Ⅱ.함수의 극한과 연속성

2.함수의 연속성

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

1 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+6, & (x<2) \\ 1, & (x \geq 2) \end{cases}$, $g(x)=ax+1$에 대하여

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?[4점]

① $-\dfrac{5}{4}$　② -1　③ $-\dfrac{3}{4}$
④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{1}{4}$

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

2 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x+3, & (x \leq a) \\ x^2-x, & (x>a) \end{cases}$, $g(x)=x-(2a+7)$에 대하여

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오. [4점][2016(A) /수능 27]

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

3 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+10, & (x<1) \\ x+a, & (x \geq 1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속이

되도록 하는 상수 a의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

4 이차항의 계수가 1인 이차 함수 $f(x)$ 와 함수

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x+1)}, & (x \neq 0) \\ 8, & (x=0) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 구간

$(-1, \infty)$에서 연속일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 6　② 9　③ 12
④ 15　⑤ 18

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

5 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1, & (x \leq 0) \\ -\dfrac{1}{2}x+7, & (x>0) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)f(x-a)$가

$x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

6 두 함수 $f(x)=\begin{cases} -1, & (|x| \geq 1) \\ 1, & (|x|<1) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1, & (|x| \geq 1) \\ -x, & (|x|<1) \end{cases}$에 대하여

옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점][2013학년도 수능]

[보기]
ㄱ. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)g(x)=-1$ ㄴ. 함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다. ㄷ. 함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

7 실수 a에 대하여 집합

$\{x|ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0, x$는 실수$\}$의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$
ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a)\neq \lim_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

8 함수 $f(x)=x^2-4x+a$와 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

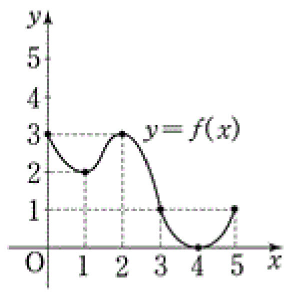
[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

9 닫힌구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\{(\{f(x)\}^2, (0\le x\le 3)), (f\circ f)(x$ 라 하자.

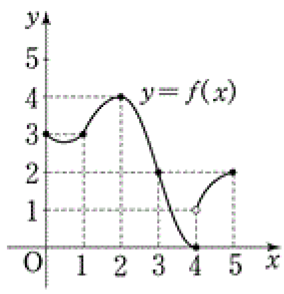
함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]

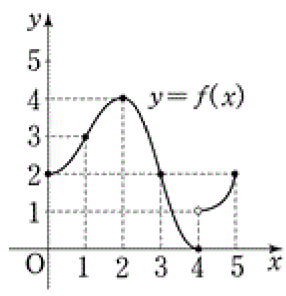
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

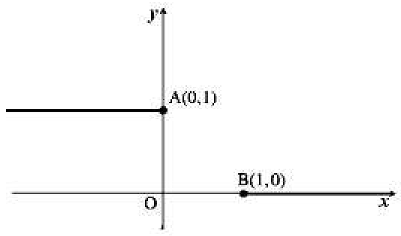
[난이도 : ★☆☆] [2009 학년도 대수능]

10 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-12}{x-3}, & (x\neq 3)\\ a, & (x=3)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, a의 값은?[2점]

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

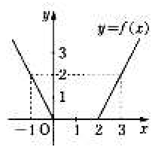
11 [공통]다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다. 두 점 $A(0,\ 1),\ B(1,\ 0)$사이를 $0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$의 그래프르 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 미분가능하도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

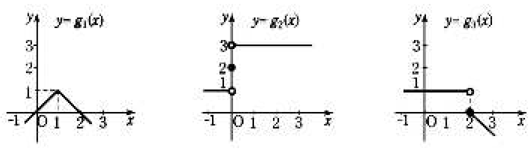


[난이도 : ★★★] [1997 학년도 대수능]

12 [공통]함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같이 주어져 있다.

아래의 그래프로 각각 주어진 함수 $y=g_1(x),\ y=g_2(x),\ y=g_3(x)$중에서 $f(x)$와 곱하여 얻어지는 함수 $y=f(x)g_k(x)\,(k=1,\ 2,\ 3)$이 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이 되는 $g_k(x)$를 모두 고르면?





① $g_1(x)$ ② $g_2(x)$ ③ $g_1(x),\ g_2(x)$
④ $g_1(x),\ g_3(x)$ ⑤ $g_1(x),\ g_2(x),\ g_3(x)$

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

13 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\dfrac{x}{f(x)}$는 $x=1,\ x=2$에서 불연속이다.
(나) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

14 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x, & (x\ge 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 $-1,\ 1,\ 2$일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, $a,\ b,\ c$는 상수이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

15 함수

$$f(x)=\begin{cases} 4x^2-a, & (x<1) \\ x^3+a, & (x\ge 1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

16 두 함수

$f(x)=\begin{cases} ax, & (x<1) \\ -3x+4, & (x \ge 1) \end{cases}$, $g(x)=2^x+2^{-x}$에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [4점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

17 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & (x \ne 1) \\ a, & (x=1) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

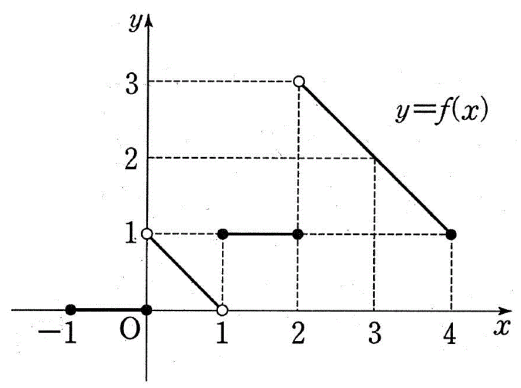
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

18 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(3x+2)(x-3)}{x-3}, & (x \ne 3) \\ a, & (x=3) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

19 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



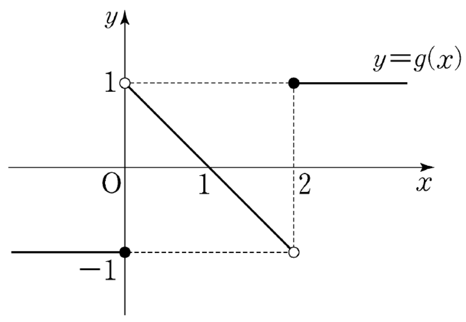
[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보 기]
ㄱ. $\lim_{x \to 1-} f(x) < \lim_{x \to 1+} f(x)$
ㄴ. $\lim_{t \to \infty} f\left(\dfrac{1}{t}\right)=1$
ㄷ. 함수 $f(f(x))$는 $x=3$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

20 최고차항의 계수가 1인 이차 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\begin{cases} -1, & (x \le 0) \\ -x+1, & (0<x<2) \\ 1, & (x \ge 2) \end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은?[3점][2012년 6월]



① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

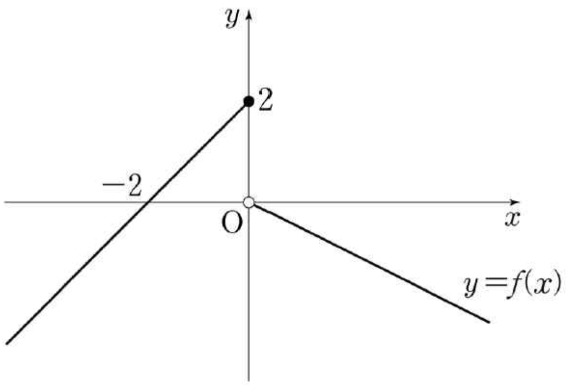
[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

21 함수 $f(x)=\begin{cases} x+a, & (x \le 1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}, & (x>1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

22 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2, & (x \le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x, & (x>0) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.

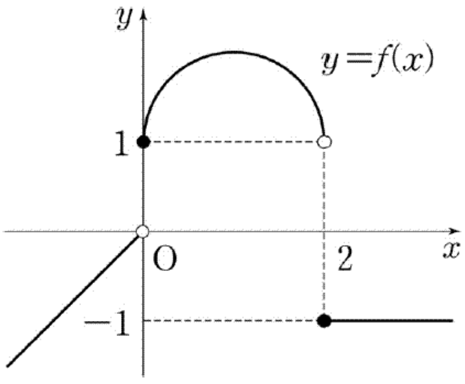


함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [3점]

① −2 ② −1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

23 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



다음 [보기]에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$
ㄴ. $\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=-1$
ㄷ. 함수 $\lvert f(x)\rvert$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

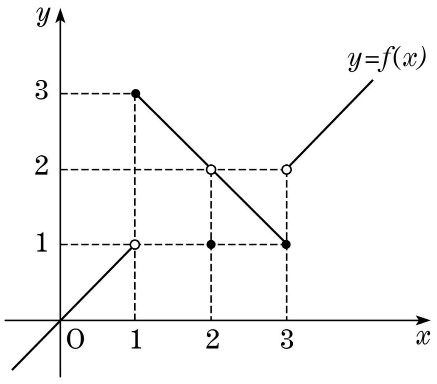
24 함수 $f(x)=\begin{cases} x, & (\lvert x\rvert \ge 1) \\ -x, & (\lvert x\rvert < 1) \end{cases}$ 에 대하여, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점][2012년 6월]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개다.
ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

25 그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서만 불연속이다.

이차 함수 $g(x)=x^2-4x+k$에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수 k의 합을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

26 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-10}{x-2}, & (x\neq 2)\\ b, & (x=2)\end{cases}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 값은?[3점][2011년 6월 평가원]

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

27 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}x^2, & (x\neq 1)\\ 2, & (x=1)\end{cases}$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$ ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다. ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

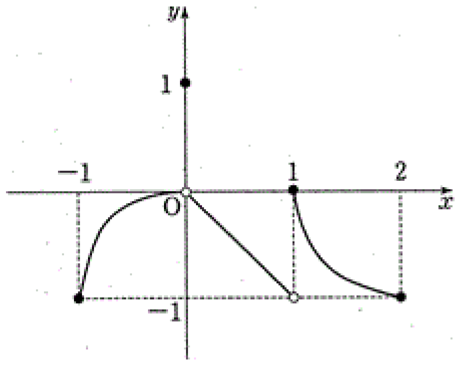
[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

28 최고차항의 계수가 1인 이차 함수 $f(x)$와 두 함수

$g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$, $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & (x\neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일때, $f(10)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 6월 모의평가]

29 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



닫힌구간 $[-1, 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$ 으로 정의할 때,

옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to1} h(x)$는 존재한다.
ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.
ㄷ. $\lim_{x\to0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

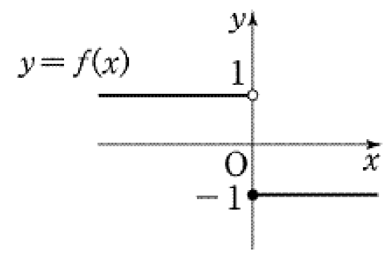
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 모의평가]

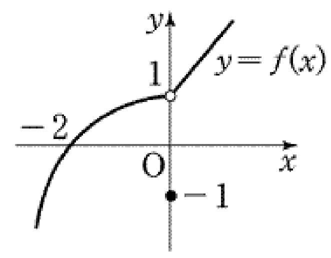
30 함수 $y=f(x)$의 그래프가 [보기]와 같이 주어질 때, 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$이 $x=-1$에서 연속이 되는 경우만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

<보 기>

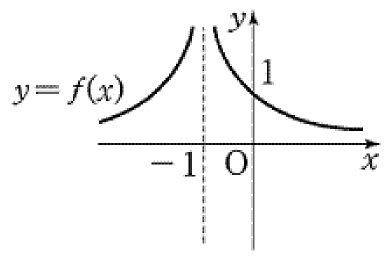
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 모의평가]

31 함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 1]$에서

$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다.

$a>1$에 대하여 함수 $g(x)$가 $g(x)=\begin{cases} x, & (x\neq1) \\ a, & (x=1)\end{cases}$일 때, 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=1$에서 연속이다. a의 최솟값은?[4점]

① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2008년 6월 모의평가]

32 서로 다른 두 다항함수 $f(x), g(x)$에 대하여 함수

$y=\begin{cases} f(x), & (x<a) \\ g(x), & (a \le x) \end{cases}$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f, g)$라 하자.

[보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=x^2, g(x)=x+1$이면 $N(f, g)=2$이다.
ㄴ. $N(f, g)=N(g, f)$
ㄷ. $h(x)=x^3$이면 $N(f, g)=N(h \circ f, h \circ g)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

33 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=\begin{cases} 1, & (x \ge 0) \\ -1, & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=\lvert x \rvert$일 때, $(g \circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $(g \circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $(f \circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

34 함수 $f(x)=\begin{cases} x(x-1), & (\lvert x \rvert > 1) \\ -x^2+ax+b, & (\lvert x \rvert \le 1) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?[3점]

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

35 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx, & (x \ge 1) \\ 2x^2+1, & (x<1) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 미분가능하도록 상수 a, b를 정할 때, ab의 값은?[3점]

① -5 ② -3 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

36 실수 전체 집합에서 정의된 두 함수 f, g가

$f(x)=\begin{cases} 2, & (x>0) \\ 1, & (x=0) \\ 0, & (x<0) \end{cases}$이고, $g(x)=\sin \pi x$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. $f(f(x))$는 상수함수이다.
ㄴ. $\lim_{x \to 0} f(g(x))$의 값이 존재한다.
ㄷ. $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

37 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & (x \neq 1) \\ a, & (x=1) \end{cases}$ 로 정의한다.

$x=1$에서 $f(x)$가 연속일 때, a의 값은? [3점]

① 0　② 1　③ 2　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

38 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}, & (x \neq 3) \\ a, & (x=3) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

39 두 실수 a, b에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b}\ (ab>0)$$

이 있다. 실수 k에 대하여 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2k-f(x), & (f(x)<k) \\ f(x), & (f(x) \geq k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x \to \infty} \lvert g(x) \rvert = \dfrac{1}{2}$
(나) $\lvert g(0) \rvert = 1$
(다) 함수 $y=\lvert g(x) \rvert$의 그래프와 직선 $y=-k$는 두 점 $\left(\dfrac{1}{28},\ -k\right)$, $(\alpha,\ -k)$에서만 만난다. (단, $\alpha > \dfrac{1}{28}$)

직선 $y=m(x-4\alpha)+\dfrac{3}{4}$이 함수 $y=\lvert g(x) \rvert$의 그래프와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(m)$이라 할 때, 함수 $h(m)$이 불연속이 되는 모든 실수 m의 값의 합은 M이다. $252M$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

40 연속함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & (x<-1) \\ 3x^2+1, & (x>-1) \end{cases}$$

이고 $f(-2)=\dfrac{1}{2}$일 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

41 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 과 최고차항의 계수가 1인 이차 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

42 함수 $f(x)=x^2e^{ax}$ $(a<0)$에 대하여 부등식 $f(x)\ge t$ $(t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값을 $g(t)$라 정의하자. 함수 $g(t)$가 $t=\dfrac{16}{e^2}$에서 불연속일 때,

$100a^2$의 값을 구하시오.(단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$)[4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

43 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & (-2\le x\le 0) \\ -x+2, & (0<x\le 2) \end{cases}$$

이다.

