left(1-\frac{80}{100}\right)=k\log_a 0.2$ ⋯①

$2S=k\log_a\left(1-\frac{\eta}{100}\right)$ ⋯②

① , ②를 연립하면 $2k\log_a 0.2=k\log_a\left(1-\frac{\eta}{100}\right)$ 이며

$0.04=1-\frac{\eta}{100}$ 이므로 $\eta=96$ 이다.

216) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 로그함수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$C_1=\frac{1}{5}\log_k 4=\frac{2}{5}\log_k 2$,

$C_2=\frac{1}{10}\log_k 2$ 이므로 $C_1=4C_2$

$\therefore\ a=4$

217) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 역행렬과 연립일차방정식의 해 이해하기

점 $A_n(t_n,\ n)$에서 $\log_2 x=n$이 되는 x좌표는 2^n

$\begin{pmatrix} t_n^2+32, & -12 \\ t_n, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 $x=0,\ y=0$이외의 해를 가지려면

역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $t_n^2-12t_n+32=0$

$t_n=4,\ 8$

$t_n=2^n$ 이므로 $n=2,\ 3$

$\therefore\ n$의 값의 합은 5

218) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 등비수열 이해하기

$\log_{\frac{1}{2}} d=a,\ d=\left(\frac{1}{2}\right)^a$ ⋯㉠

$2^c=d$ ⋯㉡

㉠과 ㉡에 의하여 $c=-a$ ⋯㉢

$\log_{\frac{1}{2}} b=c,\ b=\left(\frac{1}{2}\right)^c$ ⋯㉣

㉠과 ㉣에 의하여 $bd=\left(\frac{1}{2}\right)^{a+c}=1$ ⋯㉤

$b,\ 2c,\ 5d$가 이 순서대로 등비수열이므로

$4c^2=5bd=5$

㉢에 의하여 $a^2=c^2=\frac{5}{4}\ (a<0)$

$\therefore\ a=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

219) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프를 이해하고, 직선의 기울기를 구한다.

$n=3$일 때,

점 A_3이 함수 $f(x)=2^x$ 위에 있으므로

$A_3(\log_2 3,\ 3)$

점 B_3의 좌표를 $(b,\ 3)$이라고 하면 $y=2^{x-1}$위에 있으므로

$2^{b-1}=3$

$b-1=\log_2 3$이므로

$b=\log_2 3+1=\log_2(3\times 2)=\log_2 6$

즉, $B_3(\log_2 6,\ 3)$이다.

그리고 점 C_3의 좌표를 $(\log_2 6,\ c)$라고 하면

점 $C_3(\log_2 6,\ c)$이 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$c=2^{\log_2 6}=6$

따라서 $C_3(\log_2 6,\ 6)$이므로 직선 A_3C_3의 기울기는

$\frac{6-3}{\log_2 6-\log_2 3}=\frac{3}{\log_2 \frac{6}{3}}$

$=\frac{3}{\log_2 2}$

$=3$

[다른 풀이]

곡선 $y=2^{x-1}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 것이므로

$\overline{A_3B_3}=1$

점 B_3의 x좌표와 점 C_3의 y좌표를 각각 $a,\ b$라 하면 $2^{a-1}=3$이므로

$b=2^a=2\cdot 2^{a-1}=2\times 3=6$

따라서 $\overline{B_3C_3}=6-3=3$이므로

직선 A_3C_3의 기울기는 $\frac{3}{1}=3$이다.

220) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수방정식을 이용한 수학 내적 문제 해결하기

$A(k,\ 2^k),\ B(-k,\ 2^k),\ C\left(k,\ \left(\frac{1}{2}\right)^k\right),\ D(0,\ 1)$

$P_k=\frac{1}{2}\cdot 2k(2^k-1),\ Q_k=\frac{1}{2}k\left(2^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$에서

$\frac{1}{2}\cdot 2k(2^k-1)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}k\left(2^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$

$2^k=t\,(t>0)$라 하고 양변에 t를 곱하여 정리하면

$t^2-4t+3=0,\ t=1,\ 3$

$\therefore\ k=\log_2 3\,(k>0)$

221) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수부등식 이해하기

방정식 $x^2-2(3^a+1)x+10(3^a+1)=0$에서

$\frac{D}{4}=(3^a+1)^2-10(3^a+1)$

$=(3^a)^2-8\cdot 3^a-9=(3^a+1)(3^a-9)\leq 0$

$-1\leq 3^a\leq 9$이고, $3^a>0$이므로

$0<3^a\leq 3^2$

$a\leq 2$ ∴ a의 최댓값은 2

222) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 로그방정식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$$L_2 - L_1 = 0.46\frac{\log\{8K\}}{r} + 0.05 - \left(0.46\frac{\log\{K\}}{r} + 0.05\right)$$
$$= 0.46 \times \log 8 = 0.46 \times 0.9 = 0.414$$

223) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$3 \cdot 2^x = 4^x \Rightarrow 2^x(2^x - 3) = 0 \Rightarrow x = \log_2 3$ ($\because$ $2^x > 0$)이므로

점 B의 좌표는 $(\log_2 3, 9)$이다.

세 점 A, C, D의 좌표는 각각 $(0, 3)$, $(\log_2 3, 3)$, $(2\log_2 3, 9)$이다.

그러므로 사각형 $ACDB$는 밑변의 길이가 $\log_2 3$이고 높이가 6인 평행사변형이다.

따라서 사각형 $ACDB$의 넓이는 $6\log_2 3$

224) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y = x$ 위의 점이므로

$P(k, k)$, $Q(2k, 2k)$이다.

따라서 $a^k = k$, $a^{2k} = 2k$이므로

$2k = a^{2k} = (a^k)^2 = k^2$에서 $k = 2$이다.

$a^2 = 2$ $\therefore$ $a = \sqrt{2}$

225) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수방정식 이해하기

방정식 $3^{2x} - k \cdot 3^{x+1} + 3k + 15 = 0$의 두 실근을 $\alpha, 2\alpha$라 하자.

$3^x = t\,(t > 0)$라 하면 $t^2 - 3kt + 3k + 15 = 0$의 두 실근은 $3^\alpha, 3^{2\alpha}$

따라서 근과 계수와의 관계에 의해서

$3^\alpha + 3^{2\alpha} = 3k \cdots$㉠

$3^\alpha \cdot 3^{2\alpha} = 3k + 15 \cdots$㉡

㉠과 ㉡에 의하여 $(3^\alpha)^3 = 3^\alpha + (3^\alpha)^2 + 15$

$3^\alpha = s\,(s > 0)$라 하면 $s^3 - s^2 - s - 15 = 0$

$(s-3)(s^2 + 2s + 5) = 0$이므로 $s = 3^\alpha = 3$

$3k = 3^\alpha + (3^\alpha)^2 = 3 + 3^2 = 12$

$\therefore$ $k = 4$

226) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]로그함수와 지수함수의 관계 이해하기

ㄱ. $(1, 1)$, $(2, 2)$는 $y = f(x)$, $y = g(x)$를 모두 만족한다. (참)

ㄴ.ㄱ에 의해 $1 < \alpha < 2$일 때, $f(\alpha) > g(\alpha)$이고 $\alpha < 2 < \beta$일 때, $f(\beta) > g(\beta)$이다.

