Ⅲ.다항함수의 미분법
2.도함수의 활용(1)

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

1 곡선 $y=x^3-ax+b$위의 점 $(1,1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

2 최고차항의 계수가 양수인 삼차 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값, $x=k$에서 극솟값을 가진다. (단, k는 상수이다.)
(나) 1보다 큰 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^t \lvert f'(x)\rvert dx=f(t)+f(0)$ 이다.

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. $\int_0^k f'(x)dx<0$
ㄴ. $0<k\le 1$
ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

3 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3f(x)-7$
(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)[4점][2016(A) /수능 28]

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

4 두 다항함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=(x^3+2)f(x)$를 만족시킨다.

$g(x)$가 $x=1$에서 극솟값 24를 가질 때, $f(1)-f'(1)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

5 삼차 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+3$의 그래프 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+b$이다.

$a+b$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

6 삼차 함수 $f(x)=x^3-3x+a$에 대하여 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 양수 a의 최솟값은?[4점][2013학년도 수능]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

7 곡선 $y=-x^3+4x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$이다.

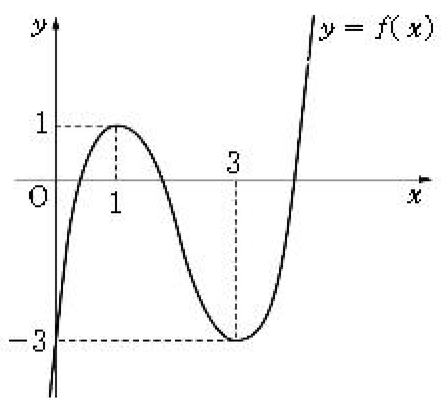
$10a+b$의 값을 구하시오.(단, $a,\ b$는 상수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

8 함수 $f(x)=x^3-12x$가 $x=a$에서 극대값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2004 학년도 대수능]

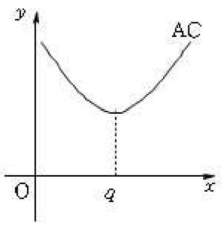
9 그림과 같이 삼차 함수 $y=f(x)$가 극댓값 $f(1)=1$과 극솟값 $f(3)=-3$을 가지며, $f(0)=-3$이다. 이때, $\int_0^3 |f'(x)|dx$의 값은?[3점]

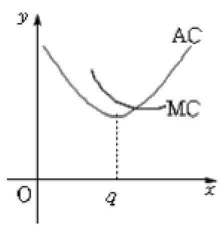


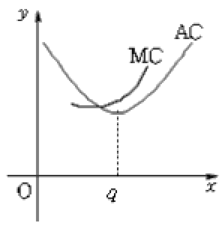
① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

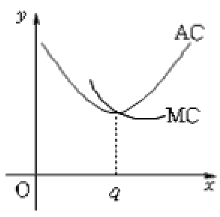
[난이도 : ★★★] [2004 학년도 대수능]

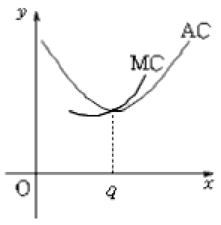
10 어떤 제품의 생산량이 x일 때 생산비를 $f(x)$라고 하자. 이때, $\dfrac{f(x)}{x}$를 평균생산비라 하고, AC로 나타낸다. 또, $f(x)$가 미분가능하면 $f'(x)$를 생산량이 x일 때의 한계생산비라 하고 MC로 나타낸다. 평균생산비 $AC=\dfrac{f(x)}{x}$의 그래프가 그림과 같고 $x=q$에서 극솟값을 가질 때, $x=q$근방에서 한계생산비 $MC=f'(x)$의 그래프의 개형은?[3점]

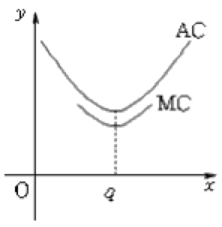


①


②


③


④


⑤


[난이도 : ★☆☆] [2002 학년도 대수능]

11 [공통]삼차 함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)=f'(c)=0$을 만족시킨다. c를 a와 b로 나타내면 ?[2점]

① $a+b$ ② $\dfrac{a+b}{2}$ ③ $\dfrac{a+b}{3}$
④ $\dfrac{a+2b}{3}$ ⑤ $\dfrac{2a+b}{3}$

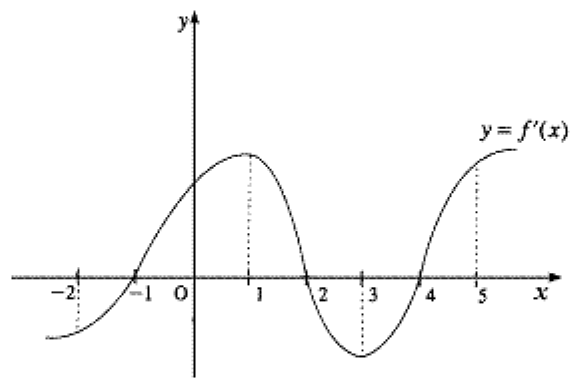
[난이도 : ★★★] [2002 학년도 대수능]

12 함수 $y=x^3+ax$의 그래프를 원점을 중심으로 양의 방향으로 $45°$ 회전시켜서 얻은 곡선이 실수 전체에서 정의된 어떤 함수 $y=f(x)$의 그래프가 되는 a의 범위는?[2점]

① $a\ge 1$ ② $a\ge 0$ ③ $a\le 1$
④ $a\le -1$ ⑤ $0\le a\le 2$

[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

13 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 다음 중 옳은 것은?



① $f(x)$는 구간 $(-2, 1)$에서 증가한다.
② $f(x)$는 구간 $(1, 3)$에서 감수한다.
③ $f(x)$는 구간 $(4, 5)$에서 증가한다.
④ $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.
⑤ $f(x)$는 $x=3$에서 극소이다.

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

14 함수 $f(x)=x^3-ax+6$ 이 $x=1$에서 극소일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

15 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은?[3점]

① 43　② 46　③ 49
④ 52　⑤ 55

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

16 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$이 열린 구간 $(-a, a)$에서 감소할 때, 양수 a의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

17 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차 함수 $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자.

(가) $f(n)=0$ (나)모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x) \ge 0$이다.

a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은?[4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

18 함수 $f(x)=x^3-3x^2+a$의 모든 극값의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

19 함수 $f(x)=x^3-9x^2+24x+a$의 극댓값이 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① -12　② -10　③ -8
④ -6　⑤ -4

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

20 곡선 $y=-x^3+2x$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선이 점 $(-10,\ a)$를 지날 때, a의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

21 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$ $(x>0)$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는 곡선 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

22 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?[4점]

(가) $f(0)=-3$ (나)모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36　② 38　③ 40
④ 42　⑤ 44

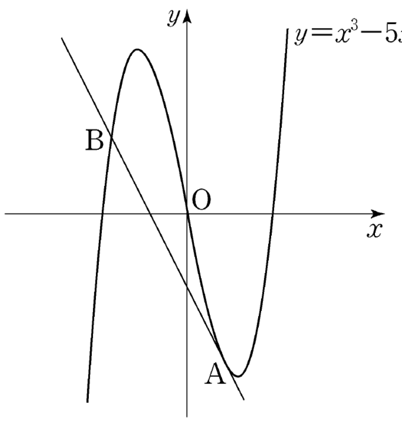
[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

23 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기가 2이다.

$g(x)=x^3f(x)$일 때, $g'(2)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

24 곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $A(1, -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는?[4점][2012년 6월]



① $\sqrt{30}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

25 곡선 $y=x^3-3x^2+x+1$ 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선이 서로 평행하다.

점 A의 x좌표가 3일 때, 점 B에서의 접선의 y절편의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

26 함수 $f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3), & (x<0) \\ x^3-ax, & (x\geq 0) \end{cases}$

의 극댓값이 5일 때, $f(2)$의 값은?(단 a는 상수이다.)[4점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

27 점 $(0, -4)$에서 곡선 $y=x^3-2$에 그은 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, a의 값은?[4점][2011년 9월 평가원]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

28 곡선 $y=x^3-x^2+a$ 위의 점 $(1, a)$에서의 접선이 점 $(0, 12)$를 지날 때, 상수 a의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

29 삼차 함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 M이라 하고, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?[4점]

① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

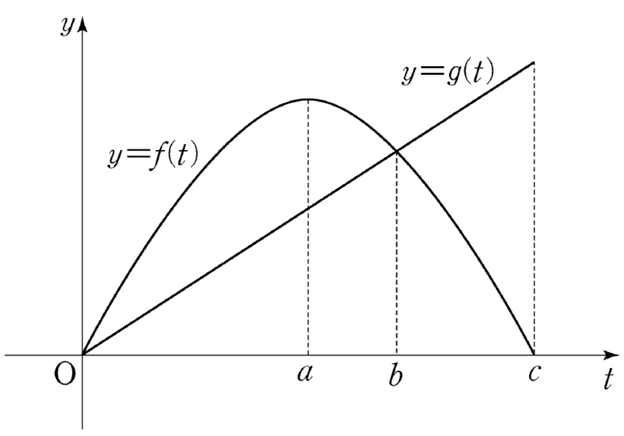
[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

30 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+3ax$의 역함수가 존재하도록 하는 상수 a의 최댓값은?[4점][2011년 9월 평가원]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

31 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 $t(0 \le t \le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이고 $0 \le t \le c$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것?[4점]

[보기]
ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

32 함수 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases} f(x+1), & (x \le 0) \\ f(x-1), & (x>0) \end{cases}$이라 하자.