좌표평면에서 $k>1$인 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 타원 $\dfrac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(k)$라 하자.

함수 $g(k)$가 불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의합은? [4점]

① 6 ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{13}{2}$
④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

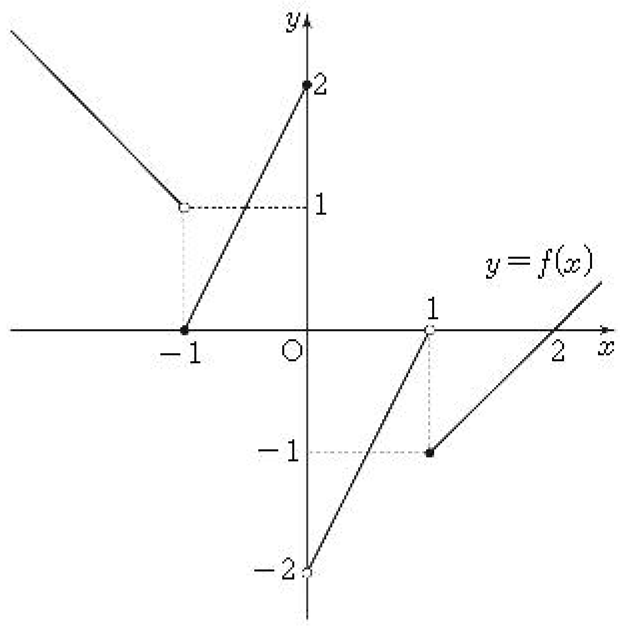
44 원 $x^2+y^2=t^2$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자.

함수 $(x+k)f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 연속일 때, $f(1)+k$의 값은?(단, k는 상수이다.)[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

45 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]



[보 기]
ㄱ. $\lim_{x\to 0+}\{f(x)+f(-x)\}=0$
ㄴ. $\lim_{x\to 1+}f(f(x))=1$
ㄷ. 함수 $\{f(x-1)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

46 최고차항의 계수가 1인 사차 함수 $f(x)$에 대하여

함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하고 $g(1)=g'(1)$이다.
(나) $g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$g(2)$의 값은? [4점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

47 -1이 아닌 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$f(x)=\begin{cases}-x-1, & (x\le 0)\\ 2x+a, & (x>0)\end{cases}$일 때, 함수 $g(x)=f(x)f(x-1)$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 값은? [4점]

① $-\dfrac{7}{2}$　② -3　③ $-\dfrac{5}{2}$
④ -2　⑤ $-\dfrac{3}{2}$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

48 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & (|x|\le 2)\\ -2x+3, & (|x|>2)\end{cases}$에 대하여 함수

$f(-x)\{f(x)+k\}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

49 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & (|x|\le 2)\\ -2x+3, & (|x|>2)\end{cases}$에 대하여 함수

$f(-x)\{f(x)+k\}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

50 함수 $f(x)=\begin{cases}(x-2)^2e^x+k, & (x\ge 0)\\ -x^2, & (x<0)\end{cases}$에 대하여 함수

$g(x)=|f(x)|-f(x)$가 다음 조건을 만족하도록 하는 정수 k의 개수는? [4점]

(가)함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(나)함수 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 2개다.

① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

51 다항함수 $f(x)$가

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=k$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$g(x)=\begin{cases}x+1, & (x\le 2)\\ 2-x, & (x>2)\end{cases}$

이다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

52 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+2a, & (x \geq 1) \\ 3x+a, & (x<1) \end{cases}$$

$$g(x)=x^2+ax+3$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [4점]

① $\frac{7}{4}$　② $\frac{15}{8}$　③ 2
④ $\frac{17}{8}$　⑤ $\frac{9}{4}$

[난이도 : ★★★] [2014년 4월 학력평가]

53 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & (|x|<1) \\ x^2-4|x|+3, & (|x| \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보 기]
ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x)\cos\frac{\pi}{2}x$는 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a는 없다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

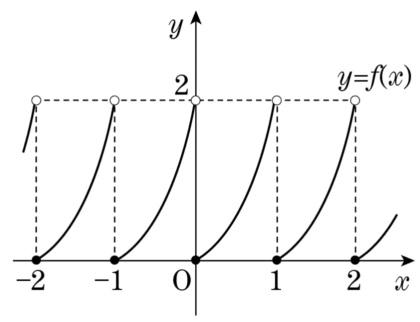
54 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1}, & (x \neq 1) \\ k, & (x=1) \end{cases}$

가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 k의 값은? [3점][2012년 7월]

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

55 함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같을 때, 합성함수 $f(g(x))$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$를 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $g(x)=x^2$
ㄴ. $g(x)=\|\sin x\|$
ㄷ. $g(x)=\cos x$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2011년 7월 학력평가]

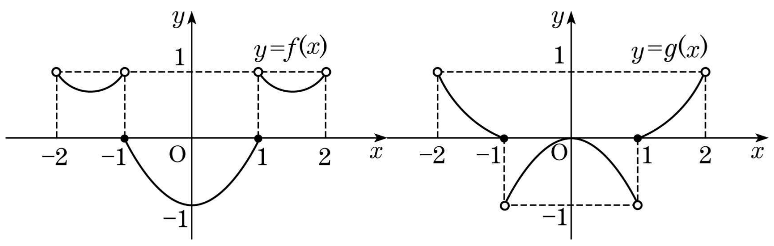
56 함수 $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{ax}-b}{x-1}, & (x \neq 1) \\ 2, & (x=1) \end{cases}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

57 [공통]함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a\sqrt{x+2}+b}{x-2}, & (x\neq 2) \\ 2, & (x=2) \end{cases}$가 에서 연속일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

58 [공통]그림은 열린 구간 $(-2, 2)$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

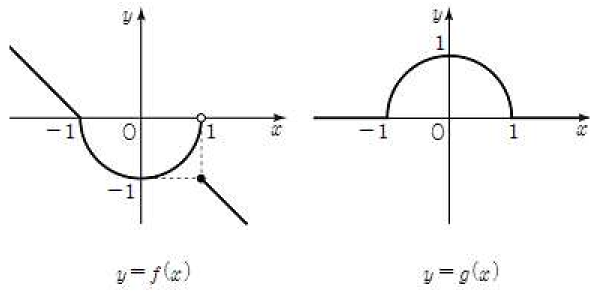


[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to-1} f(x)g(x)=0$
ㄴ. $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=1$
ㄷ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

59 [공통]두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

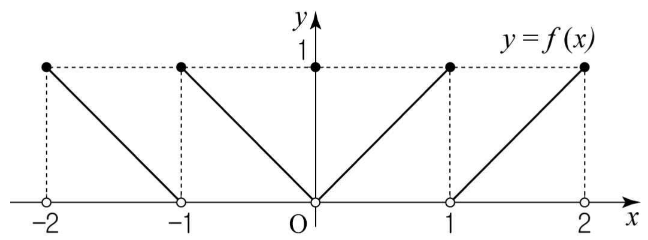


[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

60 그림은 닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



닫힌 구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=g(x)$가 $f(x)g(x)=1$을 만족할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to1} g(x)$가 존재한다.
ㄴ. $\lim_{x\to1-} (g\circ f)(x)=1$
ㄷ. 열린 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $y=x^2g(x)$의 불연속인 점은 2개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

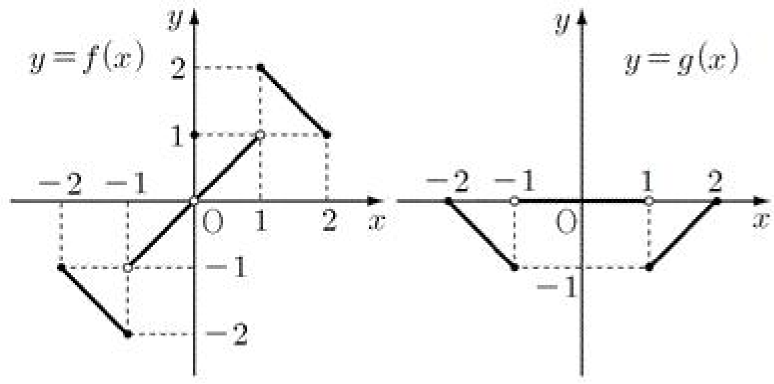
61 함수 $y=[f(x)]$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$를 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ \frac{1}{2} & (x>0)\end{cases}$
ㄴ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\le0)\\ 1-x^2 & (x>0)\end{cases}$
ㄷ. $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\le0)\\ -x^3+x^2-1 & (x>0)\end{cases}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

62 $-2\le x\le2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 에서 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to-1} g(f(x))=-1$
ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.
ㄷ. 방정식 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

63 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-a|x|-|x|^n+b}{|x|^n+1}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

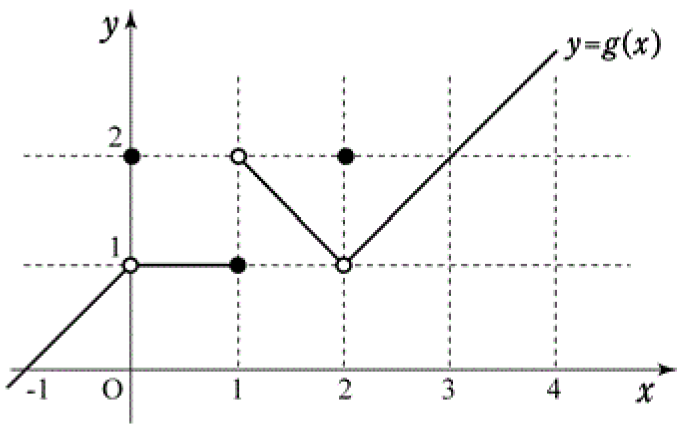
[보기]
ㄱ. $a-b=1$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.
ㄷ. $a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

64 실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=0$인 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|x|$이다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



옳은 것만을 에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$
ㄴ. $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(f(x))=1$
ㄷ. 합성함수 $y=g(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

65 실수 x보다 작지 않은 최소의 정수를 $<x>$ 로 나타내기로 하자.

예를 들어 $<2>=2$, $<2.2>=3$이다.

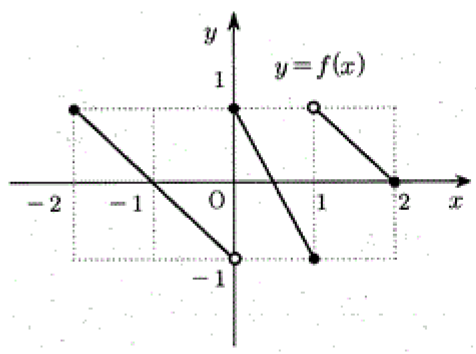
세 함수 $f(x)=<x>$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$에 대하여 의 합성함수 중에서 $x=0$에서 연속인 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $(f\circ g)(x)$
ㄴ. $(f\circ h)(x)$
ㄷ. $(h\circ f)(x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

66 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다.



함수 $g(x)=2\cos\pi x$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to1} g(f(x))$가 존재한다.
ㄴ. 함수 $f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $f(g(x))$는 열린 구간 $(-2, 0)$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

67 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-1}, & (|x|>1) \\ \dfrac{a}{1-x}, & (|x|<1) \\ \dfrac{a}{2}, & (|x|=1) \end{cases}$$

일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?(단, a는 실수이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a의 값이 존재한다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 실근을 갖는다.(단, $a\neq0$)

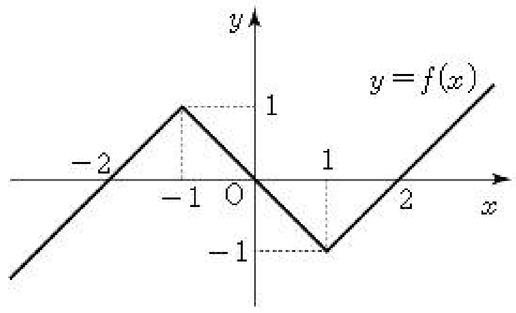
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

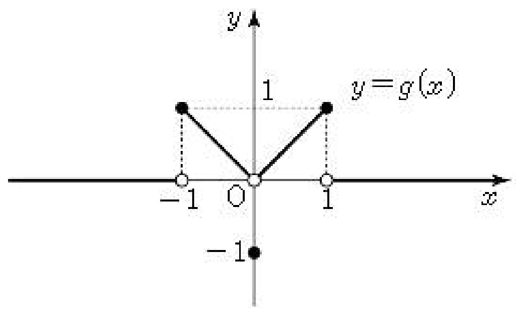
[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

68 그래프는 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & (x>1) \\ -x, & (|x|\le1) \\ x+2, & (x<-1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} |x|, & (0<|x|\le1) \\ -1, & (x=0) \\ 0, & (|x|>1) \end{cases}$$

를 각각 나타낸 것이다.





합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 불연속점의 개수는?[4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★☆☆] [2008년 10월 학력평가]

69 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax-2}{x-1}, & (x\neq1) \\ b, & (x=1) \end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속일 때, $a+b$의 값은?[2점]

① -2 ② -1
③ 0 ④ 1
⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

70 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{n+1}+4x+1}{x^n+b}$ 이 $x=1$에서 연속이 되도록 자연수 $a,\,b$의 값을 정할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

71 두 함수 $f(x)=x^5+x^3-3x^2+k,\ g(x)=x^3-5x^2+3$에 대하여 구간 $(1,\,2)$에서 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

72 모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$는 $f(x+4)=f(x)$를 만족시키고, 닫힌구간 $[0,\,4]$에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases}3x, & (0\le x<1)\\ x^2+ax+b, & (1\le x\le 4)\end{cases}$$

이때, $f(10)$의 값은?[3점]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

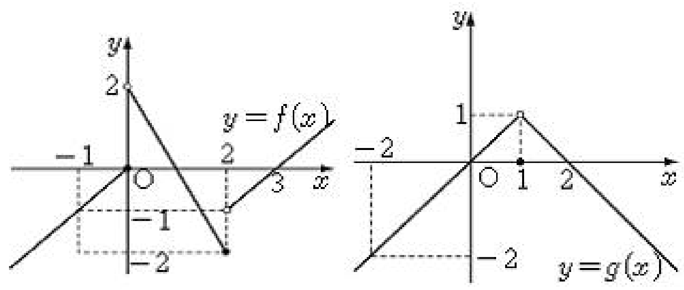
[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

73 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-a}{x-\dfrac{\pi}{2}}, & \left(x\ne\dfrac{\pi}{2}\right)\\ b, & \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$ 가 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 연속일 때, 상수 $a,\,b$의 합 $a+b$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

74 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]



[보기]
ㄱ. $g(f(0))=0$ ㄴ. $y=g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다. ㄷ. $-1\le x\le 3$에서 $y=g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 2개이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

75 모든 실수 x에 대하여 $f(3x)=9f(x)$를 만족하는 다항함수 $f(x)$가 있다.

