Ⅳ.다항함수의 적분법

2.정적분

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 $\int_0^a (3x^2-4)dx=0$을 만족시키는 양수 a의 값은?[3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

2 이차함수 $f(x)=\frac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다. (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$이다. (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 $k(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는 $h(x)=\begin{cases} g(x), & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x), & (5 \le x < k) \end{cases}$이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다. k의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

3 $\int_0^2 (6x^2-x)dx$의 값은?[3점]

① 15 ② 14 ③ 13
④ 12 ⑤ 11

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

4 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$일 때, $h(3)$의 값은?[4점][2016(A) /수능 20]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

5 이차 함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx=-\int_0^2 f(x)dx=4$ (나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx=\int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점][2016(A) /수능 29]

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

6 $\int_0^1 (2x+a)dx=4$일 때, 상수 a의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

7 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은?[3점]

① ln2 ② ln3 ③ 2ln2
④ ln5 ⑤ ln6

[난이도 : ★☆☆] [2014 학년도 대수능]

8 실수 a에 대하여 $\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=\frac{1}{4}$일 때, $50a$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

9 함수 $f(x)=3x^2-ax$가 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k}{n}\right)=f(1)$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

10 함수 $f(x)=x+1$에 대하여 $\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2$ 일 때, 상수 k의 값은?[3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[난이도 : ★☆☆] [2012 학년도 대수능]

11 $\int_{0}^{5}(4x-3)dx$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

12 함수 $F(x)=\int_{0}^{x}(t^3-1)dt$에 대하여 $F'(2)$의 값은?[3점]

① 11 ② 9 ③ 7
④ 5 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

13 이차 함수 $f(x)$는 $f(0)=-1$이고,
$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$를 만족시킨다. $f(2)$의 값은?[4점]

① 11 ② 10 ③ 9
④ 8 ⑤ 7

[난이도 : ★☆☆] [2010 학년도 대수능]

14 함수 $f(x)=6x^2+2ax$가 $\int_{0}^{1}f(x)dx=f(1)$을 만족시킬 때, 상수 a의 값은?[2점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

15 함수 $f(x)=x^3+x$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2003 학년도 대수능]

16 $f(f(x))=\int_0^x f(t)dt-x^2+3x+3$을 만족하는 다항식 $f(x)$의 계수들의 합은?[3점]

① 3　② 2　③ 1
④ 0　⑤ -1

[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

17 [공통]다항함수 $f(x)$가 $\int_c^x f(t)dt=x^2+ax+2$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2000 학년도 대수능]

18 다음 정적분 중 그 값이 $\int_a^b \frac{1}{x}dx$와 같은 것은?(단, $0<a<b$)

① $\int_{a+1}^{b+1}\frac{1}{x}dx$　② $\int_{2a}^{2b}\frac{1}{x}dx$
③ $\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{x}dx$　④ $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\frac{1}{x}dx$
⑤ $\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{1}{x}dx$

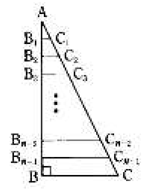
[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

19 [공통]정적분 $\int_{-1}^{1}x(1-x)^2dx$의 값은?

① 0　② $-\frac{2}{3}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $-\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{4}{3}$

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

20 [공통] $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 n등분한 점을 아래 그림과 같이 $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_{n-1}$이라 하고, 각 점에서 변 BC에 평행하게 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_{n-1}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^2$의 값은?



① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{3}$　③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{3}$　⑤ π

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

21 정적분 $\int_0^3 |x-1|dx$의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

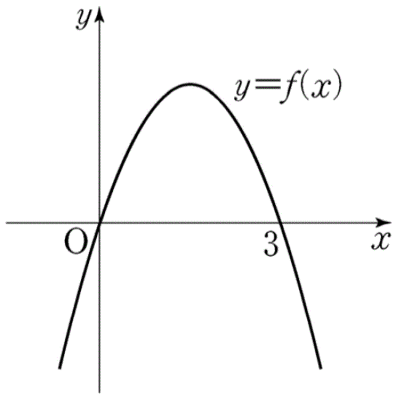
[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

22 $\int_0^1 3x^2dx$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

23 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, $f(0)=f(3)=0$이다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{7}{6}$일 때, $f'(0)$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

24 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_0^x f(t)dt=x^3+4x$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

25 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}\le\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$
ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}\le\int_0^1 f(x)dx\le\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

26 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$
(나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여 $0<xf(y)<yf(x)$

세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_0^1 f(x)dx$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?[4점]