함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[4점][2011년 9월 평가원]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

33 함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0, 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

34 서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f'(x)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

35 곡선 $y=x^3+2$위의 점 $P(a,\ -6)$에서의 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, 세 수 $a,\ m,\ n$의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

36 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접할 때, 상수 a의 값은?[3점]

① -9　② -7　③ -5
④ -3　⑤ -1

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

37 $x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 함수 $\lvert f(x)\rvert$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(\lvert x\rvert)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)-x^2\lvert x\rvert$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

38 사차 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.[4점]

(가)함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나)함수 $\lvert f(x)-f(1)\rvert$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

39 모든 계수가 정수인 삼차 함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가)모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=5$
(다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 모의평가]

40 함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$는 $x=a$에서 극솟값 b를 가진다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서 접하는 직선을 l이라 할 때, 점 $(a,\ b)$에서 직선 l까지의 거리가 d이다. $90d^2$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

41 양수 a에 대하여 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

42 사차 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.[4점]

㈎모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다. ㈏함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

43 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, 다음 [보기] 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $h(x_1)=h(x_2)$를 만족시키는 서로 다른 두 실수 x_1, x_2가 존재한다. ㄴ. $h(x)$는 $x=a$에서 극소이다. ㄷ. 부등식 $\lvert h(x)\rvert<\frac{1}{100}$의 해는 항상 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 06월 모의평가]

44 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 두 점 $P\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$에서의 두 접선과 x 축으로 둘러싸인 삼각형이 이등변삼각형일 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $a>\sqrt{2}$) [4점]

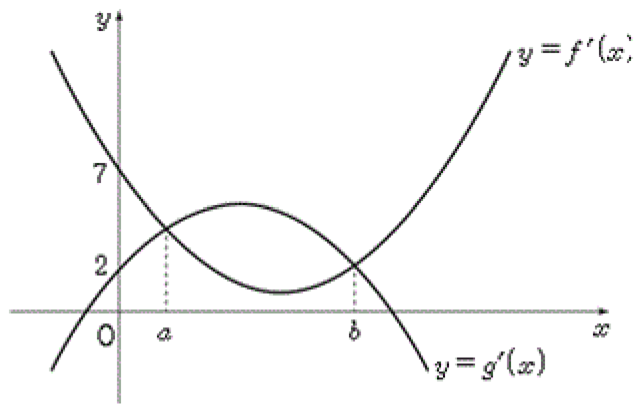
[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

45 그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b\,(0<a<b)$이다.

함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때,

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$) [4점]

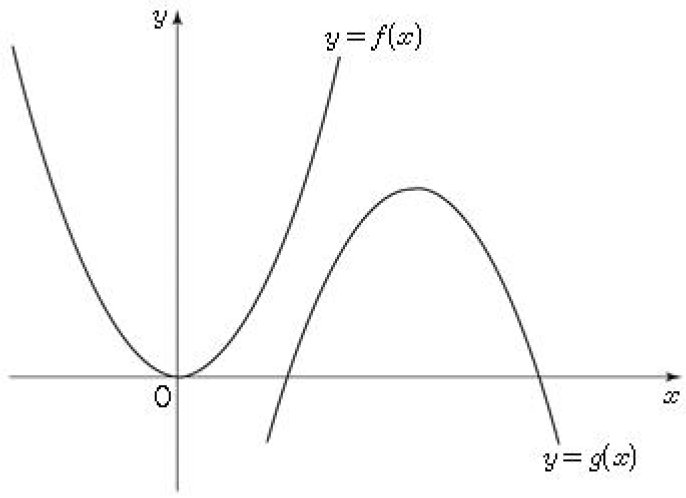


[보 기]
ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

46 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=-(x-3)^2+k\ (k>0)$에 대하여



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(1,\ 1)$에서의 접선을 l이라 하자.

직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점을 Q, 곡선 $y=g(x)$와 x축이 만나는 두 점을 각각 R, S라 할 때, 삼각형 QRS의 넓이는? [4점]

① 4　② $\frac{9}{2}$　③ 5
④ $\frac{11}{2}$　⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2014년 4월 학력평가]

47 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a^2-4a)x+3$이 극값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [3점]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

48 곡선 $y=2x^3+ax+b$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이다. 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값은? [3점]

① 25　② 27　③ 29
④ 31　⑤ 33

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

49 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $P(x,y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이고 함수 $f(x)$의 극솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점][2012년 7월]

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

50 최고차항의 계수가 1인 삼차 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

(가)모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다. (나)함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

51 곡선 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+ax$ 위의 두 점 $(0,f(0))$, $(1,f(1))$에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

52 정수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$이 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

(가)모든 실수 α에 대하여 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$

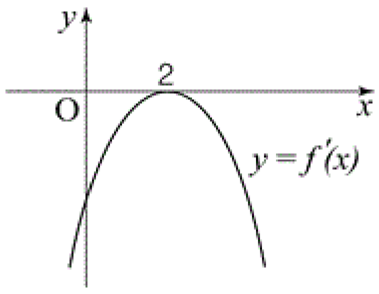
(나) $-6 < f'(1) < -2$

이때, 함수 $y=f(x)$의 극솟값은? [4점][2012년 7월]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

53 그림은 삼차 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다.



함수 $f(x)$에 대한 설명 중 다음에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에 있다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

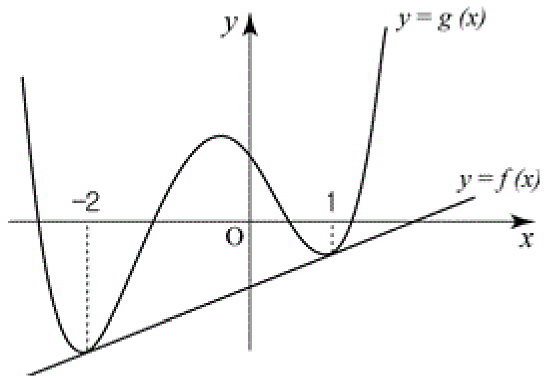
[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

54 곡선 $y=x^3-2x$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S라 할 때, $10S$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

55 그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 $-2, 1$인 두 점에서 접한다.

함수 $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값은?[4점]



① $\frac{81}{16}$　② $\frac{83}{16}$　③ $\frac{85}{16}$
④ $\frac{87}{16}$　⑤ $\frac{89}{16}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

56 함수 $f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값은?[3점]

① $-\frac{5}{2}$　② -2　③ $-\frac{3}{2}$
④ -1　⑤ $-\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

57 모든 실수 x에 대하여 이차 함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=-2$
(나) $f(-x)=f(x)$
(다) $f(f'(x))=f'(f(x))$

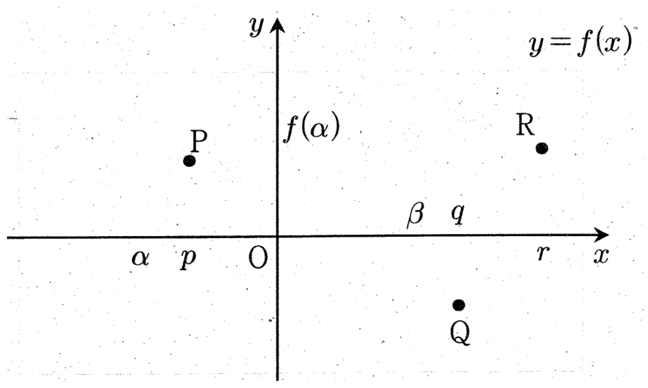
함수 $F(x)=\int f(x)dx$가 감소하는 구간의 길이는?[3점]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

58 최고차항의 계수가 1인 삼차 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=-f(x)$
(나) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ (단, $\alpha<\beta$)



그림과 같이 함수 $y=f(x)$위의 점 $P(p, f(p))$에서의 접선과 $y=f(x)$가 만나는 점을 $Q(q, f(q))$라 하고, $f(x)=f(\alpha)$이고 $x\neq\alpha$인 점을 $R(r, f(r))$라 하자. 이때, 옳은 것만을 에서 있는 대로 고른 것은?(단, $\alpha\le p<0<q\le r$이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $q=-2p$
ㄴ. $\alpha+2r=3\beta$
ㄷ. $\lim\limits_{p\to-0}\dfrac{f(p)}{p}=3\alpha\beta$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

59 삼차 함수 $f(x)=-x^3+3x+1$이 $x=\alpha, x=\beta$에서 극값을 가질 때, 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$를 지나는 직선의 기울기는?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

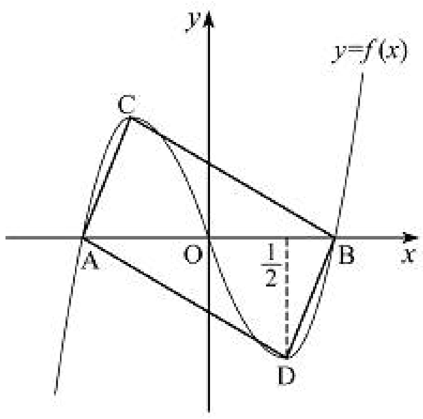
60 직선 $x=a$가 곡선 $f(x)=x^3-ax^2-100x+10$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지날 때, 정수 a의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

61 함수 $f(x)=x^3-3x^2+20$의 극솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

62 그림은 원점 O에 대하여 대칭인 삼차 함수 $f(x)$의 그래프이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $f(x)$의 극대, 극소인 점을 각각 C, D라 하자.