그러므로 $\{f(\alpha) - g(\alpha)\}\{f(\beta) - g(\beta)\} < 0$이다. (참)

ㄷ. (반례) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ 일 때 $x_2 - x_1 > g(x_2) - g(x_1)$이다. (거짓)

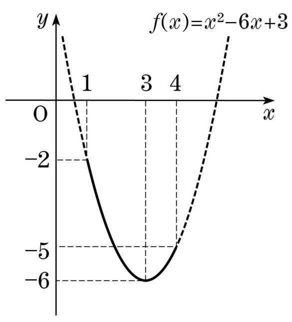
227) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 이차 함수와 지수함수의 합성함수의 최대・최소를 이해한다.

$f(x) = x^2 - 6x + 3 = (x-3)^2 - 6$이므로

$1 \le x \le 4$에서 $-6 \le f(x) \le -2$이다.



ⅰ) $0 < a < 1$일 때

$g(x) = a^x$는 감소함수이므로

$(g \circ f)(x)$는 $f(x) = -6$일 때 최댓값을 갖고, $f(x) = -2$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-6} = 27$이므로

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\therefore$ $m = a^{-2} = 3$

ⅱ) $a > 1$일 때

$g(x) = a^x$는 증가함수이므로

$(g \circ f)(x)$는 $f(x) = -2$일 때 최댓값을 갖고, $f(x) = -6$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $a^{-2} = 27$이므로

$$a = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

그런데 $a > 1$을 만족시키지 않으므로 이 경우는 불가능하다.

ⅰ), ⅱ)에서 $(g \circ f)(x)$의 최솟값은 3이다.

228) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수방정식을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$2^x = X$, $2^y = Y$라 하면 $X > 0$, $Y > 0$

$4^x + 4^y = 2$이므로 $X^2 + Y^2 = 2 \cdots$①

$2^x + 2^{y+1} = X + 2Y$에서 $X + 2Y = k \cdots$②라 하면,

직선 $X + 2Y - k = 0$과 사분원 $X^2 + Y^2 = 2$이 제 1사분면에서 접할 때,

k가 최댓값을 갖는다.

$(0, 0)$에서 직선 $X + 2Y - k = 0$까지의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \le \sqrt{2}$$

$\therefore$ $|k| \le \sqrt{10}$이므로 최댓값은 $\sqrt{10}$

229) 답 : 42

[해설]

[출제 의도] 로그부등식 이해하기

i) $7 - x > 0$, $y - 5 > 0$

ii) $\log_2 30 < \log_2 (7-x)(y-5) < \log_2 32$에서

$(7-x)(y-5) = 31$ ($\because$ x, y는 자연수)

i), ii)에 의해 $7 - x = 1$, $y - 5 = 31$이므로

$x = 6$, $y = 36$

$\therefore\ x+y=42$

230) 답 : 81

[해설]

[출제 의도]지수함수와 로그함수의 관계를 이용하여 극한값 구하기

[해설] 두 곡선 $y=3^x+2$와 $y=\log_3(x-2)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$P_n(n,\ 3^n+2),\ O(0,\ 0),\ Q_n(3^n+2,\ n)$

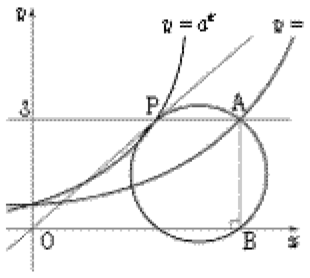
따라서 삼각형 P_nOQ_n의 넓이 $S_n=\frac{1}{2}\left((3^n+3)^2-n^2\right)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2S_n+n^2}{9^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}+6\times 3^n+9}{9^{-2}\cdot 3^{2n}}=81$$

231) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



점 A의 y좌표가 3이므로 x좌표는 10, 따라서 $A(10,\ 3)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발 $B(10,\ 0)$

점 P는 $y=a^x$과 $y=3$의 교점이므로 $P(\log_a 3,\ 3)$

삼각형 BAP는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이고 선분 BP는 원의 지름이다.

직선 OP와 직선 BP는 수직이므로 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{3}{\log_a 3}\times\frac{3}{\log_a 3-10}=-1$이며 정리하면

$(\log_a 3)^2-10\log_a 3+9=0$이며 인수분해하면

$\log_a 3=1$ 또는 $\log_a 3=9$

$a=3$ 또는 $a=3^{\frac{1}{9}}$

$\therefore$ 모든 실수 a의 값의 곱은 $3^{\frac{10}{9}}$

232) 답 : 50

[해설]

[출제 의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 A의 좌표 $(\alpha,\ 2^{\alpha-1})$에서 점 B의 y좌표는 $4^\beta=2^{\alpha-1}$이므로

$\beta=\alpha-\frac{1}{2}$ ... ①

점 D의 y좌표는 $2^{\gamma-1}=4^\alpha$ 이므로

$\gamma=2\alpha+1$ ... ②

$\alpha,\ \frac{\alpha-1}{2},\ 2\alpha+1$이 등비수열을 이루므로

$\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2=2\alpha^2+\alpha$를 풀면 $\alpha=\frac{1}{7},\ (\alpha>0)$ ...③

$\therefore\ p^2+q^2=50$

233) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$P(a,\ 2^{-a+3}+4),\ Q(a,\ -2^{a-5}-3)$이므로

$\overline{PQ}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}$이다.

$2^{-a+3}>0,\ 2^{a-5}>0$이므로

산술 ≥ 기하평균의 관계에 의해

$\overline{PQ}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}\ \geq 7+2\sqrt{2^{-a+3}2^{a-5}}$

$=7+2\sqrt{2^{-2}}=8$ (등호는 $a=4$일 때 성립)

따라서 선분 PQ길이의 최솟값은 8이다.

선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이는 $4\sqrt{2}$이다.