① $A<B<C$ ② $A<C<B$
③ $B<A<C$ ④ $B<C<A$
⑤ $C<A<B$

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

27 이차 함수 $f(x)$가

$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2x\int_1^2 f(t)dt+\left\{\int_1^2 f(t)dt\right\}^2$ 일 때,

$10\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 모의평가]

28 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $-2 \le x \le 2$일 때, $f(x)=x^3-4x$
(나)임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

정적분 $\int_1^2 f(x)dx$와 같은 것은?[4점]

① $\int_{2004}^{2005} f(x)dx$ ② $-\int_{2004}^{2005} f(x)dx$
③ $\int_{2005}^{2006} f(x)dx$ ④ $-\int_{2005}^{2006} f(x)dx$
⑤ $\int_{2006}^{2007} f(x)dx$

[난이도 : ★★★] [2004년 09월 모의평가]

29 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $-2 \le x \le 2$ 일 때, $f(x)=x^3-4x$
(나) 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

정적분 $\int_1^2 f(x)\,dx$ 와 같은 것은? [4점]

① $\int_{2004}^{2005} f(x)\,dx$ ② $-\int_{2004}^{2005} f(x)\,dx$
③ $\int_{2005}^{2006} f(x)\,dx$ ④ $-\int_{2005}^{2006} f(x)\,dx$
⑤ $\int_{2006}^{2007} f(x)\,dx$

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

30 $\int_0^1 (ax^2+1)dx=4$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

31 $f(1)=1$인 이차 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가)모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}=27$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

32 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$
(나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1 \le n \le 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x-n)+n$ $(n \le x < n+1)$이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린 구간 $(-1, 5)$에서 미분가능할 때, $\int_0^4 g(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

33 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x) - 3x^4 + 2x^2$을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

34 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x) = f(x)$
(나) $f(x+2) = f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1} (2x+3)f(x)\ dx = 15$

$\int_{-6}^{10} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

35 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = \int_{0}^{x} (t-a)(t-b)dt$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x = \frac{1}{2}$에서 극값을 갖는다.
(나) $f(a) - f(b) = \frac{1}{6}$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

36 이차 함수 $f(x) = x^2 + 1$에 대하여

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k^2 + 2nk}{n^3}$의 값은? [4점]

① $\frac{26}{5}$　② $\frac{31}{5}$　③ $\frac{36}{5}$　④ $\frac{41}{5}$　⑤ $\frac{46}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

37 $\int_{0}^{2} (x^2+1)dx - \int_{0}^{2} x^2 dx$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

38 $f(x) = 3x^2 + x + \int_{0}^{2} f(t)dt$를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

39 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(x) = f(x+4)$를 만족하고 $f(x) = \begin{cases} -4x+2, & (0 \le x < 2) \\ x^2 - 2x + a, & (2 \le x \le 4) \end{cases}$

일 때, $\int_{9}^{11} f(x)dx$의 값은? [3점][2012년 7월]

① -8　② $-\frac{26}{3}$　③ $-\frac{28}{3}$　④ -10　⑤ $-\frac{32}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

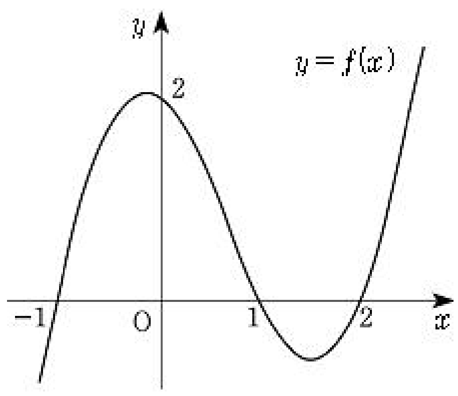
40 $\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x(t^2+3t-2)dt$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

41 그림과 같이 삼차 함수 $y=f(x)$가

$f(-1)=f(1)=f(2)=0,\ f(0)=2$

를 만족시킬 때, $\int_0^2 f'(x)dx$의 값은? [3점]



① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

42 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt-f(x)}{x^2-1}=2$를 만족할 때,

$f'(1)$의 값을 [4점][2012년 7월]

① -4　② -3　③ -2
④ -1　⑤ 0

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

43 좌표평면 위의 두 점 $O(0,0)$, $A(2,0)$이 있다.

자연수 n에 대하여 $\overline{OA}$를 n등분한 점을 차례로 $A_1, A_2, \cdots,$ A_{n-1}이라 하고, 점 O는 A_0, 점 A는 A_n이라 하자. 점 A_k를 지나고 x축과 수직인 직선이 함수 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$의 그래프와 만나는 점을 B_k라 하자.($k=1,2,3,\cdots n$)

$\overline{A_{k_1}B_k}$를 밑변으로 하고, $\overline{A_kB_k}$를 높이로 하는 직사각형 개의 넓이의 합을 $\overline{S_n}$이라 할 때, $2\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구하시오.