점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 사각형 $ADBC$의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?[3점]

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

63 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$를 만족하고 $h(x)=f(x)+xg(x)$로 정의할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $h(0)=0$
ㄴ. $h'(-x)=h'(x)$
ㄷ. $h(x)$의 이계도함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가질 때, 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근은 적어도 3개이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

64 $0 \le x \le 1$에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

Ⅰ. $1 < f(x) < 2$
Ⅱ. $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$

이때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $0 < x < 1$인 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)-2x=0$의 해가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 한 개 존재한다.
ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} < \int_0^1 f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ

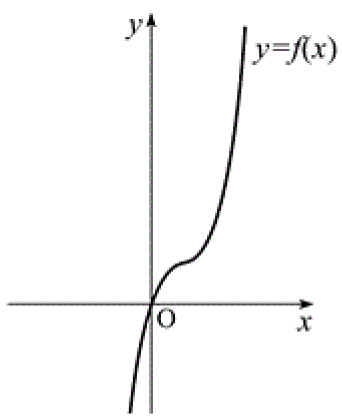
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

65 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$가 $x=1$에서 극대값 0을 가질 때, ab의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

66 그림은 삼차 함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$의 그래프이다.



원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 두 개이다. 두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x좌표의 합을 S라 하자. 이때, $10S$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

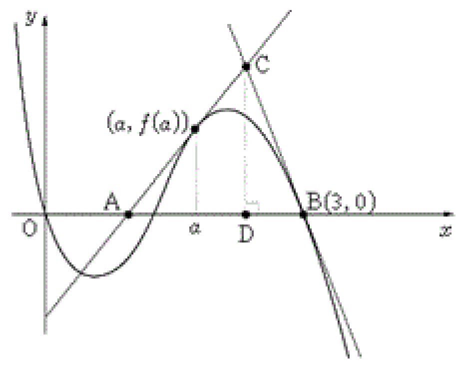
67 [공통]사차 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+1)x^3-ax$가 $x=\alpha, \gamma$에서 극소, $x=\beta$에서 극대일 때, 실수 a의 값의 범위는? (단, $\alpha<0<\beta<\gamma<3$)[4점]

① $-\frac{9}{2}<a<-4$ ② $-4<a<-\frac{7}{2}$ ③ $-\frac{7}{2}<a<-3$

④ $-3<a<-\frac{5}{2}$ ⑤ $-\frac{5}{2}<a<-2$

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

68 그림과 같이 삼차 함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 $B(3, 0)$에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:1$일 때, a의 값들의 곱은?[4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

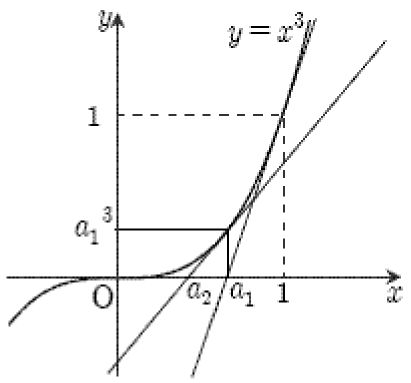
69 원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차 함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x)=f(2-x)$
(나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(x)$의 극댓값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

70 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(1,\,1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_1,\,0)$이라 하자. 점 $(a_1,\,a_1^3)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_2,\,0)$, 점 $(a_2,\,a_2^3)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_3,\,0)$, ?점 $(a_n,\,a_n^3)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_{n+1},\,0)$이라 할 때, a_5의 값은?[4점]

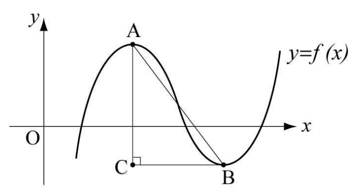


① $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^6$

④ $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ ⑤ $\left(\frac{3}{4}\right)^6$

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

71 삼차 함수 $y=f(x)$는 점 A에서 극대이고 점 B에서 극소이며 극댓값과 극솟값의 차는 8이다. $y=f(x)$의 그래프 밖의 한 점 C에 대하여 $\triangle ABC$의 외심의 좌표가 $(6,\,1)$, $\angle C=90^\circ$, $\overline{AB}=10$일 때, $f'(x)=0$의 두 근의 곱은?(단, $\overline{AC}$는 y축과 평행이다.)[4점]



① 27 ② 30 ③ 33

④ 36 ⑤ 39

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

72 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 구간 $[0,\,a_1]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_2, 구간 $[0,\,a_2]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_3이라고 하자. 이와 같이 계속하여 $a_4,\,a_5,\,\cdots$를 정할 때, 옳은 내용을 [보기]에서 모두 고른 것은?(단, $a_1,\,a_2,\,a_3,\,\cdots$은 양수이다.)[4점]

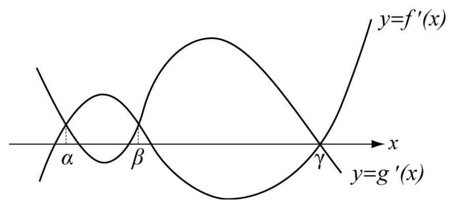
[보기]
ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_n)>f(a_{n+1})$이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $f'(a_n)>f'(a_{n+1})$이다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}f'(a_n)=-3$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

73 그림과 같이 두 곡선 $y=f'(x),\,y=g'(x)$는 x좌표가 $\alpha,\,\beta,\,\gamma$인 점에서 만나고, $h(x)=f(x)-g(x)$의 최솟값이 음수일 때, $y=h(x)$에 대하여 항상 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $h(\alpha)=h(\gamma)<h(\beta)$
ㄴ. $(\beta-\alpha)\{h(\gamma)-h(\beta)\}<(\gamma-\beta)\{h(\beta)-h(\alpha)\}$
ㄷ. $h(x)=0$은 적어도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2004년 5월 학력평가]

74 점 $(1,\ -1)$에서 곡선 $y=x^2-x$에 그은 두 접선의 기울기의 합을 구하시오.[4점]

정답 및 해설

2.도함수의 활용(1)

중단원 기출문제

1) 답 : 2

[해설]

[출제 의도]:미분을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

$y' = 3x^2 - a$ 이므로 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $3-a$ 이다.

따라서, 이 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ 이며 정리하면

$3-a=2$

즉, $a=1$ 이다.

또한, 점 $(1, 1)$ 은 곡선 $y=x^3-x+b$ 위의 점이므로

$1=1^3-1+b$

$b=1$

따라서, $a+b=2$ 이다.

2) 답 : ⑤

[해설]

출제 의도 : 삼차 함수의 그래프와 그 도함수의 그래프를 이용하여 명제의 참, 거짓을 구할 수 있는가?

ㄱ. 조건 (가)에서 $f'(x)=ax(x-k)(a>0)$ 라 하면

구간 $[0, k]$ 에서 $f'(x)\le 0$ 이므로

$\int_0^k f'(x)dx<0$ (참)

ㄴ. 조건 (나)에서 $\int_0^t |f'(x)|dx=f(t)+f(0)$ 의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$|f'(t)|=f'(t)$ ... ㉠

이때, ㉠은 $t>1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하므로

$f'(t)\ge 0(t>1)$

따라서 조건 (가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값, $x=k$ 에서 극솟값을 가지므로

$0<k\le 1$ 이다. (참)

ㄷ. $f'(x)=ax(x-k)=ax^2-akx$ 에서

$\int_0^t |f'(x)|dx$

$=-\int_0^k (ax^2-akx)dx+\int_k^1 (ax^2-akx)dx$

$=-\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2\right]_k^1$

$=-\left(\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}\right)+\left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}-\frac{ak^3}{3}+\frac{ak^3}{2}\right)$

$=\frac{ak^3}{6}+\left(\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{6}\right)$

$=\frac{at^3}{3}-\frac{akt^2}{2}+\frac{ak^3}{3}$ ... ㉠

또한,

$f(x)=\int (ax^2-akx)dx$

$=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+C$ (C 는 적분상수)

라 하면

$f(t)+f(0)=\left(\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+C\right)+C$

$=\frac{a}{3}t^3-\frac{ak}{2}t^2+2C$... ㉡

㉠, ㉡이 같아야 하므로 $C=\frac{ak^3}{6}$

즉, $f(x)=\frac{a}{3}x^3-\frac{ak}{2}x^2+\frac{ak^3}{6}$ 이므로

극솟값은 $f(k)=\frac{ak^3}{3}-\frac{ak^3}{2}+\frac{ak^3}{6}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ , ㄴ , ㄷ이다.

3) 답 : 97

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한과 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

조건 (나)에서 $x\to 2$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 하므로

$f(2)=g(2)$

조건 (가)에서 $x=2$ 를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$ 이므로

$g(2)=8g(2)-7$ 에서 $g(2)=1$

또 조건 (나)에서

$\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$

$=f'(2)-g'(2)=2$

조건 (가)의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

$x=2$ 를 대입하면 $g'(2)=12\times+8f'(2)$

$g'(2)\ =12\times 1+8\{g'(2)+2\}\ =8g'(2)+28$

에서 $g'(2)=-4$

따라서 접선의 방정식은 $y-1=-4(x-2)$, $y=-4x+9$

이므로 $a^2+b^2=(-4)^2+9^2=97$

4) 답 : 16

[해설]

$g(x)=(x^3+2)f(x)$ 이므로

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+2)f'(x)$

$g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 24 를 가지므로

$g(1)=24$, $g'(1)=0$ 이다.