$x=1$에서 연속인 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-1}{x-1}, & (x\ne 1)\\ f'(1), & (x=1)\end{cases}$으로 정의할 때, $g(12)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

76 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1, & (x<1) \\ 1, & (x=1) \\ -x^2+2x+1, & (x>1) \end{cases}$ 에 대한 설명 중[보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to1}\lvert f(x)\rvert=2$
ㄴ. $\lim_{x\to2+}f(f(x))=-2$
ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$의 불연속점의 개수는 3개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

77 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 [보기]에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=x^2$이면 $\lim_{h\to0}\lvert f(2+h)-f(2-h)\rvert=0$이다.
ㄴ. $f(x)=[x]$이면 $\lim_{h\to0}\lvert f(2+h)-f(2-h)\rvert=1$이다.
ㄷ. $\lim_{h\to0}\lvert f(2+h)-f(2-h)\rvert=0$이면 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2007년 6월 학력평가]

78 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+a, & (x\ge2) \\ x+b, & (x<2) \end{cases}$가 $x=2$에서 연속이 되도록 상수 a, b를 정할 때, $a-b$의 값은?[2점]

① -4 ② -2 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

79 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}, & (x\ne0) \\ f(0), & (x=0) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$를 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=x$
ㄴ. $f(x)=x^3+5x+5$
ㄷ. $f(x)=(x+1)^{10}-9x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

80 두 함수 $f(x)=|x-1|$, $g(x)=[x]$일 때, $h(x)=f(x)g(x)$라 하자.

함수 $y=h(x)$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $x=1$에서 함숫값은 0이다.
ㄴ. $x=1$에서 극한값은 1이다.
ㄷ. 모든 정수에서 불연속이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

81 함수 $f(x)$에 대하여 불연속점의 개수를 $N(f)$로 나타내자.

예를 들어 $f(x)=\begin{cases}1, & (x>0)\\ 0, & (x\le 0)\end{cases}$이면 $N(f)=1$이다. 다음 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $a_1=N(g+h)$, $a_2=N(gh)$, $a_3=N(|h|)$라 할 때, a_1, a_2, a_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

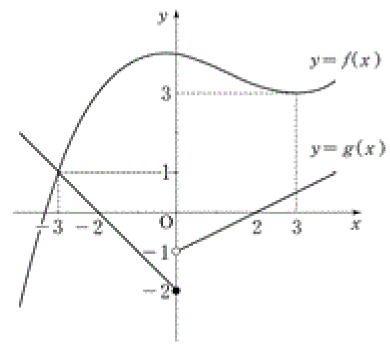
(단,
$(g+h)(x)=g(x)+h(x)$, $(gh)(x)=g(x)h(x)$, $|h|(x)=|h(x)|$이다.)[3점]

① $a_1=a_2=a_3$　　② $a_1<a_2=a_3$　　③ $a_1=a_3<a_2$
④ $a_2<a_1=a_3$　　⑤ $a_3<a_1=a_2$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 학력평가]

82 삼차 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수

$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1, & (x>0)\\ -x-2, & (x\le 0)\end{cases}$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

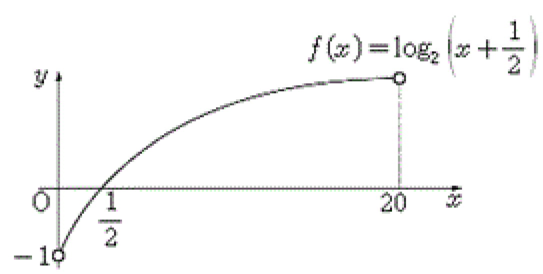


[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to 0+} g(x)=-2$
ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 방정식 $g(f(x))=0$은 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

83 $0<x<20$에서 정의된 함수 $y=f(x)$가 다음과 같다.



함수 $g(x)=[x]^2-[x]$에 대하여 합성함수 $y=g(f(x))$의 불연속점의 개수는?(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)[4점]

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

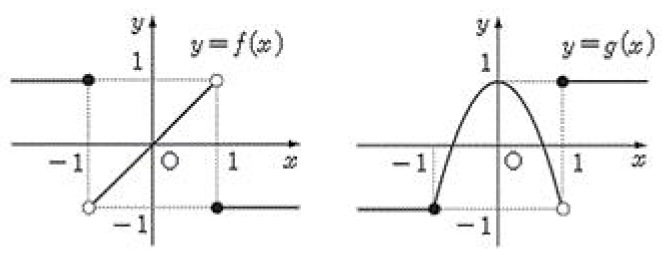
[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

84 열린 구간 $(0, 1)$에서 함수 $f(x)=[-\log_5 x]$가 불연속이 되는 모든 점들의 x좌표의 합은?(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

85 다음은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프이다.



다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=-1$
ㄴ. 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2005년 7월 학력평가]

86 다음은 세 변의 길이가 모두 다른 예각삼각형에서 각 변을 같은 길이만큼 짧게 했을 때, 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재함을 증명한 것이다.

> 예각삼각형의 세 변의 길이를 $a, b, c\,(a<b<c)$로 놓으면 $a^2+b^2>c^2$이다.
> 그런데 x만큼 짧아진 삼각형의 세 변의 길이는 $a-x, b-x, c-x$이므로 $0<x<$ [(가)] 이다.
> 따라서 등식 $(a-x)^2+(b-x)^2=(c-x)^2$을 만족시키는 실수 x가 $0<x<$ [(가)] 에서 존재함을 보이면 된다.
> $f(x)=(a-x)^2+(b-x)^2-(c-x)^2$으로 놓으면
> $f(x)$는 연속함수이고, $f(0)$[(나)]0, $f($[(가)]$)$ 이므로
> 중간값의 정리에 의해 $0<x<$ [(가)] 에서 $f(x)=0$인 x가 존재한다.
> 그러므로 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점]

① $a+b-c$, $<$, $>$
② $a+b-c$, $>$, $<$
③ $a+b+c$, $<$, $>$
④ a, $<$, $>$
⑤ a, $>$, $<$

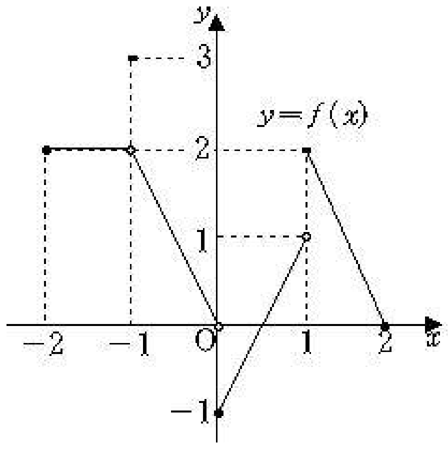
[난이도 : ★☆☆] [2005년 5월 학력평가]

87 방정식 $\cos x - x + 1 = 0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 실근이 존재하는 구간은?[2점]

① $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$　② $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$　③ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
④ $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$　⑤ $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

88 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 있다.



위 그래프에 대한 설명 중 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $-2 \le x \le 2$)[3점]

[보기]
ㄱ. 불연속점의 개수는 3개이다. ㄴ. 극한값이 존재하지 않는 점의 개수는 3개이다. ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값이 존재한다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2005년 4월 학력평가]

89 $f(x)$가 다항함수일 때, 모든 실수에서 연속인 함수 $g(x)$를

$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-x^2}{x-1}, & (x \ne 1) \\ k, & (x=1) \end{cases}$로 정의하자. $\lim_{x\to\infty} g(x)=2$일 때,

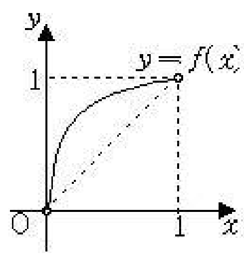
$k+f(3)$의 값을 구하시오.(단, k는 상수)[3점]

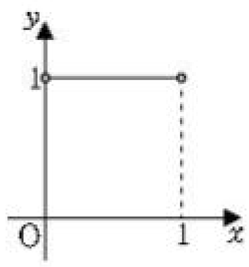
[난이도 : ★★★] [2005년 5월 학력평가]

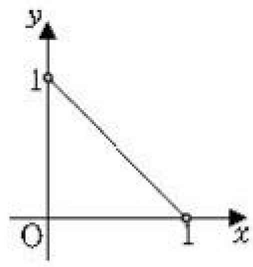
90 $0<x<1$에서 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때,

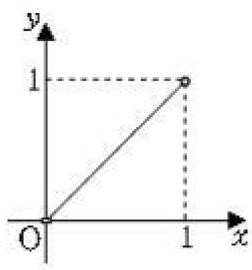
함수 $f^n(x)$을

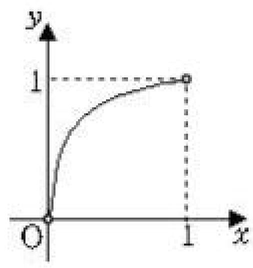
$f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=(f \circ f^n)(x)\,(n=1, 2, 3, \cdots)$와 같이 정의하기로 한다. 이때, $y=\lim_{n\to\infty} f^n(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?[4점]

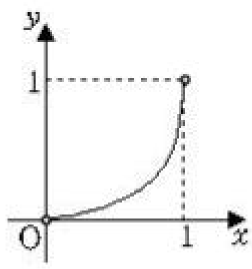


①


②


③


④


⑤


[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

91 다음 [보기]의 함수 중 $x=0$에서 미분가능한 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x, & (x \geq 0) \\ -x, & (x<0) \end{cases}$
ㄴ. $g(x)=\begin{cases} (x+1)^2, & (x \geq 0) \\ 2x+1, & (x<0) \end{cases}$
ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & (x \geq 0) \\ -x^2+x-1, & (x<0) \end{cases}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

92 다음 [보기]중 열린 구간 $(0,1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $\cos \pi x - x = 0$
ㄴ. $2^x + x - 2 = 0$
ㄷ. $\log_2(x+1)+x-1=0$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

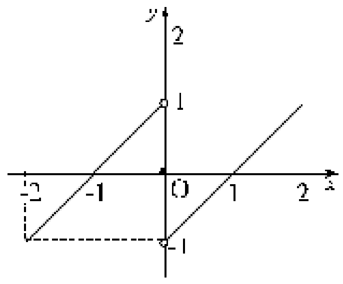
93 닫힌구간 $[-5, 5]$에서 정의된 함수

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}, & (x \neq 0) \\ k, & (x=0) \end{cases}$가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 k의 값은?[3점]

① 0　② 1　③ 5
④ $\sqrt{5}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

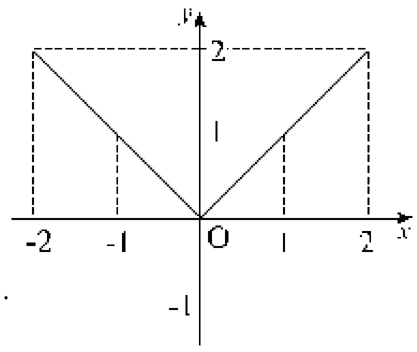
[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

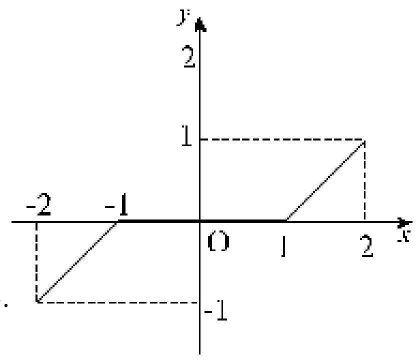
94 $f(0)=0$ 인 함수 $y=f(x)(-2 \le x \le 2)$ 의 그래프는 다음과 같다.

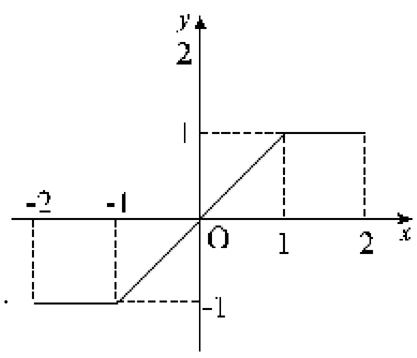


함수 $y=g(x)(-2 \le x \le 2)$ 의 그래프가[보기]와 같이 주어질 때, 합성함수 $y=(g \circ f)(x)$ 가 구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이 되는 경우를 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. 

ㄴ. 

ㄷ. 

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

95 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2, & (x<2) \\ a(x-4)^2+b, & (x \ge 2) \end{cases}$ 가 $x=2$ 에서 미분가능할 때, $f(3)$ 의 값은?[4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

정답 및 해설

2.함수의 연속성

중단원 기출문제

1) 답 : ④

[해설]

출제 의도 : 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 구할 수 있는가?

$x<2$일 때,

$f(x)=x^2-4x+6 = (x-2)^2+2>0$

$x \ge 2$일 때,

$f(x)=1>0$

이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이다.

그런데, $f(x)$는 $x=2$에서만 연속이 아니므로

함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서 연속이면 된다.

즉,

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2+}\frac{ax+1}{1}=2a+1$$

$\dfrac{g(2)}{f(2)}=2a+1$에서 $\dfrac{2a+1}{2}=2a+1$이므로

$2a+1=4a+2$

$2a=-1$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$이다.

2) 답 : 21

[해설]

[출제 의도] 두 함수의 곱이 연속함수가 될 조건을 구할 수 있는가?

(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속일 때

$$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(x+3)=a+3$$

$\displaystyle\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-x)=a^2-a$이므로

$a^2-a=a+3$

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$ 이므로

$a=-1$ 또는 $a=3$

(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속일 때

$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\{x-(2a+7)\} = a-(2a+7) = -a-7=0$ 이므로

$a=-7$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은

$-1\times3\times(-7)=21$

3) 답 : 11

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$이다.

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(2x+10)=2\cdot1+10=12$$

$$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x+a)=1+a$$

$f(1)=1+a$이므로 $1+a=12$

$\therefore\ a=11$

4) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수가 연속일 조건을 이용 하여 극한값을 구할 수 있는가?

$f(x)=x^2+ax+b$로 놓으면

$$f(x)g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}, & (x\ne0,\ x>-1)\\ 8b, & (x=0)\end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$

(ⅰ) $x\to0$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $b=0$

(ⅱ) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$에서

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}}=\frac{a}{1}=0$이므로 $a=0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=x^2$

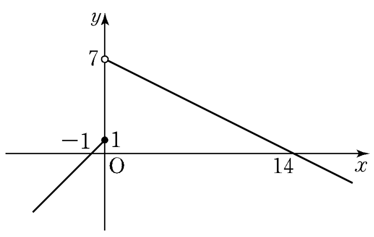
$\therefore\ f(3)=3^2=9$

5) 답 : 13

[해설]

[출제 의도] 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가?

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고

함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

ⅰ) $a=0$일 때

$$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0+}(f(x))^2=49$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0-}(f(x))^2=1$$

$\displaystyle\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)\ne\lim_{x\to0-}f(x)f(x-a)$이므로

$a=0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

ⅱ) $a\ne0$일 때

$$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=7f(a)$$

$$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=-f(a)$$

$f(a)f(0)=-f(a)$

따라서, 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되기 위해서는

$7f(a)=-f(a)$, $f(a)=0$ 이므로

$a=-1$ 또는 14
따라서 모든 실수 a의 값의 합은 13이다.

