Ⅲ.다항함수의 미분법
1.미분계수와 도함수

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2018 학년도 대수능]

1 함수 $f(x)=2x^3+x+1$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

2 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x-2}}$라 하자. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

3 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$f(x)=\begin{cases}0, & (x\le a)\\(x-1)^2(2x+1), & (x>a)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}0, & (x\le k)\\12(x-k), & (x>k)\end{cases}$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

4 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

5 함수 $f(x)=x^3+7x+3$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점][2016(A) /수능 5]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

6 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차 함수 $f(x)$에 대하여 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. Mm의 값은? [4점][2016(A) /수능 21]

(가) 함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=-1$에서만 미분가능하지 않다. (나) 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[3, 5]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① $\dfrac{1}{15}$ ② $\dfrac{1}{10}$ ③ $\dfrac{2}{15}$
④ $\dfrac{1}{6}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

7 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

8 좌표평면에서 삼차 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2$ (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 21　② 24　③ 27
④ 30　⑤ 33

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

9 함수 $f(x)=x^3+9x+2$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하시오.[3점][2013학년도 수능]

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

10 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax, & (x<1) \\ bx^2+x+1, & (x\geq 1)\end{cases}$ 이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[4점][2013학년도 수능]

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

[난이도 : ★☆☆] [2012 학년도 대수능]

11 함수 $f(x)=x^2+5$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은?[2점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

[난이도 : ★☆☆] [2011 학년도 대수능]

12 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

13 최고차항의 계수가 1인 사차 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나)모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고 $f'(-1)=f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $f'(0)f'(1)<0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2002 학년도 대수능]

14 $f(x)=x^5+x$일 때, $f'(1)$의 값은?[3점]

① 12 ② 6 ③ 5
④ 2 ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

15 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=1$, $\lim_{x\to 3}\frac{g(x)-2}{x-3}=2$를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=3$에서의 미분계수는?[3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

16 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+2x^2+8)$에 대하여 미분계수 $f'(1)$을 구하시오.

[난이도 : ★★★] [1998 학년도 대수능]

17 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

$f(1-x)=1-f(x)$

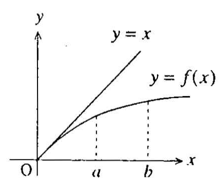
다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?

① $f(0)+f(1)=1$ ② $f'(0)=f'(1)$
③ $\int_0^1 f(x)dx$ ④ $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$
⑤ $f(0)=0$

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

18 아래 그림은 미분가능한 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다.

$0<a<b$일 때, 다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고르면?



[보기]
Ⅰ. $\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$
Ⅱ. $f(b)-f(a)>b-a$
Ⅲ. $f'(a)>f'(b)$

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅱ ⑤ Ⅱ, Ⅲ

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

19 [공통]모든 자연수 n에 대하여, 다항식 $f_n(x)$는 다음 두 성질 (가)와 (나)를 갖는다.

(가) $f_1(x)=x^2$
(나) $f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_n'(x)$

$f_{25}(x)$의 상수항은?[1.5점]

① 548 ② 550 ③ 552
④ 554 ⑤ 556

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

20 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

다음 [보기]중 $x=0$에서 미분가능한 함수를 모두 고르면?

[보기]

Ⅰ. $y=xf(x)$
Ⅱ. $y=x^2f(x)$
Ⅲ. $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ
④ Ⅰ.Ⅱ ⑤ Ⅰ.Ⅱ.Ⅲ

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

21 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

22 함수 $f(x)=ax^2+b$ 가 모든 실수 x에 대하여

$$4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$$

를 만족시킨다. $f(2)$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

23 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x, & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x, & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$ 는 $x=k$에서 미분가능하지 않다

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a,\ \ g(0)=b,\ \ g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

24 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 5이하의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.
(나) $n=3,\ 4$, 일 때, $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★☆☆] [2016년 6월 모의평가]

25 함수 $f(x) = x^3 - 2x - 2$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

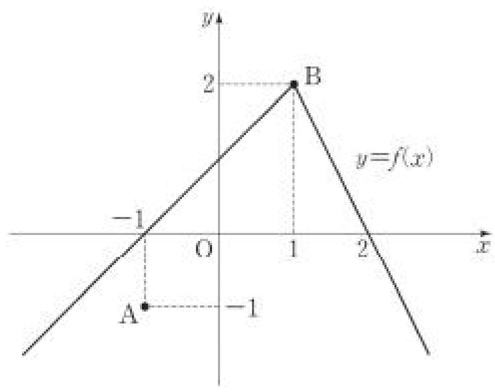
26 다음 조건을 만족시키는 20이 하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고 $0 < b-a \le \frac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

27 함수 $f(x)$는 $f(x) = \begin{cases} x+1, & (x<1) \\ -2x+4, & (x \ge 1) \end{cases}$이고,

좌표평면 위의 두 점 $A(-1,\ -1)$, $B(1,2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x, f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않는 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

28 함수 $f(x) = x^3 + 10x$에 대하여 $f'(0)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

29 함수 $f(x) = x^2 - 2x - 12$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

30 함수 $f(x)=x^2+8x$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$

의 값은?[3점]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

31 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$y=x^4-4x^3+10x-30$, $y=2x+2$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때,

점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

32 함수 $f(x)=x^2+x+3$에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

33 함수 $f(x)=x^2+4x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2012년 3월 모의평가]

34 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

35 함수 $f(x)=5x^2+3x-1$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

36 함수 $f(x)=x^3-x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}$ 의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

37 함수 $f(x)=x^2+7x$에 대하여 $f'(3)$의 값을 구하시오.[3점][2012년 6월]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

38 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?[3점][2012년 6월]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

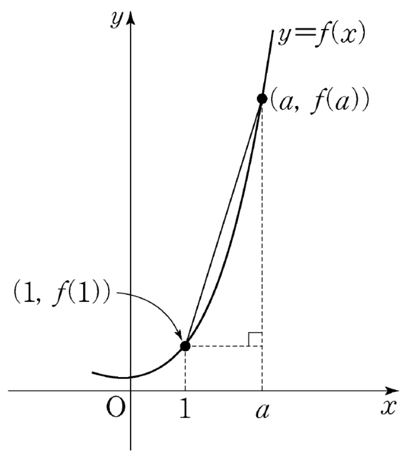
[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

39 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-5}{x-1}=9$를 만족시킨다.

$g(x)=xf(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값을 구하시오.[4점][2012년 6월]

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

40 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1, f(1))$과 점 $(a, f(a))$사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?[4점][2012년 6월]

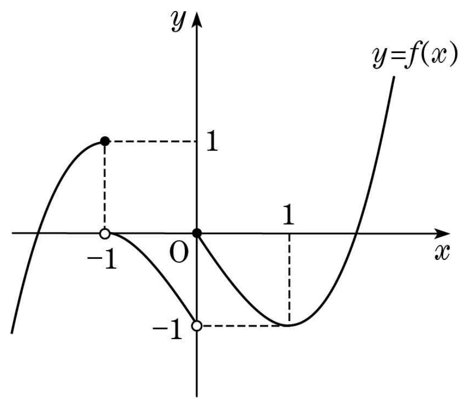


① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

41 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^3-3x), & (x\le -1,\ x\ge 0)\\ \frac{1}{2}(x^3-3x)-1, & (-1<x<0)\end{cases}$$



옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{3}{2}$
ㄷ. $\lim_{x\to -1+} f(f'(x))=0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

42 이차 함수 $f(x)=x^2+3x$에 대하여 $f(2)+f'(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

43 함수 $f(x)=(x^3+5)(x^2-1)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.[3점][2011년 9월 평가원]

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

44 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$일 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$의 값은?[3점]

① 3　② $\frac{7}{2}$
③ 4　④ $\frac{9}{2}$
⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

45 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$h(x)=\begin{cases}f(x), & (x\ge 0)\\ g(x), & (x<0)\end{cases}$라고 하자.

$h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(0)=g(0)$
ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

46 함수 $f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$에 대하여 $f'(-1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

47 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

$f'(2)=-3$, $f'(4)=6$일 때, $\lim_{x\to -2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$의 값은?[3점]

① -8　② -4　③ 4
④ 8　⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

48 다음 조건을 만족시키는 모든 사차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오.[4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나)곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.
(다) $f'(0)=0$

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

49 [공통]자연수 a, b에 대하여 함수

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{n+b}+2x-1}{x^n+1}\ (x>0)$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+10b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

50 $f(x)=\begin{cases}-1, & (x<1)\\ -x+2, & (1\le x)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$라 하자.

다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다. ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

51 함수 $f(x)$가 $f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$를 만족 시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

52 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$의 값은?[3점]

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

53 이차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $y=f(x)$에서 x의 값이 -1에서 7까지 변할 때의 평균 변화율은 0이다. ㄴ. 두 실수 a, b에 대하여 $a+b=6$이면 $f'(a)+f'(b)=0$이다. ㄷ. $\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 09월 모의평가]

54 함수 $f(x)=x(4x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 모의평가]

55 다항함수 $f(x)=(x^3+3x+1)(x^2-2x+3)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 6월 모의평가]

56 다항함수 $f(x)=(x^3+3x+1)(x^2-2x+3)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 9월 모의평가]

57 함수 $f(x)=x(4x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?[3점]

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

58 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx, & (x\ge 1) \\ 2x^2+1, & (x<1) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b를 정할 때, ab의 값은?[3점]

① -5 ② -3 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

59 함수 $f(x)=e^x-e^{-x}$에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

60 함수 $f(x)=x^2+3x+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$의 값은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

61 함수 $f(x)=xe^{-2x+1}$에 대하여 함수

$g(x)=\begin{cases} f(x)-a, & (x>b) \\ 0, & (x \le b) \end{cases}$가 실수 전체에서 미분 가능할 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

62 함수 $f(x)=x^2+ax$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=6$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

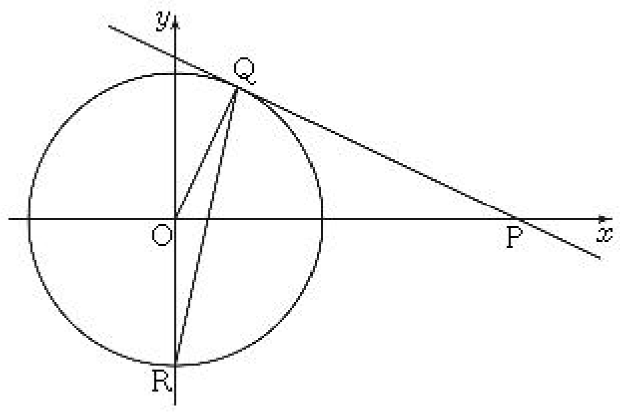
① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

63 함수 $f(x)=x^2+5x+6$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

64 1보다 큰 실수 t에 대하여 그림과 같이 점 $P\left(t+\frac{1}{t},\ 0\right)$에서 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2t^2}$에 접선을 그었을 때, 원과 접선이 제1사분면에서 만나는 점을 Q, 원 위의 점 $0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}t}$을 R라 하자.