$g(1)=(1^3+2)f(1)=3f(1)=24$,

$\therefore\ f(1)=8$

$g'(1)=3\cdot 1^2f(1)+(1^3+2)f'(1)=3\cdot 8+3f'(1)=0$,

$\therefore\ f'(1)=-8$

$\therefore\ f(1)-f'(1)=8-(-8)=16$

5) 답 : ①

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+9x+3$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+9$

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+b$이므로

$f'(1)=2$이다.

$3+2a+9=2$에서 $2a=-10$

$\therefore\ a=-5$

또, $f(1)=2+b$에서 $1-5+9+3=2+b$

$\therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=-5+6=1$

6) 답 : ②

[해설]

$f(x)=x^3-3x+a$에 대하여

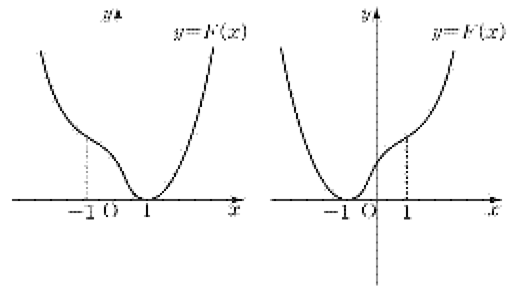
$F(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$

이때, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$에서

$F'(x)=f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=1$일 때 극값을 가진다.

한편, 함수 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$y=F(x)$의 그래프의 개형이 다음 두 그래프 중 하나와 같아야 한다.



따라서 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면

$f(-1)\le 0$ 또는 $f(1)\ge 0$이어야 하므로

$f(-1)\le 0$에서 $a\le -2$, $f(1)\ge 0$에서 $a\ge 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

[다른 풀이]

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$이므로 $F'(x)=f(x)$, $F(0)=0$

$F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $F'(x)$,

즉 $f(x)$의 부호가 오직 한 번 변해야 한다.

따라서 삼차 함수 $f(x)$가 x축과 오직 한 번 만나거나

x축과 접해야 한다.

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로

부등식 $f(1)\times f(-1)\ge 0$이 성립해야 한다.

$(-2+a)(2+a)\ge 0$

$\therefore\ a\le -2$ 또는 $a\ge 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다.

7) 답 : 12

[해설]

$y'=-3x^2+4$이므로 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는

$y'_{x=1}=1$

그러므로 접선의 방정식은 $y-3=1\cdot(x-1)$

$\therefore\ y=x+2$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로 $\therefore\ 10a+b=12$

8) 답 : 14

[해설]

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$\therefore\ x=-2$에서 극대값 $f(-2)=16$을 갖는다.

$\therefore\ a+b=-2+16=14$

9) 답 : ③

[해설]

$f'(x)=a(x-1)(x-3)\,(a>0)$에서

$f'(x)=ax^2-4ax+3a$

$\therefore\ f(x)=\dfrac{a}{3}x^3-2ax^2+3ax+b$

$f(1)=1$, $f(3)=-3$, $f(0)=-3$에서

$f(1)=\dfrac{a}{3}-2a+3a+b=1$

$f(3)=9a-18a+9a+b=-3$

$f(0)=b=-3$

즉, 세 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-3$

즉, $\int_0^3 |f'(x)|dx=\int_0^3 |3(x-1)(x-3)|dx$

$=3\int_0^1 (x-1)(x-3)dx-3\int_1^3 (x-1)(x-3)dx$

$=3\left[\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_0^1-3\left[\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^3$

$=3\left(\dfrac{4}{3}\right)-3\left(\dfrac{26}{3}-16+6\right)=4+4=8$

10) 답 : ④

[해설]

$AC=\dfrac{f(x)}{x}$ 로부터

$AC'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

$\dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}}{x}=\dfrac{MC-AC}{x}$

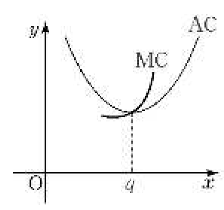
주어진 AC의 그래프가 $x=q$에서 극솟값을 가지므로

(ⅰ) $x>q$일 때, $AC'>0 \because\ MC>AC$

(ⅱ) $x=q$일 때, $AC'=0 \because\ MC=AC$

(ⅲ) $x<q$일 때, $AC'<0 \because\ MC<AC$

위 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)으로부터 $x=q$근방에서 AC와 MC의 그래프의 개형을 비교하면 위 그림과 같다.



11) 답 : ④

[해설]

$f(a)=f'(a)=0$ 이고 $f(x)$는 삼차 함수이므로

$f(x)=(x-a)^2(Px+Q)$ 꼴로 나타낼 수 있다.

또한 $f(b)=0$ 이므로

$Pb+Q=0$ ∴ $Q=-Pb$ ⋯①

한편 $f'(c)=0$ 이므로

$2(c-a)(Pc+Q)+(c-a)^2P=0$

$2(Pc+Q)+(c-a)P=0$ ⋯②

① 을 ②에 대입하고 정리하면

$P(3c-2b-a)=0$

$\therefore\ c=\dfrac{a+2b}{3}$

12) 답 : ①

[해설]

삼차 함수 $y=x^3+ax$의 그래프가 원점을 중심으로 45° 이동하여 실수 전체에서 정의된 어떤 함수가 되려면,

아래의 그림 1과 같이 $y=x$ 그래프의 위아래로 교차하면 안된다.

즉 그림 2와 같이 $y=x$의 그래프가 $x=0$에서 주어진

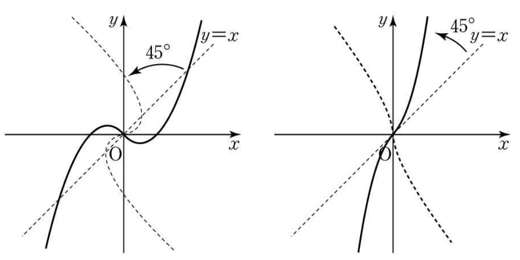
삼차 함수 $y=x^3+ax$의 접선하거나, $x=0$을 기준으로 양의 방향으로는

주어진 삼차 함수의 그래프가 위에 있고, 음의 방향으로는 주어진 삼차 함수의

그래프가 아래에 있으면 된다.

따라서,

$f'(x)=3x^2+a$에서 $f'(0)=a\ge 1$이다.



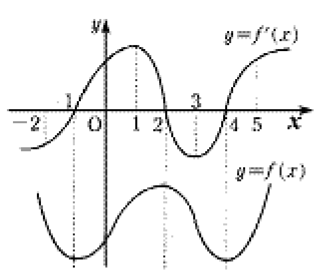
13) 답 : ③

[해설]

$4<x<5$에서 $f'(x)>0$ 이므로

$4<x<5$에서 $f(x)$는 증가한다.

$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



14) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 미분 가능한 함수의 극점에 관한 문제이다.

미분 가능한 함수는 극점에서 도함수 값이 0이므로

$f(x)=x^3-ax+6$ 이므로 $f'(x)=3x^2-a$ 이다.

$f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $f'(1)=0$이다.

따라서 $3-a=0,\ \ a=3$

15) 답 : ④

[해설]

$n\ge 2$, $f(x)$가 역함수를 가지려면 일대일 대응이어야 하므로

$f'(x)\ge 0$이다.

$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax$

$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+e^{x+1}\{2x+(n-2)\}+a$

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a\ldots$㉠

$y=e^{x+1}(x^2+nx+1)$의 그래프에서 생각해보면

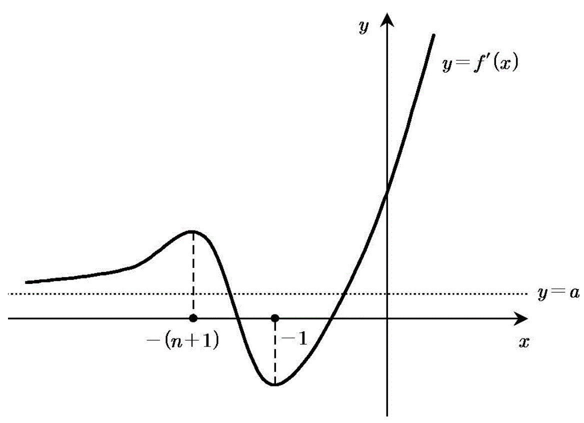
$y'=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$

$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$

$=e^{x+1}(x+1)(x+n+1)\ (n\ge 2)$

이므로 증감표에 의해 $x=-1$에서 극소이면 최소이다.

$f'(x)$는 $x=-1$에서 극소이며 최솟값이므로 $f'(x)$의 그래프를 그려보면



㉠에서

$f'(-1)=e^0\{(-1)^2+n(-1)+1\}+a=2-n+a\ge 0$

$\therefore\ \ a\ge n-2$

따라서 a의 최솟값은 $n-2$

$\therefore\ g(n)=n-2$

$1\le g(n)\le 8 \Leftrightarrow 1\le n-2\le 8 \Leftrightarrow 3\le n\le 10$

따라서 n의 모든 값의 합은

$\sum_{k=3}^{10}k=\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{2}k=55-3=52$

16) 답 : 3

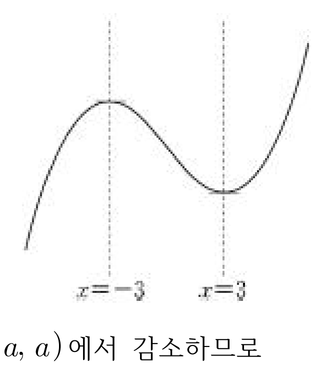
[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-9x+3$

$\therefore\ f'(x)=x^2-9$

$=(x+3)(x-3)$

이므로 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.