$\therefore$ 정사각형 넓이의 최솟값은 32

234) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기

ㄱ. $0<x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이므로 $2^{f(x_1)}<2^{f(x_2)}$ (참)

ㄴ. $x_1<x_2<0$이면 $f(x_1)>f(x_2)>1$이므로

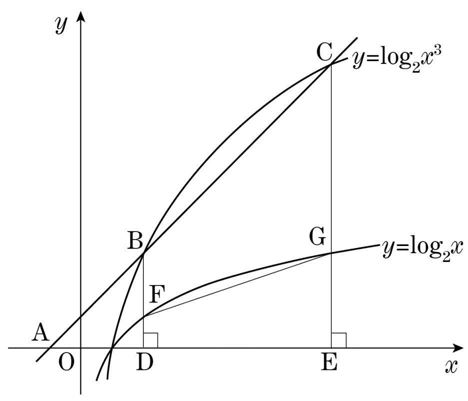
$\log_2 f(x_1)>\log_2 f(x_2)$ (참)

ㄷ. (반례) $x_1=-2,\ x_2=3$이면 $\log_{\frac{1}{2}}f(-2)>\log_{\frac{1}{2}}f(3)$ (거짓)

235) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]로그함수와 도형의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.



$\log_2 x^3-\log_2 x=3\log_2 x-\log_2 x=2\log_2 x$이므로

두 점 $F,\ G$는 두 선분 $BD,\ CE$를 각각 $2:1$로 내분하는 점이다.

$\square BFGC=\frac{2}{3}\times\square BDEC$

$=\frac{2}{3}(8\times\triangle ADB)$

$=\frac{16}{3}\times\frac{9}{2}$

$=24$

236) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 지수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

기온이 20 (℃)에서 포화수증기압은 K (hPa)이므로

$K=6.11\times 10^{\frac{7.5\times 20}{280+20}}$ ...㉠

기온이 x (℃)에서 포화수증기압은 $\frac{K}{10}$ (hPa)이므로

$\frac{K}{10}=6.11\times10^{\frac{7.5x}{280+x}}$ …㉡

㉠을 ㉡으로 나누면 $10=10^{\frac{150}{300}-\frac{7.5x}{280+x}}$

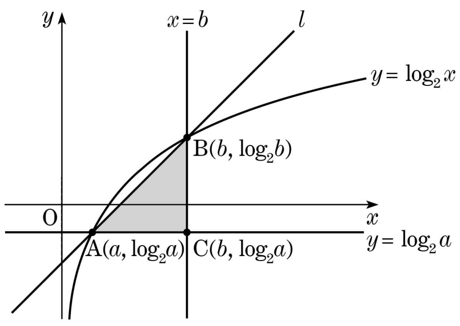
$\frac{150}{300}-\frac{7.5x}{280+x}=1$

$\therefore\ x=-17.5$

237) 답 : 5

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이에 대한 문제를 해결한다.



두 점 $A(a,\log_2 a)$, $B(b,\log_2 b)$가 기울기가 1인 직선 위에 있으므로

$\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}=1$이며 정리하면

$\log_2 b-\log_2 a=b-a$ … ㉠

직선 l과 두 직선 $x=b$, $y=\log_2 a$로 둘러싸인 부분은

밑변의 길이가 $b-a$이고, 높이는 $\log_2 b-\log_2 a$인 직각삼각형이다.

$\frac{1}{2}(b-a)(\log_2 b-\log_2 a)=2$ … ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}(b-a)\times(b-a)=2$

$(b-a)^2=4$, 즉, $b-a=2$ ($\because\ a<b$) … ㉢

또, $\log_2 b-\log_2 a=2$에서 $\log_2\frac{b}{a}=2$이므로

$b=4a$ … ㉣

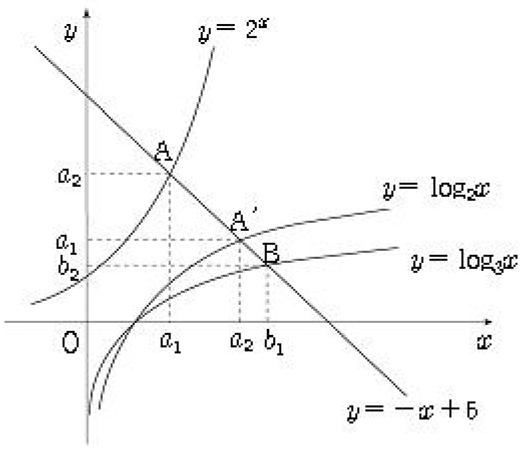
㉢, ㉣에서 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{10}{3}$

238) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기



ㄱ. $y=\log_2 x$와 $y=-x+5$가 만나는 점 $A'(a_2,a_1)$ $\therefore$ $a_1>b_2$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B는 $y=-x+5$ 위의 점이므로

$a_1+a_2=b_1+b_2=5$ (참)

ㄷ. 직선 OA'와 직선 OB의 기울기에 의해

$\frac{a_1}{a_2}>\frac{b_2}{b_1}$ (거짓)

239) 답 : 31

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -64만큼 평행이동시킨 것이다.

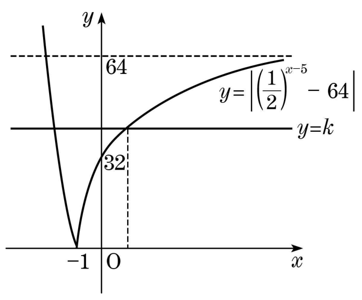
따라서 이 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표는

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}-64=2^5-64=-32$

점근선의 방정식은 $y=-64$이므로

$$y=|f(x)|=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}-64, & (x<-1)\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}+64, & (x\geq-1)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



이때, 곡선 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k$가 제1사분면에서 만나기 위해서는 $32<k<64$이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는

$64-32-1=31$

240) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

ㄱ. 곡선 $y=\log_a x$가 직선 $y=x$와 점 (p,p)에서 만나고 $p=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}=\log_a\frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=\frac{1}{4}$ (참)

ㄴ. 곡선 $y=\log_a x$가 두 점 (b,d), (c,b)를 지나므로

$\log_a b=d$, $\log_a c=b$

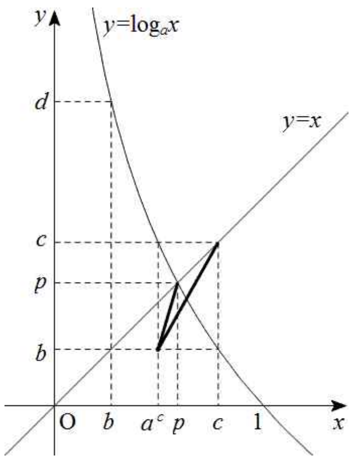
$a^d=b$, $a^b=c$이므로

$a^{b+d}=a^b\cdot a^d=bc$ (참)

ㄷ. $\frac{p-b}{p-a^c}$는 두 점 (p,p), (a^c,b)를 지나는 직선의 기울기이고,

$\dfrac{c-b}{c-a^c}$는 두 점 (c, c), (a^c, b)를 지나는 직선의 기울기이다. (거짓)

(반례)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

241) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 로그방정식의 근의 개수 추론하기

$\log x$의 정수부분을 n, 소수부분을 α라 하면

$(\log x)^2 - [(\log x)^2] = (n+\alpha)^2 - [(n+\alpha)^2]$

$= [2n]\times\alpha + \alpha^2 - [2n\alpha + \alpha^2]$

이고 $(\log x - [\log x])^2 = \alpha^2$이다.