6) 답 : ④

[해설]

ㄱ. (참) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to 1+} f(x)\times \lim\limits_{x\to 1+} g(x)$

$=(-1)\times 1=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)\times \lim\limits_{x\to 1-} g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

ㄴ. (거짓) $\lim\limits_{x\to 0+} g(x+1)=\lim\limits_{t\to 1+} g(t)=1$

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x+1)=\lim\limits_{t\to 1-} g(t)=-1$

즉, $\lim\limits_{x\to 0+} g(x+1)\neq \lim\limits_{x\to 0-} g(x+1)$이므로

함수 $g(x+1)$은 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. (참) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)g(x+1)$

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)\times \lim\limits_{x\to -1-} g(x+1)$

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)\times \lim\limits_{t\to 0-} g(t)=-1\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)g(x+1)$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)\times \lim\limits_{x\to -1+} g(x+1)$

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)\times \lim\limits_{t\to 0+} g(t)=1\times 0=0$

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)g(x+1)=\lim\limits_{x\to -1+} f(x)g(x+1)=0$이고

$f(0)g(1)=1\times 0=0$이므로

함수 $f(x)g(x+1)$은 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7) 답 : ④

[해설]

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$에서

(ⅰ) $a=0$일 때, $-4x+2=0,\ x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(0)=1$

(ⅱ) $a\neq 0$일 때,

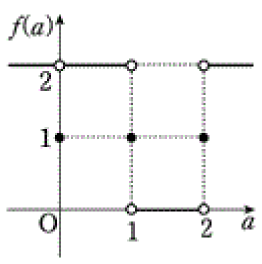
$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2(a-2)(a-1)$

① $a=1$ 또는 2일 때 중근이므로 $f(1)=f(2)=1$

② $1<a<2$일 때, 허근이므로 $f(a)=0$

③ $a<1$ 또는 $a>2$일 때, 서로 다른 두 실근을 가지므로 $f(a)=2$

ⅰ), ⅱ)에서 그래프를 그려보면



ㄱ. $\lim\limits_{a\to 0} f(a)=2,\ f(0)=1$ ∴ $\lim\limits_{a\to 0} f(a)\neq f(0)$ ∴ 거짓

ㄴ. $\lim\limits_{a\to c+} f(a)\neq \lim\limits_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 1과 2로서 2개이다. ∴ 참

ㄷ. 함수 $f(a)$는 $a=0,\,1,\,2$에서 불연속이다. ∴ 참

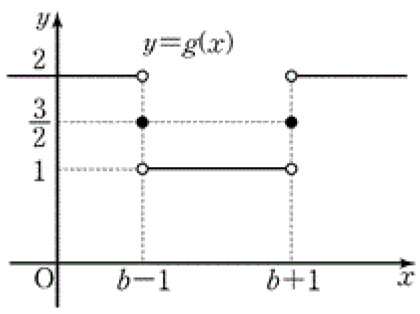
따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8) 답 : ③

[해설]

$f(x)=x^2-4x+a$

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}=\begin{cases}2, & (x<b-1)\\ \frac{3}{2}, & (x=b-1)\\ 1, & (b-1<x<b+1)\\ \frac{3}{2}, & (x=b+1)\\ 2, & (b+1<x)\end{cases}$$



$$\therefore\ h(x)=f(x)g(x)=\begin{cases}2(x^2-4x+a), & (x<b-1)\\ \frac{3}{2}(x^2-4x+a), & (x=b-1)\\ x^2-4x+a, & (b-1<x<b+1)\\ \frac{3}{2}(x^2-4x+a), & (x=b+1)\\ 2(x^2-4x+a), & (b+1<x)\end{cases}$$

함수 h는 세 구간 $(-\infty,\,b-1),\ (b-1,\,b+1),\ (b+1,\,\infty)$에서는 연속이므로

오로지 $b-1,\,b+1$에서 연속이면 된다. 그러므로

$\lim\limits_{x\to b-1-} h(x)=\lim\limits_{x\to b-1+} h(x)=h(b-1),$

$\lim\limits_{x\to b+1-} h(x)=\lim\limits_{x\to b+1+} h(x)=h(b+1)$

즉, $(b-1)^2-4(b-1)+a=0 \Rightarrow (b+1)^2-4(b+1)+a=0$

이 두 등식이 성립하는 것은 서로 다른 $b-1,\,b+1$이

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 두 근임을 의미한다.

근과 계수의 관계에 의하여

$\begin{cases}b-1+b+1=4\\ (b-1)(b+1)=a\end{cases} \Leftrightarrow a=3,\ b=2$

9) 답 : ②

[해설]

(ㄱ)의 경우

$\lim\limits_{x\to 3-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3-}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to 3+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3+} f(f(x))=\lim\limits_{f(x)\to 1-} f(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=2$이므로

함수 g는 $x=3$에서 불연속

(ㄴ)의 경우

구간 $(0,\,3)$에서 함수 f는 연속이므로 $g=f^2$은 연속이고,

구간 $(3,\,4),\ (4,\,5)$에서 함수 f는 연속이므로

$g=f\circ f$는 이 두 구간에서 연속이다.

그러므로 3과 4에서의 연속성만 조사하면 된다.

$\lim_{x\to3-} g(x)=\lim_{x\to3-}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to3+} g(x)=\lim_{x\to3+} f(f(x))=\lim_{f(x)\to2-} f(f(x))=\lim_{x\to2-} f(x)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

그러므로 함수 g는 3에서 연속

$\lim_{x\to4-} g(x)=\lim_{x\to4-} f(f(x))=\lim_{f(x)\to0+} f(f(x))=\lim_{x\to0+} f(x)=3$

$\lim_{x\to4+} g(x)=\lim_{x\to4+} f(f(x))=\lim_{f(x)\to1+} f(f(x))=\lim_{x\to1+} f(x)=3$

$g(4)=f(f(4)=f(0)=3$

그러므로 함수 g는 4에서 연속

(ㄷ)의 경우

$\lim_{x\to4-} g(x)=\lim_{x\to4-} f(f(x))=\lim_{f(x)\to0+} f(f(x))=\lim_{x\to0+} f(x)=2$

$\lim_{x\to4+} g(x)=\lim_{x\to4+} f(f(x))=\lim_{f(x)\to1+} f(f(x))=\lim_{x\to1+} f(x)=3$

그러므로 함수 g는 4에서 불연속

따라서 함수 g가 구간 $[0, 5]$에서 연속이도록 하는 f뉘품?하는ㄴ)의 경우뿐이다.

10) 답 : ④

[해설]

$$f(3)=\lim_{x\to3} f(x)$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x+4)$$
$$=7$$
$$\therefore\ a=7$$

11) 답 : 13

[해설]

$(-\infty, \infty)$에서 미분가능하려면

$x=0, 1$에서 연속이고 미분가능이어야 한다.

함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$는 점 $(0, 6)$을 지나므로

$x=0$에서 연속이다.

$x=1$에서 연속이려면 $0=a+b+c+1$

$\therefore\ a+b+c=-1$

$y'=3ax^2+2bx+c$

ⅰ) $x=0$에서 미분가능하려면 $0=c$

ⅱ) $x=1$에서 미분가능하려면 $3a+2b+c=0$

$$\therefore\ \begin{cases} a+b=-1 \\ 3a+2b=0 \end{cases}$$

$\therefore\ a=2, b=-3$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=13$

따라서, $a^2+b^2=13$

12) 답 : ⑤

[해설]

주어진 그래프를 이용하면

$$f(x)=\begin{cases} -2x, & (-1\le x\le0) \\ 0, & (0\le x\le2) \\ 2x-4, & (2\le x\le3) \end{cases},\ g_1(x)=\begin{cases} x, & (x\le1) \\ -x+2, & (x\ge1) \end{cases},$$

$$g_2(x)=\begin{cases} 1, & (x<0) \\ 2, & (x=0) \\ 3, & (x>0) \end{cases},\ g_3(x)=\begin{cases} 1, & (x<2) \\ -x+2, & (x\ge2) \end{cases}$$ 이고

따라서,

$f(x)g_1(x)=\{(-2x^2, (-1\le x\le0)), (0, (0\le x\le2)), (2x-4)(-x+2$

이고

$f(0)g_1(0)=0,\ f(2)g_1(2)=0$이므로 연속이다.

$$f(x)g_2(x)=\begin{cases} -2x, & (-1\le x\le0) \\ 0, & (0\le x\le2) \\ 3(2x-4), & (2\le x\le3) \end{cases}$$ 이고

$f(0)g_2(0)=0,\ f(2)g_2(2)=0$이므로 연속이다.

$f(x)g_3(x)=\{(-2x, (-1\le x\le0)), (0, (0\le x\le2)), (2x-4)(-x+2$

이고

$f(0)g_3(0)=0,\ f(2)g_3(2)=0$이므로 연속이다.

13) 답 : 24

[해설]

[출제 의도] 극한과 연속을 사용하여 미지의 이차함수를 구하는 문제이다.

(가)조건에서 x와 $f(x)$는 모두 연속함수이므로

$\frac{x}{f(x)}$가 불연속인 경우는 $f(x)=0$인 경우이다.

따라서 $f(x)$는 근 1, 2를 갖는다.

(나)조건에서

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4(f(2)=0)$$

[다른 풀이]

(가) 에서 $\frac{x}{f(x)}$가 $x=1, x=2$에서 불연속이므로

$f(1)=0,\ \ f(2)=0$

$f(x)=k(x-1)(x-2)$ 라 하면

(나) 에서 $f'(2)=4$이므로

$f'(2)=k\times1=4$

$\therefore\ k=4$

$\therefore\ f(x)=4(x-1)(x-2)$

$f(4)=4\times3\times2=24$

14) 답 : 20

[해설]

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하므로

$f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이다.

(ⅰ) $f(x)$가 증가함수일 때

$f(x)$가 증가함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은

$y=x$ 위에만 존재한다.

따라서 $f(-1)=-1,\ \ f(1)=1,\ \ f(2)=2$이 성립한다.

주어진 조건에 대입하면

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서 $c=-\frac{3}{2}$이고 $f(2)=4c+5=2$에서

$c=-\frac{3}{4}$이므로 모순이다.

(ⅱ) $f(x)$가 감소함수일 때

$f(x)$가 감소함수이므로 곡선 $y=f(x)$는 $y=x$와 한 점에서

만나고, $y=f^{-1}(x)$와 두 점에서 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 두 교점은 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$y=f(x)$는 $y=x$와 $x=1$에서 만나고, $y=f^{-1}(x)$와 $x=-1,\ 2$에서 만난다.

따라서 세 교점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ -1)$가 된다.

이를 주어진 조건에 대입하면

$f(-1)=-a+b=2,\ \ f(1)=a+b=c+\dfrac{5}{2}=1,\ \ f(2)=4c+5=-1$

이다.

위의 연립방정식을 풀면

$a=-\dfrac{1}{2},\ \ b=\dfrac{3}{2},\ \ c=-\dfrac{3}{2}$ 을 얻을 수 있다.

$\therefore\ \ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

15) 답 : ①

[해설]

$x=1$에서 연속이면 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=f(1)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)$ 이어야 한다.

$f(1)=a+1$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=4-a$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=a+1$

따라서 $a+1=4-a$

$\therefore\ \ a=\dfrac{3}{2}$

16) 답 : ⑤

[해설]

$x\neq1$일 때 $g(f(x))$는 연속이다.

따라서 $x=1$일 때 $g(f(x))$가 연속이면 된다.

$\lim\limits_{x\to1-0}\left(g(f(x))=2^a+2^{-a}\right.$

$g(f(1))=2^1+2^{-1}=\dfrac{5}{2}$

$\lim\limits_{x\to1+0}\left(g(f(x))=2^1+2^{-1}=\dfrac{5}{2}\right.$

$x=1$에서 연속이려면

$2^a+2^{-a}=\dfrac{5}{2}$, $\ \therefore\ a=1,\ -1$

$\therefore\ 1\times(-1)=-1$

17) 답 : ②

[해설]

$x=1$에서 연속이 되면 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$에서 $\lim\limits_{x\to1}(2x+5)=a$

$\therefore\ \ a=7$

18) 답 : 11

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=3$에서 연속이어야 하므로

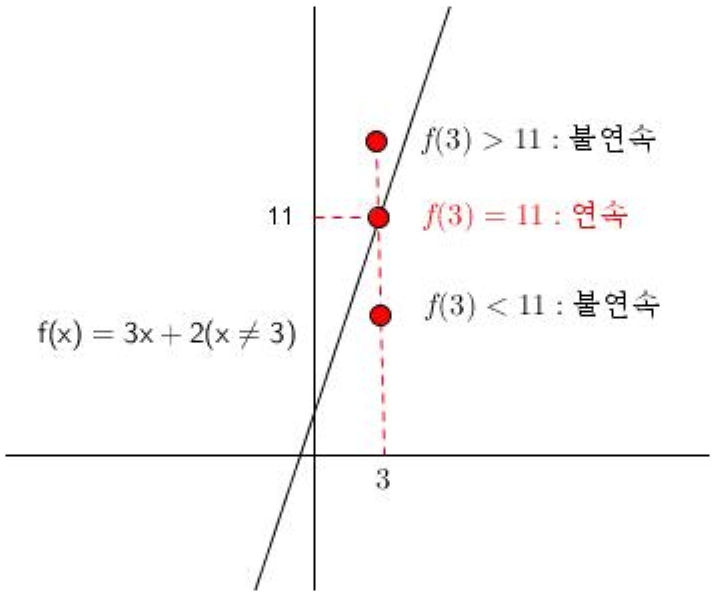
$\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

이 성립해야 한다.

$\therefore\ a=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3x+2)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(3x+2)=3\times3+2=11$

[MIM EDU다른 풀이]

$f(x)$를 정리하면 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & (x\neq3)\\ a, & (x=3)\end{cases}$이며 그려보면



따라서 $a=11$일 때, 연속이다.

19) 답 : ③

[해설]

[함수의 연속성]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=0\ <\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$ (참)

ㄴ. $\dfrac{1}{t}=s$ 라 하면 $t\to\infty$일 때 $s\to0$ 이므로

$\lim\limits_{t\to\infty}f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{s\to0}f(s)=1$ (참)

ㄷ. $f(f(3))=f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to3-}f(f(x))=1$

$\lim\limits_{x\to3+}f(f(x))=3$

$f(f(3))=\lim\limits_{x\to3-}f(f(x))\neq\lim\limits_{x\to3+}f(f(x))$

따라서 $x=3$에서 불연속 (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다

20) 답 : ①

[해설]

(a) $x=0$에서 연속이어야 하므로

$h(0)=f(0)g(0)=b\times(-1)=-b$

$\lim\limits_{x\to0+}h(x)=\lim\limits_{x\to0+}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to0+}f(x)\lim\limits_{x\to0+}g(x)=b\times1=b$

$\lim\limits_{x\to-0}h(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x\to0-}f(x)\lim\limits_{x\to0-}g(x)=b\times(-1)=-b$

따라서, $b=-b$ 이므로 $b=0$

(b) $x=2$에서 연속이어야 하므로

$h(2)=f(2)g(2)=(4+2a)\times 1=4+2a$

$\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to 2+} f(x)\lim_{x\to 2+} g(x)=(4+2a)\times 1=4+2a$

$\lim_{x\to 2-} h(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)g(x)$

$=\lim_{x\to 2-} f(x)\lim_{x\to 2-} g(x)=(4+2a)\times(-1)=-4-2a$

따라서, $4+2a=-4-2a$ 이므로 $a=-2$

(a), (b)에 의하여 $f(x)=x^2-2x$ 이므로 $f(5)=15$

21) 답 : ②

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases} x+a, & (x\le 1) \\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}, & (x>1)\end{cases}$

실수 전체의 집합에서 연속이기 때문에 $x=1$에서도 연속이어야 한다.

