Ⅲ.다항함수의 미분법

3.도함수의 활용(2)

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 최고차항의 계수가 1인 사차 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$, $f'(2)=16$
(나) 어떤 양수 k에 대하여 두 열린 구간 $(-\infty, 0)$, $(0, k)$에서 $f'(x)<0$이다.

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 것을 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(0)=0$이면, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

2 실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

3 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은?[4점]

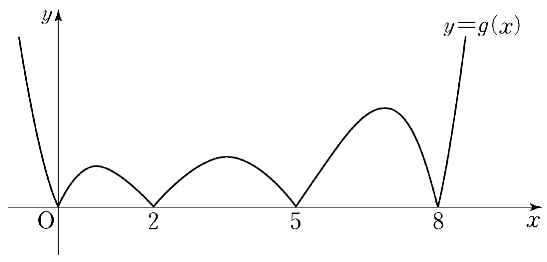
(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) $f(0)=f'(0)$
(다) $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38
④ 43 ⑤ 48

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

4 삼차 함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$g(x)=\left|\int_0^x f(t)dt\right|$라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점][2013학년도 수능]

[보기]
ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f'(0)<0$
ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m의 개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

5 최고차항의 계수가 1인 삼차 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은?[4점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

6 삼차 함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t\,(t\geq -1)$에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.

$\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $p,\, q$는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

7 최고차항의 계수가 양수인 사차 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 $\alpha,\beta,\gamma\,(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다. ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

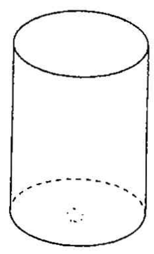
[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

8 삼차 함수 $y=x^3-3ax^2+4a$의 그래프가 x축에 접할 때, a의 값은?(단, $a>0$)[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

9 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 아래 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수있고, 철판의 가격은 $1m^2$당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64m^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?[2점]



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
④ 96만원 ⑤ 90만원

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

10 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$x=t^3+at^2+bt$ ($a,\, b$는 상수)

이다. 시각 $t=1$에서의 점 P가 운동 방향을 바꾸고,

시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 0이다. $a+b$의 값은?
[4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

11 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$
(나) $f(1)-f(-1)>8$

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다. ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

12 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+2$가 닫힌 구간 $[-a, a]$에서

최댓값 M, 최솟값 $\frac{14}{27}$를 갖는다. $a+M$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

13 두 함수

$f(x)=3x^3-x^2-3x$, $g(x)=x^3-4x^2+9x+a$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

14 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이다.

두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시간 t의 범위는?[3점][2012년 6월]

① $\frac{1}{2}<t<4$ ② $1<t<5$ ③ $2<t<5$
④ $\frac{3}{2}<t<6$ ⑤ $2<t<8$

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

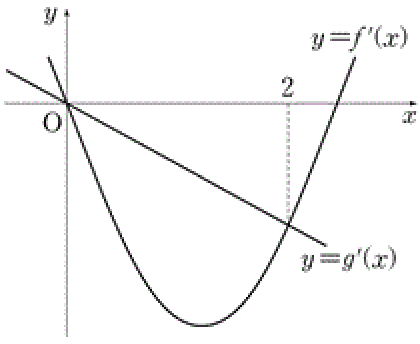
15 닫힌 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=20$일 때, 상수 a의 값은? [3점][2012년 6월]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

16 삼차 함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차 함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자.

$f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



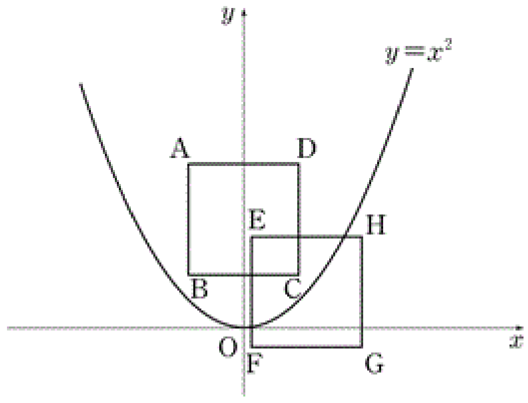
ㄱ. $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

17 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은?

(단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다.)[4점]



① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$
④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

18 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하도록 하는 a의 최댓값은?[4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

19 좌표평면 위에 점 $A(0, 2)$가 있다. $0<t<2$일 때, 원점 O와 직선 $y=2$위의 점 $P(t, 2)$를 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다.

$a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

20 구간 $[-2, 0]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$의 최댓값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

21 세 다항함수 $f(x), g(x), h(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여 (가) $f(x)g(x)>0$
(나) $\frac{g(x)}{f(x)h(x)}\geq 0$

에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

22 삼차 함수 $f(x)=x(x-1)(ax+1)$의 그래프 위의 점 $P(1, 0)$을 접점으로 하는 접선을 l이라 하자.

직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$이 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는?[3점]

① $-1<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $0<a<1$

② $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

③ $-1<a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$

④ $-1<a<0$ 또는 $\frac{1}{3}<a<1$

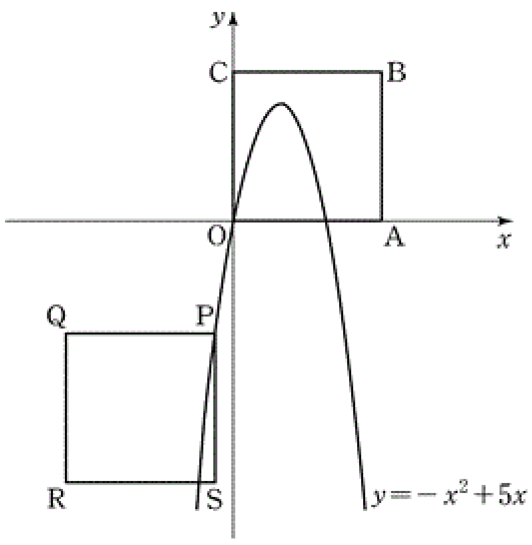
⑤ $-2<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}<a<2$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

23 그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 $O(0,\ 0)$, $A(8,\ 0)$, $B(8,\ 8)$, $C(0,\ 8)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OABC$와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 $PQRS$가 있다.

점 P가 점 $(-1,\ -6)$에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$를 따라 움직이도록 정사각형 $PQRS$를 평행이동시킨다.
평행이동시킨 정사각형과 정사각형 $OABC$가 겹치는 부분의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2005년 6월 모의평가]

24 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-10$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다.
방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 모의평가]

25 다음은 구간 $(0,\ 1)$에서 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x-4$와 $g(x)=x^2-2x-3$의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

> [증명] $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
> $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$은 모든 실수 x에 대하여 연속이다.
> $h(0)\cdot h(1)$ [(가)] 0이므로,
> 중간값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$은 0과 1사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
> 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)$ [(나)] 0이므로 $h(x)$는 [(다)]이다.
> 따라서 $h(x)=0$은 0과 1사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다.
> 즉, 구간 $(0,\ 1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[3점]

① <, >, 증가함수 ② <, > 감소함수 ③ <, < , 감소함수
④ >, < , 감소함수 ⑤ >, >, 증가함수

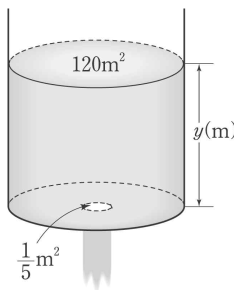
[난이도 : ★★★] [2005년 9월 모의평가]

26 단면의 넓이가 $120(m^2)$로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 $5(m)$까지 차 있다.

이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}(m^2)$인 구멍으로 물이 빠지고 있다.

물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $y(m)$일 때, 빠져나가는 물의 속력 초속 v(m)는 $v=\sqrt{20y}$로 주어진다고 하자.

다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 $5(m)$에서 $\frac{5}{4}(m)$로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.