방정식 (★)은 $[2n]\times\alpha = [2n\alpha + \alpha^2]$이므로

$2n\alpha$는 정수이고, $\log x$의 가수 α는 $\dfrac{0}{2n}, \dfrac{1}{2n}, \cdots, \dfrac{2n-1}{2n}$이다.

$10 \le x < 10^7$에서 $1 \le \log\{x\} < 7$이므로

$\log x$의 지표 n의 범위는 $1 \le n \le 6$이다.

$1 \le n \le 6$인 각각의 자연수 n에 대하여

$\log x = n + \dfrac{k}{2n}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1)$이다.

자연수 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$에 대하여 방정식 (★)의 근의 개수는 각각 $2n$개이다.

따라서 방정식 (★)의 근의 개수는 $2+4+6+8+10+12 = 42$이다.

방정식 (★)의 근의 개수는 $[42]$개이다.

위의 과정에서

$f(n) = 2n,\ p = 42$

$\therefore\ f(p) = f(42) = 84$

242) 답 : 17

[해설]

[출제 의도] 로그부등식을 활용하여 문제 해결하기

$\left(\log_2 \dfrac{x}{a}\right)\left(\log_2 \dfrac{x^2}{a}\right) + 2 \ge 0$에서

$(\log_2 x - \log_2 a)(2\log_2 x - \log_2 a) + 2 \ge 0\ 1$

$2(\log_2 x)^2 - 3(\log_2 a)(\log_2 x) + (\log_2 a)^2 + 2 \ge 0$에서 공통부분을 치환하면

$\log_2 x = t$라 하면

$2t^2 - 3(\log_2 a)t + (\log_2 a)^2 + 2 \ge 0 \cdots ①$

주어진 부등식 ①이 모든 양의 실수 x에 대하여 성립하려면

위 부등식이 모든 실수 t에 대하여 성립하여야 하므로

판별식 $D = 9(\log_2 a)^2 - 8\{(\log_2 a)^2 + 2\} \le 0$이다.

$(\log_2 a)^2 - 16 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le \log_2 a \le 4$에서 $\dfrac{1}{16} \le a \le 16$이므로

$M = 16,\ m = \dfrac{1}{16}$이다.

따라서 $M + 16m = 17$

243) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 로그부등식 이해하기

(가)에서 진수가 양수이므로

$y > x \cdots ㉠$

$\log_2(y-x) < \log_2 1$이므로

$y < x+1 \cdots ㉡$

(나)에서 진수가 양수이므로

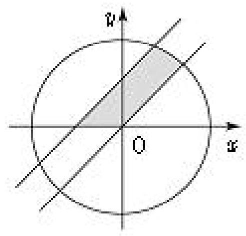
$-2 < x < 2$이고 $y > 0 \cdots ㉢$

$\log_2 y < \log_4(4-x^2)$이므로

$2\log_2 y < \log_2(4-x^2)$

따라서 $x^2 + y^2 < 4 \cdots ㉣$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 모두 만족하는 영역을 어두운 부분으로 나타내면 다음과 같다.



244) 답 : 297

[해설]

[출제 의도] 로그를 이해하여 문제 해결하기

$P_1(0, 0),\ P_3(0, \log 3),\ P_{10}(1, 0)$이다.

$10 < m < 100$이므로 $\log m$의 정수부분은 1이고,

소수부분은 $(\log m - 1)$이므로

점 P_m의 좌표는 $(1, \log m - 1)$이다.

(사각형 $P_1P_{10}P_mP_3$의 넓이)

$\dfrac{1}{2}(\log 3 + \log m - 1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log\{3m\}}{10}$이므로

자연수 m이 최대일 때 사각형 $P_1P_{10}P_mP_3$의 넓이는 최대이다.

따라서 $m = 99$일 때, $\log M = \dfrac{1}{2}\dfrac{\log 297}{10}$

$\therefore\ M = \sqrt{\dfrac{297}{10}}$

따라서 $10M^2 = 297$

245) 답 : ②

[해설]

$(2^x)^2 - 8\cdot 2^x + 15 = 0$

$(2^x - 3)(2^x - 5) = 0$의 두 근이 α, β이므로

$2^{\alpha+\beta} = 2^\alpha \cdot 2^\beta = 3\times 5 = 15$

246) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]지수법칙을 이해하여 주어진 식의 값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$3^x = t$라 하면 $t>0$이고

$$3^{1-x} = \frac{3}{3^x} = \frac{3}{t},\ 9^x = 3^{2x} = t^2,\ 9^{1-x} = \frac{9}{9^x} = \frac{9}{t^2}$$

$$\therefore\ 9^x + 9^{1-x} = t^2 + \frac{9}{t^2} = \left(t + \frac{3}{t}\right)^2 - 2 \cdot t \cdot \frac{3}{t}$$

$$= 10^2 - 6 = 94$$

[참고]

산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의해

모든 실수 x에 대하여

$$3^x + 3^{1-x} \ge 2\sqrt{3^{x+(1-x)}} = 2\sqrt{3}$$

247) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]지수방정식의 해 구하기

$2^x = t\,(t>0)$라 하면

$$2^x - 6 + 2^{3-x} = t - 6 + \frac{8}{t} = 0 \text{에서}$$

$t=2$ 또는 $t=4$이므로 $\alpha=1,\ \beta=2\ (\because\ \alpha<\beta)$

따라서 $\alpha + 2\beta = 5$

248) 답 : 16

[해설]

$$\log_a(\log_2 3) + \log_a(\log_9 5) + \log_a(\log_5 16) = 4$$

$$\log_a\left(\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 5}{2\log 3} \cdot \frac{4\log 2}{\log 5}\right) = 4$$

$$\log_a 2 = 4 \Longrightarrow a^4 = 2$$

$$\therefore\ a^{16} = 16$$

249) 답 : 24

[해설]

$(\log x)^2 - \log x - 12 \le 0$

$-3 \le \log x \le 4$

$\log_{\sqrt{10}} x^3 = 6\log x$이고

$-18 \le 6\log x \le 24$이므로

$\log_{\sqrt{10}} x^3$의 최댓값은 24

250) 답 : ③

[해설]

$A\ (a,\ 2^a),\ B\ (b,\ 2^b)$라 하면

$\frac{a+b}{2} = 0$에서 $a+b=0$이므로 $2^a \cdot 2^b = 1$이다.

