IV.다항함수의 적분법

3.정적분의 활용

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 곡선 $y=2x^2+3x$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

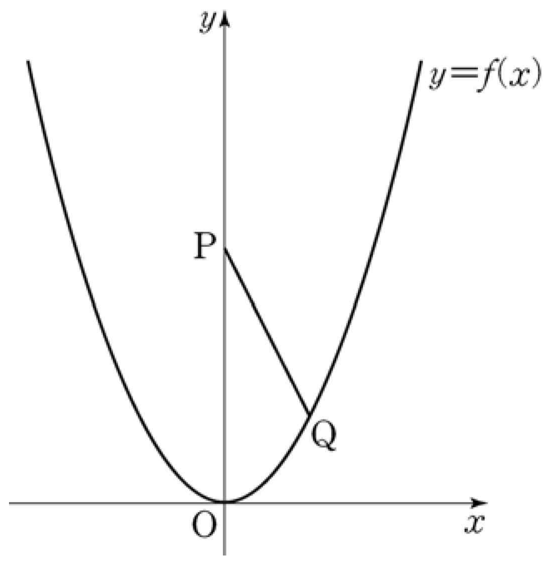
[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

2 수직선 위를 움직이는 점 P 이 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t)=-2t+4$ 이다. $t=0$ 부터 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인 거리는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

3 자연수 n 에 대하여 좌표가 $(0, 2n+1)$ 인 점을 P 라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$ 의 그래프 위의 점 중 y 좌표가 1 이고 제1사분면에 있는 점을 Q 라 하자.



$n=1$ 일 때, 선분 PQ 와 곡선 $y=f(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?[3점][2016(A) /수능 13]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{19}{12}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

4 곡선 $y=x^2-4x+3$ 과 직선 $y=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 10 ② $\frac{31}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$
④ 11 ⑤ $\frac{34}{3}$

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

5 최고차항의 계수가 1인 이차 함수 $f(x)$가 $f(3)=0$이고, $\int_0^{2013} f(x)dx = \int_3^{2013} f(x)dx$를 만족시 킨다. 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 S일 때, $30S$의 값을 구하시오.[4점][2013학년도 수능]

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

6 닫힌구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0,\ f(1)=1$이며, 열린 구간 $(0, 1)$에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$일 때, $\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$의 값과 같은 것은?[3점]

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{2n}$　② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$
③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$　④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{2n}\right)\right\}\frac{1}{n}$
⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

7 지면에 정지해 있던 열기구가 수직 방향으로 출발한 후 t분일 때, 속도 $v(t)$(m/분)를 $v(t)=\begin{cases} t\,(0 \le t \le 20) \\ 60-2t\,(20 \le t \le 40)\end{cases}$라 하자.

출발한 후 $t=35$분일 때, 지면으로부터 열기구의 높이는?(단, 열기구는 수직 방향으로만 움직이는 것으로 가정한다.)[3점]

① $225m$　② $250m$　③ $275m$
④ $300m$　⑤ $325m$

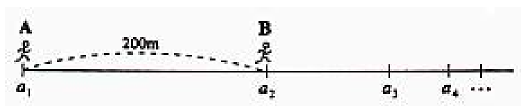
[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

8 자연수 n에 대하여, 두 곡선 $y=x^2-2,\ y=-x^2+\frac{2}{n^2}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[3점]

① $\frac{16}{3}$　② $\frac{14}{3}$　③ 4
④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{8}{3}$

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

9 [공통]다음 그림과 같이 A와 B가 직선 위를 따라 같은 방향으로 달린다. B는 A보다 $200m$앞에서 A와 동시에 출발한다. A의 출발점을 a_1, B의 출발점을 a_2, A가 a_2에 도달했을 때 B의 위치를 a_3, A가 a_3에 도달했을 때, B의 위치를 a_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속하여 점 $a_n(n=1, 2, 3, \cdots)$을 정한다. A의 속도가 B의 속도 의 2배이면, A와 B사이의 거리가 $1m$이내가 되기 시작할 때 A의 위치는?



① a_4와 a_5사이　② a_6과 a_7사이
③ a_8과 a_9사이　④ a_{10}과 a_{11}사이
⑤ a_{12}와 a_{13}사이

[난이도 : ★★★] [1998 학년도 대수능]

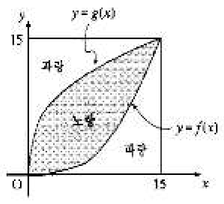
10 [공통]포물선 $y=(x-a)^2+b$ 위의 두 점 $P(s+a,\ s^2+b)$와 $Q(t+a,\ t^2+b)$에서 각각 그은 이 포물선의 접선은 서로 수직이다. 이 두 접선과 위 포물선으로 둘러싸인 도형의 면적을 A라고 하다. 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $s<0<t$)

[보기]
Ⅰ) s가 증가하면 t도 증가한다.
Ⅱ) a가 증가하면 면적 A도 증가한다.
Ⅲ) b가 변하면 면적 A도 변한다.

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

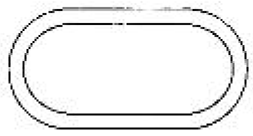
[난이도 : ★★★] [1998 학년도 대수능]

11 [공통]정사각형 모양의 타일이 좌표평면에 그림과 같이 가로, 세로가 각각 x축, y축과 일치되게 놓여 있다. 이 타일에 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프를 경계로 하여 파랑색과 노랑색을 칠하려고 한다. 파랑색과 노랑색이 칠해지는 부분의 넓이의 비가 $2:3$일 때, $\int_0^{15} f(x)dx$의 값을 구하여라(단, 함수 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)



[난이도 : ★☆☆] [1997 학년도 대수능]

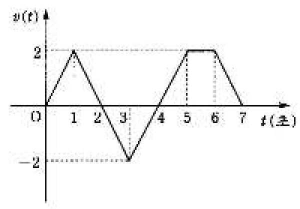
12 그림과 같은 자동차 경주 코스를 두 자동차 A, B가 같은 방향으로 돌고 있다. 자동차 A, B의 속력은 각각 분속 $akm/$분과 $bkm/$분이고, 경주 코스 한 바퀴의 길이는 ckm이다. $3a-3b=2c$가 성립한다고 할 때, 다음 중 옳은 것은?