[4점][2012년 7월]

[난이도 : ★☆☆] [2011년 7월 학력평가]

44 정적분 $\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-2x+4)dx$의 값은?[2점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

45 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

46 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_1^x f(t)dt=\{f(x)\}^2$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2009년 7월 학력평가]

47 함수 $f(x)=4x^3+6x^2-2x$일 때, $\int_{-1}^{1} f(x)dx$의 값은?[2점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

48 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n+1)^4}{n^5}+\frac{(n+2)^4}{n^5}+\frac{(n+3)^4}{n^5}+\cdots+\frac{(n+n)^4}{n^5}\right\}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수)[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2007년 7월 학력평가]

49 $\int_{-a}^{a}(2x+3)dx=6$을 만족하는 실수 a의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

50 $\int_{0}^{6}|2x-4|dx$의 값을 구하시오.[3점]

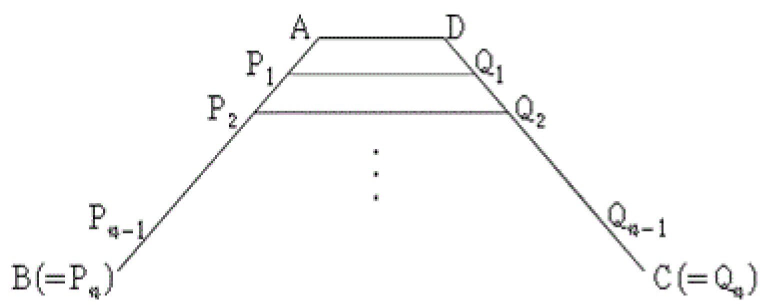
[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

51 함수 $f(x)=x^3+3x^2-2x-1$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_{2}^{x}f(t)dt$의 값은?[3점]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

52 $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=3$인 등변사다리꼴 $ABCD$에서 변 AB를 n등분한 점을 각각 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고 각 점에서 변 BC에 평행한 직선을 그어 변 CD와 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_{n-1}이라 할 때,
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overline{P_1Q_1}^3+\overline{P_2Q_2}^3+\overline{P_3Q_3}^3+\cdots+\overline{P_nQ_n}^3\right)$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

53 정적분 $\int_{0}^{9}\frac{x^3}{x+2}dx+\int_{0}^{9}\frac{8}{x+2}dx$의 값을 구하시오.[3점]

정답 및 해설

2.정적분

중단원 기출문제

1) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 정적분을 미적분의 기본정리를 이용하여 구할 수 있는가?

$$\int_0^a (3x^2-4)dc = \left[x^3-4x\right]_0^a = a^3-4a = a(a+2)(a-2)=0$$

$a=-2$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 $a>0$이므로 $a=2$

2) 답 : 9

[해설]

[출제 의도] 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 정하고

극한값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

직선 $y=x$와 x축 및 직선 $x=n$으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{n^2}{2}$이다.

$2\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{2}\right)=\frac{241}{768}$ 이므로

$$F(x) = h(x)-x = \begin{cases} g(x)-x, & (0\le x<5,\ x\ge k) \\ x-g(x), & (5\le x<k) \end{cases}$$

로 놓으면

$$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)dx=\frac{241}{768}$$ 이다.

$n\le x<n+1$일 때

$$g(x)-x = \frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{3}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2-(x-n)\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{1}{2}(x-n)-\frac{1}{2}(x-n)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2^n+1}(x-n)(1+n-x) = -\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))$$

이므로

$$\int_n^{n+1}\{g(x)-x\}dx$$

$$=\int_n^{n+1}\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}(x-n)(x-(n+1))\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2^{n+1}}x(x-1)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1 x(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\times\frac{1}{6}\ \cdots㉠$$

한편,

$$\int_0^n F(x)dx = \int_0^1(x-g(x))dx+\cdots+\int_4^5(x-g(x))dx$$

$$+\int_5^6(x-g(x))dx+\cdots+\int_{k-1}^k(x-g(x))dx$$

$$+\int_k^{k+1}(x-g(x))dx+\cdots+\int_{n-1}^n(x-g(x))dx$$

이때, ㉠은 $n=0$일 때도 성립하므로 ㉠에서

$$2\int_0^n F(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}-\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$이므로

$$2\lim_{n\to\infty}\int_0^n F(x)dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{48}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}\right\} = \frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}$$

즉, $\frac{15}{48}+\frac{1}{48}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{241}{768}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5}=\frac{1}{16}$ 이므로

$k-5=4$에서 $k=9$

3) 답 : ②

[해설]

$$[\text{구하는 값}] = \int_0^2(6x^2-x)dx$$

$$=\left[2x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$

$$=(16-2)-0$$

$$=14$$

4) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 조건을 만족시키는 다항함수에 대하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$ 이므로

다항함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대칭이고, $h(0)=0$이다.