> v와 y가 시간에 따라 변하므로 v와 y의 관계식 $v=\sqrt{20y}$를 t에 관하여 미분하여
> v와 y의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면
> $\frac{dv}{dt}=\frac{10}{\sqrt{20y}}\frac{dy}{dt}=\frac{10}{v}\frac{dy}{dt}$
> 한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는
> 물의 양과 부호만 다르므로
> ㈎
> (2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$를 (1)식에 대입하여 정리하면
> $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{60}$
> 따라서 구하는 시간은 ㈏(초)이다.

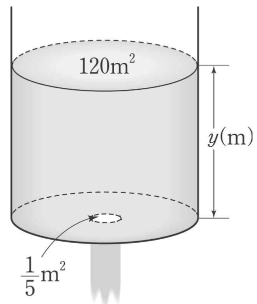
위의 풀이에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[4점]

① $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$, 240 ② $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$, 300
③ $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$, 180 ④ $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$, 240
⑤ $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$, 300

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

27 단면의 넓이가 $120(m^2)$로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 $5(m)$까지 차 있다.

이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}(m^2)$인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $y(m)$일 때, 빠져나가는 물의 속력 $v(m/초)$는 $v=\sqrt{20y}$로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 $5(m)$에서 $\frac{5}{4}(m)$로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.



> v와 y가 시간에 따라 변하므로 v와 y의 관계식 $v=\sqrt{20y}$를 t에 관하여 미분하여 v와 y의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면
> $\frac{dv}{dt}=\frac{10}{\sqrt{20y}}\frac{dy}{dt}=\frac{10}{v}\frac{dy}{dt}$
> 한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는 물의 양과 부호만 다르므로
> ㈎
> (2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$를(1)식에 대입하여 정리하면
> $\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{60}$
> 따라서 구하는 시간은 ㈏(초)이다.

위의 풀이에서 ㈎, ㈏에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[4점]

① $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$, 240
② $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$, 300
③ $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$, 180
④ $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$, 240
⑤ $120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$, 300

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

28 함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-10$의 그래프를 y축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

29 다음은 구간 $(0,1)$에서 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x-4$와 $g(x)=x^2-2x-3$의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

라 하면 $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$은 모든 실수 x에 대하여 연속이다. $h(0)\cdot h(1)$(가)0이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$은 0과 1사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다. 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)$㈏ 0이므로 $h(x)$는 ㈐이다. 따라서 $h(x)=0$은 0과 1사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다. 즉, 구간 $(0,1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 ㈎, ㈏, ㈐에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[3점]

① <, > , 증가함수
② <, > , 감소함수
③ <, < , 감소함수
④ >, >, 감소함수
⑤ >, >, 증가함수

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

30 세 실수 a,b,c에 대하여 사차 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$일 때, [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a=b=c$이면, 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖는다. ㄴ. $a=b\neq c$이고 $f(a)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ㄷ. $a<b<c$이고 $f(b)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

31 삼차방정식 $x^3+3x^2-9x+4-k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 28　② 31　③ 34
④ 37　⑤ 40

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

32 닫힌 구간 $[-2,2]$에서 정의된 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+a$의 최솟값이 -4일 때, 최댓값은?(단, a는 상수이다.)[3점]

① 16　② 18　③ 20
④ 22　⑤ 24

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

33 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)<f(2)$인 사차 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x)=f(2-x)$를 만족시킨다.

방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

34 삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3, & (x<-1) \\ f(x), & (-1 \le x \le 1) \\ -1, & (1<x) \end{cases}$$ 로 정의하자.

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$
ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

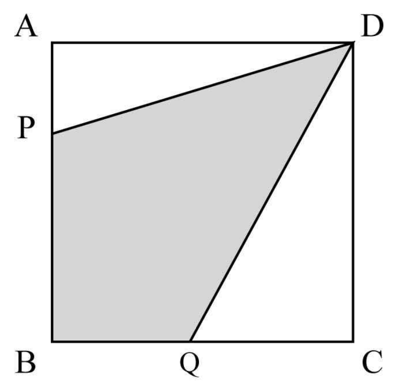
35 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 정의된 삼차 함수 $f(x)=x^3-3x-2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

36 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+10$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.[3점]

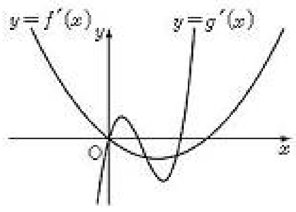
[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

37 그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정사각형 $ABCD$에서 점 P는 A에서 출발하여 변 AB위를 매초 2씩 움직여 B까지, 점 Q는 B에서 P와 동시에 출발하여 변 BC위를 매초 3씩 움직여 C까지 간다. 이때, 사각형 $DPBQ$의 넓이가 정사각형 $ABCD$의 넓이의 $\frac{11}{20}$이 되는 순간의 삼각형 PBQ의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

38 그림은 삼차 함수 $y=f(x)$와 사차 함수 $y=g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프이다. 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?(단, $f'(0)=0$, $g'(0)=0$)[4점]



[보기]
ㄱ. $x<0$에서 $y=f(x)-g(x)$는 증가한다. ㄴ. $y=f(x)-g(x)$는 한 개의 극솟값을 갖는다. ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$라 할 때 $h'(x)=0$은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

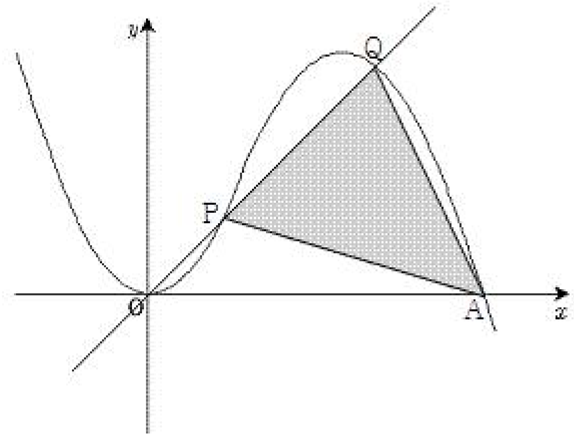
39 두 함수 $f(x)=x^4-4x+a$, $g(x)=-x^2+2x-a$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 때, a의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

40 아래 그림과 같이 삼차 함수 $y=x^2(3-x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 제 1사분면 위의 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다.

이때, 세 점 $A(3, 0)$, P, Q를 꼭짓점으로 하는 $\triangle APQ$의 넓이가 최대가 되게 하는 양수 m에 대하여 $10m$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

41 삼차항의 계수가 양수인 삼차 함수 $f(x)$가 있다. 세 실수 a, b, $c(a<b<c)$에 대하여 $f(a)=f(b)=f(c)$가 성립할 때, 옳은 것을 [보기]에서 모두 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. $f'(a)>0$ ㄴ. $f'(a)+f'(b)>0$ ㄷ. $f'(a)=f'(c)$이면 $b=a+\frac{c}{2}$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ,

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

42 가로와 세로의 길이가 각각 $9cm$, $4cm$인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 매초 $0.2cm$, $0.3cm$씩 늘어난다고 할 때, 이 직사각형이 정사각형이 되는 순간의 넓이의 변화율은 몇 cm^2/초인가?[3점]

① 9.5　② 10　③ 10.5
④ 11　⑤ 11.5

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

43 두 함수 $f(x)=5x^3-10x^2+k$, $g(x)=5x^2+2$가 있다. $\{x|0<x<3\}$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

44 원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 t분 후의 좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 $x_1=2t^3-9t^2$, $x_2=t^2+8t$이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 4분 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 a, b, c라고 하자. 이때, $a+b+c$의 값은?[4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

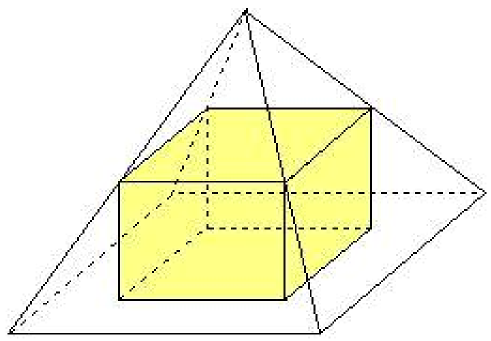
[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