$\overline{OP}\times\overline{OQ}$를 $f(t)$라 할 때, $f'(\sqrt{2})$의 값은? [3점]

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{16}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

65 함수 $f(x)=x^3-x+7$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

66 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$

(나) $x=-1$과 $x=2$에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$의 값은? [3점]

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

67 미분가능한 함수 $f(x)=\begin{cases}-x+1, & (x<0)\\ a(x-1)^2+b, & (x\ge0)\end{cases}$

에 대하여 $f(1)$의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

68 함수 $f(x)=\int(x^2+2x)dx$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$의 값은? [3점][2012년 7월]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

69 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=-1$일 때,

$\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}$의 값을 구하시오.[3점][2012년 7월]

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

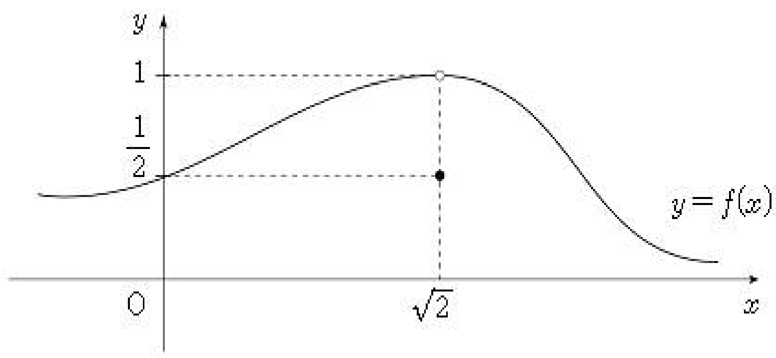
70 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$에 대하여

$\frac{f'(1)}{f'(4)}$의 값은? [4점][2012년 7월]

① -80 ② -84 ③ -88
④ -92 ⑤ -96

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

71 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점][2012년 7월]



ㄱ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[xf(x)]=1$

ㄴ. 함수 $[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x-\sqrt{2})[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

72 함수 $f(x)=x|x|+|x-1|^3$에 대하여 $f'(0)+f'(1)$의 값은?[4점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

73 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax+1, & (x \ge 1) \\ 2x^2+a, & (x<1) \end{cases}$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 하는 상수 a의 값은?[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

74 두 함수 $f(x)=x^2-4x$와 $y=g(x)$가 임의의 실수 h에 대하여 $g(x+h)-g(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$일 때, 방정식 $g(x)=0$의 모든 근의 합은?[3점]

① 6 ② 5 ③ 4
④ 3 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

75 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2, & (x \le 3) \\ -\frac{1}{2}(x-a)^2+b, & (x>3) \end{cases}$이 모든 실수에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

76 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n}$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $q-p$의 값은?

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[3점]

① 508 ② 509 ③ 510
④ 511 ⑤ 512

[난이도 : ★☆☆] [2009년 10월 학력평가]

77 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+x^2\sin\frac{1}{x}, & (x \ne 0) \\ 0, & (x=0) \end{cases}$에 대하여 $f'(0)$의 값은?[2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

78 함수 $f(x)=x^2-6x+5$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=8$을 만족하는 상수 a의 값은?[3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

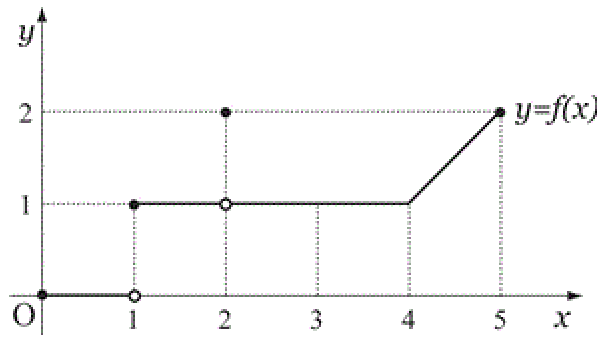
79 함수 $f(x)=\begin{cases} -3x+a, & (x<-1) \\ x^3+bx^2+cx, & (-1\le x<1) \\ -3x+d, & (x\ge 1) \end{cases}$ 과 같다.

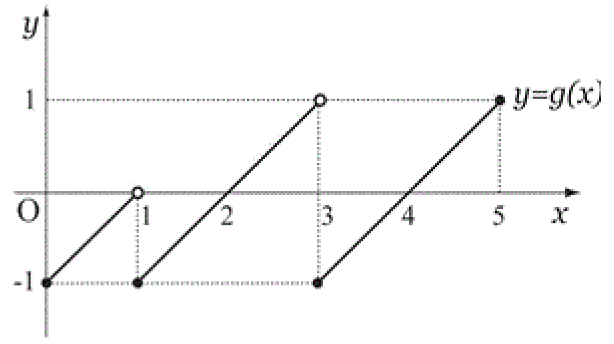
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 네 실수 a, b, c, d의 값을 정할 때, $a+b+c+d$의 값은?[3점]

① -10　② -8　③ -6
④ -4　⑤ -2

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

80 그림과 같이 구간 $[0, 5]$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]





[보기]
ㄱ. 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2008년 5월 학력평가]

81 함수 $f(x)=(2x^2-3x)(x^2-x+2)$에 대하여 $f'(2)$의 값은?[2점]

① 24　② 25　③ 26
④ 27　⑤ 28

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

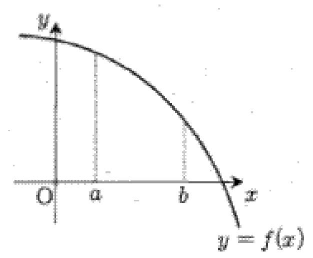
82 함수 $f(x)=x^3-x+1\,(-1\le x\le a)$에 대하여 집합 $A=\left\{a \,\middle|\, \dfrac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(a)\right\}$일 때, 집합 A의 원소 개수는 ?

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

83 그림은 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.

다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ?(단, $0<a<b$)



[보기]
ㄱ. $\dfrac{f'(a)}{b}>\dfrac{f'(b)}{a}$
ㄴ. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$
ㄷ. $f'(\sqrt{ab})>f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

84 [공통] $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+1)^n$을 x^2-3x+2로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{R(0)}{3^n+2^n}$의 값은?[4점]

① 2　② 1　③ 0
④ -1　⑤ -2

[난이도 : ★☆☆] [2007년 7월 학력평가]

85 함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값은?[2점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

86 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$일 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

87 다음은 함수 $f(x)=|x(x-k)|$의 $x=0$에서 연속성과 미분가능성을 조사하는 과정이다.

> (ⅰ) $x=0$에서 $f(x)$의 연속성 $f(0)=0$이고
> $\lim_{h\to 0}\{f(0+h)-f(0)\}=\lim_{h\to 0}|h(h-k)|=$ [(가)]
> 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 k의 값에 관계없이 연속이다.
> (ⅱ) $x=0$에서 $f(x)$의 미분가능성
> $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{|h(h-k)|}{h}=|k|$
> $\lim_{h\to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{|h(h-k)|}{h}=$ [(나)]
> 따라서 $f(x)$는 $k=0$인 경우에만 $x=0$에서[(다)]

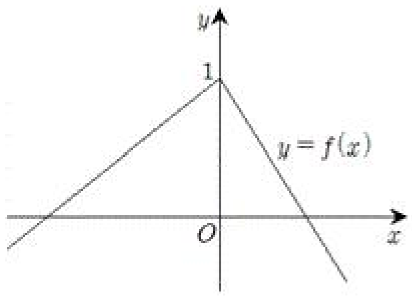
이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① 0, $|k|$, 미분가능하다.
② 0, $-|k|$, 미분가능하지 않다.
③ 0, $-|k|$, 미분가능하다.
④ $-k$, $|k|$, 미분가능하다.
⑤ $-k$, $-|k|$, 미분가능하지 않다.

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

88 함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두

고른 것은?[3점]



[보기]
ㄱ. $x<0$일 때, $f'(x)$는 항상 양수이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다.
ㄷ. 함수 $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$는 $x=0$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

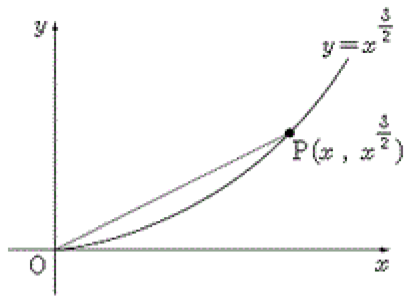
89 세 다항함수 $f(x), g(x), h(x)$에 대하여 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

ㄱ. $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이면 $g'(0)=0$이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $\lvert h(2x)-h(x)\rvert \le x^2$이면 $h'(0)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

90 곡선 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 위의 점 P가 시간이 지남에 따라 원점으로부터 멀어지고 있다. $x=3$이 되는 순간 선분 OP의 시각에 대한 길이의 순간변화율이 11일 때, 점 P의 x좌표의 시각에 대한 순간변화율은?[4점]



① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

91 두 다항함수 $f_1(x), f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?[4점]

(가) $f_1(0)=0,\ f_2(0)=0$
(나) $f_i(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}\ (i=1,\ 2)$
(다) $y=f_1(x)$와

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

92 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$을 만족시킨다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$일 때, $f'(0)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

93 함수 $f(x)=x^4+x^2+1$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$의 값은?[3점]

① 3　　② 4　　③ 5
④ 6　　⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

94 함수 $f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

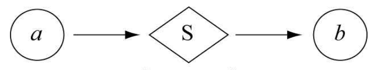
95 실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가)임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$
(나) $f'(0)=8$

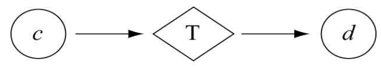
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고 $x=b$에서 극솟값을 가질 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

96 함수 $f(x)=(x-1)(x+3)$에 대하여 $f'(a)=b$를 [그림 I]과 같이 나타내고, $d=\log_2 c$를 [그림 II]와 같이 나타내기로 한다.

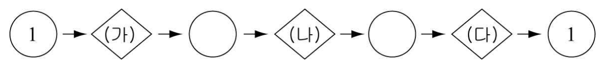


[그림 I]



[그림 II]

아래 그림에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]



① $S\,S\,T$　　② $S\,T\,S$
③ $T\,S\,T$　　④ $T\,S\,S$
⑤ $T\,T\,S$

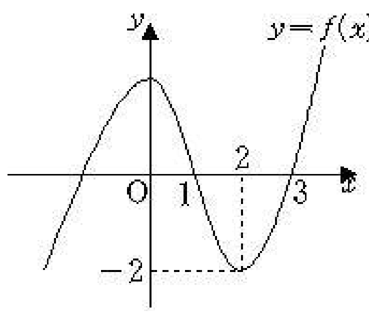
[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

97 곡선 $y=(x^2-1)(2x+1)$위의 점 $(1, 0)$에서 접하는 직선의 기울기는?[2점]

① 2　　② 3　　③ 4
④ 5　　⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

98 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$g(x)=xf(x)$라 할 때 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $f'(2)=0$)[3점]

[보기]
ㄱ. $f(1)+g'(1)>0$
ㄴ. $g(2)g'(2)>0$
ㄷ. $f(3)+g'(3)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

99 삼차 함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} f(x), & (x<a) \\ m-f(x), & (a \le x < b) \\ n+f(x), & (x \ge b) \end{cases}$로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b와 m, n의 값을 정할 때, $m+n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

100 다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(-ax)=-af(x)$가 성립할 때, $f'(x)$와 같은 것은?(단, $a \neq 0$, $f'(x)$는 $f(x)$의 도함수)[4점]

① $af'(ax)$ ② $\frac{1}{a}f'(x)$ ③ $af'(x)$
④ $f'(-ax)$ ⑤ $\frac{1}{a}f'(-ax)$

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

101 다음은 두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수를 구하는 과정이다.