$(-a,\ a)$에서 감소하므로

$-a\ge -3$이고 $a\le 3$이다.

$\therefore\ a\le 3$

17) 답 : ③

[해설]

풀이

모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이므로

$x>-n$일 때 $f(x)\geq 0$

$x<n$일 때 $f(x)\leq 0$이다.

삼차 함수 $f(x)$는 $x=-n$에서 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to -n+} f(x)\geq 0$

$\lim_{x\to -n-} f(x)\leq 0$

$\therefore \lim_{x\to -n} f(x)=0$

삼차 함수 $f(x)$는 $x=-n$에서 연속이므로

$f(-n)=0$ ⋯ ①

조건 (가)와 식 ①에서

$f(x)=(x+n)(x-n)(x-k)$ (단, k는 상수)

모든 실수 x에 대하여 $(x+n)f(x)\geq 0$이므로

$(x+n)^2(x-n)(x-k)\geq 0$

따라서 $k=n$일 때 성립한다.

$\therefore f(x)=(x-n)^2(x+n)$

$f'(x)=(x-n)(3x+n)$이므로

$x=-\dfrac{n}{3}$일 때 극댓값을 가진다.

$a_n=f\left(-\dfrac{n}{3}\right)=\left(-\dfrac{4n}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}n=32\cdot\left(\dfrac{n}{3}\right)^3$

따라서 a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은 3이다.

18) 답 : ①

[해설]

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 극값의 곱이 -4이므로

$f(0)\times f(2)=a(a-4)=-4$

$a^2-4a+4=0$, $(a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

19) 답 : ②

[해설]

극댓값을 구하기 위하여 주어진 식을 미분하여 정리해보면

$f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4)$이다.

이를 증감표를 이용하여 극댓값을 구해보면

x		2		4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	증가		감소		증가
		극대		극소	

$x=2$일 때 극댓값이다.

따라서 $f(2)=8-36+48+a=10$이다.

$a=-10$

20) 답 : 12

[해설]

주어진 식의 $(1,1)$에서 접선의 방정식은 $y=-x+2$이다.

따라서 주어진 점을 대입하여 보면 $a=12$이다.

21) 답 : 5

[해설]

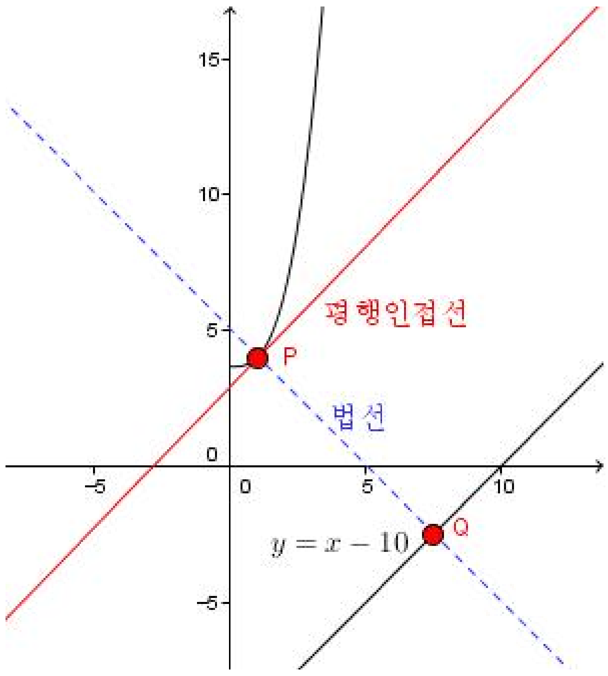
$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{3}$ $(x>0)$에서 $y'=x^2$

또한 직선 $y=x-10$은 기울기가 1이므로 $x^2=1$에서 $x=1$

따라서 $y=\dfrac{1}{3}+\dfrac{11}{3}=4$이므로 점 P의 좌표는 $(1,4)$이다.

$\therefore$ $a+b=5$

[MIM EDU 자세한 풀이]



곡선 위의 점 $P(a,b)$라면 $b=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{3}$ ...㉮

점 P에서 직선 $y=x-10$까지 거리가 최소이면

평행인 접선의 기울기가 1인 접점이면 되므로

$y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{3}$ $(x>0)$에서 $y'=x^2$

또한 접선의 기울기가 1이므로 $x^2=1$에서 $x=1=a$

따라서 ㉮에 대입하면 $b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{11}{3}=4$이므로

점 P의 좌표는 $(1,4)$이다.

$\therefore$ $a+b=5$

[MIM EDU 변형 문제]

곡선 $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{11}{3}$ $(x>0)$ 위의 점 A가 있다.

이때, 점 P가 원점 O와 점 A사이의 곡선 위를 움직이고,

점 P와 직선 $x-y-10=0$ 사이의 거리를 최소가 되게 하는

곡선 위의 점 A의 좌표를 (a,b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

[MIM EDU 발전 문제]

곡선 $y=x^3$ $(x>0)$ 위의 점 P가 있다.

두 점 $A(0,-3)$, $B(1,0)$에 대하여 삼각형 APB의 넓이가 최소가 되게 하는 P의 좌표를 (a,b)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

정답 및 해설

22) 답 : ①

[해설]

$g(x)=6x-6$, $h(x)=2x^3-2$라 하면

$h(x)$의 $x=1$에서의 접선의 방정식이 $y=g(x)$이므로

$f(x)$는 3차 함수이다.

또한 조건 (나)에서 $f(x)$는 $(1, 0)$, $(0, -3)$을 지나는 최고차항의 계수가 1인 3차 함수이므로 $f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$라 놓을 수 있다.

따라서 $f'(1)=6$에서 $a+b+1=6$이고 $f(0)=-3$에서 $b=3$이고 $a=2$이다. 따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$이다.

구하는 답은 $f(3)=36$이다.

23) 답 : 28

[해설]

우선 주어진 조건으로부터 $f(2)=1$, $f'(2)=2$이다.

$g(x)$를 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$이고 $x=2$이면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)=12\times1+8\times2=28$

이다.

24) 답 : ④

[해설]

곡선 $y=f(x)=x^3-5x$, 접선은 $g(x)$라 하면

$f'(1)=-2$이므로 $g(x)=-2x-2$이다.

$f(x)$와 $g(x)$를 연립하면 $(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore B(-2, 2)$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

25) 답 : ②

[해설]

[해설] y를 x에 대하여 미분하면

$y'=3x^2-6x+1$이다. 따라서 점 A에서의 접선의 기울기는

$y'=3x^2-6x+1|_{x=3}=10$이다. 또,

$3x^2-6x+1=10$,

$3x^2-6x-9=0$,

$x^2-2x-3=0$

$\therefore x=-1, 3$

즉, 점 B의 x좌표는 -1이다.

따라서 점 B에서의 접선의 방정식은 $y-(-4)=10(x-(-1))$

$y=10x+6$이다.

곧, y절편은 6이다.

26) 답 : ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases} a(3x-x^3), & (x<0) \\ x^3-ax, & (x\ge0) \end{cases}$에서

$f'(x)=\begin{cases} a(3-3x^2), & (x<0) \\ 3x^2-a, & (x>0) \end{cases}$이다.

a의 부호에 따라서 도함수의 그래프가 달라지기 때문에 a의 범위를 나누어야 한다.

(i) $a=0$일 때는 $f'(x)=\begin{cases} 0, & (x<0) \\ 3x^2, & (x\ge0) \end{cases}$이 되어서 $f(x)$의 극댓값이 발생하지 않는다.

(ii) $a>0$일 때는 $x=-1$, $\sqrt{\dfrac{a}{3}}$에서 $f(x)$가 극솟값을 가지고 $x=0$에서 극댓값을 가지지만 그 값이 0이므로 문제의 조건을 만족시키지 못한다.

(iii) $a<0$일 때는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.

이상에서 $f(-1)=a(-3+1)=5$, $a=-\dfrac{5}{2}$이다.

$\therefore f(2)=2^3+\dfrac{5}{2}\cdot2=13$

27) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가 ?

$y'=3x^2$이므로 접점의 좌표를 A (a, a^3-2)라 하면

점 A에서의 접선의 방정식은 $y-\alpha^3+2=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3-2$

이 접선이 점(0, -4)를 지나야 하므로

$-4=-2\alpha^3-2$

$\therefore \alpha=-1$

따라서 접선의 방정식은 $y=3x-4$이므로 x절편은 $a=\dfrac{4}{3}$

28) 답 : 13

[해설]

해설

$y'=3x^2-2x$에서 $x=1$일 때, $y'=1$

기울기 1이고 접점 $(1, a)$에서의 접선의 방정식은

$y=x-1+a$

따라서

접선 $y=x-1+a$위의 점 $(0, 12)$이므로

$12=0-1+a$

$\therefore a=13$

29) 답 : ④

[해설]

해설

주어진 삼차 함수

$f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 실수 전체 구간에서 증가하도록 하려면,

도함수인 $f'(x)$가 $f'(x)=3x^2+2ax+2a\ge0$을 모든 실수에 대해 항상 만족해야 한다.