45 등식 $x^2+3y^2=9$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 x^2+xy^2의 최솟값은?[4점]

① $-\frac{5}{3}$　② -1　③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

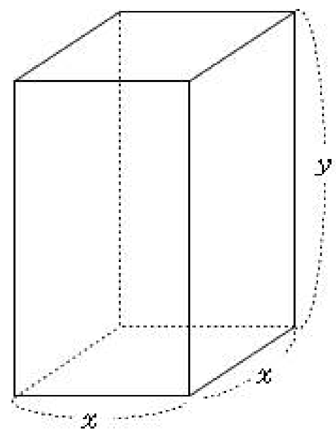
46 모든 모서리의 길이가 3인 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값은?[4점]



① $2\sqrt{2}$　② $3\sqrt{2}$　③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$　⑤ $6\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

47 그림과 같은 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합이 36일 때, 부피의 최댓값을 구하시오.[3점]



정답 및 해설

3.도함수의 활용(2)

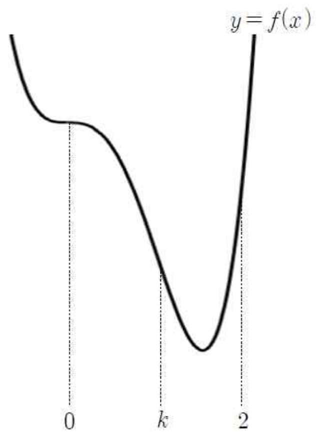
중단원 기출문제

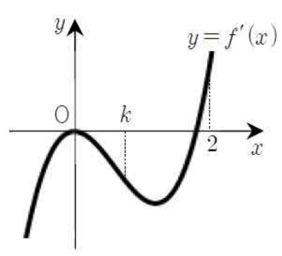
1) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 조건을 만족시키는 사차 함수의 그래프와 도함수의 그래프를 이용하여 참 거짓을 판별할 수 있는가?

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프와
도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.





ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프와
x축은 열린 구간 $(k, 2)$에서 만난다.

즉, 방정식 $f'(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 한 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$는 극솟값을 갖는다. (거짓)

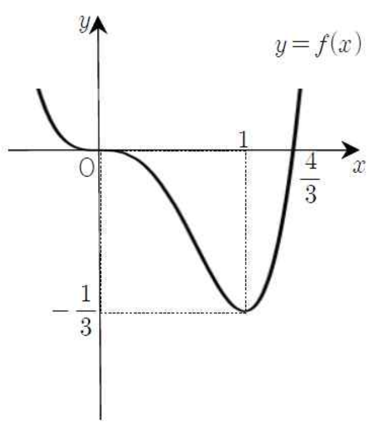
ㄷ. $f(0)=0$이면 양수 a에 대하여 $f(x)=x^3(x-a)$로 놓을 수 있다.

$f(x)=x^4-ax^3$에서 $f'(x)=4x^3-3ax^2$이고

$f'(2)=32-12a=16$에서 $a=\frac{4}{3}$ 즉, $f(x)=x^3\left(x-\frac{4}{3}\right)$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $-\frac{1}{3}$을 가지므로

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq -\frac{1}{3}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2) 답 : 65

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x+6$이므로

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=f'(g(x))$

$12x^2-12x+6=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)=4x^2-4x$

$\{g(x)\}^2-4x^2-2g(x)+4x=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x)-2(g(x)-2x)=0$

$(g(x)-2x)(g(x)+2x-2)=0$

$g(x)-2x=0$ 또는 $g(x)+2x-2=0$

(ⅰ) $g(x)-2x=0$일 때, 즉 $g(x)=2x$이면

$f(2x)=x$이므로

$8x^3-12x^2+12x+k=x$

$k=-8x^3+12x^2-11x \ldots$㉠

따라서, $h_1(x)=-8x^3+12x^2-11x$라 하면

$h_1{}'(x)=-24x^2+24x-11<0$ 이므로 닫힌 구간 $[0, 1]$에서

$-7\leq h_1(x)\leq 0$

즉, 방정식 ㉠이 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는
$-7\leq k\leq 0$

(ⅱ) $g(x)+2x-2=0$일 때, 즉 $g(x)=-2x+2$이면

$f(-2x+2)=x$이므로

$(-2x+2)^3-3(-2x+2)^2+6(-2x+2)+k=x$

$-8x^3+12x^2-13x+8+k=0$

$k=8x^3-12x^2 13x-8 \ldots$㉡

따라서, $h_2(x)=8x^3-12x^2+13x-8$라 하면

$h_2{}'(x)=24x^2-24x+13>0$ 이므로 닫힌 구간 $[0, 1]$에서

$-8\leq h_2(x)\leq 1$

즉, 방정식 ㉡이 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근이 존재하기 위해서는
$-8\leq k\leq 1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-8\leq k\leq 1$이므로

$m=-8,\ M=1$

따라서 $m^2+M^2=(-8)^2+1^2=65$

3) 답 : ⑤

[해설]

[해설] 조건 ㈎에 의해 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$이고

조건 ㈏에 의해 $f(0)=f'(0)$이므로

$\therefore\ c=b$

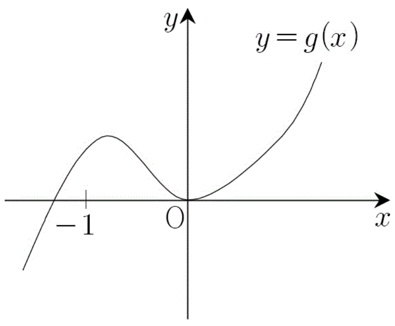
$\therefore\ f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

한편, $g(x)=f(x)-f'(x)$라고 하면

$g(x)=x^3+ax^2+bx+b-(3x^2+2ax+b)$

$=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$이고, $g(0)=0$이다.

조건 ㈐에 의해 $x\geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq 0$이므로
그림과 같이 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.



$\therefore\ g'(0)=0$ 이므로

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$ 에서 $g'(0)=b-2a=0$,

$\therefore\ b=2a$

즉, $g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$

$=x^3+(a-3)x^2$

$=x^2(x+a-3)$ 이므로

$g(x)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=3-a$ 이고,

$x\geq -1$ 에서 $g(x)\geq 0$ 이므로 $3-a\geq -1$ 이어야 한다.

$\therefore\ a\leq 4$

그런데 $f(x)=x^3+ax^2+bx+b=x^3+ax^2+2ax+2a$

($\because\ b=2a$) 이므로

$\therefore\ f(2)=2^3+a\cdot 2^2+2a\cdot 2+2a$

$=10a+8\ \geq 10\cdot 4+8=48$ ($\because\ a\leq 4$)

$\therefore\ f(2)$ 의 최솟값은 48 이다.

4) 답 : ⑤

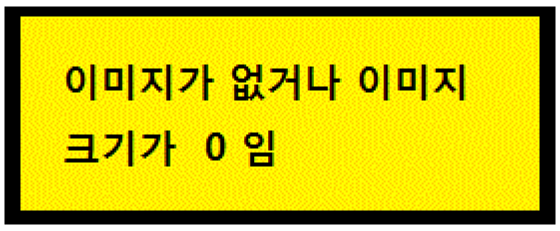
[해설]

$F'(x)=f(x)$ 라 하면 $\int_0^x f(x)dx=F(x)-F(0)$

$F(x)-F(0)=h(x)$ 라 하자.

$f(0)>0$ 이므로 $x=0$ 의 가까운 오른쪽에서 $\int_0^x f(x)dx>0$

따라서 $y=h(x)$ 와 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. (참) 방정식 $f(x)=0$ 은 구간 $(0,2)$, $(2,5)$, $(5,8)$ 에서 각각 실근을 갖는다.