$\triangle x$를 x의 증분, $\triangle y$를 y의 증분이라 하면 $\triangle y=f(x+\triangle x)g(x+\triangle x)-f(x)g(x)$ $=f(x+\triangle x)g(x+\triangle x)-f(x)g(x+\triangle x)$ $+f(x)g(x+\triangle x)-f(x)g(x)$ $\{f(x+\triangle x)-f(x)\}g(x+\triangle x)$ $+f(x)\{g(x+\triangle x)-g(x)\}$ 따라서, $y=f(x)g(x)$의 도함수 $y'=\lim_{\triangle x \to 0}$ [(가)] $=\lim_{\triangle x \to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}\lim_{\triangle x \to 0}g(x+\triangle x)$ $+\lim_{\triangle x \to 0}f(x)\lim_{\triangle x \to 0}\frac{g(x+\triangle x)-g(x)}{\triangle x}$ $=$ [(나)]

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, $f'(x)$, $g'(x)$

② $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, $g'(x)$, $f'(x)$

③ $\frac{\triangle y}{\triangle x}$, $\frac{f(x)}{g'(x)}$, $\frac{g(x)}{f'(x)}$

④ $\frac{g(x)}{f(x)}$, $g'(x)$, $f'(x)$

⑤ $\frac{g(x)}{f(x)}$, $f'(x)$, $g'(x)$

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

102 자연수 n에 대하여 구간 $[n, n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $n+1$이다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 구간 $[1, 100]$에서의 평균변화율을 구하시오.[3점]

정답 및 해설

1.미분계수와 도함수

중단원 기출문제

1) 답 : 7

[해설]

[출제 의도] 미분법과 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=2x^3+x+1$ 에서 $f'(x)=6x^2+1$ 이므로

$f'(1)=6\times1^2+1=7$

2) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 분수함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$ 에서 $x\to2$ 일 때 (분모) $\to0$ 이므로 (분자) $\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-3\}=0$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)-3\}=f(2)-3=0$ 에서 $f(2)=3\ldots$①

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=5$ 즉, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=5$ 이므로

$f'(2)=5\ldots$②

한편 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x-2}}$ 에서

[중간 계산] $=g'(x)=\dfrac{f'(x)\times(e^{x-2})-f(x)\times(e^{x-2})'}{(e^{x-2})^2}$

$=\dfrac{\{f'(x)-f(x)\}\times(e^{x-2})}{(e^{x-2})^2}$

$=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^{x-2}}$

따라서 $g'(2)=\dfrac{f'(2)-f(2)}{e^0}=\dfrac{5-3}{1}=2$

3) 답 : 32

[해설]

[출제 의도] 미분가능성을 이해하고 있으며

미분을 이용하여 부등식에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

힘수 $f(x)$는 $x<a$, $x>a$ 일 때, 다항함수이므로 이 범위에서 미분가능하다.

한편, 조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 하므로

함수 $f(x)$는 $x=a$ 에서 미분가능해야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 이어야 한다.

이때,

$\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{0-0}{x-a}=0\ \ldots$㉠

또, $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}$

여기서 $x\to a+$ 일 때 (분모) $\to0$ 이고, 극한값이 존재해야 하므로 (분자) $\to0$ 에서

$\lim\limits_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0$, $(a-1)^2(2a+1)=0$

$a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(ⅰ) $a=-\dfrac{1}{2}$ 일 때,

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}+}\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}+}2(x-1)^2=\dfrac{9}{2}$

이 값은 ㉠의 값과 다르므로

$a=-\dfrac{1}{2}$ 일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하지 않다.

(ⅱ) $a=1$ 일 때,

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}(x-1)(2x+1)$

$=0$

이 값은 ㉠의 값과 같으므로

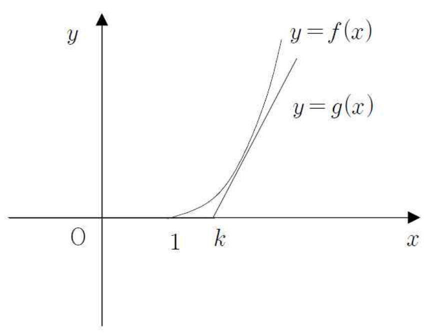
$a=1$ 일 때 함수 $f(x)$는 미분가능하다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$ 이다.

한편, 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq g(x)$ 이어야하므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프보다

위쪽에 있거나 접해야 한다.



$x>1$ 일 때, 함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$ 와 접하고

기울기가 12인 접선의 접점을 $(m, f(m))$ ($m>1$)라 하자.

$f'(x)=\{(x-1)^2\}'(2x+1)+(x-1)^2(2x+1)'$

$=2(x-1)(2x+1)+2(x-1)^2$

$=(x-1)\{(4x+2)+(2x-2)\}$

$=6x(x-1)$

이때, 접선의 기울기가 12이므로

$6m(m-1)=12$ 이며 이항하면

$m^2-m-2=0$ 이며 정리하면

$(m+1)(m-2)=0$

$m=-1$ 또는 $m=2$

이때, $m=2$

그러므로 접선의 방정식은 $y-5=12(x-2)$

$y=12x-19$, $y=12\left(x-\dfrac{19}{12}\right)$

따라서 $k\geq\dfrac{19}{12}$ 이므로 k의 최솟값은 $\dfrac{19}{12}$ 이다.

그러므로 $a+p+q=1+12+19=32$

정답 및 해설

4) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]: 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3+3x^2+3$에서

$f'(x)=3x^2+6x$이므로

$f'(2)=12+12=24$

5) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=x^3+7x+3$에서 $f'(x)=3x^2+7$이므로

$f'(1)=3\times1^2+7=10$

6) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 조건에 맞는 삼차 함수를 찾아 $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

조건 (가)에 의하여 $f(-1)=0$

또한, 조건 (가), (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는

닫힌 구간 $[3, 5]$에서 x축과 접하게 된다.

따라서 $f(x)=k(x+1)(x-\alpha)^2\,(k\neq0,\ 3\le\alpha\le5)$ 라고 하면

$f'(x)=k(x-\alpha)^2+2k(x+1)(x-\alpha)$ 이므로

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\frac{k\alpha^2-2k\alpha}{k\alpha^2}=1-\frac{2}{\alpha}$$

그런데, $3\le\alpha\le5$이므로

$\alpha=3$일 때 최솟값 $m=\dfrac{1}{3}$

$\alpha=5$일 때 최댓값 $M=\dfrac{3}{5}$ 이므로

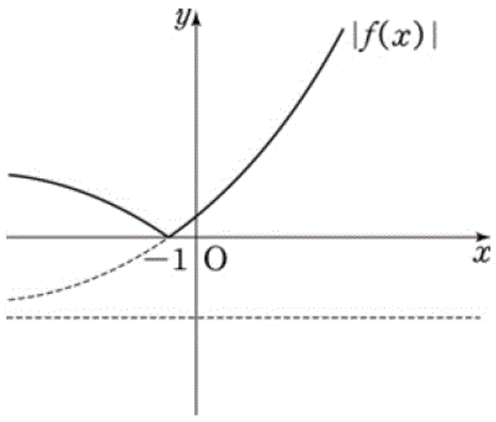
$$Mm=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

7) 답 : 39

[해설]

함수 $f(x)=e^{x+1}-1$는 $f(x)=e^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$y=|f(x)|$의 그래프는 아래 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)|$는 $x=-1$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하므로

$y=|f(x^k)|$도 $x^k=-1$을 제외한 모든 실수에서 미분가능하며

특히, k가 짝수이면 $y=|f(x^k)|$은 모든 실수에서 미분가능하다.

($\because$ k가 짝수일 때, $x^k\neq-1$이므로)

(ⅰ) $n=2m$일 때,

sum _{k=1} ^{n} | f(x ^{2k}) | = sum _{k=1} ^{m} | f(x ^{2k-1}) | + sum _{k=1} ^{m} | f(x ^{2k}) |`

`(ⅱ) $n=2m-1$일 때,

sum _{k=1} ^{n} | f(x ^{2k}) | = sum _{k=1} ^{m} | f(x ^{2k-1}) | + sum _{k=1} ^{m-1} | f(x ^{2k}) |`

`여기서 sum _{k=1} ^{m} | f(x ^{2k} ) |`와 sum _{k=1} ^{m-1} | f(x ^{2k}) |`은 모든 실수에서 미분가능하므로

$h(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{m}|f(x^{2k-1})|$라 할 때,

$x=-1$에서 $h(x)$ 미분가능성만 조사하면 된다.

$x>-1$일 때, $f(x)>0$이므로 $h(x)=100f(x)-\sum_{k=1}^{m}f(x^{2k-1})$이고

$h'(x)=100f'(x)-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\cdot x^{2k-2}\cdot f'(x^{2k-1})$,

$\therefore\ \lim_{x\to-1+}h'(x)=100f'(-1)-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\cdot(-1)^{2k-2}\cdot f'(-1)$

$=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=100-m^2$ ($\because$ $f'(-1)=1$)

$x<-1$일 때, $f(x)<0$이므로 $h(x)=-100f(x)+\sum_{k=1}^{m}f(x^{2k-1})$이고

$h'(x)=-100f'(x)+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\cdot x^{2k-2}\cdot f'(x^{2k-1})$,

$\therefore$

$\lim_{x\to-1-}h'(x)=-100f'(-1)+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\cdot(-1)^{2k-2}\cdot f'(-1)$

$=-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=-100+m^2$

$h(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to-1+}h'(x)=\lim_{x\to-1-}h'(x)$이어야 하므로

$100-m^2=-100+m^2$,

$\therefore$ $m=10$

`$\therefore$ (ⅰ) $n=2m$일 때, $n=2\cdot10=20$이고,

(ⅱ) $n=2m-1$일 때, $n=2\cdot10-1=19$

`따라서 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위한 최소의 자연수 n의 값은 $n=19$, 20이다.

$\therefore$ 모든 n의 값의 합은 $19+20=39$

[다른 풀이]

$|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1}+1, & (x<-1)\\ e^{x+1}-1, & (x\ge-1)\end{cases}$ 이므로

$\dfrac{d}{dx}|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1}, & (x<-1)\\ e^{x+1}, & (x>-1)\end{cases}$ 이다.

따라서 $p(x)=100|f(x)|$ 라 하면 함수 $p(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$\lim_{x\to-1-}p'(x)=-100$

$\lim_{x\to-1+}p'(x)=100$

이다.

한편, $k=2m-1$(m은자연수)일 때,

정답 및 해설

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1$ 이므로

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1=0$ 에서 $x=-1$

∴ $|f(x^{2m-1})|=\begin{cases}-e^{x^{2m-1}+1}+1, & (x<-1)\\ e^{x^{2m-1}+1}-1, & (x\geq-1)\end{cases}$

∴

$\frac{d}{dx}|f(x^{2m-1})|=\{(-(2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1},\ (x<-1)),\ (2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1},\ (x\geq-1)$

따라서 $(x^{2m-1})=|f(x^{2m-1})|$ 이라 하면

함수 (x^{2m-1})는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$\lim_{x\to-1-}{}'(x^{2m-1})=-(2m-1)$

$\lim_{x\to-1+}{}'(x^{2m-1})=2m-1$ 이다.

또, $k=2m$(m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m}+1}-1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x^k)>0$이다.