$\frac{2^a + 2^b}{2} = 5$이므로 $2^a + 2^b = 10$

$$2^{2a} + 2^{2b} = (2^a + 2^b)^2 - 2 \cdot 2^a \cdot 2^b = 100 - 2 = 98$$

251) 답 : ①

[해설]

$A(a,\ \log_2 a),\ B(b,\ \log_2 b)\ (b>a)$라 하면

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a+b+3}{3},\ \frac{\log_2 ab}{3}\right) = (3,\ 1)$이다.

$a+b=6,\ ab=8$이므로 $a=2,\ b=4$

직선 AB의 기울기는 $\frac{\log_2 4 - \log_2 2}{4-2} = \frac{1}{2}$

252) 답 : 140

[해설]

$$70 = 10\frac{\log\left\{\frac{1}{10^5}\right\}}{x_0} = 10(-5 - \log x_0)\ \ldots ①$$

$$a = 10\frac{\log\{10^2\}}{x_0} = 10(2 - \log x_0)\ \ldots ②$$

② -①을 계산하면 $a - 70 = 70$

$\therefore\ a = 140$

253) 답 : ⑤

[해설]

$a_n = \log_2(n+1)$이므로 $a_n > 0$

ㄱ. $a_2 - a_1 = \log_2 \frac{3}{2} > \log_2 1 = 0$ (참)

ㄴ. $a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} = \log_2 \frac{n^2+4n+3}{(n+2)^2}$

$< \log_2 \frac{n^2+4n+4}{(n+2)^2} = \log_2 1 = 0$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여 $a_{n+1} > \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$이므로

$$a_{n+1} > \frac{a_n + a_{n+2}}{2} > \sqrt{a_n a_{n+2}}\ (a_n \ne a_{n+2})$$

따라서 $a_{n+1} > \sqrt{a_n a_{n+2}}$에서 양변을 제곱하면

$a_{n+1}^2 > a_n a_{n+2}$ (참)

254) 답 : ⑤

[해설]

$$y = \frac{3^{2x} + 3^x + 9}{3^x}$$

$$= 3^x + \frac{9}{3^x} + 1 \ge 2\sqrt{3^x \cdot \frac{9}{3^x}} + 1$$

따라서 최솟값은 7

255) 답 : ⑤

[해설]

사각형 $ABCD$의 넓이는 $\frac{9}{2}$

256) 답 : 6

[해설]

[출제 의도]로그함수의 그래프의 성질을 이해하기

$\overline{BC} = \log_a 4 - \log_b 4 = 2 \cdots ①$

점 $A,\ B$의 y좌표가 같으므로

$\log_a 2 = \log_b 4 \cdots ②$

①, ②에 의하여

$\log_a 4 - \log_a 2 = \log_a 2 = 2$ 에서 $a = \sqrt{2}$, $b = 2$

따라서 $a^2 + b^2 = 6$

257) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]로그의 성질을 알고 실생활 문제 해결하기

$S_1 = 20\dfrac{\log\{aV_0\}}{V_0} = 6.02$,

$S_2 = 20\dfrac{\log\{bV_0\}}{V_0} = 36.02$ 이므로

$S_2 - S_1 = 20\dfrac{\log\{b\}}{a} = 30$ ∴ $\dfrac{\log\{b\}}{a} = \dfrac{3}{2}$

따라서 $\dfrac{b}{a} = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}$

258) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]지수부등식 해결하기

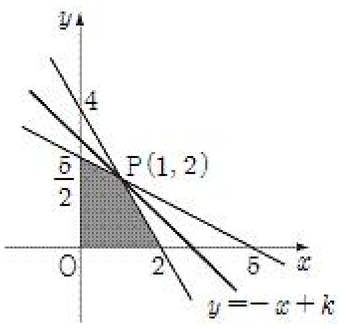
$x \geq 0,\ y \geq 0 \cdots$①

$2^y \leq 4^{2-x}$ 에서 $y \leq -2x + 4 \cdots$②

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2y} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{5-x}$ 에서

$2y \leq -x + 5 \cdots$③

①, ②, ③을 만족시키는 점 (x, y)를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $x + y = k$라 하면

두 직선 $y = -2x + 4$, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$ 의

교점 $P(1, 2)$에서 $x + y$의 값이 최대이다.

따라서 $x + y$의 최댓값은 3

259) 답 : 23

[해설]

[출제 의도]로그방정식의 해 구하기

$\log_3 x \cdot \log_2 y = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_3 y}{\log_3 2} = 6$

$\log_2 x = X$, $\log_3 y = Y$라 하면

$\begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases}$ 이므로

$\begin{cases} X = 2 \\ Y = 3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} X = 3 \\ Y = 2 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} x = 4 \\ y = 27 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 8 \\ y = 9 \end{cases}$

따라서 $\beta - \alpha$의 최댓값은 23

260) 답 : ②

[해설]

$A_k(k, 2^k)$, $B_k(k, 2^{-k})$라 하면

$\overline{A_kB_k}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는 $\left(k, \dfrac{2^{k+1} + 2^{-k}}{3}\right)$이다.

이때, y좌표의 최솟값은

$\dfrac{2^{k+1}}{3} + \dfrac{2^{-k}}{3} \geq 2\sqrt{\dfrac{2^{k+1}}{3} \cdot \dfrac{2^{-k}}{3}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{9}}$ 이고

$\dfrac{2^{k+1}}{3} = \dfrac{2^{-k}}{3}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 $k = -\dfrac{1}{2}$ 이다.

261) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]로그함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $T = 0$일 때 $P = 4.8$이므로 $a + \dfrac{b}{c} = \log 4.8$이다.

그런데 $\log 4 < \log 4.8 < \log 5$에서

$2\log 2 < \log 4.8 < 1 - \log 2$이므로

$0.602 < a + \dfrac{b}{c} < 0.699$ (참)

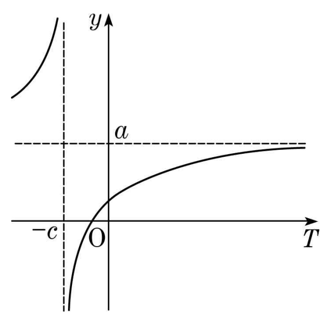
ㄴ. $y = \log P$라 하면 $y = a + \dfrac{b}{c + T}$의 그래프는

점근선이 $T = -c$, $y = a$이다.

그런데 주어진 표를 이용하면 T의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로

분수함수의 그래프는 그림과 같아야 한다.

∴ $b < 0$ (참)



ㄷ. ㄴ의 $y = a + \dfrac{b}{c + T}$의 그래프에서 $T > -c$인 모든 실수 T에 대하여 $y < a$이다.