그러므로 판별식을 이용하면,

$\dfrac{D}{4}=a^2-6a\le0$이 된다.

그러므로, $0\le a\le6$이 된다.

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 0이므로, 구하는 $M-m=6$

30) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼차 함수의 역함수가 존재할 조건을 구할 수 있는가 ?

삼차 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 필요충분조건은 이차방정식

$f'(x)=x^2-2ax+3a=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않는 것이다.

따라서 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3a\le 0$이므로

$0\le a\le 3$이다.

따라서 상수 a의 최댓값은 3이다.

31) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]속도와 거리의 관계를 추론할 수 있는가 ?

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^a f(t)dt$이고,

물체 B의 높이는 $\int_0^a g(t)dt$이다.

이때, 주어진 그림에서

$\int_0^a f(t)dt\ >\ \int_0^a g(t)dt$이므로

A가 B보다 높은 위치에 있다.(참)

ㄴ. $0\le t\le b$일 때 $f(t)-g(t)\ge 0$이므로

시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커진다.

또, $b<t\le c$일 때 $f(t)-g(t)<0$이므로

시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 줄어든다.

따라서 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.(참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt=\int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때,

물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

32) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가 ?

함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$이 성립해야 한다.

이때 이차 함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to 0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0-}\{f(x+1)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$,

$\lim_{x\to 0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to 0}\{f(x-1)\}^2=\{f(-1)\}^2=(a+2)^2$,

$\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$이므로

$a^2=(2+a)^2$ 즉, $4a+4=0$이어야 한다.

$\therefore\ a=-1$

33) 답 : 13

[해설]

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$이므로

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$

$x=0$일 때 $y=g(t)$이므로

$g(t)-\{t^3-(a+2)t^2+at\}=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(-t)$

$\therefore\ g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$이므로

이차함수 $g'(t)$가 $0<t<5$에서 $g'(t)>0$이려면

$g'(0)\ge 0,\ g'(5)\ge 0$이어야 한다.

$g'(0)=0$이고,

$g'(5)=-150+10(a+2)\ge 0$이므로

$a\ge 13$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 13이다.

34) 답 : ⑤

[해설]

사차 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=0, f(\beta)=0$이다.

ㄱ. 다항식 $f(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 일반적으로 다음과 같다.

$R(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$

여기서 $f'(\alpha)=0, f(\alpha)=0$이면 $R(x)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.(참)

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0 \Leftrightarrow f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$

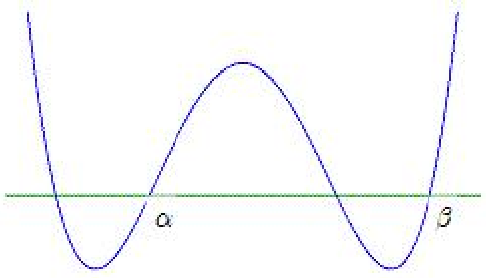
$f'(\alpha)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 이중근 이상의 α와 다른 실근 β를 갖기 때문에

방정식 $f(x)=0$이 허근을 가지면 반드시 그 켤레 복소수도 근이 되므로

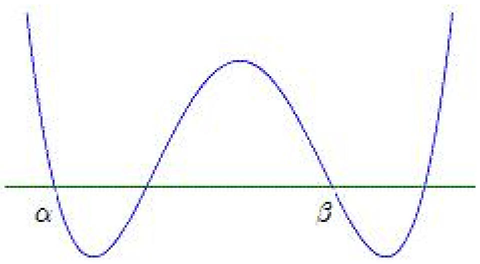
근이 5개 이상이 되므로 사차 방정식이라는 조건에 모순이 된다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.(참)

ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0 \Leftrightarrow f'(\alpha)>0, f'(\beta)>0$



또는 $f'(\alpha)<0, f'(\beta)<0$



즉, $x=\alpha, \beta$에서 미분계수의 부호가 같으므로 이 조건을 만족하는 사차 함수

$y=f(x)$를 그리면 반드시 x축과 서로 다른 4개의 점에서 만나게 되므로

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.(참)

35) 답 : 28

[해설]

점 $P(a, -6)$는 $y=x^3+2$위의 점이므로 $a=-2$

점 $P(-2, -6)$에서의 접선의 기울기는 $y'_{x=-2}=12=m$

따라서 접선의 방정식은 $y=12x+18$이다.

$\therefore\ a=-2,\ m=12,\ n=18$

$\therefore\ a+m+n=28$

36) 답 : ②

[해설]

$y'_{x=2}=2x_{\ x=-2}=-4$이므로

접선의 방정식은 $y=-4(x+2)+4$

$\therefore\ y=-4x-4\ \cdots①$

직선 ①과 삼차 함수 $y=x^2+ax-2$의 교점의 x좌표를 t라 하고 하면

$t^3+at-2=-4t-4\ \cdots②$

$3t^2+a=-4\ \cdots③$을 만족해야 한다.

② 과 ③을 연립하면

$t^3+(-3t^2)t+2=0\ (\because\ a+4=-3t^2)$

$\therefore\ t^3=1$

$\therefore\ t=1$

$\therefore\ a=-3-4=-7$

37) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ.[반례] $f(x)=-x^2$ (거짓)

$x=0$에서 $y=f(x)$가 극댓값을 충분히 작은 양수 h에 대하여 $f'(-h)>0\ f'(h)<0$임을 알 수 있다.

ㄴ. $f(|x|)=\begin{cases} f(-x), & (x<0) \\ f(x), & (x\geq 0) \end{cases}$

$f'(|x|)=\begin{cases} -f'(-x), & (x<0) \\ f'(x), & (x>0) \end{cases}$

$x=-h$일 때, $=-f'(-(-h))=-f'(h)>0$

$x=h$일 때, $f'(h)<0$

따라서, $x=0$에서 극대(참)

ㄷ. $g(x)=f_{(x)}-x^2|x|$라고 하면

$g(x)=\begin{cases} f(x)+x^3, & (x<0) \\ f(x)-x^2, & (x\geq 0) \end{cases}$

$g'(x)=\begin{cases} f'(x)+3x^2, & (x<0) \\ f'(x)-3x^2, & (x>0) \end{cases}$

$g'(-h)=f'(-h)+3h^2>0$

$g'(h)=f'(h)-3h^2<0$

따라서 $x=0$에서 극대(참)

38) 답 : 12

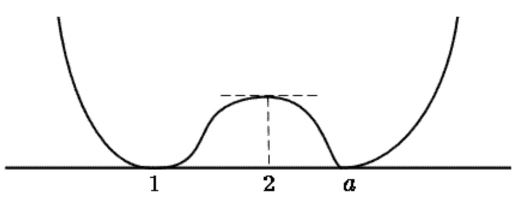
[해설]

$g(x)=f(x)-f(1)$이라 하면

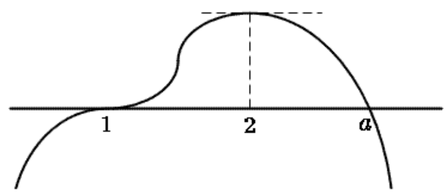
$g(1)=g'(1)=0,\ g'(2)=0$

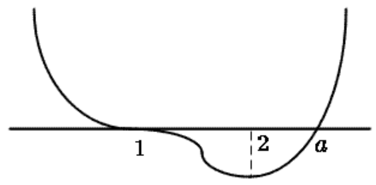
$y=|g(x)|$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.

따라서㈏의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$의 그래프를 그려보면 아래그림과 같다.



$y=g(x)$의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.





$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)\ (a\neq 0)$

$\dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{48a}{4a}=12$

39) 답 : 32

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 정수)

에서 기함수 조건($\because$ ㈎)때문에

$b=d=0$

따라서, $f(x)=ax^3+cx$이다.

㈏에서 $f(1)=a+c=5\ldots①$

또한㈐에서

$1<3a+c<7$

① 에서 $c=5-a$로 두면

$1<3a+5-a<7$

$-2<a<1$

$\therefore$ 정수 a는 -1과 0인데

삼차 함수이므로 $a=-1$

또한, $c=6$

$\therefore\ f(x)=-x^3+6x$

미분하면

$f'(x)=-3x^2+6=0$

$x=\sqrt{2}$에서 극댓값을 가지므로

$m^2=\{f(\sqrt{2})\}^2=(4\sqrt{2})^2=32$

40) 답 : 16

[해설]

ⅰ) $f'(x)=x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=3$에서 극솟값을 가진다.

$f(3)=\dfrac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3=-9$

$\therefore\ a=3,\ b=-9$

ⅱ)점 $(2,\ f(2))$에서의 접선은

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y=-3x-\dfrac{4}{3}$

$9x+3y+4=0$과 점(3, -9)사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|27-27+4|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{90}}$

$\therefore\ 90d^2=90\times\dfrac{16}{90}=16$

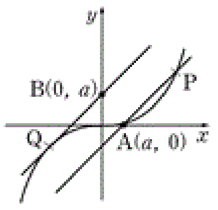
41) 답 : 20

[해설]

$y=3x^3$ 은 기함수이므로 같은 기울기를 가지는 접점 $P,\ Q$는 원점 대칭이므로

$P(t,\ 3t^3)$ 이면 $Q(-t,\ -3t^3)$ 이다.