따라서

$|f(x^k)|=e^{x^{2m}+1}-1$ 이므로

$\frac{d}{dx}|f(x^k)|=2mx^{2m-1}e^{x^{2m}+1}$

따라서 $r(x^{2m})=|f(x^{2m})|$ 이라 하면 함수 $r(x^{2m})$은 실수 전체집합에서 미분가능하다.

이제 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$일 때,

함수 $100|f(x)|-\sum_{k=1}^{m}|f(x^{2k-1})|$를 $s(x)$라 하자. 즉

$s(x)=p(x)-\sum_{k=1}^{m}(x^{2k-1})$

이때 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$x\neq-1$일 때

$s'(x)=p'(x)-\sum_{k=1}^{m}{}'(x^{2k-1})$이므로

$\lim_{x\to-1-}s'(x)=-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

$\lim_{x\to-1+}s'(x)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

이때, 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to-1-}s'(x)=\lim_{x\to-1+}s'(x)$

즉, $-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

이어야 한다.

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2=100$에서

따라서 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$이므로

$n=19$ 또는 $n=20$ 이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값은 합은 $19+20=39$

$|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1}+1, & (x<-1)\\ e^{x+1}-1, & (x\geq-1)\end{cases}$ 이므로

$\frac{d}{dx}|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1}, & (x<-1)\\ e^{x+1}, & (x>-1)\end{cases}$ 이다.

따라서 $p(x)=100|f(x)|$ 라 하면 함수 $p(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$\lim_{x\to-1-}p'(x)=-100$

$\lim_{x\to-1+}p'(x)=100$

이다.

한편, $k=2m-1$(m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1$ 이므로

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1=0$ 에서 $x=-1$

∴ $|f(x^{2m-1})|=\begin{cases}-e^{x^{2m-1}+1}+1, & (x<-1)\\ e^{x^{2m-1}+1}-1, & (x\geq-1)\end{cases}$

∴

$\frac{d}{dx}|f(x^{2m-1})|=\{(-(2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1},\ (x<-1)),\ (2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1},\ (x\geq$

따라서 $(x^{2m-1})=|f(x^{2m-1})|$ 이라 하면

함수 (x^{2m-1})는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$\lim_{x\to-1-}{}'(x^{2m-1})=-(2m-1)$

$\lim_{x\to-1+}{}'(x^{2m-1})=2m-1$ 이다.

또, $k=2m$(m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m}+1}-1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x^k)>0$이다.

따라서

$|f(x^k)|=e^{x^{2m}+1}-1$ 이므로

$\frac{d}{dx}|f(x^k)|=2mx^{2m-1}e^{x^{2m}+1}$

따라서 $r(x^{2m})=|f(x^{2m})|$ 이라 하면 함수 $r(x^{2m})$은 실수 전체집합에서 미분가능하다.

이제 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$일 때,

함수 $100|f(x)|-\sum_{k=1}^{m}|f(x^{2k-1})|$를 $s(x)$라 하자. 즉

$s(x)=p(x)-\sum_{k=1}^{m}(x^{2k-1})$

이때 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$x\neq-1$일 때

$s'(x)=p'(x)-\sum_{k=1}^{m}{}'(x^{2k-1})$이므로

$\lim_{x\to-1-}s'(x)=-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

$\lim_{x\to-1+}s'(x)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

이때, 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to-1-}s'(x)=\lim_{x\to-1+}s'(x)$

즉, $-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$

이어야 한다.

sum _{k=1}^{m} (2k-1)=m^{2} =100 `에서 $m=10$

따라서 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$이므로

$n=19$ 또는 $n=20$ 이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값은 합은 `19+20=39`

8) 답 : ④

[해설]
[출제 의도] 접선의 방정식을 구하고 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?
접점 $\left(t,\, t^3+at^2+bt\right)$에서의 접선의 방정식은

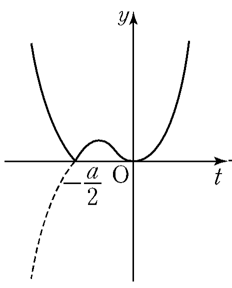
$$y=\left(3t^2+2at+b\right)(x-t)+t^3+at^2+bt$$

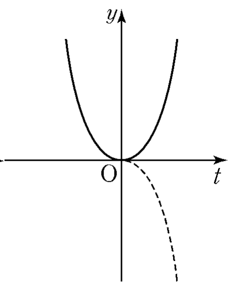
$$y=\left(3t^2+2at+b\right)x-2t^3-at^2$$

따라서, 접선이 y축과 만나는 점 P는 $P\left(0,\,-2t^3-at^2\right)$
원점에서 점 P까지의 거리 $g(t)$는

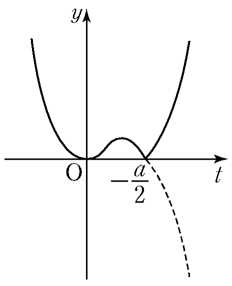
$$g(t)=\left|-2t^3-at^2\right|=t^2\cdot|2t+a|$$

ⅰ) $a>0$일 때 ⅱ) $a=0$일 때





ⅲ) $a<0$일 때



따라서, 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능이려면 $a=0$
조건 ㈎에서 $f(1)=1+a+b=2$, $b=1$

$$\therefore\ f(x)=x^3+x$$

$$\therefore\ f(3)=3^3+3=30$$

9) 답 : 12
[해설]
$f(x)=x^3+9x+2$에서 $f'(x)=3x^2+9$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3+9=12$$

10) 답 : ③
[해설]
주어진 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$1+a=b+1+1\cdots$㉠
또한 $x=1$에서 미분가능해야 하므로
$3+a=2b+1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 두 식을 연립하면 $a=4,\, b=3$
따라서 $a+b=7$

11) 답 : ①
[해설]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

$f(x)=x^5+5$에서 $f'(x)=2x$이므로 $f'(1)=2\times1=2$

12) 답 : 41
[해설]
$f'(x)=2x\left(x^2+x-2\right)+\left(x^2+1\right)(2x+1)$

$$\therefore\ f'(2)=4(4+2-2)+(4+1)(4+1)=16+25=41$$

13) 답 : ③
[해설]
ㄱ. $g(x)$는 $-1<x<1$에서 미분가능하므로 $x=-1$과 $x=1$에서 미분가능성만 확인하면 된다.
ⅰ) $x=-1$일 때

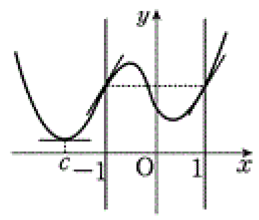
$$g'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}\\ \displaystyle\quad=\lim_{h\to+0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)\\ \displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}\\ \displaystyle\quad=\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)\end{cases}$$

조건에 의해 $f'(-1)=f'(1)$이므로 $g'(-1)$은 존재한다.
ⅱ) $x=1$일 때 마찬가지로,

$$g'(1)=\begin{cases}\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\\ \displaystyle\quad=\lim_{h\to0+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)\\ \displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\\ \displaystyle\quad=\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(-1)}{h}=f'(1)\end{cases}$$

$\therefore\ g'(1)$은 존재한다.
$\therefore\ g(x)$는 모든 실수에서 미분가능이다. $\therefore$ 참
ㄴ. ㄱ과 마찬가지 방법으로 $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능하면 $f(1)=f(-1)$, $f'(1)=f'(-1)$이 되어야 한다.
$f(x)-f(1)=(x+1)(x-1)\left(x^2+ax+b\right)$ 가 된다.
$f'(x)=(2x)\left(x^2+ax+b\right)+\left(x^2-1\right)(2x+a)$
$f'(1)=2(1+a+b)$
$f'(-1)=-2(1-a+b)$에서 $f'(1)=f'(-1)$이므로
$2+2a+2b=-2+2a-2b$ $\therefore\ b=-1$
$\therefore\ f'(0)=-a$, $f'(1)=2(1+a-1)=2a$
$\therefore\ f'(0)\times f'(1)=-2a^2\le0$
따라서 $a=0$일 때
즉, $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$인 경우 $f'(0)\times f'(1)=0$ 이 된다. $\therefore$ 거짓
ㄷ. ㄴ에서
$f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+ax-1\right)+f(1)$이 되는데
$f'(1)=2a>0$이면 $f'(-1)>0$이 되고
최고차항 계수가 1인 4차 함수는 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to\infty$가 되어야 하므로
$f'(x)$ 는 $x<-1$일 때 $f'(x)<0$이 되는 x가 있고,



사이값 정리에 의해

$f'(c)=0$이 되는 c가 $(-\infty,\ -1)$에 적어도 1개 존재한다.

∴ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14) 답 : ④

[해설]

$f'(x)=5x^4+1$에서

$f'(1)=5\cdot 1^4+1=6$

15) 답 : ①

[해설]

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-2}{x-3}=1$에서 $x\to3$이면 (분모)$\to0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to3}f(x)-2=0$

그런데 $f(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이다.

∴ $f(3)=2\cdots$①

이때, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=1\cdots$②

마찬가지로 생각하면

$g(3)=1,\ g'(3)=2\cdots$③

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$에서

$y'_{x=3}=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$이므로

여기에 ①, ②, ③을 대입하면

$y'_{x=3}=1\cdot1+2\cdot2=5$

16) 답 : 11

[해설]

$f(x)=(x-1)(x^3+2x^2+8)$

$f'(x)=x^3+2x^2+8+(x-1)(3x^2+4x)$

$f'(1)=1^3+2\times1^2+8+(1-1)(3\times1^2+4\times1)=11$

17) 답 : ⑤

[해설]

주어진 함수는 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭인 연속함수이다.

① $x=0$을 대입하면 $f(1-)=1-f(0)$

∴ $f(1)+f(0)=1$

② $-f'(1-x)=-f'(x),\ f'(1-)=-f'(0)$

∴ $f'(1)=f'(0)$

③ 위의 그림에서 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=(f(0)+f(1))\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

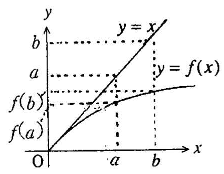
④ $f\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=1-f\left(\dfrac{1}{2}\right)\to 2f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$

∴ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

⑤ 위의 그림에서 $f(0)=0$이라고 반드시 말할 수는 없다.

18) 답 : ③

[해설]



Ⅰ) $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 $(a,f(a))$를 잇는 직선의 기울기고

$\dfrac{f(b)}{b}$는 원점과 점 $(b,f(b))$를 잇는 직선의 기울기 이므로

$\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$

Ⅱ) $A(a,f(a)),\ B(b,f(b))$일 때, 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

$b-a>0$이므로 $f(b)-f(a)<b-a$

Ⅲ) $y=f(x)$에서 $f'(x)$는 접선의 기울기이므로

점 $A(a,f(a))$에서의 접선의 기울기가

점 $B(b,f(b))$에서의 접선의 기울기보다 크다.

∴ $f'(a)>f'(b)$

19) 답 : ⑤

[해설]

$f_1(x)=x^2$에서 $f'_1(x)=2x$

$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f'_n(x)$에서

$f_2(x)=f_1(x)+f'_1(x)=x^2+2x$

즉, $f_n(x)$는 x^2인 계수가 1인 2차식이므로

$f_n(x)=x^2+a_nx+b_n$으로 놓을 수 있다.