$h(x)=a_{2n+1}x^{2n+1}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\times x+a_1x$로 놓으면

$h'(x)=(2n+1)a_{2n+1}x^{2n}+(2n-1)a_{2n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_1$

이므로 $h'(-x)=h'(x)$를 만족시킨다.

$$\int_{-3}^3(xh'(x)+5h'(x))dx$$

$$=2\int_0^3 5h'(x)dx$$

$$=10\Big[h(x)\Big]_0^3$$

정답 및 해설

$=10(h(3)-h(0))$

$10(h(3)-h(0))=10$ 에서 $h(3)=h(0)+1=0+1=1$

5) 답 : 45

[해설]

[출제 의도] 정적분의 의미를 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

$f(0)=0$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx\,(a\neq 0)$ 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\int_0^2 |f(x)|dx=4,\quad \int_0^2 f(x)dx=-4$$

이므로 구간 $[0,2]$ 에서 $f(x)\leq 0$ 이다.

또한, 조건 (나)에 의하여

$$\int_2^3 |f(x)|dx=\int_2^3 f(x)dx$$

이므로 구간 $[2,3]$ 에서 $f(x)\geq 0$ 이다.

따라서 $f(2)=0$ 이므로 $f(2)=4a+2b=0$

$\therefore\ b=-2a$

즉, $f(x)=ax^2-2ax$ 이므로

$$\int_0^2 (ax^2-2ax)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}a-4a=-\frac{4}{3}a=-4$$

$\therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$ 이므로

$f(5)=3\times 5^2-6\times 5=75-30=45$

6) 답 : ③

[해설]

$$\int_0^1 (2x+a)dx=\left[x^2+ax\right]_0^1=1+a=4$$

$\therefore\ a=3$

7) 답 : ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{1}{x}dx=[\ln x]_1^3=\ln 3$$

8) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 정적분을 구할 수 있는가?

$$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx=\int_{-a}^{a}3x^2dx\ \left(\because \int_{-a}^{a}2xdx=0\right)$$

$$=2\int_0^a 3x^2dx\ \ (\because\ 3x^2 \text{ 은 우함수})$$

$$=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$$

$2a^3=\frac{1}{4}$ 에서 $a=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $50a=25$

9) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 무한급수를 정적분으로 나타낼 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{3k}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\times\int_0^3 f(x)dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\int_0^3 (3x^2-ax)dx$$

$$=\frac{1}{3}\times\left[x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_0^3=\frac{1}{3}\times\left(27-\frac{9}{2}a\right)$$

$$=9-\frac{3a}{2}$$

$\therefore\ 9-\frac{3a}{2}=f(1)$ 이며 정리하면

$9-\frac{3a}{2}=3-a$

$\therefore\ a=12$

10) 답 : ④

[해설]

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx=\int_{-1}^{1}(x+1)^2dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx=2\int_0^1 (x^2+1)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{8}{3}$$

$$k\left(\int_{-1}^{1}f(x)dx\right)^2=k\left(\int_{-1}^{1}(x+1)dx\right)^2$$

$$=k\left(2\int_0^1 1dx\right)^2=4k[x]_0^1=4k$$

주어진 등식에서 $\frac{8}{3}=4k$ $\therefore$ $k=\frac{2}{3}$

11) 답 : 35

[해설]

$$\int_0^5 (4x-3)dx=\left[2x^2-3x\right]_0^5=50-15=35$$

12) 답 : ③

[해설]

$F(x)=\int_0^x (t^3-1)dt$ 에서 $F'(x)=x^3-1$

$\therefore\ F'(2)=2^3-1=7$

13) 답 : ①

[해설]

$f(0)=-1$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx-1$

한편, $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$ 에서

$$\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\therefore\ \int_{-1}^{0}f(x)dx=0$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(ax^2+bx-1)dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}$$
$$= \frac{a}{3}-\frac{b}{2}-1=0\ldots ①$$

마찬가지로 $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$ 에서

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx$$
$$\therefore \int_{0}^{1} f(x)dx = 0$$
$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1}(ax^2+bx-1)dx$$
$$= \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1=0\ldots ②$$

① 과 ②에서 $a=3,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x^2-1$ 이므로 $f(2)=11$

14) 답 : ①

[해설]

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1}(6x^2+2ax)dx = [2x^3+ax^2]_0^1 = 2+a$$
$$f(1)=6+2a$$

그러므로 $2+a=6+2a \Leftrightarrow a=-4$

15) 답 : 12

[해설]

[구하는 값] $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{3} f(x)\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{3}(x^3+x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}$$
$$= \frac{1}{2}\times 24 = 12$$

16) 답 : ①

[해설]

다항식 $f(x)$ 의 차수를 n 이라 하자.