점 P에서의 접선의 방정식은



$y=9t^2(x-t)+3t^3=9t^2x-6t^3 \cdots ①$

① 이 점 $A(a,\ 0)$을 지나므로

$0=9t^2a-6t^3 \cdots ②$

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y=9t^2(x+t)-3t^3=9t^2x+6t^3 \cdots ③$

③ 이 점 $B(0,\ a)$를 지나므로

$a=6t^3 \cdots ④$

② , ④에서 $9t^2=1$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{3}$

$a=6\times\dfrac{1}{27}=\dfrac{2}{9}$

$\therefore\ 90a=90\times\dfrac{1}{9}=20$

42) 답 : 15

[해설]

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$

(가) $f(-x)=f(x)$ 이므로

$x^4-ax^3+bx^2-cx+6=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ 에서

$a=0,\ c=0$

(나) $f'(x)=4x^3+2bx=2x(2x^2+b)=0$ 에서

$x^2=-\dfrac{b}{2},\ x=\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2}}$ ($b<0$)일 때,

극솟값 -10을 갖는다.

$f\left(\pm\sqrt{-\dfrac{b}{2}}\right)=\dfrac{b^2}{4}+b\left(-\dfrac{b}{2}\right)+6=-10$

$\therefore\ -\dfrac{b^2}{4}=-16$ 에서 $b^2=64$

$b<0$ 이므로 $b=-8$

따라서, $f(x)=x^4-8x^2+6$ 에서

$f(3)=81-72+6=15$

43) 답 : ④

[해설]

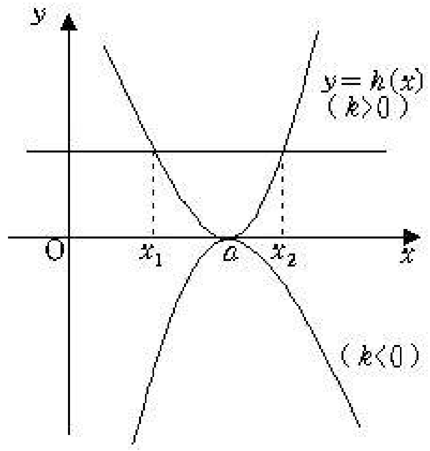
함수 $y=g(x)$가 이차 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 접선의 방정식이므로

방정식 $f(x)=g(x)$는 $x=a$인 중근을 갖는다.

그러므로, $h(x)=f(x)-g(x)=k(x-a)^2(k\neq 0)$라 두면

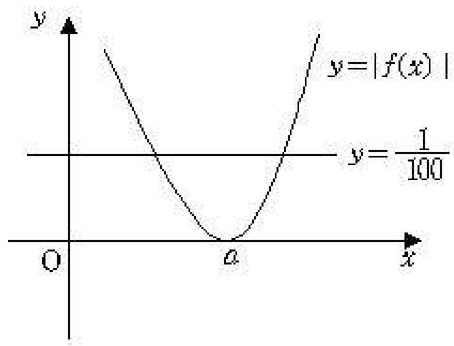
ㄱ. 오른편 그림에서

$h(x_1)=h(x_2)$를 만족시키는 서로 다른 두 실수 $x_1,\ x_2$가 존재한다.



ㄴ. $h(x)$는 $x=a$에서 극대인지 극소인지 알 수 없음.

ㄷ. 오른편 그림에서 부등식 $|h(x)|<\dfrac{1}{100}$ 의 해는 항상 존재한다.



1

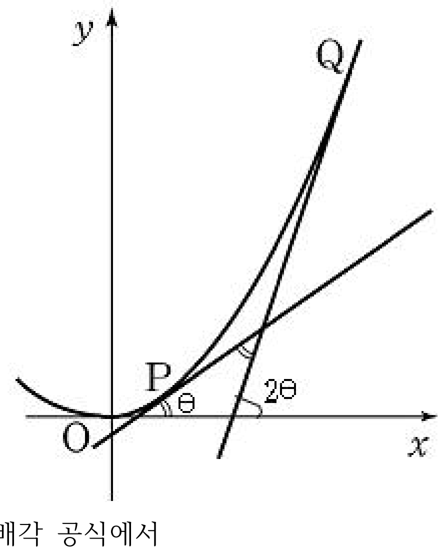
44) 답 : 32

[해설]

아래 그림에서

점 P 에서 접선의 기울기는 $y'_{x=\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\tan\theta$

점 Q 에서 접선의 기울기는 $y'_{x=a}=\dfrac{1}{2}a=\tan 2\theta$ 이다.



배각 공식에서

$\dfrac{1}{2}a=\tan 2\theta\ =\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{\dfrac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

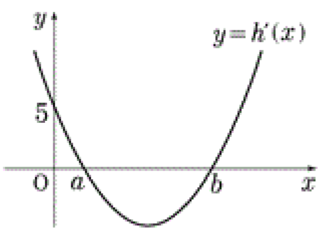
$\therefore\ a=4\sqrt{2}\ \therefore\ a^2=32$

45) 답 : ⑤

[해설]

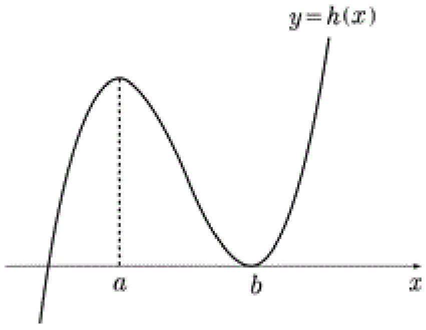
[출제 의도] 도함수를 활용하여 추론하기

함수 $y=h'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ. $h(b)=0$일 때, 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. 함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 열린구간 (α, β)에서

미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)$를

만족시키는 γ가 열린구간 (α, β)에 존재한다.

열린구간 $(0, b)$에 있는 모든 실수 x에 대하여 $h'(x)<5$ 이므로

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(\gamma)<5$

$h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

46) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 접선의 방정식 이해하기

$f'(x)=2x$이고 $f'(1)=2$이므로

점 $P(1,\ 1)$에서의 접선 l의 방정식은 $y=2x-1$

접점 Q의 좌표를 (a, b)라 하면 $b=2a-1$

직선 l에 곡선 $y=g(x)$가 접하므로

$g'(x)=-2x+6$

$g'(a)=-2a+6=2$

$a=2$, $b=3$이므로 점 $Q(2,\ 3)$

$g(2)=3$이므로 $k=4$

원점으로부터 가까운 점을 R라 하면

$R(1,\ 0)$, $S(5,\ 0)$

따라서 삼각형 QRS의 넓이는 6

47) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 함수의 극대, 극소 이해하기

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=3x^2+2ax+(a^2-4a)=0$이 서로 다른두 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0 \Leftrightarrow 2a^2-12a<0$$

$0<a<6$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5

따라서 주어진 함수가 극값을 갖도록 하는 정수 a의 개수는 5

48) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 접선의 방정식 이해하기

곡선이 $(1, 1)$을 지나므로 $a+b=-1$

$f'(x)=6x^2+a$이고 $f'(1)=2$ 이므로 $6+a=2$

$a=-4$, $b=3$

따라서 $a^2+b^2=25$

49) 답 : 35

[해설]

[출제 의도] 함수의 극댓값과 극솟값 구하기

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f(x)=x^3-12x+C$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(2)=8-24+C=3$ ∴ $C=19$

극댓값은 $f(-2)=35$

50) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로

$a=0$

따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고,

조건 (나)에서 $f'(1)=0$이고 $f(1)=0$이므로

$b=-3,\ c=2$

따라서 $f(x)$의 극댓값 $f(-1)=4$

51) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 접선의 기울기를 이해한다.

$f'(x)=2x^2+a$에서 $f'(0)=a,\ f'(1)=2+a$

그러므로 $a(2+a)=-1,\ (a+1)^2=0$

따라서 $a=-1$

52) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 도함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$f(x)=x^4+bx^2+10$

$f'(x)=4x^3+2bx,\ f'(1)=4+2b$ 이므로

$-6<4+2b<-2$이며 정리하면 $-10<2b<-6$이고

$-5<b<-3$ 이므로 $b=-4$

$f(x)=x^4-4x^2+10$

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=6$

53) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $f'(0)<0$이므로 $x=0$에서 감소상태(참)

ㄴ. 극댓값은 존재하지 않는다.(거짓)

ㄷ. 모든 실수에 대하여 함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다.(참)

54) 답 : 128

[해설]

$y'=3x^2-2$이므로

곡선 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선의 기울기는 10이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=10(x-2)$이며 정리하면

$y=10x-16$ ...①

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 16\cdot \dfrac{8}{5}=\dfrac{64}{5}$

$\therefore\ 10S=128$

55) 답 : ①

[해설]

$h(x)=g(x)-f(x)=(x+2)^2(x-1)^2$

$h'(x)=2(x+2)(x-1)(2x+1)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{81}{16}$

56) 답 : ①

[해설]

(1) $x\geq 2a$일 때,

$f'(x)=3x^2+12x+15>0$이므로

함수 $f(x)$는 증가한다.

(2) $x\leq 2a$일 때,

$f'(x)=3(x+5)(x-1)$이므로

함수 $f(x)$가 증가하려면

$2a\leq -5$,

$a\leq -\dfrac{5}{2}$

따라서 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{5}{2}$이다.

57) 답 : ①

[해설]

조건(나)에 의하여 $f(x)=ax^2+b$라 하면

$f(0)=-2$이므로 $b=-2$

$f(x)=ax^2-2$, $f'(x)=2ax$

$f(f'(x))=f'(f(x))$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2$이다.