① 3분마다 A는 B보다 한 바퀴 더 돈다.
② 3분마다 A는 B보다 두 바퀴 더 돈다.
③ 2분마다 A는 B보다 한 바퀴 더 돈다.
④ 3분마다 B는 A보다 한 바퀴 더 돈다.
⑤ 2분마다 B는 A보다 한 바퀴 더 돈다.

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

13 [공통]원점을 출발하여 수직선 위를 7초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가 다음 그림과 같을 때, 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?



[보기]
Ⅰ.점 P는 출발하고 나서 1초 동안 멈춘 적이 있었다.
Ⅱ.점 P는 움직이는 동안 방향을 4번 바꿨다.
Ⅲ.점 P는 출발하고 나서 4초 동안 출발점에 있었다.

① Ⅰ ② Ⅲ ③ Ⅰ, Ⅱ
④ Ⅰ, Ⅲ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

14 0BC82A4830C34A96AC963E6C807B151C

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^2+4t$이다. $t=a$에서 점 P의 속도가 0일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

15 곡선 $y=x^2-x+2$와 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는?[3점][2011년 9월 평가원]

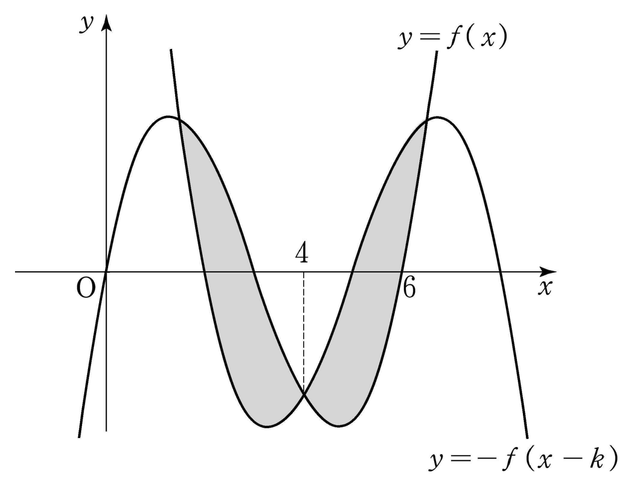
① $\frac{1}{9}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{2}{9}$　④ $\frac{5}{18}$　⑤ $\frac{1}{3}$

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

16 최고차항의 계수가 1인 삼차 함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=f(6)=0$
> (나)함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$(단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x좌표의 값이 4일 때, $\int_{0}^{k}f(x)dx$의 값을 구하시오.[4점]



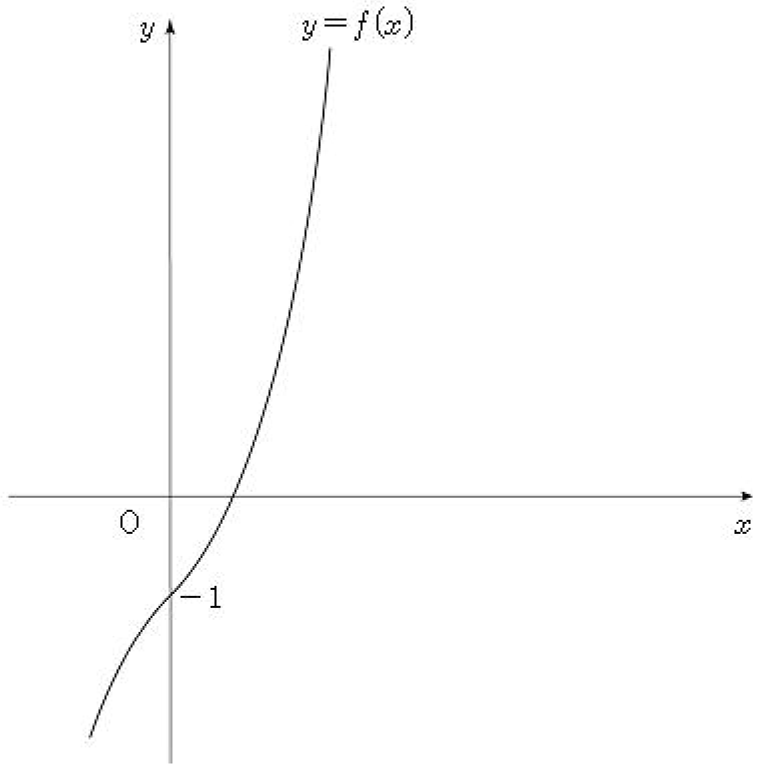
[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

17 함수 $f(x)=x^3-9x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{77}{2}$　② 39　③ $\frac{79}{2}$　④ 40　⑤ $\frac{81}{2}$

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

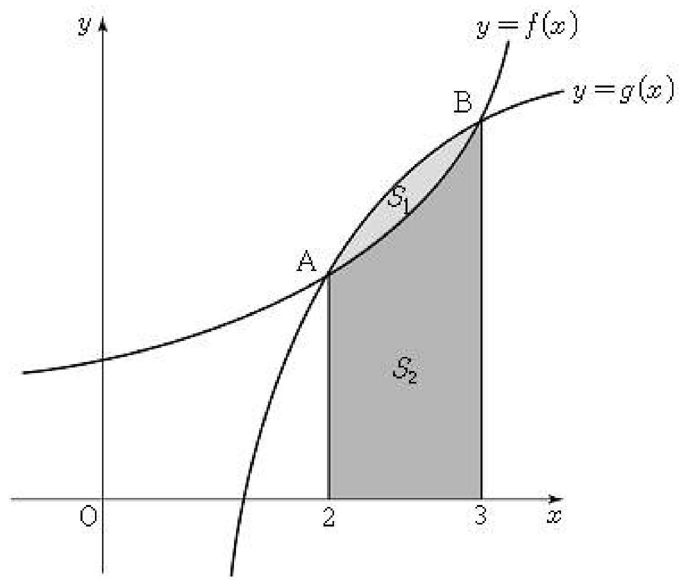
18 함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$의 값은? [4점][2012년 7월]