$\therefore\ f(1)=\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)$

$f(1)=\lim_{x\to 1-} f(x)=1+a\cdots$ ①

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2x^{n+1}+3x^n}{x^n+1}$:, $(x>1)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2x^{n+1}+3x^n)\left(\dfrac{1}{x^n}\right)}{(x^n+1)\left(\dfrac{1}{x^n}\right)}$

$=2x+3$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=5\cdots$ ②

① , ②에서 $a=4$

22) 답 : ①

[해설]

[해설] 함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되기 위해

$g(0)=\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)$

$g(0)=\lim_{x\to 0-} g(x)=f(0)\{f(0)+k\}=2\times(2+k)$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to +0} f(x)\{f(x)+k\}=0\times k$

$\therefore\ k=-2$

23) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$이므로 ㄱ은 참.

ㄴ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=1$이므로 ㄴ은 거짓.

ㄷ. $|f(2)|=|-1|=1$이고

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=|1|=1,\ \lim_{x\to 2+}|f(x)|=|-1|=1$이므로

$|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 ㄷ은 참.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. (참) $x=\pm 1$에서 불연속

ㄴ. (참) $\lim_{x\to 1}(x-1)f(x)=(1-1)f(1)=0$이므로

$x=1$에서 연속

ㄷ. (참) $y=\{f(x)\}^2=x^2$이므로 실수 전체에서 연속

25) 답 : 13

[해설]

[출제 의도] 이차 함수의 성질을 이용하여 합성함수가 불연속일 조건을 구한다.

$g(x)=(x-2)^2+k-4$이므로 $x\to 2$일 때, $g(x)\to(k-4)+$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to 2} f(g(x))=\lim_{t\to(k-4)+} f(t)$이다.

이때 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서 $\lim_{t\to(k-4)+} f(t)$의 값은 항상 존재하므로

함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면

$\lim_{t\to(k-4)+} f(t)\ne f(g(2))$이어야 한다.

이때 $f(g(2))=f(k-4)$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면

$\lim_{t\to(k-4)+} f(t)\ne f(k-4)$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$의 $x=k-4$에서의 함숫값과 $x=k-4$에서의 우극한이 서로 달라야 한다.

따라서 $k-4=2$ 또는 $k-4=3$이므로

$k=6$ 또는 $k=7$

따라서 구하는 모든 k의 합은

$6+7=13$이다.

[다른 풀이]

$\lim_{x\to 2-} f(g(x))=\lim_{x\to 2+} f(g(x))=\lim_{t\to(k-4)+} f(t)$이고

$f(g(2))=f(k-4)$이다.

한편, $k-4\ne 1,\ k-4\ne 2,\ k-2\ne 3$일 때

함수 $f(x)$는 $x=k-4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(g(x))=f(g(2))$이다.

따라서 $k-4\ne 1,\ k-4\ne 2,\ k-2\ne 3$일 때,

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=k-4$에서 연속이다.

ⅰ) $k-4=1$ 즉 $k=5$일 때, $\lim_{t\to 1+} f(t)=3,\ f(1)=3$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ⅱ) $k-4=2$ 즉 $k=6$일 때, $\lim_{t\to 2+} f(t)=2,\ f(2)=1$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ⅲ) $k-4=3$ 즉 $k=7$일 때, $\lim_{t\to 3+} f(t)=2,\ f(3)=1$이므로

함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=2$에서 불연속이 되도록 하는

실수 k의 값은 6과 7이다.

그러므로 구하는 합은 13이다.

26) 답 : ①

[해설]

해설

실수전체의 집합에서 연속이므로,

$\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-10}{x-2}=b$

$x\to2$ 일 때, 분모 $\to0$ 이므로 분자 $\to0$

$4+2a-10=0$, $\therefore\ a=3$

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{x-2}=b$

$\lim_{x\to2}\dfrac{(x+5)(x-2)}{x-2}=7$

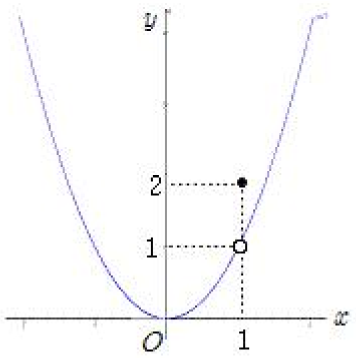
$\therefore\ b=7$

따라서 $a+b=10$

27) 답 : ③

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=1$일 때, 불연속이므로 그래프로 나타내면 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to1+} f(x)=1$ 이므로,

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x)$ (참)

ㄴ. $y=f(x-a)$의 그래프는 위의 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프이므로,

$x=a+1$에서 불연속점이 존재한다.(거짓)

ㄷ. $y=h(x)$는 연속인 함수 $(x-1)$과 불연속이 존재하는 함수 $f(x)$의

곱이므로, $x=1$에서의 연속성을 파악하면 된다.

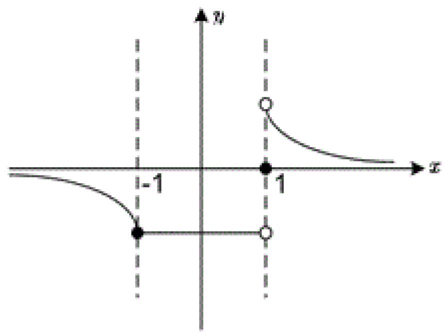
$\lim_{x\to1} h(x)=\lim_{x\to1}(x-1)f(x)=0$ 이고,

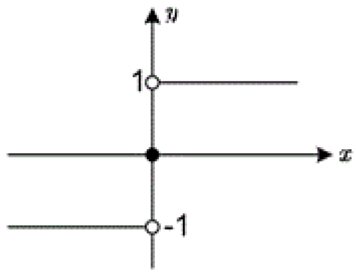
$h(1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to1} h(x)=h(1)$ (참)

28) 답 : 90

[해설]

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ (x>1)\\ 0,\ (x=1)\\ -1,\ (-1<x<1)\\ -1,\ (x=1)\\ \dfrac{1}{x},\ (x<-1)\end{cases}$ $h(x)=\begin{cases}1,\ (x>0)\\ 0,\ (x=0)\\ -1,\ (x<0)\end{cases}$





$y=f(x)\cdot g(x)$가 연속이므로

$f(1)\cdot g(1)=0$, $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=f(1)=0$

$y=f(x)\cdot h(x)$가 연속이므로

$f(0)\cdot h(0)=0$, $\lim_{x\to0+} f(x)h(x)=f(0)=0$

$\therefore\ f(x)=x\cdot(x-1)$

$\therefore\ f(10)=90$

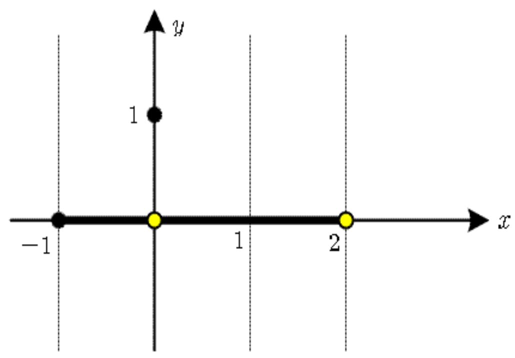
29) 답 : ①

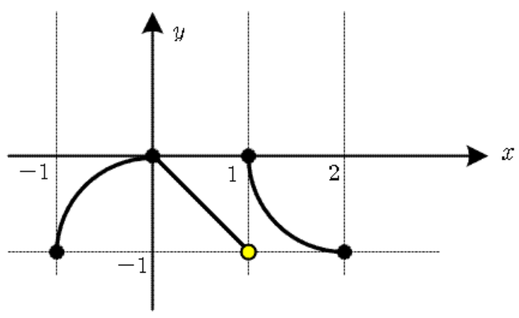
[해설]

주어진 구간에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 간단히 하면

$x=0$ 이면 $f(x)=1>0$

$x\neq0$ 이면 $f(x)\le0$ 이므로





$g(x)=\begin{cases}1,\ (x=0)\\ 0,\ (x\neq0)\end{cases}$, $h(x)=\begin{cases}0,\ (x=0)\\ f(x),\ (x\neq0)\end{cases}$

ㄱ. $\lim_{x\to1+} h(x)=0$, $\lim_{x\to1-} h(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to1} h(x)$를 존재하지 않는다.(거짓)

ㄴ. 주어진 구간내의 임의의 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=0$ 이다.($\because$ $\lim_{x\to a} g(x)=0$, $\lim_{x\to0} h(x)=0$)

$(h\circ g)(a)=\begin{cases}h(0)=0,\ (a\neq0)\,(\Leftarrow g(a)=0)\\ h(1)=0,\ (a=0)\,(\Leftarrow g(a)=1)\end{cases}$

$\therefore \lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=(h\circ g)(a)$

주어진 구간에서 연속이다.(참)

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=0$

$(g\circ h)(0)=g(0)=1$

$\therefore$ $x=0$에서 불연속(거짓)

30) 답 : ④

[해설]

각각의 그래프에 대해 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$의 $x=-1$에서의 극한값과 함수값을 구해보면 다음과 같다.

ㄱ. $\lim_{x\to -1+} f(x-1)f(x+1)=f(-2+)f(0-)=1\times 1=1$

$\lim_{x\to -1-} f(x-1)f(x+1)=f(-2+)f(0+)=1\times(-1)=-1$

좌극한과 우극한값이 일치하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to -1+} f(x-1)f(x+1)=f(-2-)f(0-)=0\times 1=0$

$\lim_{x\to -1-} f(x-1)f(x+1)=f(-2+)f(0+)=0\times 1=0$

$f(-2)f(0)=0\times(-1)=0$

극한값과 함수값이 일치하므로 연속이다.

ㄷ. 주어진 함수는 $x=-2$와 $x=0$에서 모두 연속이므로, 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$는 $x=-1$에서 연속이다.

31) 답 : ②

[해설]

$y=f(g(x))$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(g(1))=f(a)\cdots$①

$\lim_{x\to 1-}f(g(x))=\lim_{x\to 1+}f(g(x))=0\cdots$②

① , ②에서

$f(a)=\lim_{x\to 1}f(g(x))=0$

$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$에서

$f(a)=(a-1)(2a-1)(a+1)=0$

$a>1,\ f(a)=f(a+2)$이므로 $a=\frac{5}{2},\ 3,\ \ldots$③

따라서, 구하는 a의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

32) 답 : ⑤

[해설]

$h(x)=\begin{cases} f(x), & (x<a) \\ g(x), & (x\ge a)\end{cases}$라 하자.

$f(x),\ g(x)$가 다항함수이므로

$h(x)$는 모든 실수에서 연속 $\Leftrightarrow h(x)$가 $x=a$에서 연속

$h(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-}f(x)=g(a)\ldots$ ①

그런데 $\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$이므로

$f(a)=g(a)\ldots$②

즉, $x=a$에서 $h(x)$가 연속이려면 a가 방정식 $f(a)=g(a)$의 실근이면 된다.

ㄱ. 방정식 $x^2=x+1$의 실근이 2개이므로 $\therefore$ 참

ㄴ. $N(f,g)=n$ (n :음이 아닌 정수)라 하면 n은 방정식 $f(a)=g(a)$의 실근의 개수이다.

$N(g,f)=m$ (m :음이 아닌 정수)라 하면

m은 방정식 $g(a)=f(a)$의 실근의 개수이다.

$\therefore m=n$

$\therefore$ 참

ㄷ. $f(a)=g(a)$의 실근의 개수를 n개라 하면 $N(f,g)=n$

한편, $(h\circ f)(a)=(h\circ g)(a)$

$\Leftrightarrow \{f(a)\}^3=\{g(a)\}^3$

$\Leftrightarrow f(a)=g(a)$이므로 $N(h\circ f,\ h\circ g)=n$

$\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

33) 답 : ①

[해설]

ㄱ. $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=1$

$\lim_{x\to 0+}(g\circ f)(x)=g(1)=1$

$\lim_{x\to 0-}(g\circ f)(x)=g(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

따라서, $x=0$에서 연속 $\therefore$ 참

ㄴ.(반례)문제의ㄱ에서

$(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. $\therefore$ 거짓

ㄷ.(반례)

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & (x\ne 0) \\ 0, & (x=0)\end{cases}$

$\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(0)=0$이므로

$(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. $\therefore$ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

34) 답 : ①

[해설]

$f(x)=\begin{cases} x(x-1), & (x>1,\ x<1) \\ -x^2+ax+b, & (-1\le x\le 1)\end{cases}$이므로

$x=\pm 1$에서 연속이면 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(1)=0=-1+a+b$

$f(-1)=2=-1-a+b$

연립하여 풀면 $a=-1,\ b=2$

$\therefore a-b=-1-2=-3$ [정답]①

35) 답 : ②

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (x\ge 1) \\ 2x^2+1 & (x<1)\end{cases}\cdots$㉮

㉮이 모든 실수 x에서 미분가능하므로

$x=1$에서 미분계수가 존재해야 한다. 즉 미분가능이다.

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax+b, & (x>1) \\ 4x, & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1+}f'(x)$이어야 한다.

$$3+2a+b=4$$

$$\therefore\ 2a+b=1\ \cdots ①$$

㉮이 $x=1$에서에서 미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$$

즉, $2+1=1+a+b \Leftrightarrow a+b=2\cdots$ ②

$$\therefore\ ab=-3$$

36) 답 : ②

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}2, & (x>0)\\ 1, & (x=0)\\ 0, & (x<0)\end{cases},\ g(x)=\sin\pi x$$

ㄱ. $f(f(x))=\begin{cases}2, & (x\geq0)\\ 1, & (x<0)\end{cases}$ 이므로 상수함수가 아니다.

$\therefore$ 거짓

ㄴ. $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\sin\pi x=0$ 이므로

$$\lim_{x\to0-}f(g(x))=0$$

$$\lim_{x\to0+}f(g(x))=2$$

$\lim_{x\to0-}f(g(x))\neq\lim_{x\to0+}f(g(x))$ 이므로

$\lim_{x\to0}f(g(x))$ 의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore$ 거짓

ㄷ. $g(f(0))=g(1)=\sin\pi=0$ 이고,

$$\lim_{x\to0-}g(f(x))=g(0)=\sin0=0$$

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=g(2)=\sin2\pi=0$ 이므로

$$g(f(0))=\lim_{x\to0}g(f(x))$$

따라서, $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다. $\therefore$ 참

37) 답 : ③

[해설]

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$ 이다.

$$a=\lim_{x\to1}\frac{\sin2(x-1)}{x-1}\ (x-1=\theta\text{라 두면})$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2$$

$$=2$$

38) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성 이해하기

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}, & (x\neq3)\\ a, & (x=3)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to3}f(x)=a$ 이다.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+1)=4$$

따라서 $a=4$

39) 답 : 19

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속을 활용하여 문제 해결하기

$$f(x)=\frac{-ax-b+1}{ax+b}=\frac{1}{ax+b}-1$$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $f(x)<k$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하고

y축의 방향으로 $2k$만큼 평행이동한 그래프이고,

$f(x)\geq k$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같다.