$f_{n+1}(x)=x^2+a_{n+1}x+b_{n+1}$로 놓으면

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=f'_n(x)$에서

$x^2+a_{n+1}x+b_{n+1}-(x^2+a_nx+b_n)=2x+a_n$ 이며 정리하면

$(a_{n+1}-a_n)x+b_{n+1}-b_n=2x+a_n$

∴ $a_{n+1}-a_n=2,\ b_{n+1}-b_n=a_n$

$a_{n+1}-a_n=2$에서 $a_n=a_1+2(n-1)$, $a_1=0$이므로

$a_n=2(n-1)$

$b_{n+1}-b_n=2(n-1)$에서 $b_n=b_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}2(k-1)$

∴ $b_{25}=b_1+\sum\limits_{k=1}^{24}2(k-1)=0+2\left(24\cdot\dfrac{25}{2}\right)-2\cdot24=552$

20) 답 : ⑤

[해설]

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$이지만 $f'(0)$이 존재하지 않는다.

Ⅰ. $y'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{hf(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}f(h)=f(0)$

Ⅱ. $y'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^2f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}hf(h)=0$

Ⅲ.

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+hf(h)}-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-hf(h)}{h(1+hf(h))} = \lim_{h\to 0}\frac{-f(h)}{1+hf(h)} = -f(0)$$

21) 답 : 15

[해설]

$f(x)=x^3-2x^2+4$ 이므로 $f'(x)=3x^2-4x$ 이다

따라서 $f'(3)=15$

22) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 항등식의 풀이를 묻는 문제이다.

$f(x)=ax^2+b$, $f'(x)=2ax$ 를 주어진 식에 대입하면

$4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$ 좌변과 우변을 각 각 정리하면

$4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$ 이므로

항등식에서 계수비교법을 사용하면

$4a=4a^2+1$ 이며 정리하면

$4b=4$ 이다.

$4a^2-4a+1=0$ 이며 정리하면

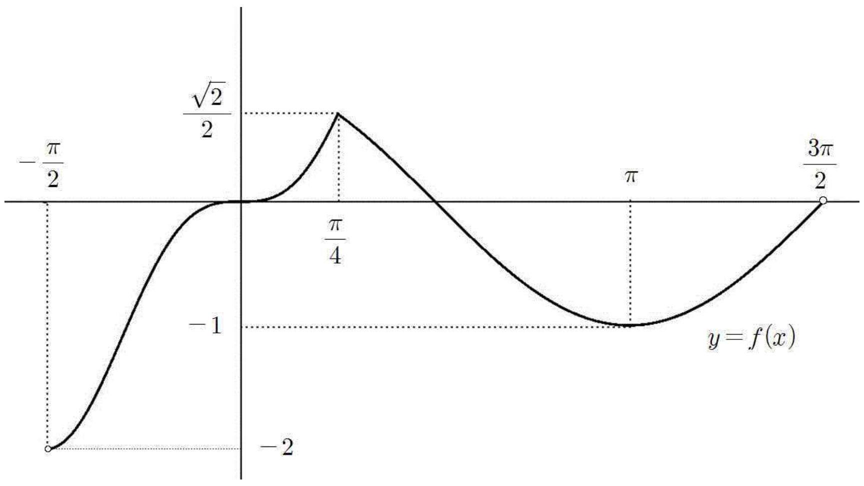
$(2a-1)^2=0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}, b=1$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ 이므로 $f(2)=3$

23) 답 : ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$y=\sqrt{|f(x)-t|}=\begin{cases}\sqrt{f(x)-t}, & (f(x)\ge t)\\ \sqrt{-f(x)+t}, & (f(t)<t)\end{cases}$ 를 x에 대해 미분하면

$$y'=\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}}, & (f(x)\ge t)\\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}}, & (f(x)<t)\end{cases}$$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{4}$에서 연속이다.

하지만, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $x=\frac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

또한 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 점에서 미분가능하지 않다.

$t=-1$일 때 즉, $y=\sqrt{1+\cos t}$ 의 $x=\pi$에서의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{h}{2}}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}$$

에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

t의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값을 구해보면

$$g(t)=\begin{cases}1, & (t\le -2)\\ 2, & (-2<t<-1)\\ 3, & (t=-1)\\ 4, & (-1<t<0)\\ 2, & (t=0)\\ 3, & \left(0<t<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1, & \left(t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $a=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1, b=g(0)=2, c=g(-1)=3$이다.

또한, 함수 $h(g(t))$가 실수 전체에서 연속이므로

$h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$이 성립하고

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$라 할 수 있다.

$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c$

$=h(6)-f(5)+3$

$=(120+k)-(24+k)+3$

$=99$

24) 답 : 65

[해설]

조건 (가)에 의해

$f(1)+\cdots+f(n-1)+f(n)=f(n)f(n+1)$... ①

$f(1)+\cdots+f(n-1)=f(n-1)f(n)$... ②

①−②를 하면

$f(n)=f(n)\{f(n+1)-f(n-1)\}$이다.

따라서 $f(n)=0$ 또는 $f(n+1)-f(n-1)=1$ $\cdots(AST)$이어야 한다.

조건 (나)에 의해

$n=3$일 때 $\frac{f(5)-f(3)}{5-3}\le 0$에서 $f(5)\le f(3)$

$n=4$일 때 $\frac{f(6)-f(4)}{6-4}\le 0$에서 $f(6)\le f(4)$

이므로 (ast)에 의해 $f(4)=0$, $f(5)=0$이 된다.

조건 (가)에 $n=1$, 2, 3을 각각 대입하여 정리하면

$n=1$일 때 $f(1)=f(1)f(2)$

$n=2$일 때 $f(1)+f(2)=f(2)f(3)$

$n=3$일 때 $f(1)+f(2)+f(3)=0$ ($\because f(4)=0$)

(ⅰ) $f(3)=0$인 경우

$f(1)+f(2)=0$에서 $f(1)=-\{f(1)\}^2$이므로

$f(1)=0$ 또는 $f(1)=-1$이다.

$f(1)=0$이면 $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=0$이 되어

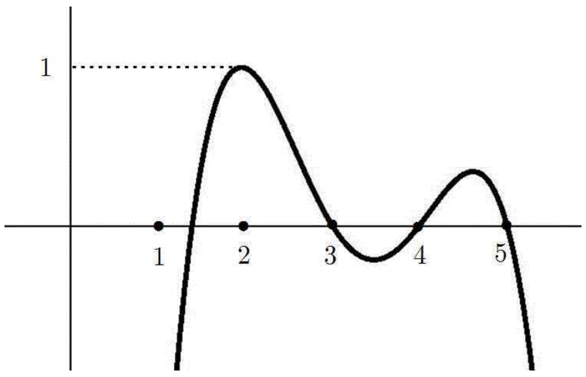
사차함수라는 조건에 위배된다.

따라서 $f(1)=-1$, $f(2)=1$, $f(3)=f(4)=f(5)=0$ ...③

이 성립한다.

그래프를 그려보면 사잇값 정리에 의해 $(1,\ 2)$에서 근을 갖고

$f(6)-f(4)\le 0$을 만족한다.



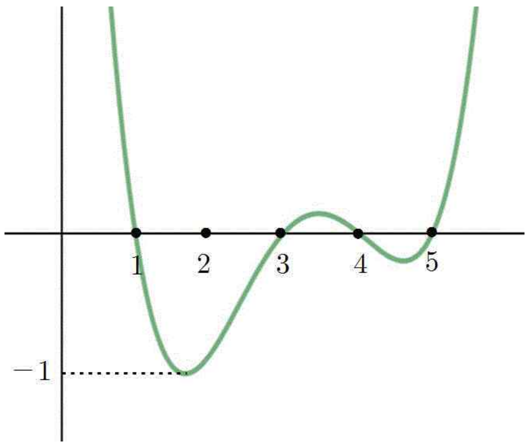
(ⅱ) $f(3)\ne 0$인 경우

$f(1)+f(2)=-f(2)\{f(1)+f(2)\}$에서 $f(2)=-1$이므로

$f(1)=0$이 된다.

따라서 $f(1)=0$, $f(2)=-1$, $f(3)=1$, $f(4)=f(5)=0$이 성립한다.

그래프를 그려보면 $f(6)-f(4)\le 0$을 만족하지 않는다.



(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $f(x)=(ax+b)(x-3)(x-4)(x-5)$이 된다.

③ 을 대입하면

$f(1)=-24(a+b)=-1$, $f(2)=-6(2a+b)=1$에서

$a=-\frac{5}{24}$, $b=\frac{6}{24}$ 을 얻는다.

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{24}(5x-6)(x-3)(x-4)(x-5)$

$128\times f\left(\frac{5}{2}\right)=2^7\times\left(-\frac{1}{24}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{25}{2}-6\right)=65$

25) 답 : 25

[해설]

$f'(x)=3x^2-2$이므로 $f'(3)=3\cdot 3^2-2=25$

26) 답 : 78

[해설]

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=m$ (m은 자연수)라 하자.

$na-a^2=nb-b^2=2^m$ ······ ㉠

$0<b-a\le\frac{n}{2}$이므로 $(b-a)(b+a-n)=0$으로부터 $b+a=n$

$\therefore\ 0<2b-n\le\frac{n}{2}$ ······ ㉡

㉠으로부터 $nb-b^2=2^m \Leftrightarrow b^2-nb+2^m=0$이므로

$b=n\pm\frac{\sqrt{n^2-2^{m+2}}}{2} \Leftrightarrow 2b-n=\pm\sqrt{n^2-2^{m+2}}$

이를 ㉡에 넣어 정리하면 $0<\sqrt{n^2-2^{m+2}}\le\frac{n}{2}$

각 변을 제곱한 후 이항하면 $2^{m+2}<n^2\le\frac{1}{3}\cdot 2^{m+4}$

$m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ 을 대입해보면 위 식을 만족하는 20이하의 자연수 n은 3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이 됨을 알 수 있다.

따라서 $3+6+9+12+13+17+18=78$

[다른 풀이]

주어진 조건에 의해

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$ (k는 자연수)

$\Leftrightarrow na-a^2=nb-b^2=2^k$ (k는 자연수)

따라서 이차방정식 $nx-x^2=2^k$의 두 근을 a, b라 할 수 있다.

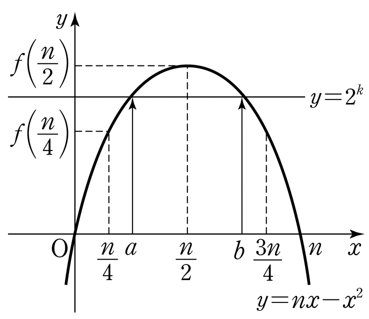
결국 a, b는 함수 $y=nx-x^2$과 함수 $y=2^k$의 교점의 x좌표이다.

이때 주어진 조건에 의해 $0<b-a\le\frac{n}{2}$이고,

근과 계수의 관계에 의해 $a+b=n$이므로

부등식에 $b=n-a$를 대입하여 정리하면

$\frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2}<b\le\frac{3}{4}n$임을 얻을 수 있다.



따라서 그림과 같이 $f\left(\frac{n}{4}\right)\le 2^k<f\left(\frac{n}{2}\right)$을 만족해야 한다.