ㄴ. (참) $x=0$ 에서 감소 상태에 있으므로 $f'(0)<0$

ㄷ. (참) $h(x)=kx(x-2)(x-5)(x-8)(k<0)$ 이라 할 때

$\int_m^{m+2} f(x)dx=h(m+2)-h(m)$ 이므로

$m=1$ 일 때, $h(3)-h(1)=58k<0$

$m=2$ 일 때, $h(4)-h(2)=32k<0$

$m=3$ 일 때, $h(5)-h(3)=-30k>0$

$m=4$ 일 때, $h(6)-h(4)=-80k>0$

$m=5$ 일 때, $h(7)-h(5)=-70k>0$

$m=6$ 일 때, $h(8)-h(6)=48k<0$

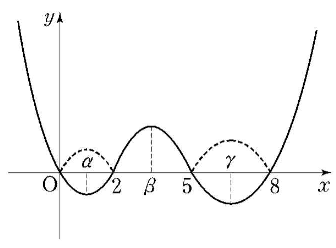
$m=7$ 일 때, $h(9)-h(7)=322k<0$

$m\geq 8$ 일 때, $h(m+2)-h(m)<0$

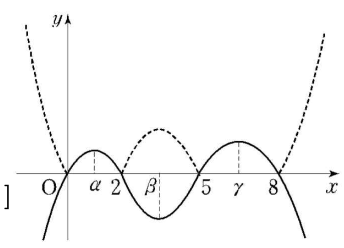
따라서 $\int_m^{m+2} f(x)dx>0$ 을 만족시키는 자연수 m 은 3, 4, 5 로써 3 개이다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]



[그림 1]

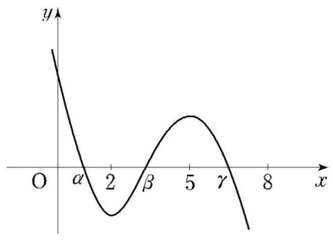


[그림 2]

$h(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하면

$h(x)$ 는 사차 함수이므로 위 두 그림중 하나이다.

$f(x)=h'(x)$ 이므로 두 그림 중 $f(0)=h'(0)>0$ 을 만족하는 경우는 위의 [그림 2]이다.



따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 위와 같다.

ㄱ. $y=h(x)$ 는 3개의 극점을 가지는 사차 함수이므로

$f(x)=h'(x)=0$ 은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)dx=h(m+2)-h(m)$ 이다.

$h(2)=0=h(0)$

$\therefore\ h(2)-h(0)=0$

$h(3)<0<h(1)$

$\therefore\ h(3)-h(1)<0$

$h(4)<0=h(2)$

$\therefore\ h(4)-h(2)<0$

$h(5)=0>h(3)$

$\therefore\ h(5)-h(3)>0$

$h(6)>0>h(4)$

$\therefore\ h(6)-h(4)>0$

$h(7)>0=h(5)$

$\therefore\ h(7)-h(5)>0$

$h(8)=0<h(6)$

$\therefore\ h(8)-h(6)<0$

$h(9)<0<h(7)$

$\therefore\ h(9)-h(7)<0$

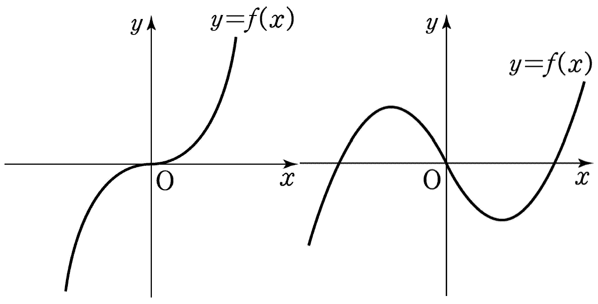
$m\geq 8$ 이면 $h(m+2)<h(m)$ 이므로

$h(m+2)>h(m)$ 을 만족하는 자연수 m 은 $m=3, 4, 5$ 의 3개이다.

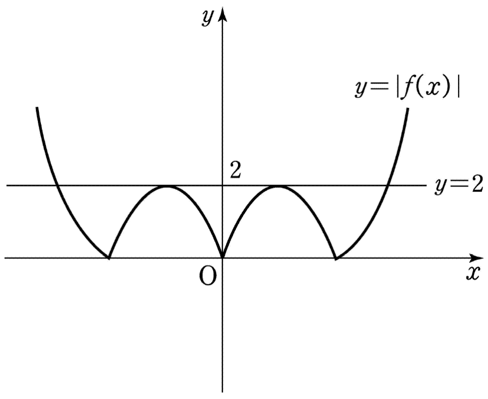
5) 답 : ④

[해설]

최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키는 $f(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 유형이 가능하다.



두 가지 유형 중 아래 그림과 같이 $|f(x)|=2$의 서로 다른 실근이 4개가 가능한 것은 두 번째 유형이다.



따라서 $f(x)$의 극솟값은 -2, 극댓값은 2이다.

$f(x)=x^3-bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-b=0$에서 $x=\pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

$f\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)=-2$이므로 $\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3-b\times\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)=-2$

정리하여 계산하면, $b=3$

$\therefore\ f(3)=3^3-3\times3=18$

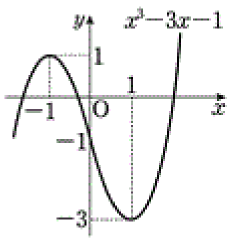
6) 답 : 17

[해설]

$f'(x)=3x^2-3=0$에서 $x=\pm1$에서 극값을 가지고

$f(1)=1-3-1=-3$

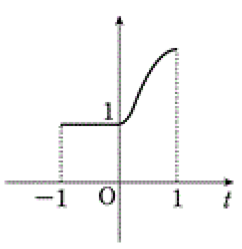
$f(-1)=-1+3-1=1$이므로 그래프를 그리면



$-1\le x\le t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라 하므로 t를 움직여보면

ⅰ) $-1\le t\le0$일 때, $g(t)=1$

ⅱ) $0<t\le1$일 때, $g(t)=-(t^3-3t-1)=-t^3+3t+1$



$\therefore\ \int_{-1}^{1}g(t)dt=1+\int_{0}^{1}(-t^3+3t+1)=dt=\frac{13}{4}$

$\therefore\ p+q=4+13=17$

7) 답 : ③

[해설]

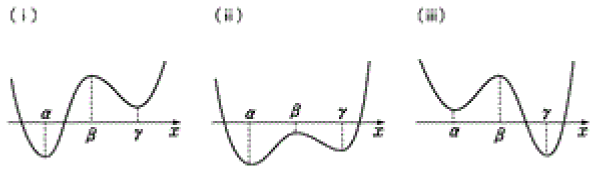
$x=\alpha,\beta,\gamma$에서 극값을 가지고

$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이므로

(ⅰ) $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)>0$

(ⅱ) $f(\alpha)<0,\ f(\beta)<0,\ f(\gamma)<0$

(ⅲ) $f(\alpha)>0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)<0$



ㄱ. $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다. ∴ 참

ㄴ. 위의(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ∴ 참

ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 $f(x)=0$은 β보다 큰 두 실근을 갖는다. ∴ 거짓

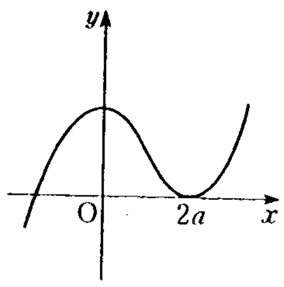
8) 답 : ④

[해설]

$y'=3x^2-6ax=3x(x-2a)=0$에서,

y는 $x=0$에서 극댓값, $x=2a$에서 극솟값을 갖는다.(∵ $a>0$)

그런데 $x=0$일 때, $f(0)=4a>0$이므로 그래프의 개형은 오른쪽과 같다.



따라서,

삼차 함수 $y=x^3-3ax^2+4a$는 $x=2a$에서 x축에 접한다.