$g(x)=\begin{cases}2k-f(x), & (f(x)<k)\\ f(x), & (f(x)\geq k)\end{cases}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|f(x)|$ 또는 $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|2k-f(x)|$ 이다.

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|f(x)|=\frac{1}{2}$ 이라 하면

$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{ax+b}-1\right|=1\neq\frac{1}{2}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

한편 $\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}|2k-f(x)|$ 라 하면

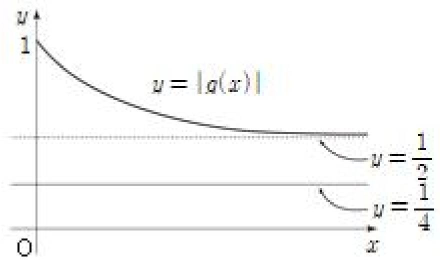
$\lim_{x\to\infty}|g(x)|=\lim_{x\to\infty}\left|2k-\frac{1}{ax+b}+1\right|=|2k+1|=\frac{1}{2}$ 이므로 $k=-\frac{1}{4}$

또는 $k=-\frac{3}{4}$ 이다.

(나)에서 $|g(0)|=1$ 이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 한 점근선

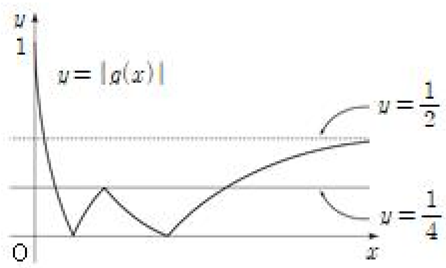
$x=-\frac{b}{a}$ 는 $ab>0$ 이므로 $-\frac{b}{a}<0$ 이다.

(ⅰ) $k=-\frac{1}{4}$, $a<0$일 때 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 만나지 않으므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

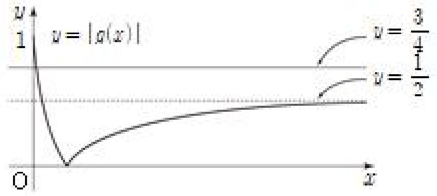
(ⅱ) $k=-\frac{1}{4}$, $a>0$ 일 때 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 세 점에서 만나므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

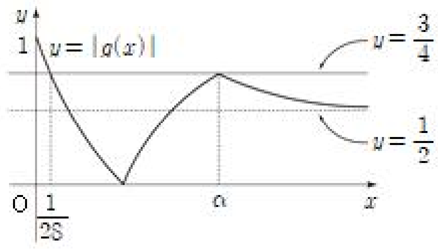
(ⅲ) $k=-\frac{3}{4}$, $a<0$ 일때함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같

다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 한 점에서 만나므로 조건 (다)에 맞지 않는다.

(ⅳ) $k=-\frac{3}{4}$, $a>0$ 일 때 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|g(x)|$의 그래프와 직선 $y=-k$는 서로 다른 두 점에서만 만나므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 $k=-\frac{3}{4}$, $a>0$

이때 $|g(0)|=f(0)=1$이므로 $b=\frac{1}{2}$이고

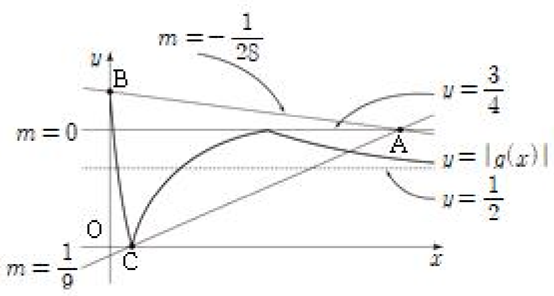
$\left|g\left(\frac{1}{28}\right)\right|=f\left(\frac{1}{28}\right)=-k=\frac{3}{4}$에서 $a=2$이다.

두 함수 $y=|g(x)|$, $y=f(x)$의 그래프의 x절편이 같으므로

$0=\frac{1}{2x+\frac{1}{2}}-1$에서 $x=\frac{1}{4}$이다.

또한 $|g(\alpha)|=\frac{3}{4}$에서 $f(\alpha)=-\frac{3}{4}$이고 $\alpha=\frac{7}{4}$

직선 $y=m(x-4\alpha)+\frac{3}{4}$이 지나는 점 $\left(4\alpha,\ \frac{3}{4}\right)$즉, $\left(7,\ \frac{3}{4}\right)$을 점 A라 하고 $B(0,\ 1)$, $C\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$이라 하면 두 직선 AB, AC와 함수 $y=|g(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



두 직선 AB, AC의 기울기는 각각 $-\frac{1}{28}$, $\frac{1}{9}$

이고 함수 $h(m)$은 다음과 같다.

$$h(m)=\begin{cases} 1 & \left(m<-\frac{1}{28}\right) \\ 2 & \left(-\frac{1}{28}\le m\le 0\right) \\ 3 & \left(0<m<\frac{1}{9}\right) \\ 2 & \left(m=\frac{1}{9}\right) \\ 1 & \left(m>\frac{1}{9}\right) \end{cases}$$

함수 $h(m)$이 불연속이 되는 실수 m의 값은

$m=-\frac{1}{28}$, $m=0$, $m=\frac{1}{9}$이므로

모든 실수 m의 값의 합

$M=-\frac{1}{28}+0+\frac{1}{9}=\frac{19}{252}$이다.

따라서 $252M=19$

40) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속과 부정적분의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}+C_1, & (x\le -1) \\ x^3+x+C_2, & (x>-1) \end{cases}$ (C_1, C_2는 적분상수)에서

$f(-2)=\frac{1}{2}+C_1=\frac{1}{2}$이므로 $C_1=0$

$\lim_{x\to -1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to -1+}f(x)=-2+C_2$이고,

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이므로

$1=-2+C_2$에서 $C_2=3$

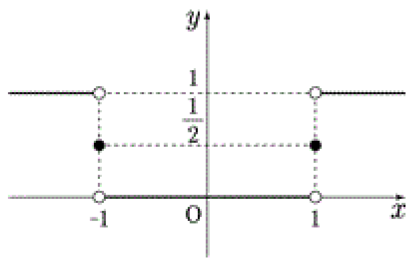
따라서 $f(0)=3$

41) 답 : 63

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제 해결하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-1, 1$에서 불연속이다.

함수 $g(x)=x^2+ax+b$라 하면

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이다.

$x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=\lim_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)g(x)$

$\frac{1}{2}(1+a+b)=1(1+a+b)=0$에서

$a+b=-1$ ...... ㉠

$x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)g(-1)=\lim_{x\to -1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to -1-}f(x)g(x)$

$\frac{1}{2}(1-a+b)=0=1(1-a+b)$에서

$a-b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=0$, $b=-1$이므로

$g(x)=x^2-1$

따라서 $g(8)=63$

42) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 함수의 미분법을 이용하여 함수의 연속성에 대한 문제를 해결한다.

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$에서

$f'(x)=(x^2)'e^{ax}+x^2(e^{ax})'$

$=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=(ax^2+2x)e^{ax}=ax\left(x+\frac{2}{a}\right)e^{ax}$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

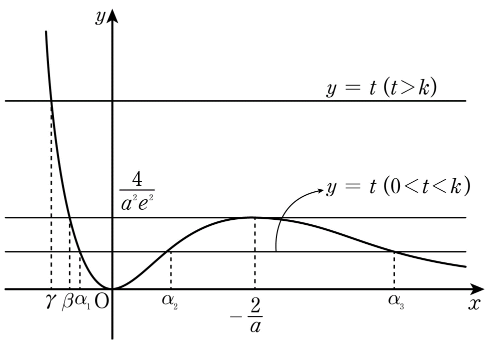
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\frac{2}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4}{a^2e^2}$	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값 0를 갖고

$x=-\frac{2}{a}$에서 극댓값 $\frac{4}{a^2e^2}$를 갖는다.

또 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이고, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로

함수 $f(x)=x^2e^{ax}\,(a<0)$의 그래프는 그림과 같다.



부등식 $f(x)\geq t\ (t>0)$을 만족시키는 x의 최댓값 $g(t)$에 대하여

$k=\frac{4}{a^2e^2}$라 하면,

$g(t)$는 $0<t<k$ 또는 $t=k$ 또는 $t>k$로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) $0<t<k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 세 실근을 α_1, α_2, α_3라 하면

부등식 $f(x)\geq t$의 해는 그림에서 $x\leq\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\leq x\leq\alpha_3$이므로

부등식을 만족시키는 x의 최댓값은 α_3이다.

따라서 $g(t)=\alpha_3$이다.

ⅱ) $t=k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 음의 실근을 β라 하면

부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\beta$ 또는 $x=-\frac{2}{a}$이므로

$g(t)=-\frac{2}{a}$이다.

ⅲ) $t>k$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근을 γ라 하면

부등식 $f(x)\geq t$의 해는 $x\leq\gamma$이므로 $g(t)=\gamma$이다.

정의역이 $\left\{x|x<\beta,\ x\geq-\frac{2}{a}\right\}$인 함수 $h(x)$를

$h(x)=\begin{cases}h_1(x)=f(x) & (x<\beta)\\ h_2(x)=f(x) & \left(x\geq-\frac{2}{a}\right)\end{cases}$ 라 정의하면

두 함수 $y=h_1(x)$와 $y=h_2(x)$는 각각의 정의역에서 일대일 대응이므로

역함수를 갖는다.

또한, $y=h_1(x)$의 치역은 $\{y|y>k\}$이고,

$y=h_2(x)$의 치역은 $\{y|0<y\leq k\}$이므로

함수 $h(x)$의 역함수의 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

이때, $h(x)=t$를 만족하는 x의 값은 방정식 $f(x)=t$의 해 중에서 최댓값이므로 $h(x)$의 역함수가 $g(t)$이다.

$g(t)$는 $0<t<k$, $t>k$인 모든 점에서 연속함수이므로

$t=k$에서의 연속성을 조사하면 된다.

$\lim\limits_{t\to k-}g(t)=-\frac{2}{a}$에서 $a<0$이므로 $-\frac{2}{a}>0$

$\lim\limits_{t\to k+}g(t)=\beta$에서 $\beta<0$이므로

$\lim\limits_{t\to k-}g(t)\neq\lim\limits_{t\to k+}g(t)$이다.

따라서 함수 $g(t)$는 $t=k$에서만 불연속이다.

$k=\frac{4}{a^2e^2}=\frac{16}{e^2}$, $\frac{4}{a^2}=16$, $a^2=\frac{1}{4}$

따라서 $100a^2=100\times\frac{1}{4}=25$

43) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 평면곡선의 접선의 성질 추론하기

타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$은 네 점 $(k,0)$, $(-k,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$을 네 꼭짓점으로 하는 타원이다.

타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 접할 때 k의 값을 구하자.

$\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 위의 점 $(x_1,y_1)\,(x_1>0)$에서의 접선의방정식을 구하면

$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{k^2y}$이므로 접선의 기울기는 $-\frac{x_1}{k^2y_1}$이고 접선의 방정식은

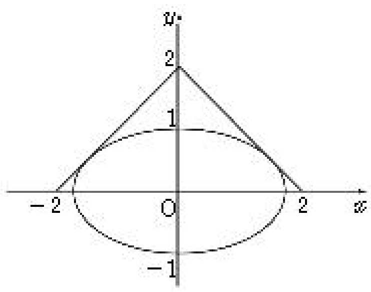
$y-y_1=-\frac{x_1}{k^2y_1}(x-x_1)\,(y_1\neq0)$

$\therefore\ y=-\frac{x_1}{k^2y_1}x+\frac{1}{y_1}$

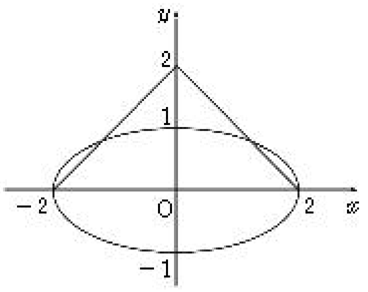
타원이 직선 $y=-x+2$에 접하므로

$\frac{x_1}{k^2y_1}=1$, $\frac{1}{y_1}=2$ $\therefore$ $x_1=\frac{k^2}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$

점 (x_1,y_1)은 $y=-x+2$ 위의 점이므로 $k^2=3$ $\therefore$ $k=\sqrt{3}$



타원 $\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$이 점 $(2,0)$을 지날 때, $k=2$



$$\therefore\ g(k)=\begin{cases}0, & (1<k<\sqrt{3})\\ 2, & (k=\sqrt{3})\\ 4, & (\sqrt{3}<k\le 2)\\ 2, & (k>2)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(k)$는 $k=\sqrt{3}$, $k=2$에서 불연속이고,

불연속이 되는 모든 k의 값들의 제곱의 합은 $(\sqrt{3})^2+2^2=7$

44) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속의 성질을 이해하여 주어진 조건의 값을 구한다.

함수 $f(t)=\begin{cases}2 & (|t|>1)\\ 1 & (|t|=1)\\ 0 & (|t|<1)\end{cases}$ 이고 함수 $(x+k)f(x)$가 구간 $(0,\infty)$ 에서 연속이면 $x=1$에서 연속이다.

$(1+k)f(1)=\lim\limits_{x\to 1-}(x+k)f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(x+k)f(x)$

$1+k=(1+k)\times 0=(1+k)\times 2$

따라서 $k=-1$이므로 $f(1)+k=1-1=0$

45) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-2$,

$\lim\limits_{x\to 0+}f(-x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to +0}\{f(x)+f(-x)\}=-2+2=0$ (참)

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x\to 1+$ 일 때 $t\to -1+$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1+}f(f(x))=\lim\limits_{t\to -1+}f(t)=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1+}\{f(x-1)\}^2=\lim\limits_{x\to +0}\{f(x)\}^2$

$=(-2)^2=4$

$\lim\limits_{x\to 1-}\{f(x-1)\}^2=\lim\limits_{x\to -0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\{f(1-1)\}^2=\{f(0)\}^2=2^2=4$

∴ 함수 $\{f(x-1)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

46) 답 : ③

[해설]

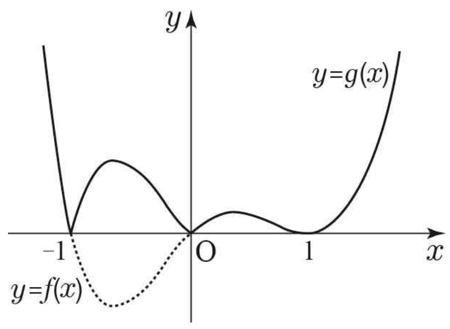
[출제 의도] 미분을 활용하여 문제 해결하기

$g(1)=g'(1)$이고 $x=1$에서 극솟값을 가지므로

$g(1)=g'(1)=0$ … ㉠

㉠에 의하여 $f(1)=f'(1)=0$

$g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 가지므로



$f(x)=(x-1)^2x(x+1)$

$g(x)=|(x-1)^2x(x+1)|$

따라서 $g(2)=6$

47) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제 해결하기

$f(x-1)=\begin{cases}-x, & (x\le 1)\\ 2x-2+a, & (x>1)\end{cases}$

$g(x)=f(x)f(x-1)$

$=\begin{cases}(-x-1)(-x), & (x\le 0)\\ (2x+a)(-x), & (0<x\le 1)\\ (2x+a)(2x-2+a), & (x>1)\end{cases}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위하여 $x=0$, $x=1$에서도 연속이 되어야 한다.