즉, $\frac{3}{16}n^2\le 2^k<\frac{n^2}{4}$ (k는 자연수)

n에 대하여 정리하면

$2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$ (k는 자연수)

$k=1$, $8<n^2\le\frac{32}{3}=10.\times\times$

$\therefore\ n=3$

$k=2$, $16<n^2\le\frac{64}{3}=21.\times\times$

$\therefore$ 만족하는 n은 없다.

$k=3$, $32<n^2\le\frac{128}{3}=42.\times\times$

$\therefore\ n=6$

$k=4$, $64<n^2 \le \dfrac{256}{3}=85.\times\times$

$\therefore \quad n=9$

$k=5$, $128<n^2 \le \dfrac{512}{3}=170.\times\times$

$\therefore \quad n=12,\ 13$

$k=6$, $256<n^2 \le \dfrac{1024}{3}=341.\times\times$

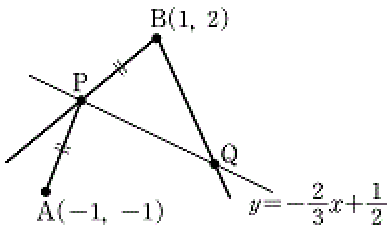
$\therefore \quad n=17,\ 18$

따라서 주어진 부등식을 만족하는
20 이하의 자연수 n은
$n=3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 13,\ 17,\ 18$

$\therefore \quad 3+6+9+12+13+17+18=78$

27) 답 : 186

[해설]



두 점 $A(-1,\ -1)$, $B(1,\ 2)$로부터 거리가 같은 점들의 자취는

$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$

$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$와 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는 각각 $x=-\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{21}{8}$이므로

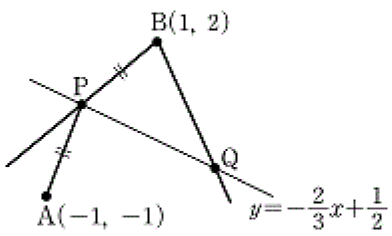
$g(x)$와 $g'(x)$는 다음과 같이 구해진다.

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5, & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2, & \left(-\dfrac{3}{10}<x<1\right) \\ 5x^2-10x+5, & \left(1<x<\dfrac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26, & \left(x>\dfrac{21}{8}\right) \end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6, & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 4x-4, & \left(-\dfrac{3}{10}<x<1\right) \\ 10x-10, & \left(1<x<\dfrac{21}{8}\right) \\ 10x-18, & \left(\dfrac{21}{8}<x\right) \end{cases}$$

$x=-\dfrac{3}{10}$, $\dfrac{21}{8}$에서 미분가능하지 않으므로 $80p=186$

[다른 풀이]



점 P가 $y=x+1\,(x<1)$에 있을 때,

$\overline{AB}$의 수직이등분선인 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$과

$y=x+1\,(x<1)$의 교점 $P\left(-\dfrac{3}{10},\ \dfrac{7}{10}\right)$에서

$\overline{PA}=\overline{PB}$이다.

점 Q가 $y=-2x+4\,(x\ge 1)$에 있을 때,

$\overline{AB}$의 수직이등분선인 $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}$과

$y=-2x+4\,(x\ge 1)$의 교점 $Q\left(\dfrac{21}{8},\ -\dfrac{5}{4}\right)$에서

$\overline{QA}=\overline{QB}$

따라서 $g(x)$는 위의 풀이와 같다.

28) 답 : 10

[해설]

풀이

$f'(x)=3x^2+10$

$\therefore\ f'(0)=10$

29) 답 : 8

[해설]

$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(5)=8$

30) 답 : ⑤

[해설]

[해설]

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}2\times\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=2f'(1)$

이고,

$f(x)=x^2+8x \ \therefore\ \ f'(x)=2x+8$

$\therefore\ \ f'(1)=10$

31) 답 : ④

[해설]

$(x^4-4x^3+10x-30)-(2x+2)>0$

$\to x^4-4x^3+8x-32>0$

$\to (x^3+8)(x-4)>0$

로부터

$$f(t)=\begin{cases} t^4-4t^3+8t-32 & (t<-2,\ \ t>4) \\ -t^4+4t^3-8t+32 & (-2\le t\le 4) \end{cases}$$

$x=t$인 지점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 서로 달라야 하므로

$y=f(t)$의 개형이 바뀌는 $t=-2$, 4와

$f'(t)=0$을 만족하는 $t=-2$, $1-\sqrt{3}$ 1, $1+\sqrt{3}$, 4이 주어진 조건을 만족한다.

따라서 구하고자 하는 답은 $-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4=5$

32) 답 : 21

[해설]

$f'(x)=2x+1$이므로 $f'(10)=21$

33) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{f'(1)}{2}$$

한편, $f(x)=x^2+4x$ 에서 $f'(x)=2x+4$ 이므로 $f'(1)=6$

따라서 구하는 정답은 $\frac{1}{2}\times 6=3$

34) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼차 함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=x^2+x+1$ 이므로

$f'(1)=1^2+1+1=3$

35) 답 : 13

[해설]

$f'(x)=10x+3$ 이므로 $f'(1)=13$ 이다.

36) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{2h}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{2}\right\}=\frac{3}{2}f'(1)$$

$f(x)=x^3-x$ 이므로 $f'(x)=3x^2-1$ 에서

$f'(1)=3-1=2$ 이다.

그러므로 구하는 답은 $\frac{3}{2}f'(1)=3$ 이다.

37) 답 : 13

[해설]

$f'(x)=2x+7$ ∴ $f'(3)=6+7=13$

38) 답 : ④

[해설]

(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다. ∴ $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\frac{1}{2}f'(0)=4$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)=8$$

39) 답 : 14

[해설]

$f(1)=5,\ f'(1)=9$ 이고 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$ 이므로

∴ $g'(1)=f(1)+f'(1)=5+9=14$

40) 답 : ⑤

[해설]

$x>1$ 일 때 $\sqrt{(x-1)^2+\{f(x)-f(1)\}^2}=x^2-1$ 에서

$f(x)-f(1)=(x-1)\sqrt{x(x+2)}$ 이므로

$$\therefore\ f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{3}$$

41) 답 : ②

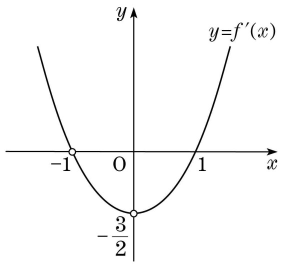
[해설]

[출제 의도] 주어진 함수와 도함수를 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서만 불연속이고,

$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-3)$ (단, $x\neq -1,\ x\neq 0$)

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to 0}f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $f'(x)=t$라 하면 $x\to -1+$ 일 때 $t\to 0-$ 이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to -1+}f(f'(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=-1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

42) 답 : 17

[해설]

해설

$f(x)=x^2+3x$

$f(2)=2^2+3\cdot 2=10$

$f'(x)=2x+3$

$f'(2)=2\cdot 2+3=7$

∴ $f(2)+f'(2)=10+7=17$

43) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x)=(x^3+5)(x^2-1)$ 에서 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2(x^2-1)+2x(x^3+5)$

따라서 $f'(1)=2\times 6=12$

44) 답 : ①

[해설]

해설

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$ 일 때,

x가 1에 가까워질 때, 분모가 x에 가까이 지므로,

분자도 0으로 가까이 가고, $f(x)$가 다항함수가 다항함수이므로,

$f(1)=2$

$f(x)$가 다항함수라서 미분이 가능하므로,

도함수의 정의를 이용할 수 있도록 주어진 식을 변형하면,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-2}{x-1}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)=f'(1)\times\frac{1}{2}=3$$

그러므로 $f'(1)=6$

따라서 구하고자 하는

$\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6}{2}=3$ 이 된다.

45) 답 : ⑤

[해설]

$h(x)=\begin{cases} f(x), & (x \geq 0) \\ g(x), & (x<0) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=0$에서도 연속이어야 한다.

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)=h(0)$이므로 $f(0)=g(0)$ (참)

ㄴ. $h'(x)=\begin{cases} f'(x), & (x>0) \\ g'(x), & (x<0) \end{cases}$ 이므로

$f'(0)=g'(0)$이면 도함수 $h'(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $x=0$에서 역시 미분가능하다.(참)

ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $f'(0)$와 $g'(0)$는 서로 다른 부호이므로 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이면서 증가에서 감소로 변하는 극대가 되거나 감소에서 증가로 변하는 극소가 된다.(참)

46) 답 : 28

[해설]

$f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$

$f'(x)=6x^2(x-1)^2+2(x-1)(2x^3+1)$

$\therefore f'(-1)=28$

47) 답 : ①

[해설]

y축 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$이다.

양변을 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$

$\therefore f'(-2)=3$, $f'(-4)=-6$

[구하는 값]$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)} \times \dfrac{f(x^2)-f(4)}{x-(-2)}$

$= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\dfrac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}}{\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}} \times (x-2)$

$= \dfrac{f(4)}{f'(-2)} \times (-4) = -8$

48) 답 : 13

[해설]

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고

조건㈏, ㈐에 의해

$f(2)=2,\ f'(2)=0,\ f'(0)=0$이므로

$f(2)=16+8a+4b+c+d=2 \cdots ①$

$f'(2)=32+12a+4b+c=0 \cdots ②$

$f'(0)=c=0 \cdots ③$

① , ②, ③을 연립하여 한문자 a에 대하여 정리하면

$b=-8-3a,\ d=4a+18$이 된다.

따라서 $y=f(x)=x^4+ax^3+(-8-3a)x^2+(4a+18)$가 된다.

조건을 만족하는 모든 사차 함수가 일정한 점을 지나므로

a에 대한 항등식으로 정리하면

$(x^3-3x^2+4)a+(x^4-8x^2+18-y)=0$

$(x-1)(x-2)^2a+(x^4-8x^2+18-y)=0$이다.

$(x-1)(x-2)^2=0,\ x^4-8x^2+18-y=0$이 되어야 하므로 이 연립방정식을 풀면 일정한 점의 좌표는 $(2, 2),\ (-1, 11)$이다.

따라서 y좌표의 합은 13이다.

49) 답 : 21

[해설]

각 구간에서 $f(x)$를 구하면

(ⅰ) $0<x<1 : f(x)=2x-1$

(ⅱ) $x=1 : f(1)=\dfrac{a+1}{2}$

(ⅲ) $x>1 : f(x)=ax^b$

$x=1$에서 미분 가능하므로

a)연속조건: $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)=f(1)$

$\therefore a=1$

b)미분가능조건: $f'(x)=\begin{cases} 2, & (x<1) \\ abx^{b-1}, & (x>1) \end{cases}$

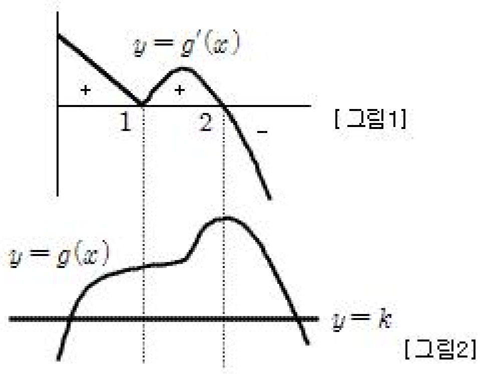
$\therefore 2=ab$

a)와 b)에서 $a=1,\ b=2$

$\therefore a+10b=1+20=21$

50) 답 : ③

[해설]



x의 범위에 따라 $g(x)$는 다음과 같이 주어진다.