$\therefore\ f(2a)=8a^3-12a^3+4a=0$

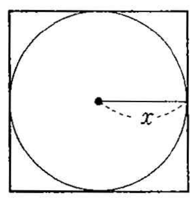
$\therefore\ 4a^3-4a=4a(a^2-1)=0$

$\therefore\ a=1$(∵ $a>0$)

9) 답 : ④

[해설]

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름을 x, 높이를 y로 놓으면



부피 $V=\pi x^2y=64$

철판의 넓이를 S라 하면

$S=(2x)^2\times2+2\pi xy=8x^2+2x\cdot\pi y$

$=8x^2+2x\cdot\frac{64}{x^2}=8x^2+\frac{128}{x}$

이것을 $S(x)$로 놓으면

$S'(x)=16x-\frac{128}{x^2}=\frac{16x^3-128}{x^2}=\frac{16(x^3-8)}{x^2}$

$=\frac{16(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$

$x=2$에서 극소이면서 최소이다.

$S(x)$의 최솟값은 $S(2)=8\times4+\dfrac{128}{2}=32+64=96$

$\therefore$ 96만원

10) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 위치와 속도, 가속도의 관계를 묻는 문제이다.

속도를 $v(t)$라 하고 가속도를 $a(t)$라고 하면

$v(x)=3t^2+2at+b\ldots$①이고, $a(t)=6t+2a\ldots$②이다.

$v(x)=3t^2+12t+b$이고 $t=1$에서

운동 방향을 바꾼다는 것은 그 때의 속도가 0이고

그 전후에서 부호가 바뀐다는 것을 의미하므로 (오해하지 말 것)

점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$v(1)=3-12+b=0$이며 정리하면

$b=9$이다.

$t=2$에서 점 P의 가속도는 0이므로

$a(2)=12+2a=0$이며 정리하면

$a=-6$이다.

따라서 $a+b=5$

11) 답 : ③

[해설]

(가) 조건에 의해

$f(-1)=-1+a-b\geq1$

$\therefore\ a>b\ldots$㉠

(나) 조건에 의해

$f(1)-f(-1)=1+a+b-(-1+a-b)$

$=2+2b>8$

$\therefore\ b>3\ldots$㉡

ㄱ. $f'(x)=3x^2+2ax+b$

㉠, ㉡에 의해

$a>b\Rightarrow a^2>ab>3b$ ($\because\ a>b>3$)

따라서

$\dfrac{D}{4}=a^2-3b>0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=3-2a+b=3-a+b-a$이고

$3-a<0$, $b-a<0$이므로

$\therefore\ f'(-1)<0$

$f'(1)=3+2a+b>0$

사잇값 정리에 의해 $f'(x)$는 $(-1,\ 0)$에서 근을 가진다.

$f'(\alpha)=0$이라 하면

x가 $(-1,\ \alpha)$에서 $f'(\alpha)<0$이다 (거짓)

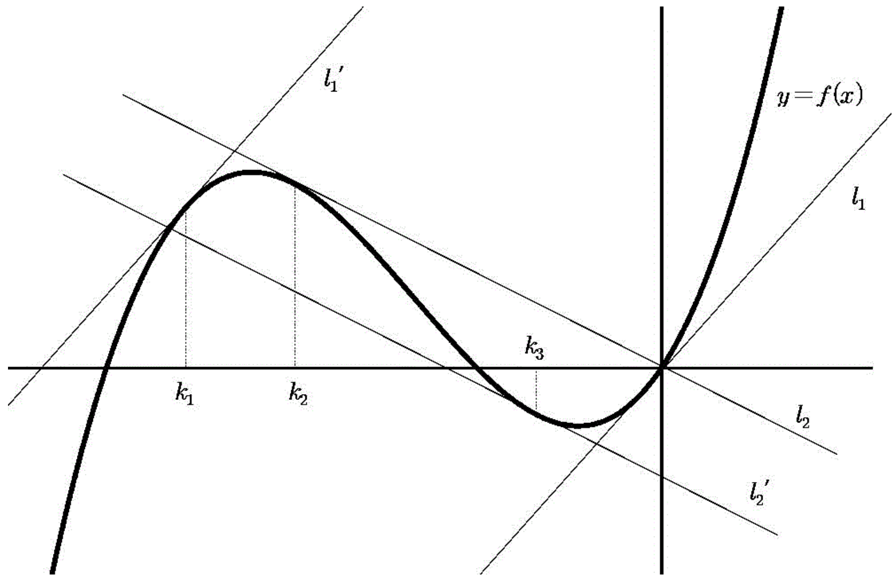
ㄷ. $f(x)=f'(k)x$라 하면

$f'(k)x$는 $(0,\ 0)$을 지나는 직선이다.

삼차함수 $f(x)$와 직선이 2개의 교점을 가지려면 직선은 $f(x)$의 접선이어야한다.

ㄱ에 의해 $f'(x)$는 두 근을 갖고

따라서 $(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선은 l_1, l_2 두 개다.



ⅰ) l_1인 경우

$f'(k)=f'(0)$이므로

위 그림에서 $k=0,\ k_1$

ⅱ) l_2인 경우

$(0,\ 0)$에서 $f(x)$에 그은 접선의 접점을 k_2라 할 때

$f'(k)=f'(k_2)$이므로

$k=k_2,\ k_3$

따라서 k의 개수는 4개다.

12) 답 : 12

[해설]

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=0\ L\rightarrow x=-a$, $\dfrac{a}{3}$로부터

$f(-a)=a^3+2$, $f\left(\dfrac{a}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}a^3+2$, $f(a)=a^3+2$이므로

$-\dfrac{5}{27}a^3+2=\dfrac{14}{27}$

$\therefore\ a=2$, $M=10$

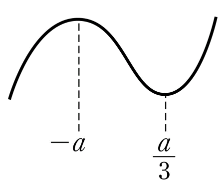
따라서 $a+M=12$

[다른 풀이]

$f'(x)=3x^2+2ax-a^2\ =(x+a)(3x-a)$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-a)$	↘	$f\left(\frac{a}{3}\right)$	↗

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-a,a]$에서 $x=\dfrac{a}{3}$일 때 최솟값 $\dfrac{14}{27}$을 갖는다.

$\dfrac{14}{27}\ =f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{a^3}{27}+\dfrac{a^3}{9}-\dfrac{a^3}{3}+2\ =-\dfrac{5}{27}a^3+2$

$\therefore\ a^3=8$

$\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-4x+2$ 이다.

이때 $f(-a)$, $f(a)$의 값을 조사하면

$f(-a)=f(-2)=10$

$f(a)=f(2)=10$

$\therefore\ M=10$

$\therefore\ a+M=2+10=12$

13) 답 : ①

[해설]

$f(x)=g(x)$

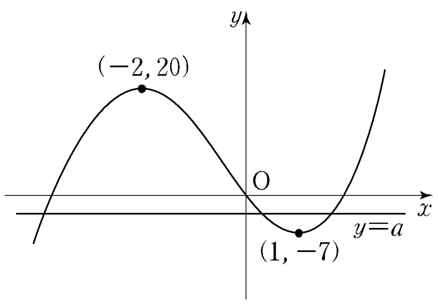
$3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$

$2x^3+3x^2-12x=a$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수

$\begin{cases} y=2x^3+3x^2-12x \\ y=a \end{cases}$

의 교점의 x좌표이다.



방정식이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 가져야 하므로

$-7<a<0$

따라서 정수 a의 개수는 6개다.

14) 답 : ①

[해설]

$f'(t)=4t-2,\ g'(t)=2t-8$

서로 반대방향으로 움직이려면 $(4t-2)(2t-8)<0$

$\therefore\ \frac{1}{2}<t<4$

15) 답 : ④

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x=0$에서 $x=0,\ 2$

증감표로 나타내면

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$	↗	$a+16$

따라서 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서

$M=f(4)=16+a,\ m=f(2)=a-4$

$M+m=12+2a=20$ 이므로 $\therefore\ a=4$

16) 답 : ③

[해설]

해설

$h(x)=f(x)-g(x)$ (삼차 함수)라 놓으면

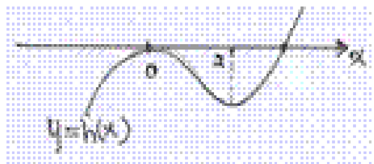
$h'(x)=f'(x)-g'(x)$ 이므로

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	-	0	+

위 증감표에서 구간 $(0,\ 2)$에서 $y=h(x)$는 감소한다.