(ⅰ) $x=0$일 때 $\lim\limits_{x\to -0}g(x)=g(0)=\lim\limits_{x\to +0}g(x)$이므로

함수 $g(x)$는 a의 값에 관계없이 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $x=1$일 때함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x\to 1-}g(x)=g(1)=\lim\limits_{x\to 1+}g(x)\Leftrightarrow -(a+2)=(a+2)a$,

$(a+1)(a+2)=0$

$a\ne -1$이므로 $a=-2$

48) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속 이해하기

$\lim\limits_{x\to 2-}f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=-1$

$-x=t$라 하면

$x\to 2-$ 일 때, $t\to -2+$

$x\to 2+$ 일 때, $t\to -2-$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 2-}f(-x)=\lim\limits_{t\to -2+}f(t)=5$

$\lim\limits_{x\to 2+}f(-x)=\lim\limits_{t\to -2-}f(t)=7$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가

$\lim\limits_{x\to 2-}f(-x)\{f(x)+k\}=5(5+k)$,

$\lim\limits_{x\to 2+}f(-x)\{f(x)+k\}=7(-1+k)$,

$f(-2)\{f(2)+k\}=5(5+k)$

이므로 $x=2$에서 연속이 되기 위해서는

$5(5+k)=7(-1+k)$

따라서 $k=16$

49) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속 이해하기

$\lim_{x\to2-} f(x)=5$, $\lim_{x\to2+} f(x)=-1$ 이며

$-x=t$라 하면

$x\to2-$ 일 때, $t\to-2+$

$x\to2+$ 일 때, $t\to-2-$ 이므로

$\lim_{x\to2-} f(-x)=\lim_{t\to-2+} f(t)=5$

$\lim_{x\to2+} f(-x)=\lim_{t\to-2-} f(t)=7$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가

$\lim_{x\to2-} f(-x)\{f(x)+k\}=5(5+k)$,

$\lim_{x\to2+} f(-x)\{f(x)+k\}=7(-1+k)$,

$f(-2)\{f(2)+k\}=5(5+k)$

이므로 $x=2$에서 연속이 되기 위해서는 $5(5+k)=7(-1+k)$

따라서 $k=16$

50) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

$x\geq0$일 때

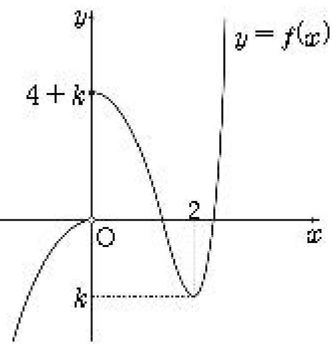
$f'(x)=x(x-2)e^{x}$ $(x>0)$

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f(0)=4+k$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$4+k$	↘	k	↗

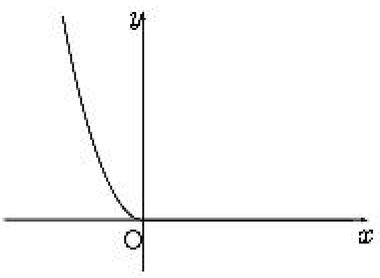
$y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)\geq0) \\ -2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$ 이므로

k의 값의 범위에 따라 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

i) $k\geq0$일 때



$x=0$에서 연속이고,

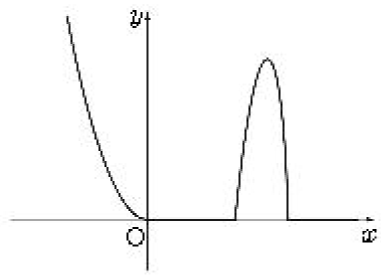
$\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{2x^2}{x}=0$

$\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{0}{x}=0$이므로

$x=0$에서 미분가능하다.

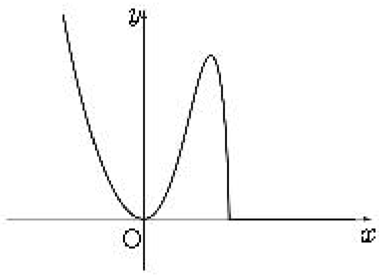
∴ 미분가능하지 않은 점의 개수는 0

ii) $-4<k<0$일 때



∴ 미분가능하지 않은 점의 개수는 2

iii) $k=-4$일 때



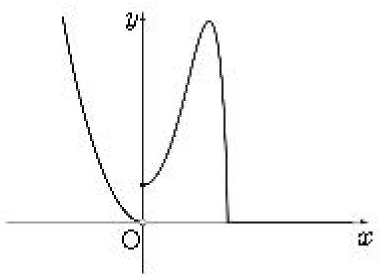
$x=0$에서 연속이고

$\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$

이므로 $x=0$에서 미분가능하다.

∴ 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

iv) $k<-4$일 때



∴ $x=0$에서는 불연속이고,

연속이면서 미분가능하지 않은 점의 개수는 1

i)~iv)에 의하여 $-4<k<0$이고 정수 k의 개수는 3

51) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속 이해하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차 함수

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=k$이므로 $f(x)=(x-1)(x-a)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1-a=k$

$h(x)=f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$h(2)=\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2-}h(x)$

$h(2)=f(2)g(2)=3(2-a)$

$\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2+}(x-1)(x-a)(2-x)=0$

$\lim_{x\to2-}h(x)=\lim_{x\to2-}(x-1)(x-a)(x+1)$

$=3(2-a)$

따라서 $a=2$이므로 $k=-1$

52) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 합성함수의 연속성을 이해하고 문제를 해결한다.

합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$$\lim_{x\to1+}(g \circ f)(x)=\lim_{x\to1-}(g \circ f)(x)=(g \circ f)(1)$$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=1^2-1+2a=2a$ 이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to1+}(g \circ f)(x)=(2a)^2+a\times2a+3=6a^2+3$

$\lim_{x\to1+}f(x)=3+a$ 이므로

$\lim_{x\to1-}(g \circ f)(x)=(3+a)^2+a\times(3+a)+3=2a^2+9a+12$

$(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(2a)=6a^2+3$

따라서 $6a^2+3=2a^2+9a+12$ 이어야 하므로

$$4a^2-9a-9=0$$

$$(a-3)(4a+3)=0$$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은 $\dfrac{9}{4}$ 이다.

[다른 풀이]

이차 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이고 곡선 $y=g(x)$는 직선 $x=-\dfrac{a}{2}$에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $(g \circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$ 또는

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=-a$ 이어야 한다.

$1-1+2a=3+a$ 에서

$a=3$

$(1-1+2a)+(3+a)=-a$ 에서

$a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$$3-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

53) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $|x|<1$일 때 $f(x)=x^2$은 연속이고, $|x|>1$일 때 $f(x)=x^2-4|x|+3$은 연속이다.

ⅰ) $x=-1$일 때 $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$

ⅱ) $x=1$일 때 $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$

$\therefore\ x=-1$과 $x=1$에서 불연속이므로

$f(x)$가 불연속인 점은 2개이다. (참)

ㄴ. ⅰ) $x=-1$일 때

$$\lim_{x\to-1-}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to-1+}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=0$$

$$f(-1)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

ⅱ) $x=1$일 때

$$\lim_{x\to1-}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to1+}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=0$$

$$f(1)\cos\frac{\pi}{2}=0$$

$\therefore$ 함수 $y=f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x$는 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. [반례] $a=2$일 때 $f(x)$는 $x=-1$, 1에서 불연속이고, $f(x-2)$는 $x=1$, 3에서 불연속이므로

$x=-1$, 1, 3에서의 연속성을 조사해 보면

$$\lim_{x\to-1-}f(x)f(x-2)=\lim_{x\to-1+}f(x)f(x-2)=f(-1)f(-3)=0$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)f(x-2)=\lim_{x\to1+}f(x)f(x-2)=f(1)f(-1)=0$$

$$\lim_{x\to3-}f(x)f(x-2)=\lim_{x\to3+}f(x)f(x-2)=f(3)f(1)=0$$

$\therefore$ 함수 $y=f(x)f(x-2)$는 실수 전체의 집합에서연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

54) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 연속성 이해하기

$f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=k$ 이다.

$$k=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to1}(x+2)=3$$

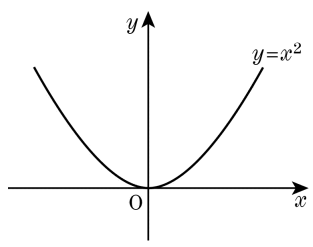
$\therefore\ k=3$

55) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 연속의 뜻을 이해하여 주어진 함수의 연속 여부를 판정한다.

ㄱ.



$x\to0$일 때 $g(x)\to0+$ 이므로

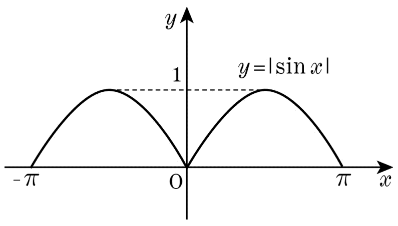
$$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=0$$

$f(g(0))=f(0)=0$

따라서 $\lim_{x\to0}f(g(x))=f(g(0))=0$ 이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ.



$x \to 0$ 일 때 $g(x) \to 0+$ 이므로

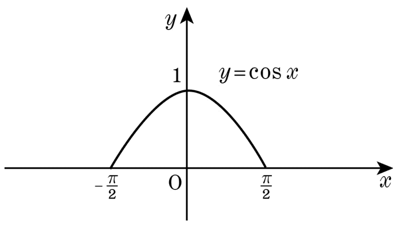
$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{t \to 0+} f(t) = 0$

$f(g(0)) = f(0) = 0$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = f(g(0)) = 0$ 이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ.



$x \to 0$ 일 때, $g(x) \to 1-$ 이므로

$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{t \to 1-} f(t) = 2$

$f(g(0)) = f(1) = 0$

따라서 $\lim_{x \to 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$ 이므로

함수 $f(g(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.

이상에서 $x=0$에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

56) 답 : 22

[해설]

$x=1$에서 함수의 극한값과 함숫값이 같으므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{ax}-b}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{ax}-\sqrt{a}}{x-1} = \frac{\sqrt{a}}{2} = 2$$

$\therefore\ a=16,\ b=4$

따라서 $a+b=20$

57) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]연속함수의 뜻 이해하기

$\lim_{x \to 2} (a\sqrt{x+2}+b) = 0$ 이므로 $2a+b=0$

$$\lim_{x \to 2} \frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{a}{\sqrt{x+2}+2} = 2$$

따라서 $a=8,\ b=-16$ 이므로 $2a-b=32$

58) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $\lim_{x \to -1-0} f(x) \times \lim_{x \to -1-0} g(x) = 1 \times 0 = 0$ 이고

$\lim_{x \to -1+0} f(x) \times \lim_{x \to -1+0} g(x) = 0 \times (-1) = 0$ 이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)g(x) = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x \to 1-0} f(x) - \lim_{x \to 1-0} g(x) = 0-(-1) = 1$ 이고

$\lim_{x \to 1+0} f(x) - \lim_{x \to 1+0} g(x) = 1-0 = 1$ 이므로

$\lim_{x \to 1} \{f(x)-g(x)\} = 1$ (참)

ㄷ. $g(f(0)) = g(-1) = 0,\ \lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{t \to -1+0} g(t) = -1$ 이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다.(거짓)

59) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 연속의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\lim_{x \to 1} f(x)g(x) = f(1)g(1) = 0$ 이므로

$x=1$에서 연속이다.(참)

ㄴ. $\lim_{x \to 0} f(g(x)) = 0$ 이고 $f(g(0)) = -1$ 이므로

$x=0$에서 연속이 아니다.(거짓)

ㄷ. $\lim_{x \to -1} g(f(x)) = g(f(-1)) = 1$ 이므로

$x=-1$에서 연속이다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

60) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x \to 1+} g(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{f(x)} = \infty$

$\lim_{x \to 1-} g(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{1}{f(x)} = 1$

따라서, $\lim_{x \to 1} g(x)$는 존재하지 않는다.(거짓)

ㄴ. $\lim_{x \to 1-} g(f(x)) = \lim_{t \to 1-} g(t) = \lim_{t \to 1-} \frac{1}{f(t)} = 1$ (참)

ㄷ. $f(x)$가 $x=0,\ \pm 1$을 제외한 열린 구간 $(-2,\ 2)$에서 연속이므로 $g(x)$도 연속이다.

$\lim_{x \to 1+} x^2 g(x) = \infty,\ \lim_{x \to -1-} x^2 g(x) = \infty$

이므로 $x=\pm 1$에서 불연속이다.

$\lim_{x \to 0} x^2 g(x) = 0$ 이고 함숫값과 같으므로 $x=0$에서 연속이다.(참)

61) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $\lim_{x \to 0-} [f(x)] = 0,\ \lim_{x \to 0+} [f(x)] = 0,\ [f(x)] = 0$ (연속)

ㄴ. $\lim_{x \to 0-} [f(x)] = 1,\ \lim_{x \to 0+} [f(x)] = 0$ (불연속)

ㄷ. $\lim_{x \to 0-} [f(x)] = -1,\ \lim_{x \to 0+} [f(x)] = -1,\ [f(x)] = -1$ (연속)

62) 답 : ④

[해설]

$$g(f(x)) = \begin{cases} x+1, & (-2 \le x \le -1) \\ 0, & (-1 < x < 0) \\ -1, & (x=0) \\ 0, & (0 < x < 1) \\ -x+1, & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x \to -1} g(f(x)) = 0$ (거짓)

ㄴ. $g(f(0)) = g(1) = -1$ 이고,

$\lim_{x \to 0+} g(f(x)) = \lim_{x \to 0-} g(f(x)) = 0$ 이므로

$g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.(참)

ㄷ. 함수 $g(f(x))$는 1과 2사이에서 연속이고

$g(f(1))=0,\ g(f(2))=-1$이므로 중간값의 정리에 의해 방정식

$g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.(참)

63) 답 : ③

[해설]

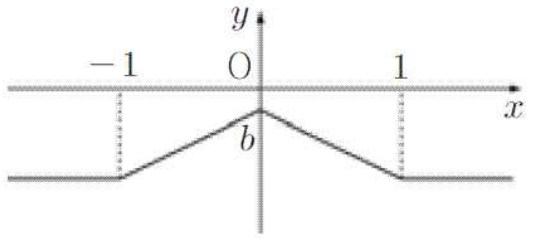
$$f(x)=\begin{cases} -a|x|+b, & (|x|<1) \\ \dfrac{-a-1+b}{2}, & (|x|=1) \\ -1, & (|x|>1) \end{cases}$$

ㄱ. 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이다.