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} (t-1)(-1)dt, & (x<1) \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} (t-1)(-1)dt+\int_{1}^{x} (t-1)(2-t)dt, & (x \geq 1) \end{cases}$$

위의 식을 정리하고 각 구간에 따라 미분하면

$g'(x)=\begin{cases} 1-x, & (x<1) \\ -x^2+3x-2, & (x \geq 1) \end{cases}$

$y=g'(x)$와 그에 따른 $y=g(x)$의 그래프 개형을 그려보면

위 그림과 같다.

ㄱ. $(1, 2)$에서 $g'(x)>0$이므로 $g(x)$는 증가한다.(참)

ㄴ. $x=1$에서의 좌우 미분계수가 0으로 같으므로 $x=1$에서 미분 가능

하다.(참)

ㄷ.[그림2]에서 $y=k$의 그래프는 $y=g(x)$와 최대 서로 다른 두 점에

서 만나므로, 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는

실수 k는 존재하지 않는다.(거짓)

따라서 ㄱ, ㄴ 만 옳다.

51) 답 : 14

[해설]

$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3+6h^2+14h}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2+6h+14)=14$

52) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=0$이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능이고 연속이다.

$\therefore \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ ∴ 참

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=0$이다.

∴

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-2h}\right)=0$

∴ 참

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$ ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

53) 답 : ③

[해설]

이차 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$f(x)=p(x-3)^2+q$(단, $p\neq 0$)로 놓으면

ㄱ. $f(-1)=f(7)$

$\therefore \frac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}=0$(참)

ㄴ. $f'(x)=2p(x-3)$이고

$a+b=6$에서 $b=6-a$이므로

$f'(a)=2p(a-3)$

$f'(b)=f'(6-a)=-2p(a-3)$

$\therefore f'(a)+f'(b)=0$(참)

ㄷ. ㄴ에 의해

$\sum_{k=1}^{15}f'(k-3)$

$=f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+\cdots+f'(12)$

$=\{f'(-2)+f'(8)\}+\{f'(-1)+f'(7)\}$

$+\{f'(0)+f'(6)\}+\{f'(1)+f'(5)\}$

$+\{f'(2)+f'(4)\}+f'(3)$

$+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=0+0+0+0+0+0+0+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=2p(9-3)+2p(10-3)+2p(11-3)+2p(12-3)$

$=60p\neq 0$(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.[정답]③

54) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]다항함수의 미분법

$f(x)=x(4x^2+5)$에서

$f'(x)=4x^2+5+x\cdot 8x$

$\therefore f'(1)=4+5+8=17$

55) 답 : 12

[해설]

$f(x)=(x^3+3x+1)(x^2-2x+3)$이며 양변을 미분하면

$f'(x)=(3x^2+3)(x^2-2x+3)+(x^3+3x+1)(2x-2)$

$\therefore f'(1)=12$

56) 답 : 12

[해설]

$f'(x)=(3x^2+3)(x^2-2x+3)+(x^3+3x+1)(2x-2)$

$\therefore f'(1)=12$

57) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]다항함수의 미분법

$f(x)=x(4x^2+5)$에서

$f'(x)=4x^2+5+x\cdot 8x$

$\therefore f'(1)=4+5+8=17$

58) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]다항함수의 미분법

함수 $f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx, & (x\geq 1)\\ 2x^2+1, & (x<1)\end{cases}$이 모든 실수 x에서 미분가능하려면

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

즉, $2+1=1+a+b$

$a+b=2\cdots$ ①

$x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2ax+b, & (x>1)\\ 4x, & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1+}f'(x)$ 이어야 한다.

즉, $3+2a+b=4\Leftrightarrow 2a+b=1\cdots$ ②

①, ②을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=3$

따라서 구하는 값인 $ab=-3$

59) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 극한값을 구한다.

[구하는 값] $=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1+1=2$

60) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 미분계수 계산하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f'(x)=2x+3$이므로 $f'(1)=5$

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=5$

61) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 지수함수의 미분을 활용하여 추론하기

함수 $g(x)$가 실수 전체에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$는 실수 전체에서 연속이다.

$y=g(x)$가 $x=b$에서 연속이므로

$g(b)=0$, $\lim_{x\to b-}g(x)=0$, $\lim_{x\to b+}g(x)=f(b)-a$

$\therefore\ f(b)-a=0$

함수 $g(x)$가 $x=b$에서 미분가능하므로

$g'(b)=\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}$

$\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{\{f(b+h)-a\}-0}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$

$=f'(b)$

$\lim_{h\to0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=0$

$\therefore\ f'(b)=0$

$f'(x)=e^{-2x+1}-2xe^{-2x+1}=(1-2x)e^{-2x+1}$이므로

$f'(b)=(1-2b)e^{-2b+1}=0\ \therefore\ b=\frac{1}{2}$

$f(b)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 $ab=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

62) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미정계수를 구한다.

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=2+a$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{1}{2}f'(1)$

$=\frac{1}{2}(2+a)$

따라서 $\frac{1}{2}(2+a)=6$에서 $a=10$

63) 답 : 11

[해설]

[출제 의도] 미분계수 계산하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

$f'(x)=2x+5$이므로

$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=11$

64) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 몫의 미분법 이해하기

$\overline{OP}=t+\frac{1}{t}$, $\overline{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{2t}$

$f(t)=\overline{OP}\times\overline{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2t^2}$

$f'(t)=-\frac{\sqrt{2}}{t^3}$이므로

$f'(\sqrt{2})=-\frac{1}{2}$

65) 답 : 11

[해설]

[출제 의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2-1$이므로 $f'(2)=11$

66) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 극값의 뜻을 이해하여 조건을 만족시키는 다항함수의 미분계수를 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$이므로 $f(x)$는 삼차 함수이고 삼차항의 계수는 1이다.

따라서 $f'(x)$는 이차 함수이고 이차항의 계수는 3이다.

$x=-1$과 $x=2$에서 극값을 가지므로 $f'(x)$는 $x+1$과 $x-2$를 인수로 갖는다.

따라서 $f'(x)=3(x+1)(x-2)$이다.

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}$

$=2f'(3)=2\cdot3\cdot4\cdot1=24$

67) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 미분가능성을 이해한다.

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1\cdots$ ㉠

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$f'(0)=\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

그런데 $\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$,

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=2a(0-1)=-2a$ 이므로

$-1=-2a\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\dfrac{1}{2}$ ∴ $f(1)=b=\dfrac{1}{2}$ 이다.

68) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 미분계수의 성질 이해하기

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)-\{f(2-h)-f(2)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\{f(2-h)-f(2)\}}{-h}\times(-1)$$
$$=2f'(2)$$

$f'(x)=x^2+2x$ 이므로

$2f'(2)=2(4+4)=16$

69) 답 : 14

[해설]

[출제 의도] 미분계수의 성질 이해하기

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$ 이므로 $f'(1)=-2$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1+5h)}{h}=-7f'(1)=14$

70) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 미분계수 계산하기

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-2)(x-3)\cdots(x-10) \\ &\quad +(x-1)(x-3)\cdots(x-10) \\ &\quad\quad \vdots \\ &\quad +(x-1)(x-2)\cdots(x-9) \end{aligned}$$

$f'(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-10)$

$f'(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)\cdots(4-10)$

$\dfrac{f'(1)}{f'(4)}=\dfrac{(-7)\times(-8)\times(-9)}{3\times2\times1}=-84$

(별해)

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\{(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-10)\}$$
$$=-9!$$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)\cdots(x-10)\}$$
$$=3!\times 6!$$

∴ $\dfrac{f'(1)}{f'(4)}=-84$

71) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성과 미분가능성에 대한 성질 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}[xf(x)]=1$ (참)

ㄴ. $g(x)=[xf(x)]$ 라 하면, $g(\sqrt{2})=0$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}g(x)=1$ 이므로

$[xf(x)]$ 는 $x=\sqrt{2}$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{(x-\sqrt{2})[xf(x)]-0}{x-\sqrt{2}}=1$ (참)

72) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]도함수의 성질을 이해하여 절댓값을 포함하는 함수의 미분계수를 구한다.

$g(x)=x|x|$, $h(x)=|x-1|^3$ 으로 놓으면

두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로

함수 $f(x)$도 실수 전체에서 미분가능하다.

$g'(0)=0$, $h'(1)=0$ 이고

$x>0$ 일 때 $g(x)=x^2$,

$x<1$ 일 때 $h(x)=-(x-1)^3$ 이므로

$f'(0)=0+h'(0)=-3(0-1)^2=-3$

$f'(1)=g'(1)+0=2$

∴ $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

[다른 풀이1]

$f(x)=x|x|+|x-1|^3$ 에서 $f(0)=1$, $f(1)=1$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-(h-1)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{-h^3+4h^2-3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}(-h^2+4h-3)=-3$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h|h|+|h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^2-(h-1)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^3+2h^2-3h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}(-h^2+2h-3)=-3$$

∴ $f'(0)=-3$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}\frac{h^3+h^2+2h}{h}=\lim_{h\to 0+}(h^2+h+2)=2$$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)|1+h|+|1+h-1|^3-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{(1+h)^2+|h|^3-1}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-h^3+h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}(-h^2+h+2)=2$$

∴ $f'(1)=2$

∴ $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

[다른 풀이2]

$f(x)=\begin{cases} x^2+(x-1)^3, & (x \ge 1) \\ x^2-(x-1)^3, & (0 \le x < 1) \\ -x^2-(x-1)^3, & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$f'(x)=\begin{cases} 2x+3(x-1)^2, & (x>1) \\ 2x-3(x-1)^2, & (0<x<1) \\ -2x-3(x-1)^2, & (x<0) \end{cases}$

$\lim_{x \to 0+} f'(x)=2 \cdot 0-3(0-1)^2=-3$

$\lim_{x \to 0-} f'(x)=-2 \cdot 0-3(0-1)^2=-3$

$\therefore\ f'(0)=-3$

$\lim_{x \to 1+} f'(x)=2 \cdot 1+3(1-1)^2=2$

$\lim_{x \to 1-} f'(x)=2 \cdot 1-3(1-1)^2=2$

$\therefore\ f'(1)=2$

이상에서 $f'(0)+f'(1)=-3+2=-1$

73) 답 : ④

[해설]

함수 $f(x)$는 연속함수이다.

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+a, & (x>1) \\ 4x, & (x<1) \end{cases}$

$\lim_{x \to 1+}(3x^2+a)=\lim_{x \to 1-} 4x$ 에서 $3+a=4$ 이다.

$\therefore\ a=1$

74) 답 : ①

[해설]

$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

위 식의 양변에 극한을 취하면

$\lim_{h \to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$

$g'(x)=f(x)$ 이므로

$g(x)=\int f(x)dx=\int (x^2-4x)dx=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$

$g(x)=0$ 이므로 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+C=0$ 이다.

∴ 모든 근의 합 6

75) 답 : 36

[해설]

$f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로, $-\frac{1}{2}(3-a)^2+b=9 \cdots ①$

또한 $f'(x)=\begin{cases} 2x, & (x \le 3) \\ -x+a, & (x>3) \end{cases}$

$f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로 $a=9 \cdots ②$

① , ② 에 의하여

$a=9,\ b=27$

$\therefore\ a+b=36$

76) 답 : ④

[해설]

$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{10}}{10}$ 이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$ 이다.