또한 $x=0$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 다음과 같은 그래프가 된다.



ㄱ. $0<x<2$에서 감소(참)

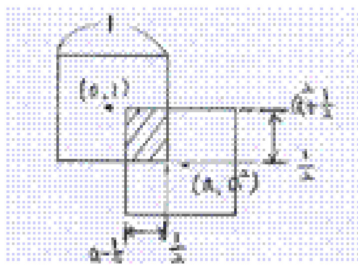
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.(참)

ㄷ. $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근(거짓)

17) 답 : ①

[해설]

해설



두 정사각형의 공통부분의 넓이를 $S(a)$이라 하면

$$S(a)=\left(\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)\left(a^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=(1-a)a^2=a^2-a^3\ (0<a<1)$$

$S(a)$의 최댓값을 구하기 위해서

$S'(a)=2a-3a^2=0$

$a=0,\ \frac{2}{3}$

따라서 $S(a)$의 최댓값은

$$S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}-\frac{8}{27}=\frac{4}{27}$$

18) 답 : ①

[해설]

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

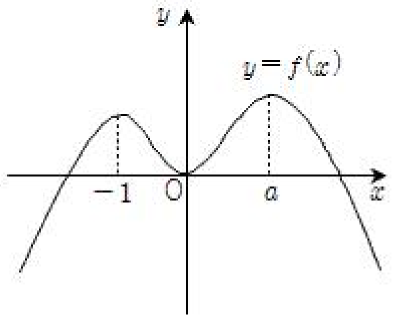
$-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$

$-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$이고,

$f(a)-f(-1)=\ a^4+2a^3-2a-1$

$\quad =(a+1)^3(a-1)$

이므로

$\quad 0<a<1$이면 $f(a)<f(-1)$

$a\ge 1$이면 $f(a)\ge f(-1)$이다.

(ⅰ) $0<a<1$인 경우

$t<-1$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\ge -1$이면 $g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at, & (t<-1)\\ 0, & (t>-1)\end{cases}$$

이고, $\lim\limits_{t\to -1-}g'(t)=\lim\limits_{t\to -1+}g'(t)=0$

이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$일 때 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅱ) $a\ge 1$인 경우

$f(-1)=f(\alpha)$ ($0<\alpha\le a$)이라 하자.

$t<-1$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\le t<\alpha$이면 $g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\le t<a$이면 $g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\ge a$이면 $g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at, & (t<-1)\\ 0, & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at, & (\alpha<t<a)\\ 0, & (t>a)\end{cases}$$

$\lim\limits_{t\to -1-}g'(t)=\lim\limits_{t\to -1+}g'(t)=0$이므로

$\quad g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$\lim\limits_{t\to a-}g'(t)=\lim\limits_{t\to a+}g'(t)$이어야 하므로

$\quad -12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$에서

$12(a-1)a^2=0$ ∴ $a=1$

$a=1$이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$이므로

$\quad f(-1)=f(1)$ ∴ $\alpha=a=1$

$$\therefore\ g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t, & (t<-1)\\ 0, & (-1<t<1)\\ -12t^3+12t, & (t>1)\end{cases}$$

$g'(-1)=0$, $g'(1)=0$이므로

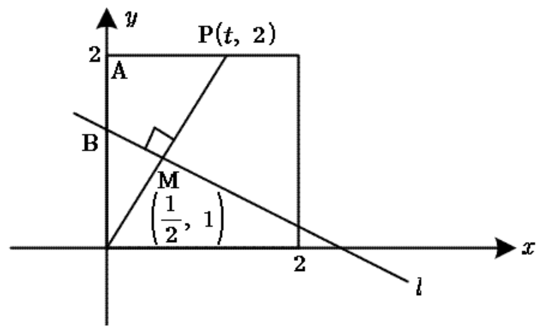
$\quad a=1$일 때, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a\le 1$이므로

$\quad$구하는 a의 최댓값은 1이다.

19) 답 : 11

[해설]



위의 그림에서 직선 l의 방정식은 $y=-\dfrac{t}{2}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)+1$

y절편은 $\dfrac{t^2}{4}+1$이고 점 $B\left(0,\ \dfrac{t^2}{4}+1\right)$이다.

$f(t)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)t=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{t^3}{4}\right)$

$f'(t)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)=0$에서

$\quad t=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$에서 최댓값 $f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$을 갖는다.

$\quad$ ∴ $a+b=11$

20) 답 : 13

[해설]

$f(x)=x^3-3x^2-9x+8$에서 미분하면,

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$또는 $x=-1$에서 극값을 가짐을 알 수 있다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	13	↘	

위의 $f(x)$의 증감표에서 $x=-1$에서 극대이자, 최대이다.

따라서, 최댓값은 $f(-1)=13$

21) 답 : ③

[해설]

조건 ㈎에 의해 모든 실수 x에 대해

$\quad f(x)>0$이고 $g(x)>0$이거나...①

$\quad f(x)<0$이고 $g(x)<0\cdots$②

또,

㈏ $\dfrac{g(x)}{f(x)}\times\dfrac{1}{h(x)}\ge 0$

그런데㈎에 의해 모든 실수 x에 대해 $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$이므로

$\quad$㈏는 $\dfrac{1}{h(x)}>0$

$\quad$ ∴ $h(x)>0\cdots$③

ㄱ. $f(x)=0$이 실근을 가지면 ㈎에 모순이므로

$\quad$방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

$\quad$ ∴ 참

ㄴ. 위 ①의 경우이면 $g(x)>0$의 해집합은 실수 전체의 집합

$\quad$위 ②의 경우이면 $g(x)>0$의 해집합은 공집합

$\quad$ ∴ 참

ㄷ. $|g(x)|>0$, $h(x)>0$이므로

항상, $|g(x)|+h(x)>0$이다.

즉, 방정식 $|g(x)|+h(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

$\therefore$ 거짓

22) 답 : ③

[해설]

$P(1,0)$에서 법선의 방정식을 구하면

$f'(1)=a+1$이므로

$y=-\dfrac{1}{a+1}(x-1)$ (단, $a\neq-1$)...①

($\because$ $f'(1)=0$이면 법선이 x축에 수직이 되어 부적합)

① 과 $y=f(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나므로

$x(x-1)(ax+1)=-\dfrac{1}{a+1}(x-1)$

이것이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$(x-1)\left\{x(ax+1)+\dfrac{1}{a+1}\right\}=0$

$ax^2+x+\dfrac{1}{a+1}=0$이 $x=1$인 근을 갖지 않으므로,

서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$a(a+1)x^2+(a+1)x+1=0$

$D=(a+1)^2-4a(a+1)>0$

$(a+1)(3a-1)<0$

$\therefore$ $-1<a<\dfrac{1}{3}$

이때 $a\neq0$이므로

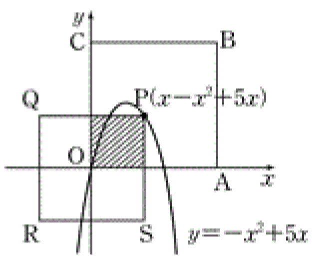
$-1<a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{1}{3}$

23) 답 : 527

[해설]

$P(x,\ -x^2+5x)$라면 $0\le x\le5$일 때

겹치는 부분의 넓이 $S(x)$는



$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$

$S'(x)=-3x^2+10x=-3x\left(x-\dfrac{10}{3}\right)$

따라서, $x=\dfrac{10}{3}$일 때 $S(x)$는 최댓값을 갖는다.