① $\frac{47}{4}$ ② $\frac{49}{4}$ ③ $\frac{51}{4}$
④ $\frac{53}{4}$ ⑤ $\frac{55}{4}$

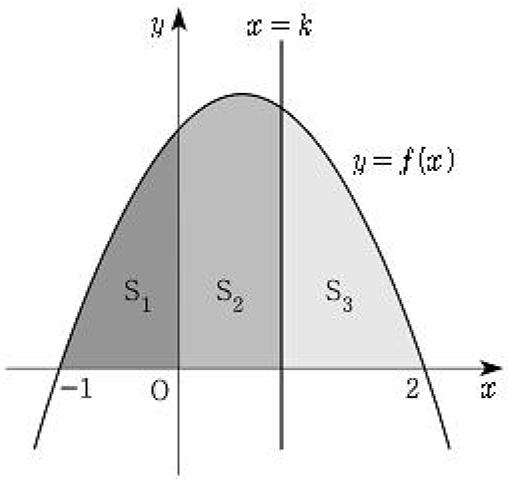
[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

19 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$과 $g(x)=\log_2(x-1)+2$의 그래프가 두 점 $A(2, f(2))$, $B(3, f(3))$에서 만난다. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하고, 함수 $f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=2$, $x=3$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_1+2S_2의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

20 함수 $f(x)=-x^2+x+2$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축과 직선 $x=k\,(0<k<2)$로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, S_2의 값은? [4점]



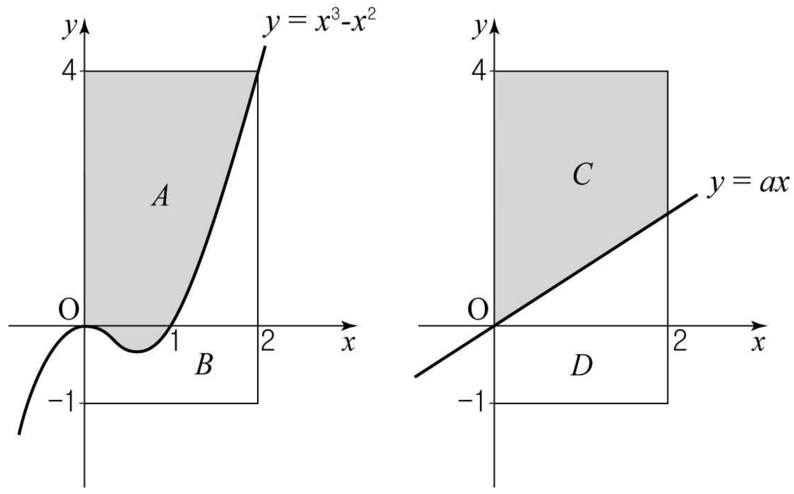
① 1 ② 1 ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

21 그림과 같이 네 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ 4)$, $(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 내부가 곡선 $y=x^3-x^2$에 의하여 나누어지는 두 부분을 A, B, 직선 $y=ax$에 의하여 나누어지는 두 부분을 C, D라 하자.

영역 A의 넓이와 영역 C의 넓이가 같을 때, $300a$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

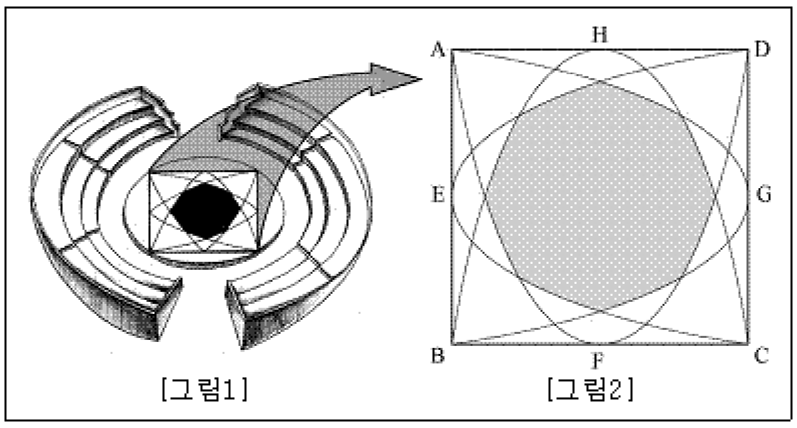
22 [그림 1]은 무대 디자이너 길섭이가 야외공연 무대디자인 공모전에 출품한 작품이다.

[그림 1]의 중앙무대를 확대하면[그림 2]와 같고, 중앙 무대를 디자인하는 과정은 다음과 같다.

(1) 한 변의 길이가 2인 정사각형 $ABCD$를 그리고 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 한다.

(2) 변 BC를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 두 점 B, C를 지나며 점 H를 꼭짓점으로 하는 이차 함수의 그래프와 두 점 A, D를 지나며 점 F를 꼭짓점으로 하는 이차 함수의 그래프를 그린다.

(3) 변 AB를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 (2)와 같은 방법으로 세 점 A, B, G를 지나는 이차 함수와 세 점 C, D, E를 지나는 이차 함수의 그래프를 추가로 그린다.