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}$

$\therefore\ q-p=1023-512=511$

77) 답 : ⑤

[해설]

$f'(0)=\lim_{h \to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h \to 0}\frac{2h+h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h \to 0}\left(2+h\sin\frac{1}{h}\right)=2$

78) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 미분계수의 정의 이해하기

$\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f(a-h)+f(a)}{h}$

$=2f'(a)=8$

$\therefore\ a=5$

79) 답 : ③

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=\pm1$에서 미분가능해야 하므로

$f(-1)=3+a=-1+b-c,\ f'(-1)=-3$ 이고

$f(1)=-3+d=1+b+c,\ f'(1)=-3$ 이다.

$\therefore\ a+b+c+d=2+0-6-2=-6$

80) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]연속성과 미분가능성의 개념 이해하기

ㄱ. $\frac{g(2)}{f(2)}=0,\ \lim_{x \to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ (참)

ㄴ. $g(f(1))=-1,\ \lim_{x \to 1} g(f(x))=-1$ (참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases} 1, & (3 \le x < 4) \\ x-3, & (4 \le x \le 5) \end{cases}$,

$g(x)=x-4\ (3 \le x \le 5)$

$f(x)g(x)=\begin{cases} x-4, & (3 \le x < 4) \\ x^2-7x+12, & (4 \le x \le 5) \end{cases}$

$\lim_{x \to 4-}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$

$\lim_{x \to 4+}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$ (참)

81) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]곱의 미분법으로 미분계수 구하기

$f(x)=(2x^2-3x)(x^2-x+2)$

$f'(x)=(4x-3)(x^2-x+2)+(2x^2-3x)(2x-1)$이므로
$f'(2)=26$

82) 답 : ②
[해설]
$\frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=\frac{a(a^2-1)}{a+1}=a(a-1)$
$f'(a)=3a^2-1$
$\therefore\ 2a^2+a-1=0$한 근은 무연근이므로 원소는 1개

83) 답 : ④
[해설]
ㄱ. $0>f'(a)>f'(b)$이고 $0<a<b$이므로
$\frac{f'(a)}{b}>\frac{f'(b)}{b}>\frac{f'(b)}{a}$ (참)
ㄴ. $(a, f(a))$, $(b, f(b))$두 점을 지나는 직선의 기울기는 $x=b$에서 접선의 기울기보다 크다.(거짓)
ㄷ. $0<a<b$에 대하여 $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고 개구간 (a, b)에서 접선의 기울기는 점점 감소함으로
$f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$(참)

84) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]나머지 정리를 활용하여 극한값 구하기
$(x+1)^n=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$라 하면, $R(x)=ax+b$이다.
$x=1$을 대입하면 $2^n=a+b$
$x=2$을 대입하면 $3^n=2a+b$
$\therefore\ a=3^n-2^n,\ b=-3^n+2^{n+1}$
$R(0)=-3^n+2^{n+1}$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-3^n+2^{n+1}}{3^n+2^n}=-1$$

85) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]평균변화율과 미분계수의 정의 이해하기
x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은
$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{3a^2-2a}{a}=3a-2$
$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)=4$이므로
$3a-2=4$
$\therefore\ a=2$

86) 답 : 26
[해설]
[출제 의도]곱의 미분법을 이용하여 미분계수 구하기
[해설] $f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)$
$+(x-1)(x-2)$이므로 $f'(5)=26$

87) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]함수의 연속성과 미분가능성 조사하기
[해설]㈎: 0
㈏: $-|k|$
㈐:미분가능하다.

88) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]함수의 연속성과 미분가능성을 판단할 수 있는가를 묻는 문제이다.
ㄱ. 함수 $f(x)$의 x절편을 a, b $(a<0, b>0)$라 하자.
$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{a}x+1, & (x\le 0)\\ -\frac{1}{b}x+1, & (x>0)\end{cases}$ 로 정의된다.
$x<0$일 때, $f'(x)=-\frac{1}{a}$이다.
$a<0$이므로 $f'(x)=-\frac{1}{a}>0$가 된다.
$\therefore\ x<0$일 때, $f'(x)>0$이다.(참)
ㄴ. $\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{a}>0$이고
$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{b}<0$이다.
$f(x)$는 $x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다.
$\therefore$ 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)
ㄷ. $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+xf(x)}-\frac{1}{1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xf(x)}{x(1+xf(x))}$
$\lim_{x\to 0}\frac{-f(x)}{1+xf(x)}=-f(0)=-1$이 된다.
$\therefore$ 함수 $y=\frac{1}{1+xf(x)}$는 $x=0$에서 미분가능하다.(참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

89) 답 : ⑤
[해설]
ㄱ.(반례)
$f(x)=x^2+2x$라 하면 $f(0)=0$
$f'(x)=2x+2$이므로 $f'(0)=2\ne 0$(거짓)
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여
$g(x)=g(-x)$이므로 $g(x)$는 우함수 따라서 $g'(x)$는 기함수이고 모든 기함수의 그래프는 원점에 대칭이므 로 반드시 원점을 지난다.
$\therefore\ g'(0)=0$(참)
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여
$0\le|h(2x)-h(x)|\le x^2$이므로 양변을 $|x|$로 나누면
$$0\le\left|\frac{h(2x)-h(x)}{x}\right|\le\frac{x^2}{|x|}$$
$$0\le\lim_{x\to 0}\left|\frac{h(2x)-h(0)}{2x-0}\cdot 2-\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\right|\le\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}$$
$0\le|2h'(0)-h'(0)|\le 0$
$0\le h'(0)\le 0$
$\therefore\ h'(0)=0$(참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

90) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]여러 가지 함수의 미분법을 이용하여 변화율 이해하기

$P\left(x, x^{\frac{3}{2}}\right)$에 대하여

$$\overline{OP}=l=\sqrt{x^2+x^3}$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{1}{2}(x^2+x^3)^{-\frac{1}{2}}(2x+3x^2)\frac{dx}{dt}$$

$x=3$일 때, $\frac{dl}{dt}=11$이므로

∴ $\frac{dx}{dt}=4$

91) 답 : ①

[해설]

㈏에서 $f_1(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)+2kx}{f_1(x)+kx}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f_1(x)}{x}+2k}{\frac{f_1(x)}{x}+k}$$

$f_1(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}$ 이므로

$$f'_1(0)=\frac{f'_1(0)+2k}{f'_1(0)+k}$$

$f'_1(0)=a$ (a는 실수)라 하면

$$a=\frac{a+2k}{a+k}\Leftrightarrow a+2k=a^2+ak\cdots①$$

같은 방법으로 $f'_2(0)=b$라 하면

$$b=\frac{b+2k}{b+k}\Leftrightarrow b+2k=b^2+bk\cdots②$$

① -②에서

$a-b=(a-b)(a+b+k)$

㈐에서 $ab=-1$이므로 $a\neq b$

∴ $a+b=1-k\cdots③$

또한

$$ab=\frac{a+2k}{a+k}\cdot\frac{b+2k}{b+k}=-1$$

$5k^2+3(a+b)k-2=0$

위의 식에 ③을 대입하여 정리하면

$2k^2+3k-2=(2k-1)(k+2)=0$

$k=\frac{1}{2}, -2$

그런데 $k=-2$이면 a, b는 실수가 아니다. ∴ $k=\frac{1}{2}$

92) 답 : 28

[해설]

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에서

$x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ ∴ $f(0)=1$

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$ 이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$=2x+f'(0)\cdots①$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로(분자)$\to0$이어야 한다.

∴ $f(1)=f'(1)$

① 에서 $f'(1)=2+f'(0)$이므로

$f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$

∴ $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)-1$$

$$=14$$

∴ $f'(1)=30$

∴ $f'(0)=f'(1)-2=28$

[다른 풀이]

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에서

$x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ ∴ $f(0)=1$

$f'(0)=k$라 하면

$$k=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$2x+k$$

∴ $f(x)=\int(2x+k)dx=x^2+kx+C$

(C는 상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

∴ $f(x)=x^2+kx+1$

따라서, $f'(x)=2x+k$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+kx+1-2x-k}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2+k(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1+k}{x+1}$$

$\frac{k}{2}$

14

$\therefore\ k=28$

93) 답 : ①

[해설]

$f'(x)=4x^3+2x$ 이고 $f'(1)=6$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$$

$$f'(1)\cdot\frac{1}{2}=3$$

94) 답 : 67

[해설]

[출제 의도]다항함수의 미분법

$f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2)$ 에서

$f'(x)=4x(x^2+x-2)+(2x^2-1)(2x+1)$

$\therefore\ f'(2)=32+35=67$

95) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]다항함수의 미분법

$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$ 에 $x=0$,

$y=0$ 을 대입하면

$f(0)=f(0)-f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$ …①

$f'(0)=8$ 이므로

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\ \cdots②$$

$$\therefore\ f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)-f(-h)+x\cdot(-h)(x+h)-f(x)}{h}\ (\because\ ㈎)$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(-h)}{-h}-x^2-xh\right\}$$

$=8-x^2\ (\because\ ②)$

$=(2\sqrt{2}+x)(2\sqrt{2}-x)$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고 $x=b$에서 극솟값을 가지므로

$a=2\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=8+8=16$

96) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]미분계수와 로그를 이용하여 계산하기

$f(x)=(x+3)(x-1)$ 에서

$f'(x)=2x+2$

$b=2a+2$

$d=\log_2 c$

1 → T → 0 → S → 2 → T → 1

1 → S → 4 → T → 2 → T → 1

$\therefore\ T,\ S,\ TS,\ T,\ T$

97) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]접선의 기울기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=(x^2-1)(2x+1)$ 에서

$f'(x)=2x(2x+1)+2(x^2-1)$ 이므로

$f'(1)=2\times3=6$

98) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]미분계수의 기하학적 의미를 알고 계산하기

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$ 이므로

ㄱ. $f(1)+g'(1)=f'(1)<0$

∴ 거짓

[정답]④

99) 답 : 118

[해설]

[출제 의도]함수의 연속성과 미분가능성을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $g(x)$는 연속이고 미분가능하므로

$f(a)=m-f(a),\ m-f(b)=n+f(b)$ …①

$$g'(x)=\begin{cases}f'(x), & (x<a)\\ -f'(x), & (a\le x<b)\\ f'(x), & (x\ge b)\end{cases}$$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

따라서 극댓값은 $f(-3)=27$, 극솟값은 $f(1)=-5$

① 에서 $m=2f(-3)=54$,

$n=m-2f(1)=54+10=64$ 이므로

$a=-3,\ b=1,\ m=54,\ n=64$

$\therefore\ m+n=118$

100) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 도함수를 구하기

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{1}{a}f(-ax-ah)+\frac{1}{a}f(-ax)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-ax-ah)-f(-ax)}{-ah}$$

$=f'(-ax)$

[정답]④

101) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]함수의 도함수를 구하기

[정답]①

102) 답 : 51

[해설]

[출제 의도]평균변화율의 값을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=n+1$ 에서 $f(n+1)-f(n)=n+1$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 구간 $[1, 100]$ 에서의 평균변화율은

$$\begin{aligned}&\frac{f(100)-f(1)}{100-1}\\&=\frac{f(100)-f(99)+f(99)-f(98)+\cdots+f(2)-f(1)}{99}\\&=\frac{100+99+\cdots+2}{99}=\frac{5049}{99}=51\end{aligned}$$