∴ $\log P < a$

따라서 $P < 10^a$이다. (참)

262) 답 : 55

[해설]

진수 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이므로 $x > 8 \cdots$①

로그부등식의 밑이 2이고 $f(x) > g(x)$이므로

따라서 $2 < x < 9 \cdots$②

① 과 ②에 의해 $8 < x < 9$이므로

$a = -17$, $b = 72$

∴ $a + b = 55$

263) 답 : 25

[해설]

$\log x = X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2 + (\log 2 + \log 4)X + (\log 2)(\log 4) + (\log k)^2 = 0$

주어진 조건을 만족하려면 X에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D는

$D = (\log 2 + \log 4)^2 - 4(\log 2)(\log 4) - 4(\log k)^2 > 0$

$= -\frac{1}{2}\log 2 < \log k < \frac{1}{2}\log 2$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}} < k < \sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2 + \beta^2) = 10\left(\frac{1}{2} + 2\right) = 25$

264) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $f(24) = 4$ (참)

ㄴ. n이 소수이면 $f(n) = 1$ (참)

ㄷ. (반례) $n = 4$일 때, $f(4) = \frac{3}{2}$ (거짓)

265) 답 : ⑤

[해설]

직사각형의 가로의 길이는 $\beta - \alpha = 4$이고,

세로의 길이는 $3^{\alpha} - (-3^{-\beta})$이므로

직사각형의 넓이를 S라 하면

$S = (\beta - \alpha)(3^{\alpha} + 3^{-\beta}) = 4(3^{\alpha} + 3^{-\alpha-4})$

$\geq 4 \times 2\sqrt{3^{\alpha} \cdot 3^{-\alpha-4}} = \frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha = -2,\ \beta = 2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

266) 답 : ③

[해설]

$f(x) = a^x$의 그래프에서 $a > 1$이다.

$y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8f(x)} = -\log_2 \frac{a}{2x} - \frac{3}{2}$ ($\log_2 a > 0$)의 그래프의 개형은 기울기와 y절편이 모두 음수인 일차함수의 그래프이다.

267) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\sqrt[n]{2^m} < \sqrt[m]{2^n}$ 이므로 $2^{\frac{m}{n}} < 2^{\frac{n}{m}}$

$\frac{m}{n} < \frac{n}{m}$ 이므로 $m < n$ (참)

ㄴ. $\sqrt[n]{5^m} < \sqrt[m]{3^n}$ 이므로 $3^{\frac{m}{n}} < 5^{\frac{m}{n}} < 3^{\frac{n}{m}}$ 이고

$\frac{m}{n} < \frac{n}{m}$ 이므로 $m < n$ (참)

ㄷ. $m < n$이므로 $\frac{m}{n} < \frac{n}{m}$ 이고 $0 < x < 1$

$x^{\frac{n}{m}} < x^{\frac{m}{n}}$ $\therefore\ \sqrt[m]{x^n} < \sqrt[n]{x^m}$ (참)

268) 답 : ①

[해설]

$p = \frac{p_0}{5}$ 를 준식에 대입하여 정리하면

$h = 44000\left\{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{0.2}\right\}$이다.

$x = \left(\frac{1}{5}\right)^{0.2}$ 라 두고, 양변에 상용로그를 취하면

$\log x = 0.2(\log 2 - 1) = \bar{1}.86$ 이므로

$x = 0.725$

따라서 $h = 44000(1 - 0.725) = 12100\ (m)$

269) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]지수함수를 이해하고 지수방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$P(k, a^k),\ Q(k, a^{2k}),\ R(k, k)$라 하면

$k = 2$일 때 $a^{2k} = k$이므로 $a^4 = 2$

$\therefore\ a = \sqrt[4]{2}$ ($\because\ a > 1$)

$\therefore\ a^x = 2^{\frac{x}{4}},\ a^{2x} = 2^{\frac{x}{2}}$

ㄱ. $k = 4$이면 $(\sqrt[4]{2})^8 = 4$이므로 $a^{2k} = k$이다.

따라서 점 Q와 점 R는 일치한다.(참)

ㄴ. $\overline{PQ} = \left|2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k}{4}}\right| = 12$이다.

이때 $2^{\frac{k}{4}} = t(t > 0)$라 하면

$t^2 - t = 12$ 또는 $t^2 - t = -12$이다.

i) $t^2 - t = 12$인 경우 $(t-4)(t+3) = 0$에서

$t > 0$이므로 $t = 4$

$\therefore\ 2^{\frac{k}{4}} = 4$

$\therefore\ \frac{k}{4} = 2$

$\therefore\ k = 8$

ii) $t^2 - t = -12$인 경우 $t^2 - t + 12 = 0$의 판별식이 음수이므로

$t > 0$조건을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않는다.

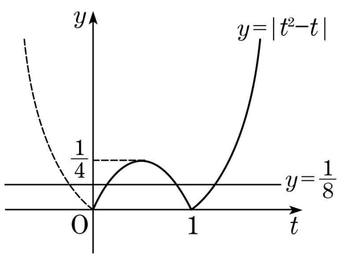
따라서, k도 존재하지 않는다.

i), ii)에 의하여 $k = 8$이므로 $Q(8, 16),\ R(8, 8)$

$\therefore\ \overline{QR} = 8$ (참)

ㄷ. $\overline{PQ} = \left|2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k}{4}}\right|$에서 $2^{\frac{k}{4}} = t$ ($t > 0$)라 하면 $\overline{PQ} = |t^2 - t|$이다.

이때 $y = |t^2 - t| = \left|\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $\overline{PQ} = \frac{1}{8}$을 만족시키는 양의 실수 t의 값은 3개이므로

실수 k의 값도 3개이다.(거짓)

270) 답 : ④

[해설]

주어진 지수부등식의 $3^x = t\,(t>0)$라 하면

(준식) = $t^2 - kt + k + 3 \geq 0$

$f(t) = t^2 - kt + k + 3 = \left(t - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k + 3$이라 하면

(ⅰ) $k < 0$일 때,

$f(0) \geq 0$이 성립해야 하므로 $k+3 \geq 0$, $k \geq -3$

$\therefore\ -3 \leq k < 0$

(ⅱ) $k \geq 0$일 때,

$f(t)$의 최솟값 $-\frac{k^2}{4} + k + 3 \geq 0$이 성립해야 하므로

$k^2 - 4k - 12 \leq 0$, $-2 \leq k \leq 6$

$\therefore\ 0 \leq k \leq 6$

(ⅰ)과(ⅱ)에 의해 $-3 \leq k \leq 6$이고

따라서 만족하는 정수 k의 개수는 10이다.