[그림 2]의 어두운 부분의 넓이를 $\dfrac{p\sqrt{2}+q}{3}$라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 정수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

23 원점 O를 출발하여 수직선 위를 16초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가 $v(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}t-1, & (0 \le t < 2) \\ -t^2+10t-16, & (2 \le t < 8) \\ 2-\dfrac{1}{4}t, & (8 \le t \le 16) \end{cases}$일 때, 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

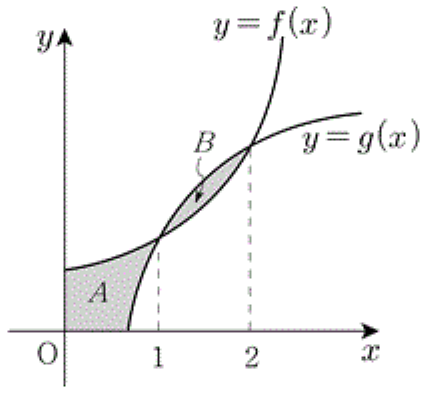
24 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 점 $A(5)$를 출발하여 시각 t에서의 속도가 $3t^2-2$이고, 점 Q는 점 $B(k)$를 출발하여 시각 t에서의 속도가 1이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 k의 값은?(단, $k \ne 5$)[4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

25 그림과 같이 함수 $f(x)=ax^2+b\,(x \ge 0)$의 그래프와 그 역함수 $g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 1과 2이다.

$0 \le x \le 1$에서 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$및 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고, $1 \le x \le 2$에서 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.

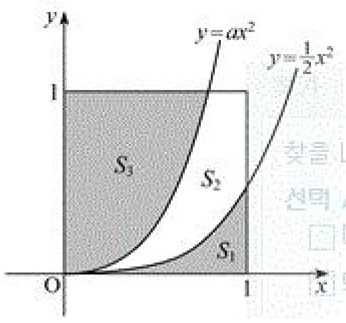


이때, $A-B$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[3점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{2}{9}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{4}{9}$ ⑤ $\dfrac{5}{9}$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

26 그림과 같이 네 점 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형의 내부를 두 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=ax^2$으로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

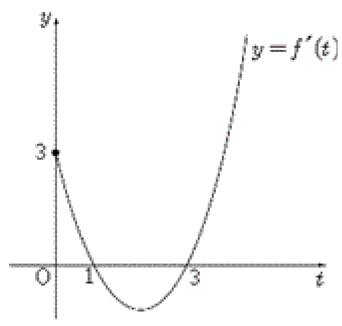


S_1, S_2, S_3이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, 양수 a의 값은?[4점]

① $\frac{16}{9}$ ② $\frac{17}{9}$ ③ 2
④ $\frac{19}{9}$ ⑤ $\frac{20}{9}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

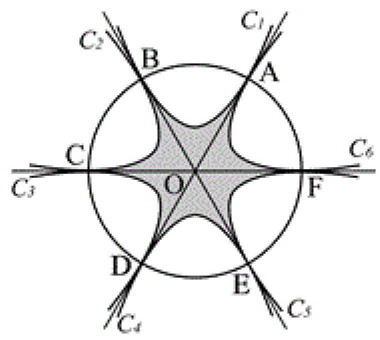
27 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$에 대하여 이차 함수 $y=f'(t)$의 그래프는 그림과 같다.



점 P가 출발할 때의 운동 방향에 대하여 반대 방향으로 움직인 거리를 d라 할 때, $12d$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

28 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원의 둘레를 6등분하는 점을 각각 A, B, C, D, E, F라 하자. 두 점 A, B에서 두 직선 OA, OB에 접하는 포물선 C_1을 그리고, 두 점 B, C에서 두 직선 OB, OC에 접하는 포물선 C_2를 그린다.



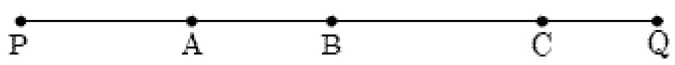
이와 같은 방법으로 포물선 C_3, C_4, C_5, C_6을 그릴 때, 6개의 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이는?[4점]

① $2\sqrt{3}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

29 P역을 출발하여 Q역에 도착한 기차가 있다. 세 지점 A, B, C를 차례로 통과할 때의 속력은 각각 시속 100, 시속 130, 시속 80이었다.

각 구간에서의 기차의 속력에 대한 설명으로 항상 옳은 것은?[3점]



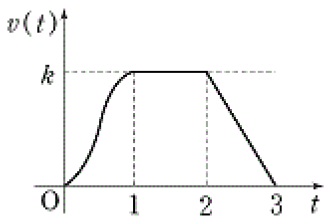
① 구간 AB에서 시속 $110km$인 지점이 적어도 두 곳 있었다.
② 구간 AB에서 시속 $140km$인 지점이 적어도 한 곳 있었다.
③ 구간 AC에서 시속 $110km$인 지점이 적어도 두 곳 있었다.
④ 구간 BC에서 시속 $90km$인 지점이 적어도 세 곳 있었다.
⑤ 구간 BC에서 시속 $110km$인 지점이 적어도 두 곳 있었다.

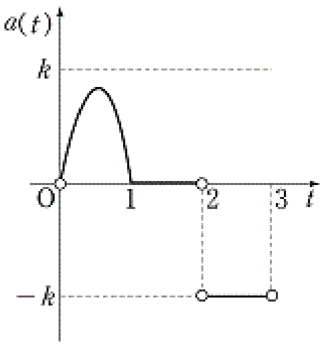
[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

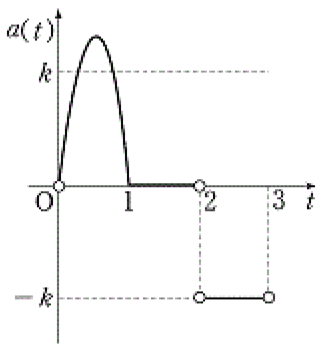
30 아래 그림은 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프이다.