$S\left(\dfrac{10}{3}\right)=-\dfrac{1000}{27}+\dfrac{500}{9}=\dfrac{500}{27}$

$\therefore$ $p=27,\ q=500,\ p+q=527$

24) 답 : 33

[해설]

함수 $y=f(x)$를 y축 방향으로 a만큼 평행이동시키면

$g(x)=2x^3-3x^2-12x-10+a$이고

$g'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$이므로

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극대값 과 $x=2$에서 극소값을 갖고

$g(x)=0$이 서로 다른 두 실근만 가지려면 하나의 실근과 중근을 가져야 한다.

$\therefore$ $g(-1)\times g(2)=0$

$(a-3)(a-30)=0$

$\therefore$ $a=3$ 또는 $a=30$

그러므로 a값의 합은 33

25) 답 : ①

[해설]

$h(0)\cdot h(1)=(-1)\times3$ [ ]0

$h'(x)=3x^2-6x+6=0$에서

$\dfrac{D}{4}=9-18=-9<0$이므로 $h'(x)$ [ ]0

$\therefore$ $h(x)$는 [증가함수]이다.

26) 답 : ②

[해설]

$v=\sqrt{20y}$를 t에 관하여 미분하면

$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{10}{\sqrt{20y}}\cdot\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{10}{v}$ ⋯①

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간 변화율은 $120\dfrac{dy}{dt}$이고,

빠져나가는 순간의 물의 양은 $\dfrac{1}{5}\times v$이다.

이때, 두 물의 양은 부호만 다르므로

$\left[120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{5}\right]$ ⋯②

② 식에서 얻은 $\dfrac{dy}{dt}$를 ①식에 대입하여 정리하면

$\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{60}$

이때, $y=5$일 때 $v=10,\ y=\dfrac{5}{4}$일 때, $v=5$이므로

$5=10+\displaystyle\int_0^t\left(-\dfrac{1}{60}\right)dt$

$-5=-\dfrac{1}{60}t$

$\therefore$ $t=300$

따라서, 구하는 시간은 [300] (초)이다.

27) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]미분법

$v=\sqrt{20y}$를 t에 관하여 미분하면

$\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{10}{\sqrt{20y}}\cdot\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{10}{v}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ ...(1)

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간 변화율은 $120\dfrac{dy}{dt}$이고, 빠져나가는 순간의 물의 양은 $\dfrac{1}{5}\times v$이다.

이때, 두 물의 양은 부호만 다르므로

$120\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{v}{5}$ ...(2)

(2)식에서 얻은 $\dfrac{dy}{dt}$를 (1)식에 대입하여 정리하면

$\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{60}$

이때, $y=5$일 때 $v=10$, $y=\dfrac{5}{4}$일 때, $v=5$이므로

$5=10+\displaystyle\int_0^t\left(-\dfrac{1}{60}\right)dt$

$-5=-\dfrac{1}{60}t$

$\therefore\ t=300$

따라서, 구하는 시간은 300(초)이다.

28) 답 : 33

[해설]

함수 $y=f(x)$를 y축 방향으로 a만큼 평행이동시키면

$g(x)=2x^3-3x^2-12x-10+a$이고

$g'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ 또는 $x=2$이므로

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극대값 과 $x=2$에서 극소값을 갖고

$g(x)=0$이 서로 다른 두 실근만 가지려면 하나의 실근과 중근을 가져야 한다.

$\therefore\ g(-1)\times g(2)=0$

$(a-3)(a-30)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=30$

그러므로 a값의 합은 33

29) 답 : ①

[해설]

$h(0)\cdot h(1)=(-1)\times 3[<]0$

$h'(x)=3x^2-6x+6=0$에서

$\dfrac{D}{4}=9-18=-9<0$이므로 $h'(x)[>]0$

$\therefore\ h(x)$는 [증가함수]이다.

30) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $a=b=c$이면 $f'(x)=(x-a)^3$

$f'(x)=0$에서 $x=a$이고

x	⋯	a	⋯
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

위의 증감표에서 $f(x)=0$의 근이 실근을 가지는지 가지지 않은 지는 알 수 없음.

ㄴ. $a=b\neq c$ ($a<c$)이고 $f(a)<0$이면

$f'(x)=(x-a)^2(x-c)$이고 $f'(x)=0$에서 $x=a$또는 $x=c$

x	⋯	a	⋯	c	⋯
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

위의 증감표에서 $f(a)<0$이므로 $f(c)<0$이다.

$\therefore\ f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄷ. $a<b<c$이고 $f(b)<0$이면

x	⋯	a	⋯	b	⋯	c	⋯
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 극댓값 $f(b)<0$이므로

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

31) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 미분을 활용하여 추론하기

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4-k$라 하면

$f'(x)=3(x+3)(x-1)$

x	⋯	-3	⋯	1	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$31-k$ (극댓값)	↘	$-1-k$ (극솟값)	↗

삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1)<0$이어야 하므로

$(31-k)(-1-k)<0$

$-1<k<31$

따라서 모든 정수 k의 개수는 31

32) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 함수의 최대, 최소 이해하기

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

x	-2	⋯	0	⋯	2
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$a+20$	↘	a	↗	$a+4$

$x=0$일 때, 최솟값을 가지므로 $a=-4$

따라서 $x=-2$일 때, 최댓값은 16

33) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

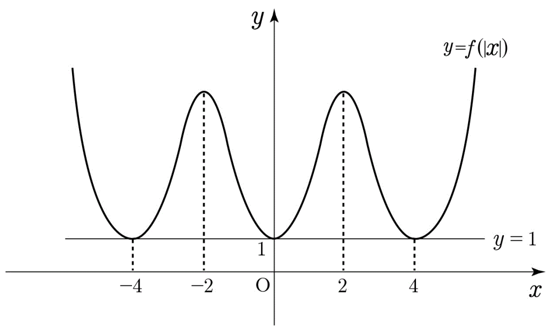
사차 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$

$f(0)<f(2)$이고 방정식 $f(|x|)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$f(x)$가 $x=0$, 4에서 극솟값 1을 갖고 $x=2$에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(4)=1$에서 $16+4a+b=1$

$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$에서 $f'(0)=f'(4)=0$이므로

$-32-4a=0$

$a=-8$, $b=17$이므로

$f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값 $f(2)=17$

34) 답 : ②

[해설]

$f'(x)=k(x-1)(x+1)$이고 $f(-1)=3,\ f(1)=-1$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x+1,\ f'(x)=3x^2-3$

$g'(x)=\begin{cases}0, & (x<-1\ \ x>1)\\ 3x^2-3, & (-1\le x\le 1)\end{cases}$에서

ㄴ. $g'(x)\le 0$(참)

ㄷ. $g'(x)\ge -3$이므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3(거짓)

35) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]최댓값과 최솟값 구하기

$f'(x)=3x^2-3=0$

,

$\therefore\ x=\pm 1$

$f(-1)=0,\ f(1)=-4,\ f(3)=16$

그러므로 최댓값과 최솟값의 합은 12

36) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]삼차 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=x^3+3x^2+10$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0$에서 $x=-2,\ 0$

$f(-1)=12,\ f(0)=10,\ f(1)=14$이므로

최댓값과 최솟값의 합은 $14+10=24$이다.

