

IV.다항함수의 적분법

1.부정적분

중단원 기출문제

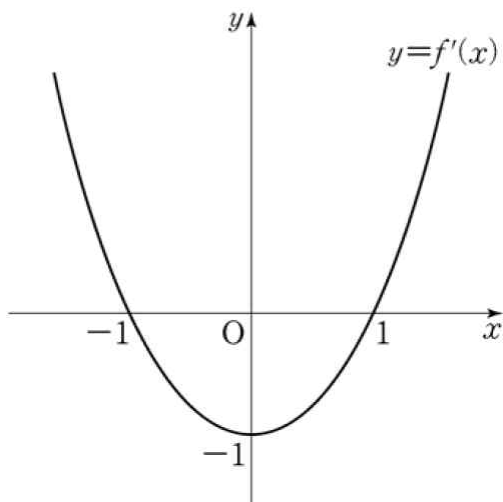
[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

1 다항함수  $f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 가  $f'(x) = 6x^2 + 4$ 이다.

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 점  $(0, 6)$ 을 지날 때,  $f(1)$ 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆☆] [2015년 9월 모의평가]

2 함수  $f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 가  $f'(x)=x^2-1$ 일 때,



함수  $g(x)=f(x)-kx$ 가  $x=-3$ 에서 극값을 가질 때, 상수  $k$ 의 값은? [3점]

- ① 4                      ② 5                      ③ 6
- ④ 7                      ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 모의평가]

3 세 실수  $a, b, c$ 에 대하여 사차 함수  $f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 가  $f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 일 때, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a=b=c$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 실근을 갖는다. ㄴ. $a=b \neq c$ 이고 $f(a)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㄷ. $a < b < c$ 이고 $f(b)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ                ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

4 두 다항함수  $f(x), g(x)$ 가

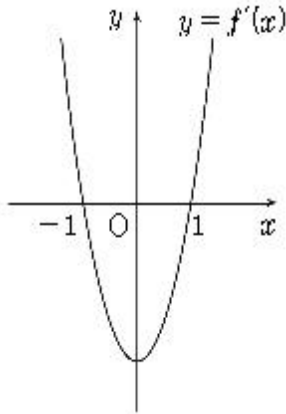
$$f(x) = \int xg(x)dx, \quad \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} = 4x^3 + 2x$$

를 만족시킬 때,  $g(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 10                      ② 11                      ③ 12
- ④ 13                      ⑤ 14

[난이도 : ★★★] [2012년 4월 학력평가]

5 삼차 함수  $y=f(x)$ 의 도함수  $y=f'(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$f'(-1)=f'(1)=0$  이고 함수  $f(x)$ 의 극댓값이 4, 극솟값이 0일 때,  $f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 14                      ② 16                      ③ 18
- ④ 20                      ⑤ 22

[난이도 : ★★☆☆] [2011년 7월 학력평가]

6 최고차항의 계수가 1인 다항함수  $f(x)$ 가

$f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$ 을 만족할 때,  $f(-3)$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆☆] [2008년 7월 학력평가]

7 다항함수  $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족할 때,  $f(0)$ 의 값은?[3점]

I.  $\int f(x)dx = \{f(x)\}^2$   
 II.  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 50$

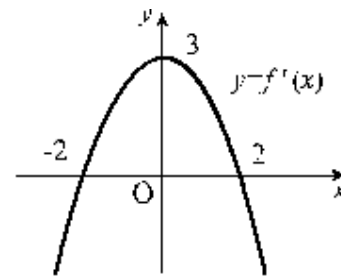
- ① 21                      ② 22                      ③ 23
- ④ 24                      ⑤ 25

[난이도 : ★★☆☆] [2008년 7월 학력평가]

8 함수  $f(x)$ 에 대하여  $f'(x)=(x-1)^3$ 이다. 함수  $f(x)$ 의 극값을  $M$ , 함수  $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점  $A(0, f(0)), B(2, f(2))$ 에서 접하는 두 접선의 교점의  $y$ 좌표를  $N$ 이라 할 때,  $16(M-N)$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆☆] [2004년 10월 학력평가]

9 삼차 함수  $y=f(x)$ 의 도함수  $y=f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$f(0)=0$ 일 때,  $x$ 에 대한 방정식  $f(x)=kx$ 가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수  $k$ 의 값의 범위는?[3점]

- ①  $k > 2$                       ②  $k > 3$                       ③  $k < 3$
- ④  $-4 < k < 4$                       ⑤  $k < -2$  또는  $k > 2$

# 정답 및 해설

## 1. 부정적분

### 중단원 기출문제

1) **답** : 12

[해설]

$$f'(x) = 6x^2 + 4 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (6x^2 + 4) dx$$

$$= 2x^3 + 4x + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 점  $(0, 6)$ 을 지나므로  $f(0)=C=6$ ,

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 4x + 6,$$

$$\therefore f(1) = 2 + 4 + 6 = 12$$

2) **답** : ⑤

[해설]