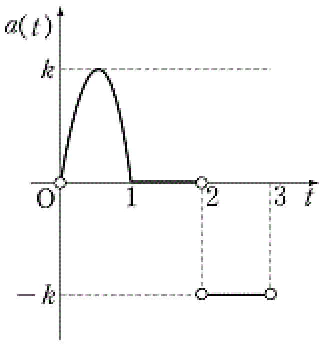
$v(t)$는 $t=2$를 제외한 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능한 함수이고, $v(t)$의 그래프는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 원점과 점 $(1,\ k)$를 잇는 직선과 한 점에서 만난다.

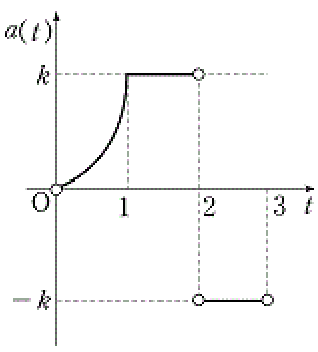
점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$를 나타내는 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은?[3점]

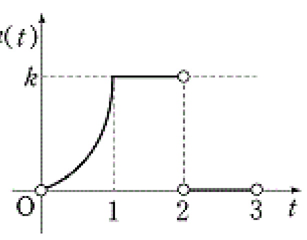


①


②


③


④


⑤


[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

31 어떤 전망대에 설치된 엘리베이터는 1층에서 출발하여 꼭대기층까지 올라가는 동안, 출발 후 처음 2초까지는 $3m/초^2$의 가속도로 올라가고 2초 후부터 10초까지는 등속도로 올라가며 10초 후부터는 $-2m/초^2$의 가속도로 올라가서 멈춘다. 이 엘리베이터가 출발하여 멈출 때까지 움직인 거리는 몇 m인지 구하시오.[3점]

정답 및 해설

3.정적분의 활용

중단원 기출문제

1) 답 : 4

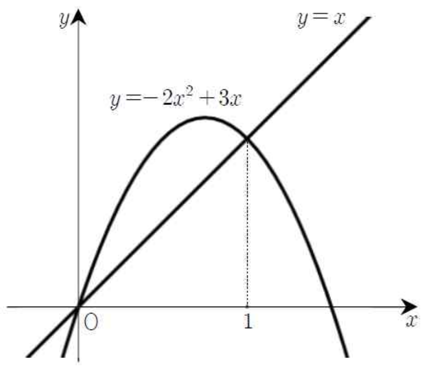
[해설]

[출제 의도] 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$-2x^2+3x=x$에서 $x=0$ 또는 $x=1$이므로

곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표는 $0,\,1$이고

곡선 $y=-2x^2+3x$와 직선 $y=x$는 그림과 같다.



구하는 넓이를 S라 하면

[중간 계산] $S=\int_0^1\{(-2x^2+3x)-x\}dx$

$=\int_0^1(-2x^2+2x)dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1$

$=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$

따라서 $p+q=3+1=4$

2) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]: 수직선 위를 움직이는 점의 움직인 거리를 구할 수 있는가?

[구하는 값] $=\int_0^4|-2t+4|dt$

$=\int_0^2(-2t+4)dt+\int_2^4(2t-4)dt$

$=[-t^2+4t]\times 0^2+[t^2-4t]\times 2^4$

$=(-4+8)+\{(16-16)-(4-8)\}$

$=4+4=8$

3) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

$n=1$일 때, $f(x)=x^2$이고 $P(0,\,3),\,Q(1,\,1)$이므로

구하고자 하는 넓이 S는

[구하는 값] $=S=\frac{1}{2}\times2\times1+\int_0^1(1-x^2)dx$

$=1+\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$

$=1+\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$

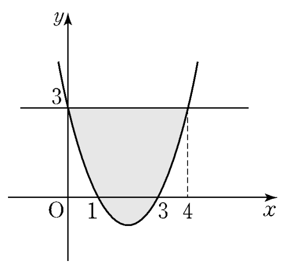
4) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

두 그래프의 교점은 $x^2-4x+3=3$을 풀

$\therefore\ x=0,\,4$



따라서, 구하는 넓이는

$\int_0^4\{3-(x^2-4x+3)\}dx=\frac{1\cdot(4-0)^3}{6}=\frac{32}{3}$

5) 답 : 40

[해설]

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1이고

$f(3)=0$인 이차 함수이므로

$f(x)=(x-3)(x-a)\ =x^2-(a+3)x+3a$($a$는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_0^{2013}f(x)dx=\int_3^{2013}f(x)dx$에서 $\int_0^3 f(x)dx=0\cdots$㉠이므로

$\int_0^3\{x^2-(a+3)x+3a\}dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{a+3}{2}x^2+3ax\right]_0^3$

$9-\frac{9}{2}a-\frac{27}{2}+9a=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$

$\therefore\ a=1$

즉, $f(x)=x^2-4x+3$이므로

$S=\left|\int_1^3(x^2-4x+3)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_1^3\right|$

$\left|(9-18+9)-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|=\left|-\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 30S=30\times\frac{4}{3}=40$

[참 고] $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$일 때의 넓이 S는

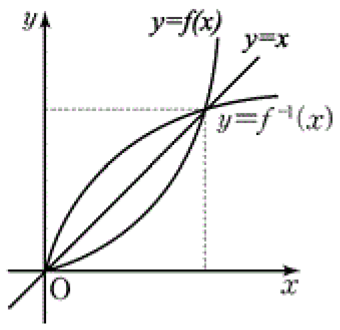
$S=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

6) 답 : ②

[해설]

아래 그림에서

정답 및 해설



$$\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$$

$$=2\int_0^1\{x-f(x)\}dx$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(0+\frac{1-0}{n}k\right)-f\left(0+\frac{1-0}{n}k\right)\right\}\frac{1-0}{n}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

7) 답 : ③

[해설]

최초에 지면에 정지해 있었으므로

$t=35$일 때의 열기구의 높이를 h라 하면

$$h=0+\int_0^{35}v(t)dt$$

$$=\int_0^{20}tdt+\int_{20}^{35}(60-2t)dt$$

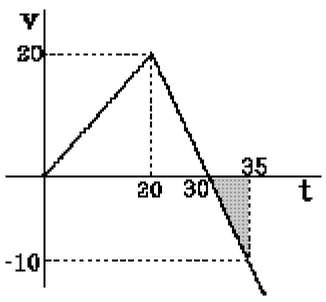
$$=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{20}+\left[60t-t^2\right]_{20}^{35}$$

$$=\frac{400}{2}+60(35-20)-(1225-400)=275\,(\text{m})$$

[별해]

$v-t$그래프에서의 정적분이 현위치이므로 그래프를 통해서 해결해 보자.