271) 답 : 40

[해설]

[출제 의도]등비수열의 합 구하기

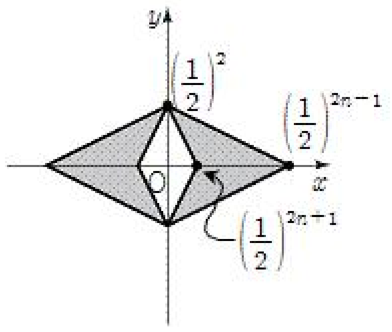
점 (x, y)가 나타내는 영역은 두 대각선의 길이가

각각 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ 인 마름모의 내부와

두 대각선의 길이가 각각 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ 인

마름모의 외부의 공통 부분(어두운 부분)이므로

$a_n = 3\times\left(\frac{1}{16}\right)^n$



$S_{10} = 3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{16}\right)^k = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{40}\right\}$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}}(1 - 5S_{10}) = 40$

272) 답 : ①

[해설]

㈎ $f(x) = 2^x - 1\ (-1 \leq x \leq 0)$

㈏ $f(x) + f(-x) = 0$

㈐ $f(x) = f(x-2) + 1$

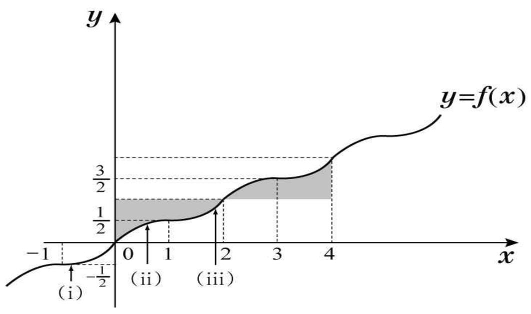
위 세 조건을 만족하는 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(ⅰ)㈎조건에 의해서 $-1 \leq x \leq 0$에서 그래프를 그린다.

(ⅱ)㈏조건에 의해서 $0 < x \leq 1$에서(ⅰ)에서

그린 그래프를 원점 대칭하여 그린다.

(ⅲ)㈐조건에 의해서 나머지(ⅰ), (ⅱ)에서 그린 그래프를 평행이동하여 그린다.



어두운 부분의 넓이는 같다

$f(2) = f(0) + 1 = 1$

$y = f(x)$의 그래프와 직선 $x = 4$,

x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S = 4\times 1 = 4$

273) 답 : ①

[해설]

$2^{xy} = (2^x)^y = 3^y = 5$

274) 답 : 18

[해설]

$\log_2 \sin\theta\cos\theta = -4$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{16}$

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{8}$

$\log_2(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \log_2 x - 4$이므로

$\log_2\frac{9}{8} = \log_2\frac{x}{16}$

$\therefore\ x = 18$

275) 답 : 12

[해설]

$2^x = t$라 하면 $t^2 - 24t + k = 0$의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$이므로

근과 계수와의 관계에서 $k = 128$

$t = 8, 16$이므로 근은 $3, 4$

$\therefore\ \alpha\beta = 12$

276) 답 : 12

[해설]

$3^{-\frac{3}{2}x} = 3^{6-2x}$

$-\frac{3}{2}x = 6 - 2x$

$\therefore\ x = 12$

277) 답 : 9

[해설]

$2^{\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \cdots + \frac{2n-1}{7}} = 2^{\frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)} = 2^{\frac{n^2}{7}} > 2^{10}$이므로

$\frac{n^2}{7} > 10$이다.

따라서 $n^2 > 70$이므로 만족시키는 양의 정수 n의

최솟값은 9이다.

278) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]지수부등식과 로그부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a^{x-1} < a^{2x+1}$의 해가 $x<-2$이려면

$x<-2 \Leftrightarrow x-1>2x+1$

$\therefore\ 0<a<1$

$\log_a(x-2)<\log_a(4-x)$에서

$x-2>4-x$

$\therefore\ x>3 \cdots$ ①

진수는 양수이어야 하므로 $x-2>0,\ 4-x>0$

$\therefore\ 2<x<4 \cdots$ ②

① , ②에서 주어진 부등식의 해는 $3<x<4$이다.

279) 답 : ②

[해설]

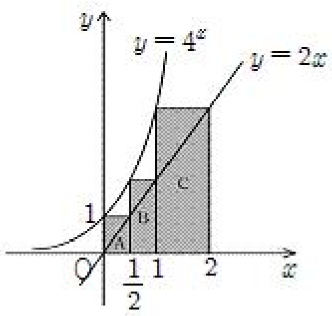
판별식이 $D \le 0$이므로

$2^a(2^a-4) \le 0$

$a \le 2$이므로 a의 최댓값은 2이다.

280) 답 : 121

[해설]



A의 넓이는 $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

B의 넓이는 $2\times\frac{1}{2}=1$

C의 넓이는 $4\times1=4$

따라서 넓이의 합 $S=\frac{11}{2}$이므로 $4S^2=121$이다.

281) 답 : 15

[해설]

방정식 $2^x+2^{3-x}=6$에서 공통부분인 $2^x=t$(단, $t>0$)라 하면

$t+\frac{8}{t}=6$이며 양변에 t를 곱하면

$t=2$또는 4이므로 $x=1$또는 2

$(1+2\alpha)(1+2\beta)=15$

282) 답 : 2

[해설]

㈎에서 $f\left(\frac{5}{2}\right)=2^{2^{\frac{5}{2}a+b}}=2\sqrt{2}=2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ \frac{5}{2}a+b=\frac{3}{2}$

㈏에서 $f(x+y)=2f(x)f(y)$에 $x=y=0$을 대입하면

$f(0)=2f(0)f(0)$이고 $f(0)>0$이므로

$f(0)=2^b=\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ b=-1$

따라서, $a=1,\ b=-1$이다.

283) 답 : ⑤

[해설]

$90=100\log(h+7.57-1.7\times50^{0.37})$

$0.9=\log(h+7.57-7.24)$

$3\log2=\log(h+0.33)$

$\log8=\log(h+0.33)$

$\therefore\ h=7.67$

284) 답 : 81

[해설]

[출제 의도]로그방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$(\log_3x)^2-12=\log_3x^4$는 $(\log_3x)^2-\log_3x^4-12=0$

$(\log_3x-6)(\log_3x+2)=0,\ \log_3x=6,\ -2$이므로

$x=3^6,\ 3^{-2}$이다. $\therefore\ \alpha\beta=81$

285) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]로그함수의 그래프를 이용하여 문제 해결하기

$A(a,\ \log_4a),\ B\left(a,\ \log_{\frac{1}{4}}a\right)$,

$C\left(a+2,\ \log_{\frac{1}{4}}(a+2)\right)$, $D(a+2,\ \log_4(a+2))$이고

$\overline{AB}=\log_4a-\log_{\frac{1}{4}}a=2\log_4a=\log_2a$

$\overline{CD}=\log_4(a+2)-\log_{\frac{1}{4}}(a+2)$

$=2\log_4(a+2)$

$=\log_2(a+2)$

이므로 사각형 $ABCD$의 넓이는

$\frac{1}{2}\{\log_2a+\log_2(a+2)\}\times2=3$

$\log_2a(a+2)=3$

$a(a+2)=8$

따라서 $a=2\ (a>1)$이다.

286) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]로그의 성질 이해하기

$\log_2ab=4,\ \log_2\frac{a}{b}=2$이므로

$\log_2a^2=6$이다.

따라서, $\log_2a=3$이므로 $a=8,\ b=2$이다.

그러므로 $a+b=10$

287) 답 : ④

[해설]

$\frac{2}{3}\cos^2x-\sin x<0$이므로 $\sin x>\frac{1}{2}$이다.

$\therefore\ \frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$

따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$이다.

288) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]지수를 이용하여 실생활 문제 해결하기

$\dfrac{300}{900}=\left(\dfrac{3}{81}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$ 이므로 $\gamma=\dfrac{3}{2}$

289) 답 : ④

[해설]

점 H의 x좌표를 t라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$a^t=b^{2t}=3$이다.

따라서 $b^t=\sqrt{a^t}=\sqrt{3}$이다.

그러므로 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{DH}}=\dfrac{a^t-b^t}{b^t}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$이다.

290) 답 : ③

[해설]

$80=10\left(12+\dfrac{\log\{I\}}{1^2}\right)=120+10\log I$에서

$\log I=-4$

$\therefore\ a=10\left(12+\dfrac{\log\{I\}}{10^2}\right)=120+10\log I-20=60$

291) 답 : 22

[해설]

$y=2^{x-2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를

x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{P_kQ_k}=2$

$\therefore\ A_k=\dfrac{1}{2}\times2\times k=k\ \therefore\ A_1+A_4+A_7+A_{10}=22$

292) 답 : ④

[해설]

$2^x=X,\ 3^y=Y$로 치환하자.

연립방정식 $\begin{cases}8X-\dfrac{1}{3}Y=k\cdots ① \\ \dfrac{1}{2}X+9Y=2\cdots ②\end{cases}$ 가

$X>0,\ Y>0$인 근을 가지려면 ①의 직선이 ②의 직선의 X축과의 교점인 $(4,0)$을 지날 때의 k값보다 작아야 하므로 k의 최댓값은 31이다.

293) 답 : ②

[해설]

$A(\alpha, m\alpha),\ B(\beta, m\beta)$라 하자.(단, $\alpha\neq0$)

$\triangle OBD:\triangle OAC=4:1$이므로

$\overline{OB}:\overline{OA}=2:1$. 즉, $\beta=2\alpha$

$m\alpha=\log_2\alpha$이고 $2m\alpha=\log_2 2\alpha$이므로

$2\log_2\alpha=\log_2 2\alpha,\ \alpha^2=2\alpha$

$\alpha\neq0$이므로 $\therefore\ \alpha=2,\ \beta=4$

사각형 $ABDC$는 등변사다리꼴이므로,

$y=mx$은 $y=nx$의 역함수이다.

따라서 $C(2m, 2),\ D(4m, 4)$이므로

$2^{2m}=2$에서 $m=\dfrac{1}{2},\ n=2\ \therefore\ m+n=\dfrac{5}{2}$

294) 답 : ③

[해설]

$v=2^{-2}\times10^{0.5}\times8^{1.67}\times4^{-1.17}=2^{0.67}\times10^{0.5}$

$\log v^{1000}=1000(0.67\log2+0.5)$

$=1000(0.201+0.5)=701$

295) 답 : ③

[해설]

$16\times3^{-x}+3^{x+2}=2a$에서 $3^x=t\,(t>0)$라 하면

$16t^{-1}+9t=2a,\ 9t^2-2at+16=0$

$t>0$이고 두 근의 곱이 양수이므로

이 방정식이 단 하나의 해를 가진다면 양수인 중근을 가져야 하므로

(두 근의 합) $=\dfrac{2a}{9}>0\ \therefore\ a>0$

$\dfrac{D}{4}=a^2-9\times16=0,\ a^2=144$

$\therefore\ a=12$

296) 답 : ③

[해설]

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x-2)}<2^{-g(x+1)}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x-2)}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{g(x+1)}$

$f(x-2)>g(x+1)\rightarrow x(x-3)>-x$

$\therefore\ x<0$ 또는 $x>2$

297) 답 : 109

[해설]

$A(-2, 16),\ B\left(-2, \dfrac{1}{4}\right),\ C\left(1, \dfrac{1}{4}\right),\ D(1, 2)$이므로

사각형 $ABCD$의 넓이는

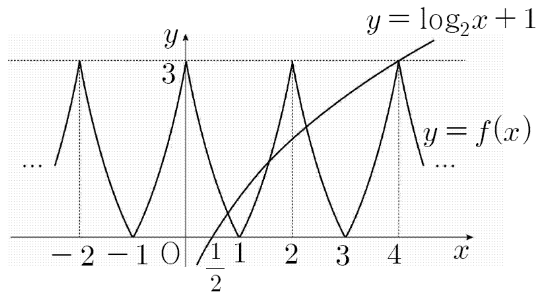
$\left\{\left(16-\dfrac{1}{4}\right)+\left(2-\dfrac{1}{4}\right)\right\}\times3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{105}{4}$

$\therefore\ p+q=109$

298) 답 : ①

[해설]

함수 $f(x)$는 주기가 2인 함수 이고, $y=f(x)$의 그래프는 실수 전체의 집합에서 그림과 같다.



$y=\log_2 x+1$의 그래프는 두 점 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right),\ (4, 3)$을 지나므로

$y=f(x)$의 그래프와 4개의 점에서 만난다.

299) 답 : ②

[해설]

$\log_2(y+1)-\log_2|x|=\log_2\frac{y+1}{|x|}$ 에서

$\frac{y+1}{|x|}=k(k>0)$즉, $y=k|x|-1$로 놓으면

k가 최솟값을 가질 때, $\log_2\frac{y+1}{|x|}$ 즉, $\log_2 k$도 최솟값을 갖는다.

$y=x^2$과 $y=k|x|-1$이 접할 때,

즉, 방정식 $x^2-k|x|+1=0$이 중근을 가질 때, k가 최솟값을 가지므

로 $k=2$이다.

$$\therefore \log_2\frac{y+1}{|x|}=\log_2 k=\log_2 2=1$$

300) 답 : 246

[해설]

$f(x)=9x^{-2+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 f(x)=\log_3 9+\log_3 x^{-2+\log_3 x}=2+(-2+\log_3 x)\log_3 x$

$\log_3 x=t$라 하면 $\frac{1}{3}\le x\le 3$에서 $-1\le t\le 1$이다.

$\log_3 f(x)=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$에서

$t=-1$일 때, 최댓값 $M=243$,

$t=1$일 때, 최솟값 $m=3$이므로 $M+m=246$이다.