이때, $f(f(x))$, $\int_{0}^{x} f(t)dt$ 의 차수는 각각 $n^2,\ n+1$ 이므로

만약 $n\geq 2$ 이라면 주어진 조건식의 좌변과 우변의 차수도 각각 $n^2,\ n+1$ 이어야 한다.

그런데, $n^2=n+1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값은 없으므로 $n<2$ 임을 알 수 있다.

따라서, $f(x)=ax+b$ 로 놓으면

$$a(ax+b)+b = \int_{0}^{x}(at+b)dt - x^2+3x+3$$
$$= \frac{a}{2}x^2+bx-x^2+3x+3$$
$$a^2x+(ab+b) = \left(\frac{a}{2}-1\right)x^2+(b+3)x+3$$

양 변의 동류항의 계수를 비교하면

$$\frac{a}{2}-1=0,\ a^2=b+3,\ ab+b=3$$
$$\therefore\ a=2,\ b=1$$

따라서, 구하는 $f(x)$ 의 계수들의 합은 $a+b=2+1=3$

17) 답 : 17

[해설]

$\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2+ax+2$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$0=4+2a+2$$
$$\therefore\ a=-3$$

그러므로 주어진 식은

$$\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2-3x+2$$

양변을 x 에 관하여 미분하면

$$f(x)=2x-3$$
$$\therefore\ f(10)=20-3=17$$

18) 답 : ⑤

[해설]

$$\int_{a}^{b}\frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_a^b = \ln b - \ln a = \frac{\ln\{b\}}{a}$$

① $\int_{a+1}^{b+1}\frac{1}{x}dx = \frac{\ln\{b+1\}}{a+1}$

② $\int_{2a}^{2b}\frac{1}{x}dx = \frac{\ln\{2b\}}{2a} = \frac{\ln\{b\}}{a}$

③ $\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{x}dx = \frac{\ln\{b^2\}}{a^2} = 2\frac{\ln\{b\}}{a}$

④ $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\frac{1}{x}dx = \frac{\ln\{\sqrt{b}\}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\frac{\ln\{b\}}{a}$

⑤ $\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}}\frac{1}{x}dx = \frac{\ln\left\{\frac{1}{b}\right\}}{\frac{1}{a}} = \frac{\ln\{a\}}{b}$

19) 답 : ④

[해설]

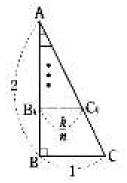
[구하는 값] $= \int_{-1}^{1} x(1-x)^2dx$

$$= \int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x)dx$$
$$= 2\int_{-1}^{1} -2x^2dx$$
$$= -4\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = -\frac{4}{3}$$

20) 답 : ④

[해설]

$\overline{B_kC_k^2} = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ 이므로



[구하는 값] $= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_kC_k^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2$

$= 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2$

$= 2\pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{2\pi}{3}$

21) 답 : ④

[해설]

[구하는 값] $= \int_0^3 |x-1| dx$

$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3 = \frac{5}{2}$

22) 답 : ①

[해설]

$\int_0^1 3x^2 dx = [x^3]_0^1 = 1$

23) 답 : ②

[해설]

$f(x) = ax(x-3)$ 으로 잡으면

문제에서 $\frac{k}{n} \to x$, $\frac{1}{n} \to dx$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \to \int_0^1$ 로 변형

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{7}{6}$ 에서

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = a\int_0^1 x^2 - 3x dx$

$= a\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{7}{6}a = \frac{7}{6}$

$\therefore\ a = -1$

$f(x) = -x^2 + 3x$ 를 x 관하여 미분하면

$f'(x) = -2x + 3$

$\therefore\ f'(0) = 3$

24) 답 : 304

[해설]