아래 그림에서 35초일 때의 높이는 t축 위의 넓이에서 t축 아래의 어두운 부분의 넓이를 빼면 된다.



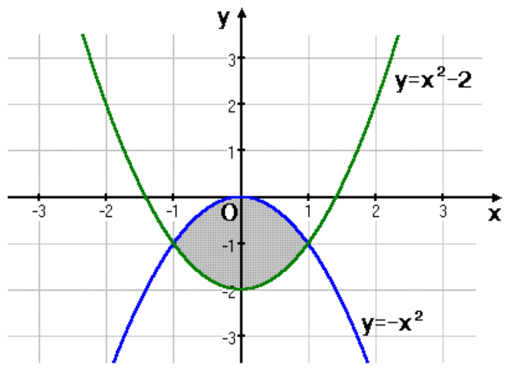
$$\therefore\ h=\frac{1}{2}\times30\times20-\frac{1}{2}\times5\times10=300-25=275$$

8) 답 : ⑤

[해설]

$n\to\infty$일 때 곡선 $y=-x^2+\dfrac{2}{n^2}$은 곡선 $y=-x^2$에 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$의 값은 두 곡선 $y=x^2-2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^2-2=-x^2$에서 $x=\pm1$

따라서 구하는 넓이는

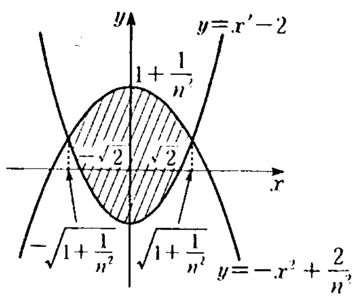
$$\int_{-1}^{1}(-x^2-x^2+2)dx=\frac{2}{6}\{1-(-1)\}^3=\frac{8}{3}$$

[별해]

두 곡선의 교점의 x좌표는 $x^2-2=-x^2+\dfrac{2}{n^2}$ 에서

$$x=\pm\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

아래 그림에서 구하는 넓이 S_n은



$$S_n=\int_{-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}^{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\left\{\left(-x^2+\frac{2}{n^2}\right)-(x^2-2)\right\}dx$$

$$=\frac{2}{6}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^3$$

$$=\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^3$$

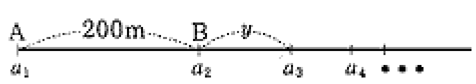
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^3=\frac{8}{3}$$

9) 답 : ③

[해설]

B의 속도를 x라 하면 A의 속도는 $2x$



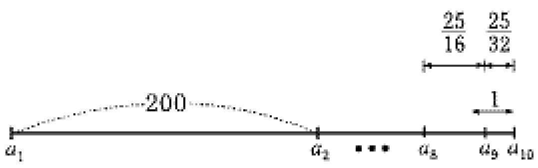
a_2에서 a_3까지의 거리를 y라 하면

$$\frac{y}{x}=\frac{200}{2x}$$

$$\therefore\ y=100$$

수열 $\{P_n\}$은 200, 100, 50, 25, $\cdots$, P_n, ...

$$P_n=200\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

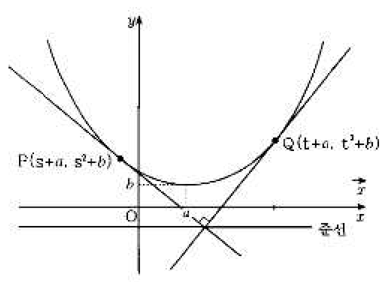


따라서, A의 위치는 a_8과 a_9사이이다.

10) 답 : ①

[해설]

$y=(x-a)^2+b$위의 두 점 $P(s+a,\ s^2+b)$, $Q(t+a,\ t^2+b)$에서 각각 그은 두 접선이 서로 수직이므로 그림으로 나타내면 아래와 같다.

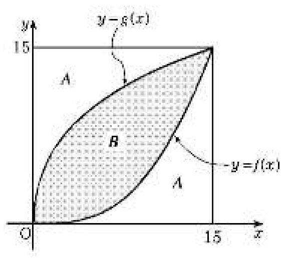


ⅰ)두 접선의 교점은 준선위의 점이므로 s가 증가하면 준선 위의 교점이 x축의 양의 방향으로 이동하므로 t도 증 가한다.

ⅱ), ⅲ)포물선과 접선으로 둘러싸인 도형의 면적은 일정하므로 $a,\ b$의 증가는 면적에 영향을 미치지 않는다. 따라서, 옳은 것은 ⅰ)이다.

11) 답 : 45

[해설]



함수 $y=g(x)$가 함수 $y=f(x)$의 역함수이므로 영역은 위의 그림과 같이 분할되고 $\int_0^{15} f(x)dx=A$이다.

주어진 조건에서 $2A:B=2:3$이므로

$\begin{cases} B=3A \ldots ① \\ 2A+B=225 \ldots ② \end{cases}$이며

두 식에서 A를 구해야 되므로

① 에서 $B=3A$을 ②에 대입하면 $5A=225$이다.

$\therefore\ A=45$

12) 답 : ②

[해설]

$3a-3b=2c$에서 $3(a-b)=2c$

따라서, 3분마다 A가 B보다 두 바퀴 더 돈다.