37) 답 : 18

[해설]

[출제 의도]도함수를 활용하여 수학 내적문제 해결하기

t초 일 때

$\square DPBQ=\square ABCD-(\triangle APD+\triangle QCD)$

$=200+10t$

또한 $\square DPBQ=\dfrac{11}{20}\times\square ABCD$이므로

$200+10t=220$에서 $t=2$

$\triangle PBQ=\dfrac{1}{2}(20-2t)3t=30t-3t^2$

$\triangle PBQ$의 넓이의 순간변화율은 $30-6t$

따라서 $\triangle PBQ$넓이의 $t=2$일 때 순간변화율은 18

38) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]도함수의 성질 이해하기

ㄱ. $x<0$에서 $f'(x)>g'(x)$

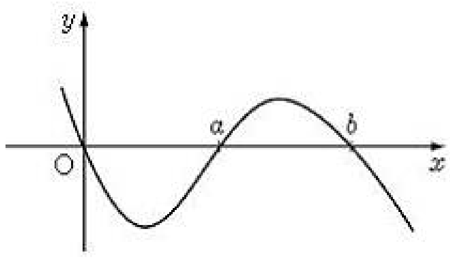
$y'=f'(x)-g'(x)>0$이므로 $y=f(x)-g(x)$는 증가한다. ∴ 참

ㄴ. $f'(x)=g'(x)$의 세 근을 $0,\ a,\ b\ (0<a<b)$라 하고 $y=f(x)-g(x)$의 증감표를 완성하면

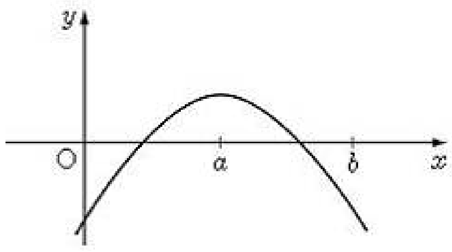
x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)-g'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)-g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $y=f(x)-g(x)$는 극솟값이 1개이다. ∴ 참

ㄷ. ㄴ의 증감표를 이용하여 $y=h(x)$의 개형을 그려보면



이고 $y=h'(x)$의 개형은



이므로 $h'(x)=0$은 서로 다른 2개의 양의 실근을 갖는다. ∴ 참

39) 답 : ②

[해설]

두 함수 $f(x)=x^4-4x+a$와

$g(x)=-x^2+2x-a$를 연립하여 정리하면

$x^4+x^2-6x+2a=0$

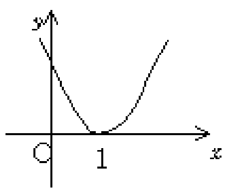
$h(x)=x^4+x^2-6x+2a$라 하면

$h'(x)=4x^3+2x-6$

$=(x-1)(x^2+4x+6)$이므로

$x=1$에서 $h(x)$의 극솟값만 존재한다.

그런데 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프 의 교점이 한 개이므로 $h(x)$의 그래프는 아래 그림과 같이



x축과 한 점에서 만나야 한다.

따라서 $h(1)=0$

$h(1)=1+1-6+2a=0$

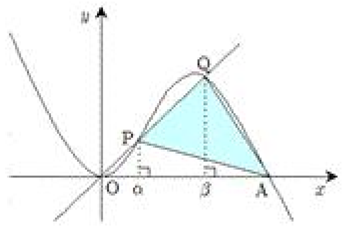
$\therefore\ a=2$

40) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]곡선과 직선을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 최댓값을 미분을 활용하여 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원점 O를 통과하는 직선을 $y=mx$(단, $m>0$)이라 놓으면



$x^2(3-x)=mx$ 에서 $x(x^2-3x+m)=0$ 이다.

여기에서 $x\neq 0$ 이므로 $x^2-3x+m=0$ 이다.

$x^2-3x+m=0$ 의 서로 다른 두 양의 근을 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$ 라 하면

$D=9-4m>0$ 이므로 $0<m<\frac{9}{4}$

$\triangle APQ$의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle OAQ-\triangle OAP$

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot m\beta-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot m\alpha=\frac{3m}{2}(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-4m}$

$\therefore\ S=\frac{3}{2}\sqrt{-4m^3+9m^2}$

여기에서 $f(m)=-4m^3+9m^2$ 이라 하면,

$0<m<\frac{9}{4}$ 에서 $f(m)=-4m^3+9m^2$ 의 최댓값을 구해보자.

$f'(m)=-6m(2m-3)$ 이므로 넓이 S는 $m=\frac{3}{2}$ 일 때,

최댓값 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 을 갖는다

따라서 $10m=10\times\frac{3}{2}=15$

41) 답 : ⑤

[해설]

$f(a)=f(b)=f(c)=k$ 라 할 때 삼차방정식 $f(x)=k$ 의

세 근이 a, b, c 이므로 $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)+k$

$(p>0)$ 로 놓으면

$f'(x)=p(x-b)(x-c)\ +p(x-a)(x-c)+p(x-a)(x-b)$

ㄱ. $f'(a)=p(a-b)(a-c)>0$ (참)

ㄴ. $f'(a)+f'(b)=p(a-b)^2>0$ (참)

ㄷ. $f'(a)-f'(c)=p(c-a)(2b-a-c)=0$ 이므로

$b=a+\frac{c}{2}$ (참)

42) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형에서 넓이의 변화율에 대한 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

t 초 후의 가로, 세로의 길이를 각각 $9+0.2t,\ 4+0.3t$ 로 두면

정사각형의 조건에서 $9+0.2t=4+0.3t$ 따라서 $t=50$

$S(t)=(9+0.2t)(4+0.3t)=0.06t^2+3.5t+36$ 이므로

$\frac{dS(t)}{dt}=0.12t+3.5$ 이고

$t=50$ 일 때의 넓이의 변화율은 $0.12\times 50+3.5=9.5(cm^2/초)$ 이다.

43) 답 : 22

[해설]

[출제 의도]다항함수의 미분법

$h(x)=f(x)-g(x)=5x^3-10x^2+k-(5x^2+2)$

$=5x^3-15x^2+k-2$

라 하면 $\{x|0<x<3\}$ 에서 부등식 $h(x)\geq 0$ 이 성립하는 k의 최솟값을 구하면 된다.

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 이므로

$h(x)$는 $x=0$ 일 때 극댓값을, $x=2$ 일 때 극솟값을 갖는다.

따라서, $\{x|0<x<3\}$ 에서 $h(x)$는 $x=2$ 일 때 최소가 되고

$h(2)=k-22$ 이므로 $\{x|0<x<3\}$ 에서 $h(x)\geq 0$ 이려면

$k-22\geq 0$ 이면 된다.

$\therefore\ k\geq 22$

따라서, k의 최솟값은 22 이다.

44) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점들의 운동방향을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$

따라서 P는 $t=3$ 일 때 운동방향을 바꾸므로

$a=1$

마찬가지로 $\frac{dx_2}{dt}=2t+8$ 이므로 $b=0$

t 분 후의 M의 좌표를 $f(t)$ 라 하면

$f(t)=t^3-4t^2+4t$

$f'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

$\therefore\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=3$

45) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]최솟값을 구하기 위해 미분법을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x^2+3y^2=9$ 에서 $y^2=\frac{1}{3}(9-x^2)\cdots$①

$y^2\geq 0$ 이므로 $-3\leq x\leq 3\cdots$②

주어진 식에 ①을 대입한 식을 $f(x)$ 라 하면

$f(x)=x(x+y^2)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$

$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$

② 의 범위에서 $f(x)$ 의 증감표를 만들면

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	9	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	9

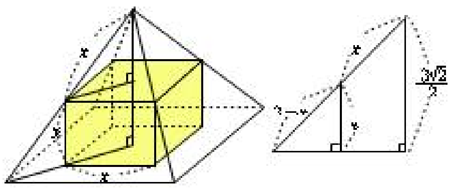
따라서 주어진 식의 최솟값은 $-\frac{5}{3}$ 이다.

46) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 함수의 최댓값구하기

정답 및 해설



$(3-x):3=y:\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 에서 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(3-x)$

부피 $V(x)=x^2y=\frac{\sqrt{2}}{2}(3x^2-x^3)$ 을 미분하면

$V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(6x-3x^2)$ $(0<x<3)$

$\therefore$ $x=2$ 일 때, 부피의 최댓값 $2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

[정답]①

47) 답 : 27

[해설]

[출제 의도]함수의 극대와 극소를 판정하기

모서리 길이의 합이 36이므로 직육면체의 가로와 세로의 길이를 x, 높이를 y라 하면 $8x+4y=36$이고

부피 $V=x^2y=x^2(9-2x)$가 최대가 될 때는 $V'=-6x(x-3)$이므로 $x=3$

$\therefore$ 부피는 27

[정답]27