$\int_0^x f(t)dt = x^3 + 4x$

의 양변을 x 에 관하여 미분하면

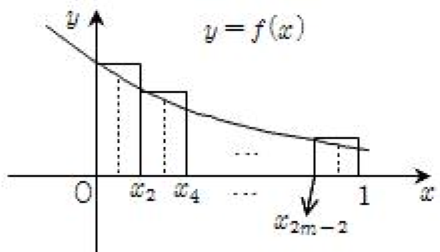
$f(x) = 3x^2 + 4$

$\therefore\ f(10) = 3 \times 10^2 + 4 = 304$

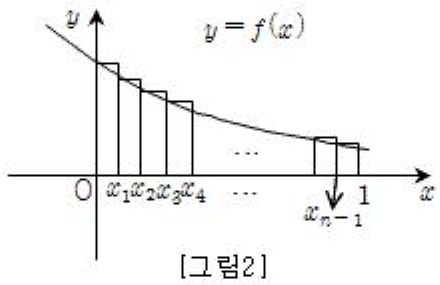
25) 답 : ②

[해설]

ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2} - x_{2k} = \frac{2}{2m} = \frac{1}{m}$ 이므로

$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_{2k})}{m}$ 은[그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{n}$ 이므로

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 은[그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서, $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_{2k})}{m} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k = \frac{k}{n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left\{ \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right\}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{1}{n} \right\}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right\}$

$\frac{1}{2} \left\{ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} + \lim_{nr = arr\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right\}$

$= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx \right\}$

$= \int_0^1 f(x)dx$ (참)

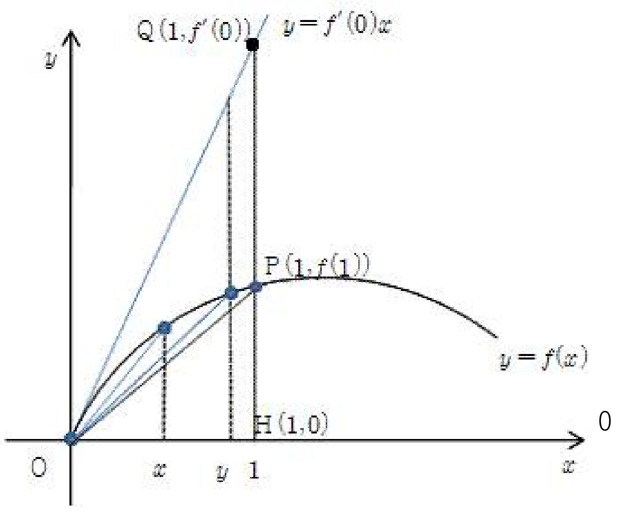
ㄷ. (반례)

ㄱ의 [그림2]에서 $\int_0^1 f(x)dx$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가고, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n} > \int_0^1 f(x)dx$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

26) 답 : ④

[해설]



㈏에서 $0 < xf(y) < yf(x)$의 각 변을 xy로 나누면

$0 < \dfrac{f(y)}{y} < \dfrac{f(x)}{x}$ 이다.

㈎에서 $f(0) = 0$이므로, ㈎, ㈏로부터 함수 f는 위 그림과 같이 개구간(0, 1)에서 위로 볼록한 함수임을 알 수 있다.

위 그래프를 이용하여 A, B, C를 표현하면

$A = f'(0) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot f'(0)\right) = 2(\triangle OHQ$의 넓이)

$B = f(1) = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(1)\right) = 2(\triangle OHP$의 넓이)

$C = 2\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 2 \cdot$ (곡선 OP, x축, 직선 $x = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이)와 같다.

따라서 $B < C < A$이다.

27) 답 : 20

[해설]

$\displaystyle\int_1^2 f(t)dt = a$로 놓으면 $f(x) = \dfrac{12}{7}x^2 - 2ax + a^2$

따라서 $a = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(\dfrac{12}{7}x^2 - 2ax + a^2\right)dx$

$= \left[\dfrac{4}{7}x^2 - ax^2 + a^2x\right]_1^2$

$= 4 - 3a + a^2$

$\therefore\ a^2 - 4a + 4 = 0$에서 $a = 2$

$\therefore\ 10\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = 10a = 20$ [정답]20

28) 답 : ③

[해설]

㈎ $-2 \le x \le 2$일 때, $f(x) = x^3 - 4x$

㈏임의의 실수 x에 대하여 $f(x) = f(x+4)$

조건 ㈏에서 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$와 같은 값을 가지려면 $\displaystyle\int_{1+4k}^{2+4k} f(x)dx$ (k는 정수)의 꼴이어야 한다.

$2006 = 2 + 4 \cdot 501 \Leftrightarrow 2005 = 1 + 4 \cdot 501$이므로

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_{2005}^{2006} f(x)dx$

29) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]다항함수의 적분법

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$와 같은 값을 가지려면 $\displaystyle\int_{1+4k}^{2+4k} f(x)dx$ (k는 정수)의 꼴이어야 한다.