13) 답 : ②

[해설]

$v(t)=0$인 t의 값은 $t=2,\ 4$이고 이 시각에 $v(t)$의 부호가 바뀌었으므로

운동방향이 바뀐 것이다.

또, $\int_0^t v(t)dt=0$이므로 $t=4$인 순간의 동점 P의 위치는 원점이다.

14) 답 : ②

[해설]

속도를 $v(t)$라 하면 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=-2t+4$

$v(a)=-2a+4=0$이므로 $a=2$

15) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]정적분을 활용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가 ?

$x^2-x+2=2$에서 $x^2-x=x(x-1)=0$이므로

곡선과 직선의 교점의 x좌표는 0과 1이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 2-(x^2-x+2)dx=\int_0^1(-x^2+x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

16) 답 : 16

[해설]

$f(x)=x(x-p)(x-6)$ $(0<p<6)$으로 놓을 수 있다.

이때, k의 값에 관계없이 $\int_\alpha^\gamma\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이어야 하므로

$k=0$일 때 두 함수 $y=f(x),\ y=-f(x)$의 그래프의 교점은 $(0,\ 0),\ (p,\ 0),\ (6,\ 0)$이다.

따라서 $\int_\alpha^\gamma\{f(x)+f(x)\}dx=2\int_0^6 f(x)dx=0$이다.

즉, $f(x)=x(x-p)(x-6)$는 점 $(0,\ p)$에 대하여 대칭이다.

$x(x-p)(x-6)=-(2p-x)(2p-x-p)(2p-x-6)=(x-2p+6)(x-p)(x-2p)$

$\therefore\ -2p+6=0$

$\therefore\ p=3$

$f(x)=x(x-3)(x-6)$이고, $x=4$에서 두 곡선이 만나므로

$f(4)=-f(4-k)$

$4(4-3)(4-6)=-(4-k)(4-k-3)(4-k-6)$

$(4-k)(1-k)(2+k)$

$\therefore\ k=2$

$$\therefore\ \int_0^k f(x)dx=\int_0^2 x(x-3)(x-6)dx$$

$$\int_0^2(x^3-9x^2+18x)dx$$

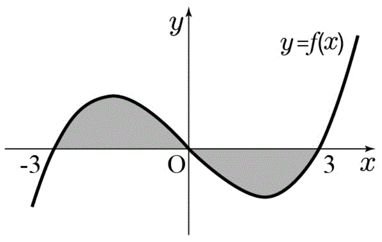
$$\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+9x^2\right]_0^2=16$$ [정답]16

17) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 정적분과 넓이 이해하기

$f(x)=x^3-9x=x(x-3)(x+3)$



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

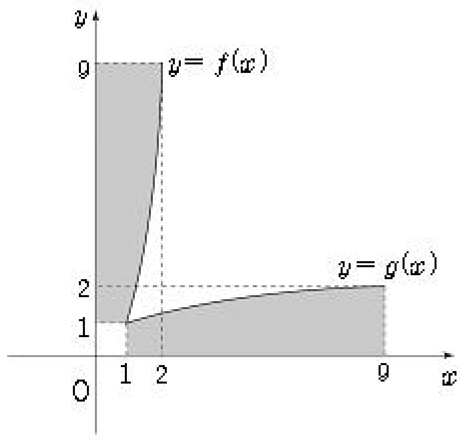
$$\int_{-3}^{3}|f(x)|dx=2\int_{-3}^{0}f(x)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}=\frac{81}{2}$$

18) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_{1}^{9}g(x)dx=18-1-\int_{1}^{2}f(x)dx$$

$$=18-1-\int_{1}^{2}(x^3+x-1)dx$$

$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_{1}^{2}$$

$$=17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$$

19) 답 : 5

[해설]

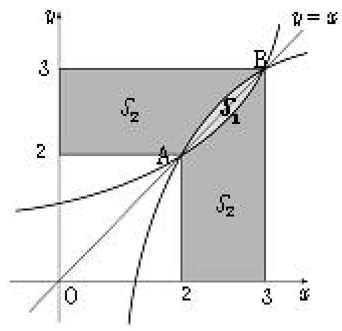
[출제 의도] 로그함수와 역함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$f(x)=2^{x-2}+1$는 $g(x)=\log_2(x-1)+2$의 역함수이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

함수 $f(x)$의 그래프와 x축과 두 직선 $x=2,\ x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 할 때, S_2는 함수 $g(x)$의 그래프와 직선 $y=2,\ y=3,\ y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

그러므로 S_1+2S_2는 네 개의 직선 x축, y축, $x=3,\ y=3$으로 둘러싸인 정사각형의 넓이와 네 개의 직선 x축, y축, $x=2,\ y=2$로 둘러싸인 정사각형의 넓이의 차와 같다.

$\therefore\ S_1+2S_2=9-4=5$



20) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 정적분을 이용하여 넓이를 추론한다.

$S_1,\ S_2,\ S_3$이 등차수열을 이루므로 $2S_2=S_1+S_3$이다.

$$3S_2=S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^{2}f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

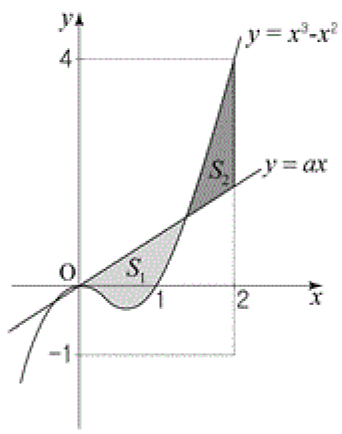
$$=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ S_2=\frac{3}{2}$$

21) 답 : 200

[해설]