$F(x)$가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x)<0$

즉, $f(x)<0$을 만족하는 구간이므로

$\dfrac{1}{2}x^2-2<0,\ -2<x<2$

$\therefore$ 감소하는 구간의 길이는 4

58) 답 : ⑤

[해설]

삼차 함수 $f(x)$는 원점대칭이므로

$f(x)=x^3+ax$, 접선은 $g(x)=bx+c$라 놓을 수 있다.

ㄱ. $f(x)-g(x)=x^3+(a-b)x-c$의 이차항의 계수가 0이므로

$f(x)-g(x)=0$의 세 근 p, q, r의 합은 0이다.

즉, $2p+q=0$이므로

$q=-2p$이다.(참)

ㄴ. $y=f(x)$는 원점대칭이므로 $\beta=-\alpha$이고, $p=\alpha$인 경우를 생각하면,

ㄱ에 의해 $q=r=-2\alpha$이므로 $\alpha+2\gamma=3\beta$이다.(참)

ㄷ. $f(0)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{p\to -0}\frac{f(p)}{p}=\lim_{p\to -0}\frac{f(p)-f(0)}{p}=f'(0)$이고,

$f'(x)=3x^2+a=3(x-\alpha)(x-\beta)$에서

$f'(0)=3\alpha\beta$이므로 $\displaystyle\lim_{p\to -0}\frac{f(p)}{p}=3\alpha\beta$이다.(참)

59) 답 : ②

[해설]

$f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -1, $x=1$에서 극댓값 3을 갖는다.

따라서 구하는 직선의 기울기는 2이다.

60) 답 : 19

[해설]

[출제 의도]함수의 극대, 극소의 개념 이해하기

$f(x)=x^3-ax^2-100x+10$이면

$f'(x)=3x^2-2ax-100$

$f'(a)=3a^2-2a^2-100<0$

$-10<a<10$이므로 정수의 개수는 19개

61) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]도함수를 활용하여 극솟값 계산하기

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=16$을 가진다.

62) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]삼차 함수의 극댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=ax^3+bx$로 놓으면

$f'(x) = 3ax^2 + b = 3a\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$ $\therefore$ $b = -\frac{3a}{4}$

$f(x) = ax^3 - \frac{3a}{4}x = ax\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\triangle ACB = \frac{1}{2}\square ADBC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times$ (극댓값) $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 극댓값은 1이다.

63) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]원점대칭과 y축 대칭인 함수의 성질 이해하기

$h(x) = f(x) + xg(x)$에서

$h(-x) = f(-x) - xg(-x)$
$= -f(x) - xg(x)$
$= -(f(x) + xg(x))$
$= -h(x)$

ㄱ. $h(x)$는 원점 대칭이므로 $h(0) = 0$ (참)

ㄴ. $h(-x) = -h(x)$을 미분하면

$-h'(-x) = -h'(x)$

$h'(-x) = h'(x)$ (참)

ㄷ. $h''(-x) = -h''(x)$이므로 $h''(x)$는 원점대칭, $h''(x)$가 $x = 1$에서 극댓값 1을 가지면 $x = -1$에서 극솟값 -1을 가진다.

따라서 $h''(x) - x = 0$는 적어도 3개의 실근을 가진다.(참)

64) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]증가함수의 성질 이해하기

ㄱ. 증가함수(참)

ㄴ. $g(x) = f(x) - 2x$라 하면 $g(x)$는 연속함수

$g(0) = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 2 < 0$이므로 중간값의 정리에 의해 해가 적어도 한 개 존재한다.(참)

ㄷ. 증가함수(참)

65) 답 : 24

[해설]

$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + b$에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$

$f(1) = 0,\ f'(1) = 0$이므로

$f(1) = 1 + a + 9 + b = 0$

$f'(1) = 3 + 2a + 9 = 0$

위의 두 식에서 $a = -6,\ b = -4$

$\therefore$ $ab = 24$

66) 답 : 45

[해설]

[출제 의도]접선을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) $y' = 3x^2 - 6x + 3$이므로 $f'(0) = 3$

따라서 원점에서의 접선의 방정식은 $y = 3x$

이때, $x^3 - 3x^2 + 3x = 3x$에서 $x^2(x-3) = 0$이므로

$x = 3$

(ⅱ)점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y - a^3 + 3a^2 - 3a = (3a^2 - 6a + 3)(x - a)$

이 접선이 원점을 지나므로 $x = 0, y = 0$을 대입하여 정리하면

$a = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $10S = 10\left(\frac{3}{2} + 3\right) = 45$

67) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 그래프 이해하기

$f'(x) = x^3 + (a+1)x^2 - a$

$= (x+1)(x^2 + ax - a) = 0$의 서로 다른 세 실근이 α, β, γ이다.

따라서 $\alpha = -1$이고, $x^2 + ax - a = 0$의 서로 다른 두 실근이 β, γ

$g(x) = x^2 + ax - a$라 하면

$0 < \beta < \gamma < 3$이므로

$D > 0,\ 0 <$ (대칭축) $< 3,\ g(0) > 0,\ g(3) > 0$이여야 하므로

만족하는 a의 범위는

$\therefore$ $-\frac{9}{2} < a < -4$

68) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]미분계수를 이용하여 접선의 기울기 이해하기

점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = -6$

$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 1$이므로

$\overline{BD} = k$ $(k > 0)$라 하면 $\overline{AD} = 3k$

직선 BC의 기울기는 $\frac{\overline{CD}}{-k} = -6$이므로

$\overline{CD} = 6k$

또, 직선 AC의 기울기는 $\frac{6k}{3k} = 2$

따라서, $f'(a) = -3a^2 + 8a - 3$에서

$-3a^2 + 8a - 3 = 2$

$3a^2 - 8a + 5 = 0$

$\therefore$ 모든 a값들의 곱은 $\frac{5}{3}$

69) 답 : 64

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 함수의 성질 이해하기

원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인

사차 함수 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$에 대해

$f(2+x) = f(2-x)$이므로

$x = 2$에 대하여 대칭이고,

$x = 1$에서 극소이므로 $x = 3$에서 극소이고, $x = 2$에서 극대이다.

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

$= 4(x-1)(x-2)(x-3)$

$= 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$

따라서 $a = -8,\ b = 22,\ c = -24$

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$

$x = 2$에서 극대이고 극댓값 $a = f(2) = -8$

$\therefore$ $a^2 = 64$

70) 답 : ②

[해설]

$f(x)=x^3$ 에서 $f'(x)=3x^2$ 이므로

점 $(1, 1)$ 에서 접선의 방정식은 $y-1=f'(1)(x-1)$

$\therefore\ a_1=\dfrac{2}{3}$

점 $\left(a_n, a_n^3\right)$ 에서 접선의 방정식은 $y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$

$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n$

$\therefore\ a_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 이므로 $a_5=\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

71) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]극대, 극소를 이용하여 두 근의 곱 구하기

$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=8$ (극값의 차)이므로

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{BC}=6$

외심은 빗변의 중점이므로 $\overline{BC}$중점의 x값은 6

그러므로 점 A, B의 x값이 각각 3, 9

$x=3$에서 극댓값, $x=9$에서 극솟값이므로

$f'(3)=f'(9)=0$

$\therefore$ 두 근의 곱은 27

72) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 순간변화율을 이용하여 극한값을 추론 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 $f'(x)=3x^2-3$이므로

구간 $[0, a_n]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을

갖는 점의 x좌표를 $x=a_{n+1}$이라 하면

$$\frac{a_n^3-3a_n}{a_n}=3a_{n+1}^2-3$$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a_n\,(\because a_n>0)$이므로 $a_n=a_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$

ㄱ. 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)=3x^2-3<0$이므로

함수 $y=f(x)$는 감소한다.

따라서 $0<a_{n+1}<a_n<1$를 만족하는 a_n에 대하여

$f(a_n)<f(a_{n+1})$

ㄴ. $f'(x)=3x^2-3$에서 $f'(a_n)=3a_n^2-3$

$f'(a_{n+1})=3a_{n+1}^2-3=a_n^2-3$이므로

$f'(a_n)-f'(a_{n+1})=2a_n^2>0$

$\therefore f'(a_n)>f'(a_{n+1})$

ㄷ. $a_n=a_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}$ 에서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}f'(a_n)=f'(0)=-3$

그러므로 옳은 것은 ㄴ과 ㄷ이다.

73) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]도함수의 그래프를 이용하여 함수의 그래프 이해하기

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

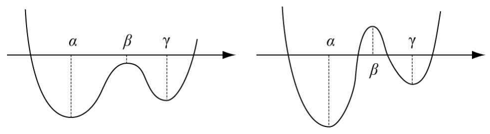
$h'(x)=0$의 세 실근이 α, β, γ이므로

$h'(\alpha)=h'(\beta)=h'(\gamma)=0$

$x=\alpha, \gamma$에서 극솟값, $x=\beta$에서 극댓값

최솟값이 음수를 만족하는 그래프의 개형으로

다음과 같은 경우를 생각하면



ㄱ.(거짓)

ㄴ. $\dfrac{h(\gamma)-h(\beta)}{\gamma-\beta}<\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (참)

ㄷ.(참)

74) 답 : 2

[해설]

[출제 의도]접선의 방정식을 구하기

접점의 좌표를 (a, a^2-a)라고 하면

접선의 방정식은 $y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$

$(1, -1)$을 지나므로 $a=0, a=2$

접선의 기울기는 -1과 3이다.

[정답]2