$2006 = 2 + 4 \cdot 501$, $2005 = 1 + 4 \cdot 501$이므로

$\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \int_{2005}^{2006} f(x)dx$

30) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 정적분 계산하기

$\displaystyle\int_0^1 (ax^2 + 1)dx = \left[\dfrac{ax^3}{3} + x\right]_0^1 = \dfrac{a}{3} + 1 = 4$

따라서 $a = 9$

31) 답 : .54

[해설]

[출제 의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(1) = g(1)$이고 $f(-1) = f(1) = 1$이므로 $f(-1) = g(-1) = 1$

두 이차 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표는 -1, 1이고

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\dfrac{k}{n}\right) - g\left(\dfrac{k}{n}\right)\right\}$

$= \displaystyle\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx = 27$이므로

$-1 \le x \le 1$에서 $f(x) \ge g(x)$이다.

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 y축 대칭이므로

함수 $y = f(x) - g(x)$의 그래프는 y축 대칭이다.

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|dx = \int_{-1}^{1} \{f(x) - g(x)\}dx$

$= 2\displaystyle\int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx = 54$

따라서 구하는 넓이는 54

32) 답 : .137

[해설]

[출제 의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) - 1, & (-1 \le x < 0) \\ f(x), & (0 \le x < 1) \\ f(x-1) + 1, & (1 \le x < 2) \\ \vdots, & (\vdots) \\ f(x-4) + 4, & (4 \le x < 5) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가 $x = 1$에서 연속이므로

$g(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1-} g(x)$이다.

$g(1) = f(0) + 1$이고 $\displaystyle\lim_{x\to 1-} g(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = 1$이므로

$f(0) + 1 = 1$에서 $f(0) = 0 \cdots\cdots$ ㉠

함수 $g(x)$가 $x = 1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ 이다.

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)+1-g(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{f(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$ 이고

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1$

이므로 $f'(0)=1$ …… ㉡

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차 함수이므로

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 라 하자.

㉠, ㉡에 의하여 $c=1,\ d=0$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=1+a+b+1=1$ …… ㉢

$f'(1)=4+3a+2b+1=1$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여 $a=-2$, $b=1$

$f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$

$+\int_2^3 g(x)dx+\int_3^4 g(x)dx$

$=\frac{8}{15}+\left(\frac{8}{15}+1\right)+\left(\frac{8}{15}+2\right)+\left(\frac{8}{15}+3\right)=\frac{122}{15}$

그러므로 $p=15$, $q=122$

따라서 $p+q=137$

33) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 정적분으로 정의된 함수 이해하기

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x$

$f'(x)=12x^2-4$

$f(x)=4x^3-4x+C$ (C는 적분상수)

$x=1$일 때, $\int_1^1 f(t)dt=1\cdot f(1)-3+2=0$

$f(1)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(0)=1$

34) 답 : 40

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질 추론하기

(가)에서 함수 $f(x)$의 그래프는 y축 대칭

(다)에서 $\int_{-1}^1 (2x+3)f(x)\ dx=\int_{-1}^1 3f(x)\ dx=15$

이므로 $\int_{-1}^1 f(x)\ dx=5$

(나)에 의해 $\int_{-6}^{10} f(x)dx=8\int_{-1}^1 f(x)dx=40$

35) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f'(x)=(x-a)(x-b)$이고

(가)에서 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=\frac{1}{2}$

$f(a)-f(b)$

$=\int_0^a (t-a)(t-b)dt-\int_0^b (t-a)(t-b)dt$

$=\int_0^a (t-a)(t-b)dt+\int_b^0 (t-a)(t-b)dt$

$=\int_b^a (t-a)(t-b)dt=-\frac{(a-b)^3}{6}=\frac{1}{6}$

이므로 $b-a=1$

$b=\frac{1}{2}$이면 $a=-\frac{1}{2}$이므로 모순

따라서 $a=\frac{1}{2}$이고 $b=\frac{3}{2}$이므로 $a+b=2$

36) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2+2nk}{n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)+1-1\right\}\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}$

$=\int_1^2 (x^2+1)(x^2-1)dx=\frac{26}{5}$

37) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 정적분의 값을 계산한다.

$\int_0^2 (x^2+1)dx-\int_0^2 x^2dx=\int_0^2 1dx=2$

38) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질 이해하기

$\int_0^2 f(t)dt=a$라 하면 $f(x)=3x^2+x+a$이다.

$\int_0^2 (3t^2+t+a)dt=a\ \therefore\ a=-10$

$f(x)=3x^2+x-10$

$\therefore\ f(2)=4$

39) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질 이해하기

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$이다.