$g(x)=f(x)-kx$ 가  $x=-3$ 에서 극값을 갖기 위해서는

$g(-3)=0$ 이어야 한다.  $g'(x)=f'(x)-k$ 로부터

$$g'(-3)=f'(-3)-k=0 \rightarrow 8-k=0$$

$$\therefore k=8$$

3) **답** : ⑤

[해설]

$$\neg. a=b=c \text{이면 } f'(x)=(x-a)^3$$

$$f'(x)=0 \text{ 에서 } x=a \text{ 이고}$$

$x$	...	$a$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

위의 증감표에서  $f(x)=0$ 의 근이 실근을 가지는지 가지지 않은 지는 알 수 없음.(거짓)

ㄴ.  $a=b \neq c (a < c)$ 이고  $f(a) < 0$ 이면

$$f'(x)=(x-a)^2(x-c) \text{ 이고 } f'(x)=0 \text{ 에서}$$

$$x=a \text{ 또는 } x=c$$

$x$	...	$a$	...	$c$	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

위의 증감표에서  $f(a) < 0$ 이므로  $f(c) < 0$ 이다.

$\therefore f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.(참)

ㄷ.  $a < b < c$ 이고  $f(b) < 0$ 이면

$x$	...	$a$	...	$b$	...	$c$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 극댓값  $f(b) < 0$ 이므로

방정식  $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.(참)

4) **답** : ⑤

[해설]

[출제 의도] 부정적분 이해하기

$$f'(x)=xg(x), \quad f'(x)-g'(x)=4x^3+2x \text{ 이므로}$$

$$xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$$

함수  $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 이차 함수이므로

$$g(x)=4x^2+ax+b$$

$$g'(x)=8x+a \text{ 이므로 } x(4x^2+ax+b)-(8x+a)=4x^3+2x$$

$$4x^3+ax^2+(b-8)x-a=4x^3+2x \text{ 에서}$$

$$a=0, \quad b=10 \text{ 이므로 } g(x)=4x^2+10$$

$$\text{따라서 } g(1)=14$$

5) **답** : ④

[해설]

[출제 의도] 부정적분 이해하기

$$f'(x)=a(x+1)(x-1) \quad (a > 0) \text{ 이므로}$$

$x=-1$ 에서 극댓값,  $x=1$ 에서 극솟값을 가진다.

$$f(x) = \int a(x+1)(x-1) dx = \int a(x^2-1) dx = a\left(\frac{x^3}{3}-x\right) + C \text{ (단,}$$

$C$ 는 적분상수)

$$f(-1) = a\left(-\frac{1}{3}+1\right) + C = 4 \dots \text{㉠}$$

$$f(1) = a\left(\frac{1}{3}-1\right) + C = 0 \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여  $a=3, C=2$ 이므로

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } f(3) = 20$$

6) **답** : 16

[해설]

$f(x)$ 가  $n$ 차 함수이면  $f'(x)$ 는  $(n-1)$ 차 함수이다.

$$\therefore n=2$$

$$f(x) = x^2 + ax + b, \quad f'(x) = 2x + a$$

$$f(x)f'(x) = (x^2 + ax + b)(2x + a)$$

$$3a = -9, \quad ab = 6 \text{ 이므로 } a = -3, \quad b = -2$$

$$\text{따라서 } f(-3) = 9 - 3a + b = 16$$

7) **답** : ⑤

[해설]

[출제 의도] 정적분의 정리 이해하기

조건 I의 식을 미분하면

$$f(x) = 2f'(x)f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \therefore f(x) = \frac{1}{2}x + C$$

조건 II의 식에 대입하여 풀면  $C=25$

$$\text{따라서 } f(0) = 25$$

8) **답** : 12

[해설]

[출제 의도] 도함수를 활용하여 극값과 접선의 방정식의 성질 이해하기

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4 + C \text{ 에서 } M = f(1) = C$$

$$f'(0) = -1, \quad f'(2) = 1$$

$$x=0 \text{ 에서의 접선은 } y = -x + \frac{1}{4} + C$$

$$x=2 \text{ 에서의 접선은 } y = (x-2) + \frac{1}{4} + C$$

## 정답 및 해설

$$-x + \frac{1}{4} + C = x - 2 + \frac{1}{4} + C \text{에서 } x=1 \text{이므로 } N = C - \frac{3}{4} \therefore$$

$$16(M-N) = 12$$

9) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 도함수의 그래프에서 부정적분을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f'(x) = a(x-2)(x+2) \text{에서 } a = -\frac{3}{4} (\because f'(0) = 3)$$

$$\therefore f(x) = -\frac{3}{4} \int (x^2 - 4) dx = -\frac{1}{4} x^3 + 3x (\because f(0) = 0)$$

$$\text{삼차방정식 } -\frac{1}{4} x^3 + 3x = kx, x\{x^2 + 4(k-3)\} = 0$$

이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식  $x^2 + 4(k-3) = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.  $k \neq 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = 0 - 4(k-3) > 0 \text{이어야 하므로 } k < 3$$

도함수  $y = f'(x)$ 의 그래프가  $y$ 축 대칭이고  $f(0) = 0$ 이므로  $f(x)$ 의 그래프는 원점대칭이다.

이때, 원점에서의 접선의 기울기는  $f'(0) = 3$ 이므로 곡선  $y = f(x)$ 와 직선  $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면  $k < 3$ 이어야 한다.