A와 C의 넓이가 같으므로 $S_1=S_2$

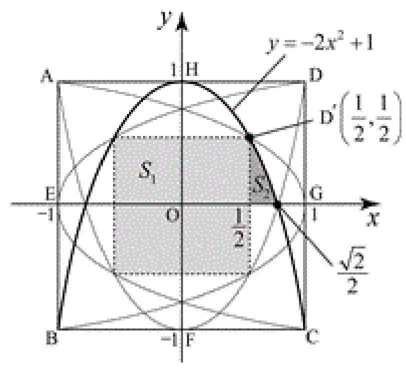


$$\int_{0}^{2}(x^3-x^2-ax)dx=0\ \therefore\ a=\frac{2}{3}$$

따라서 $300a=200$

22) 답 : 15

[해설]



점 $E,\ G$를 지나는 직선을 x축, 점 $H,\ F$를 지나는 직선을 y축으로 할 때,

세 점 $B,\ H,\ C$를 지나는 이차 함수는 $y=-2x^2+1$

교점 D'의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로

어두운 부분의 넓이는

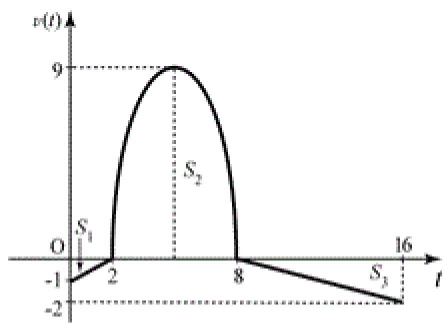
$$S_1+8S_2=1+8\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-2x^2+1)dx=\frac{8\sqrt{2}-7}{3}$$

$p=8,\ q=-7$

따라서 $p-q=15$

23) 답 : 35

[해설]



$S_1=\int_0^2 v(t)dt,\ S_2=\int_2^8 v(t)dt,\ S_3=\int_8^{16} v(t)dt$라 할 때,

$S_1=-1,\ S_2=36,\ S_3=-8$

따라서 ($\overline{OP}$의 최댓값)

24) 답 : ②

[해설]

t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_P, x_Q라 하면

$$x_P=5+\int_0^t(3t^2-2)dt=t^3-2t+5\,,$$

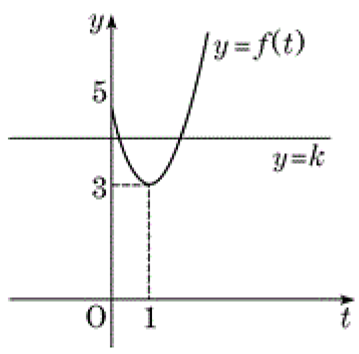
$$x_Q=k+\int_0^t 1dt=t+k$$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3-2t+5=t+k$

즉, $t^3-3t+5=k$이어야 한다.

$f(t)=t^3-3t+5$라 하면 $f'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$이므로

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=k$와 곡선 $y=f(t)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은

$3<k<5$이므로

정수 k는 4이다.

25) 답 : ④

[해설]

$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$ 이므로

$$A-B=2\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}-x\right)dx=\frac{4}{9}$$

26) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1+S_2+S_3=1,\ 2S_2=S_1+S_3\cdots$①

$S_1=\int_0^1\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{6}\cdots$②

① , ②에서 $S_2=\frac{1}{3},\ S_3=\frac{1}{2}$

$ax^2=1$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($\because\ x>0$)이므로

$S_3=\frac{1}{\sqrt{a}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}ax^2dx=\frac{1}{2}$ 에서 $a=\frac{16}{9}$

27) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]정적분을 이용하여 실제 움직인 거리 구하기

점 P가 출발할 때의 운동방향에 대하여 반대방향으로 움직인 시간은

$t=1$에서부터 $t=3$

$f'(t)=(t-1)(t-3)$

따라서 반대방향으로 실제 움직인 거리

$$d=\int_1^3|f'(t)|dt=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ 12d=16$

28) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

포물선 C_1의 방정식을 $y=ax^2+b$로 놓으면

곡선 $y=ax^2+b$가 점 $(1, \sqrt{3})$을 지나고 이 점에서 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로

$\sqrt{3}=a+b$이고 $\sqrt{3}=2a$이다.

따라서 $a=b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore\ S=12\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}x\right)dx=2\sqrt{3}$$

29) 답 : ③

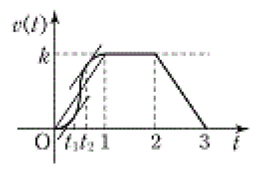
[해설]

A지점에서 B지점에 갈 때, 시속 $110km$인 지점이 적어도 한 곳 있었고,

B지점에서 C지점에 갈 때 시속 $110km$인 지점이 적어도 한 곳 있었다.

30) 답 : ②

[해설]



(ⅰ) $0<t<1$일 때

$y=v(t)$의 그래프가 직선 $y=kt$와 한 점에서 만나므로

기울기가 k인 접선은 2개 존재한다. 접점을 각각 t_1, t_2라 하면

$0 < t < t_1$일 때 $v'(t) < k$,

$t_1 < t < t_2$일 때 $v'(t) > k$,

$t_1 < t < 1$일 때 $v'(t) < k$이다.

(ⅱ) $1 \le t < 2$일 때 $v(t) = k$이므로 $a(t) = v'(t) = 0$

(ⅲ) $2 < t < 3$일 때 $v(t) = -k(t-3)$이므로 $a(t) = v'(t) = -k$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅱ)에서 $y = a(t)$의 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은 ②이다.

31) 답 : 63

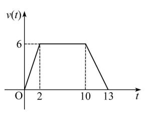
[해설]

[출제 의도]속도와 가속도를 실생활의 문제 해결에 적용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

엘리베이터의 속도를 $v(t)$라 하면

$$v(t) = \begin{cases} 3t, & (0 \le t \le 2) \\ 6, & (2 \le t \le 10) \\ -2t + 26, & (10 \le t \le 13) \end{cases}$$

따라서 엘리베이터가 움직인 거리를 S라 하면



$$S = \int_0^2 3t\,dt + \int_2^{10} 6\,dt + \int_{10}^{13} (-2t+26)\,dt = 63$$