$2=16-8+a$

$a=-6$

$$\int_9^{11} f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^2(-4x+2)dx+\int_2^3(x^2-2x-6)dx$$

$$=-\frac{26}{3}$$

40) 답 : 2

[해설]

[출제 의도] 정적분의 성질을 이해한다.

$F(x)=\int_2^x(t^2+3t-2)dt$ 라 하면 $F'(x)=x^2+3x-2$

$$(\text{준식})=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}(2^2+3\cdot 2-2)=2$$

41) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 정적분의 기본 정리를 이용하여 도함수의 정적분 문제를 해결한다.

$$\int_0^2 f'(x)dx=[f(x)]_0^2=f(2)-f(0)=0-2=-2$$

42) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

극한값의 성질에 의하여

$\int_1^1 f(t)dt-f(1)=0$ 이므로 $f(1)=0$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt-f(x)}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x^2-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$

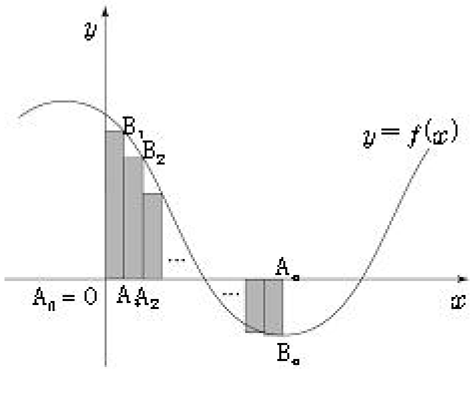
$$=\frac{f(1)}{2}-\frac{f'(1)}{2}=2$$

$\therefore\ f'(1)=-4$

43) 답 : 11

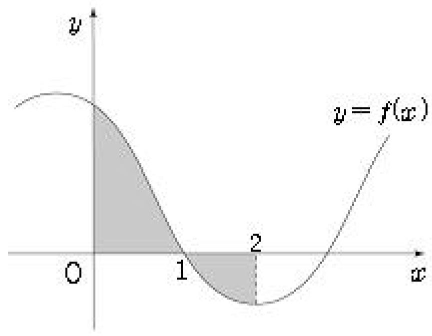
[해설]

[출제 의도] 정적분의 정의 이해하기



S_n 을 그림으로 나타내면 위와 같이 된다.

$\lim_{n\to\infty}S_n$ 의 값은 아래 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로,



$$2\lim_{n\to\infty}S_n=2\int_0^1(x^3-2x^2-5x+6)dx-2\int_1^2(x^3-2x^2-5x+6)dx=11$$

44) 답 : ③

[해설]

$$\int_{-1}^1(x^3-3x^2-2x+4)dx$$

$$=2\int_0^1(-3x^2+4)dx=2[-x^3+4x]_0^1=6$$

45) 답 : 10

[해설]

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3 x^3dx=10$$

46) 답 : ①

[해설]

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x)=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)$ 이므로

$f(x)\{1-2f'(x)\}=0$ 이다.

이때, 함수 $f(x)$ 는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}$ 이다.

이때, $f(1)=0$ 이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(3)=1$

47) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]정적분의 성질을 이용하여 계산하기

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1(4x^3+6x^2-2x)dx$$

$$=2\int_0^1 6x^2dx=4$$

48) 답 : 36

[해설]

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{n}k\right)^4\frac{1}{n}$$

$$=\int_1^2 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2=\frac{31}{5}$$

$\therefore\ 36$

49) 답 : ②

[해설]

$$\int_{-a}^{a}(2x+3)dx = \int_{-a}^{a} 2xdx + \int_{-a}^{a} 3dx = 3a-(-3a)=6a=6$$

$\therefore\ a=1$

50) 답 : 20

[해설]

[출제 의도]정적분의 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\int_{0}^{6}|2x-4|dx = \int_{0}^{2}(4-2x)dx + \int_{2}^{6}(2x-4)dx = 20$$

51) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]정적분으로 정의된 함수의 극한값 계산하기

$f(x)=x^3+3x^2-2x-1$

$f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$

구하는 값 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\displaystyle\int_{2}^{x}f(t)dt$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{F(x)-F(2)}{x-2}=F'(2)=f(2)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\displaystyle\int_{2}^{x}f(t)dt=15$

52) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]정적분을 이용하여 급수의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\overline{P_1Q_1}^3+\overline{P_2Q_2}^3+\overline{P_3Q_3}^3+\cdots+\overline{P_nQ_n}^3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}x^3dx=10$$

53) 답 : 198

[해설]

[출제 의도]정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(준식) $=\displaystyle\int_{0}^{9}\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int_{0}^{9}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}dx$

$=\displaystyle\int_{0}^{9}(x^2-2x+4)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+4x\right]_{0}^{9}=198$