$\therefore\ a-b=1$ (참)

ㄴ.(반례) $a=-1,\ b=-2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이다. (거짓)

ㄷ. $a<1$일 때, $b<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.(참)



64) 답 : ③

[해설]

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & (x\ge0) \\ -\frac{1}{2}x^2, & (x<0) \end{cases}$$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{2}x=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to0-}\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$ ∴ 참

ㄴ. $\lim_{x\to\sqrt{2}+} g(f(x))=\lim_{t\to1+} g(t)=2$이고

$\lim_{x\to\sqrt{2}-} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=1$이므로 ∴ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to1+} g(g(x))=\lim_{t\to2-} g(t)=1$

$\lim_{x\to1-} g(g(x))=1$

$\lim_{x\to1} g(g(x))=1$이고 $g(g(1))=1$이므로

$x=1$에서 연속이다. ∴ 참

65) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to0}(f\circ g)(x)=1$, $(f\circ g)(0)=0$ ∴ 불연속

ㄴ. $\lim_{x\to0}(f\circ h)(x)=(f\circ h)(0)=1$ ∴ 연속

ㄷ. $\lim_{x\to0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)=\frac{1}{4}$ ∴ 연속

66) 답 : ①

[해설]

ㄱ. ① $\lim_{x\to0+} g(f(x))=\lim_{t\to10-} g(t)=-2$

② $\lim_{x\to0-} g(f(x))=\lim_{x\to-10+} g(t)=-2$

$\lim_{x\to10+} g(f(x))=\lim_{x\to10-} g(f(x))$이므로 $x=1$에서 극한값이 존재한다. ∴ 참

ㄴ. ① $\lim_{x\to0+} f(f(x))=\lim_{t\to10-} f(t)=-1$,

② $\lim_{x\to0-} f(f(x))=\lim_{t\to-10+} f(t)=0$이므로

$x=0$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

∴ 거짓

ㄷ.(반례)① $\lim_{x\to-\frac{1}{20}+} f(g(x))=\lim_{t\to0+} f(t)=1$

② $\lim_{x\to-\frac{1}{20}-} f(g(x))=\lim_{t\to0-} f(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-\frac{1}{20}+} f(g(x))\neq \lim_{x\to-\frac{1}{20}-} f(g(x))$

$x=-\frac{1}{2}$에서 불연속이다. ∴ 거짓

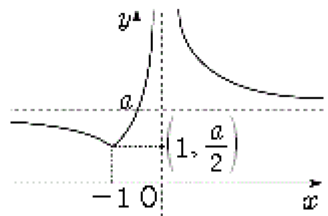
67) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]함수의 연속성 이해하기

ⅰ) $a=0$인 경우, $f(x)=0$

ⅱ) $a>0$인 경우



ⅲ) $a<0$인 경우

ⅱ)의 그래프를 x축으로 대칭이동한 그래프이다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1} f(x)=f(-1)=\frac{a}{2}$ (참)

ㄴ. $a=0$일 때, 함수 $f(x)=0$이므로 모든 실수에서 연속이다.(참)

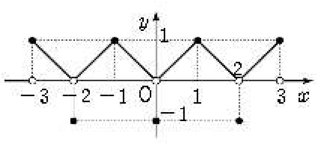
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=a$와 오직 한 점에서 만난다.(참)

68) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]합성 함수의 불연속점의 개수 찾기

[해설]함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$y=(g\circ f)(x)$는 $x=-3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 3$에서 불연속이다.

따라서 불연속점은 5개이다.

69) 답 : ⑤

[해설]

함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{x^2 - ax - 2}{x-1} = f(1) = b$ 이어야 한다.

분모의 극한값이 $\lim_{x\to1}(x-1) = 0$ 이므로,

분자의 극한값 $\lim_{x\to1}(x^2 - ax - 2) = 0$ 이어야 한다.

따라서 $a = -1$ 이고,

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = 3 = b$$

$\therefore\ a + b = 2$

70) 답 : 26

[해설]

[출제 의도]함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(1) = \lim_{x\to1+} f(x) = \lim_{x\to1-} f(x)$ 이어야 하므로

$\frac{a+5}{1+b} = a = \frac{5}{b}$ 에서 $ab = 5$

$a = 1,\ b = 5$ 또는 $a = 5,\ b = 1$ 이므로 $a^2 + b^2 = 26$

71) 답 : 36

[해설]

[출제 의도]중간값의 정리 이해하기

[해설] $h(x) = f(x) - g(x)$ 라고 하면

$h(x) = x^5 + 2x^2 + k - 3$

$x > 0$ 에서 $h(x)$는 연속이고 증가하므로

$h(1)h(2) = k(k+37) < 0$ 이면 구간 $(1,\ 2)$ 에서 실근을 갖는다.

$-37 < k < 0$ 인 정수 k는 36개

72) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]연속함수와 주기함수를 활용하여 함수값 계산하기

ⅰ) $f(0) = f(4)$

$0 = 16 + 4a + b$

ⅱ) $\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1+0} f(x) = f(1)$

$3 = 1 + a + b$

$a = -6,\ b = 8$

$\therefore\ f(10) = f(2) = 0$

73) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]연속함수의 정의를 이해하기

$x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - a}{x - \frac{\pi}{2}} = b$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x - a) = 0$ 이므로 $a = 1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = b$ 에서 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 라 하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0 \ \therefore\ b = 0$$

따라서 $a + b = 1$

74) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]합성함수의 연속성 이해하기

[해설]ㄱ. $g(f(0)) = g(0) = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0} g(f(x)) = 0,\ g(f(0)) = 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 연속(참)

ㄷ. $y = g(x)$가 $x = 1$ 에서 불연속이므로

주어진 구간에서 $y = g(f(x))$는 $f(x) = 1$ 인 $x = \frac{1}{2}$ 에서 불연속,

$\lim_{x\to2+} g(f(x)) = -1,\ \lim_{x\to2-} g(f(x)) = -2$

이므로 $x = 2$ 에서 불연속,

구간내의 이외의 점에서는 $y = f(x)$와 $y = g(x)$가 모두 연속이므로

$y = g(f(x))$는 연속(참)

75) 답 : 13

[해설]

[출제 의도]연속의 정의를 이용하여 함숫값 구하기

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 라 하면

$f(3x) = 3^n a_n x^n + \cdots + 3a_1 x + a_0$

$9f(x) = 9a_n x^n + \cdots + 9a_1 x + 9a_0$

$f(3x) - 9f(x) = (3^n - 9)a_n x^n + \cdots + (3^0 - 9)a_0 = 0$ 이 항등식이므로

a_2를 제외한 모든 $a_i (0 \le i \le n)$은 0이다.

따라서 $f(x) = a_2 x^2$ (a_2는 상수)꼴이다.

$x = 1$ 에서 $g(x)$는 연속이므로 $\lim_{x\to1} \frac{a_2 x^2 - 1}{x-1} = 2a_2$

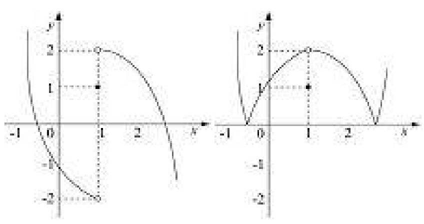
$\therefore\ a_2 = 1 \ \therefore\ g(x) = x + 1$ 이므로 $g(12) = 13$

76) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]함수의 연속성 이해하기

$y = f(x)$ $y = |f(x)|$



ㄱ. 그래프에 의하여 $\lim_{x\to1} |f(x)| = 2$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to2+} f(f(x)) = \lim_{t\to1-} f(t) = -2$ (참)

ㄷ. 함수 $y = f(f(x))$는 $f(x) = 1$ 일 때 불연속점을 가지므로

$x = 2,\ 1,\ 1 - \sqrt{3}$ 에서 불연속이다. 따라서 3개 존재한다.(참)

77) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{h\to0} \left| (2+h)^2 - (2-h)^2 \right| = \lim_{h\to0} |8h| = 0$ (참)

ㄴ. $\lim_{h\to0} \left| [2+h] - [2-h] \right| = |2 - 1| = 1$ (참)

ㄷ.(반례) $f(x)=\begin{cases} x, & (x \neq 2) \\ 0, & (x=2) \end{cases}$ 이면

$\lim\limits_{h \to 0}|f(2+h)-f(2-h)|=\lim\limits_{h \to 0}|(2+h)-(2-h)|=0$ 이지만 $x=2$ 에서 불연속이다.(거짓)

78) 답 : ①

[해설]

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 이어야 한다.

$f(2)=2^2+2+a=6+a$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)=\lim\limits_{x \to 2}(x+b)=2+b$ 에서

$6+a=2+b$

$\therefore\ a-b=2-6=-4$

79) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]함수의 연속성을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $g(x)=\begin{cases} 1, & (x \neq 0) \\ 0, & (x=0) \end{cases}$ 이므로 $x=0$에서 불연속

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} x^2+5, & (x \neq 0) \\ 5, & (x=0) \end{cases}$ 이므로 $x=0$에서 연속

ㄷ. $g(x)=\begin{cases} \sum\limits_{r=2}^{10} {}_{10}C_r x^{r-1}+1, & (x \neq 0) \\ 1, & (x=0) \end{cases}$ 에서

$\lim\limits_{x \to 0} g(x)=g(0)=1$ 이므로 $x=0$에서 연속

80) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]함수의 극한과 연속성을 조사할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $h(1)=f(1)g(1)=0 \times 1=0$ ∴ 참

ㄴ. $\lim\limits_{x \to 1} h(x)=\lim\limits_{x \to 1} f(x)g(x)=\left(\lim\limits_{x \to 1} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x \to 1} g(x)\right)=0 \times 0=0$

∴ 거짓

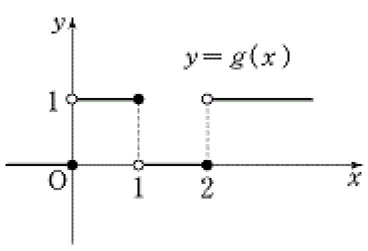
ㄷ. 거짓 (∵ $x=1$에서 연속이다.)

따라서 옳은 것은 ㄱ

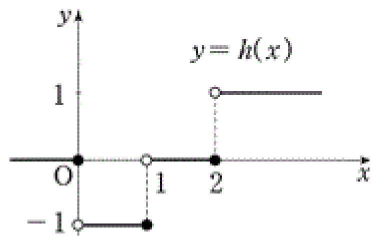
81) 답 : ②

[해설]

$g(x)=\begin{cases} 0, & (x \leq 0) \\ 1, & (0<x \leq 1) \\ 0, & (1<x \leq 2) \\ 1, & (x>2) \end{cases}$



$h(x)=\begin{cases} 0, & (x \leq 0) \\ -1, & (0<x \leq 1) \\ 0, & (1<x \leq 2) \\ 1, & (x>2) \end{cases}$



$g(x)+h(x)=\begin{cases} 0, & (x \leq 0) \\ 0, & (0<x \leq 1) \\ 0, & (1<x \leq 2) \\ 2, & (x>2) \end{cases}$

$g(x)h(x)=\begin{cases} 0, & (x \leq 0) \\ -1, & (0<x \leq 1) \\ 0, & (1<x \leq 2) \\ 1, & (x>2) \end{cases}$

$|h(x)|=\begin{cases} 0, & (x \leq 0) \\ 1, & (0<x \leq 1) \\ 0, & (1<x \leq 2) \\ 1, & (x>2) \end{cases}$

$a_1=N(g+h)=1,\ a_2=N(gh)=3,\ a_3=N(|h|)=3$

$\therefore\ a_1<a_2=a_3$

82) 답 : ④

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{x \to 0+} g(x)=\lim\limits_{x \to 0+}\left(\frac{1}{2}x-1\right)=-1$ (거짓)

ㄴ. $f(0)=a(a>3)$이라 하면 $g(f(0))=g(a)$

$g(x)$는 $x>3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))=\lim\limits_{k \to a} g(k)=g(a)$

따라서 $\lim\limits_{x \to 0} g(f(x))=g(f(0))$ 이므로

함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.(참)

ㄷ. $h(x)=g(f(x))$라고 하면

$h(-3)=g(f(-3))=g(1)=-\frac{1}{2}$

$h(3)=g(f(3))=g(3)=\frac{1}{2}$

$h(-3)h(3)<0$ 이므로

$h(x)$의 그래프는 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 x축과 적어도 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $g(f(x))=0$은 닫힌구간 $[-3,\ 3]$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

83) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]합성함수의 불연속점 개수 구하기

$g(f(x))=\begin{cases} 2, & \left(0<x<\frac{1}{2}\right) \\ 0, & \left(\frac{1}{2} \leq x<\frac{7}{2}\right) \\ 2, & \left(\frac{7}{2} \leq x<\frac{15}{2}\right) \\ 6, & \left(\frac{15}{2} \leq x<\frac{31}{2}\right) \\ 12, & \left(\frac{31}{2} \leq x<20\right) \end{cases}$

따라서 불연속 점의 개수는 4개이다.

84) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]불연속인 점 찾기

$-\log_5 x=\log_{\frac{1}{5}}x$가 정수일 때, $f(x)$는 x에서 불연속이다.

$\log_{\frac{1}{5}}x=1$이면 $x=\frac{1}{5}$에서 불연속,

$\log_{\frac{1}{5}}x=2$이면 $x=\left(\frac{1}{5}\right)^2$에서 불연속

…

따라서 불연속인 x의 좌표의 합

$$=\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

85) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]주어진 함수의 그래프에서 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(-1)\cdot1=-1$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=(-1)\cdot(-1)=1$

$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$

$f(1)+g(1)=(-1)+1=0$ (참)

86) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]

중간값의 정리를 이용하여 주어진 명제를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

x만큼 짧아진 삼각형의 세 변의 길이는

$a-x,\ b-x,\ c-x$이므로

$(a-x)+(b-x)>c-x$

$\therefore\ 0<x<a+b-c$

$f(0)=a^2+b^2-c^2>0$

$f(a+b-c)=(c-b)^2+(c-a)^2-(a+b-2c)^2$

$=-2(c-a)(c-b)<0$

$y=f(x)$는 연속함수이므로 중간값의 정리에 의해

$f(x)=0$이 되는 x가 $0<x<a+b-c$인 범위에 존재하므로

직각삼각형을 만드는 것이 가능하다.

87) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]연속함수의 성질을 이해하고 활용하기

$f(x)=\cos x-x+1$로 놓으면

$f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$이므로

사이값정리에 의해 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

[정답]②

88) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 극한과 연속성 이해하기

ㄴ. 극한값이 존재하지 않는 점의 개수는 2개이다.

$\lim_{90x\to-1-}f(x)=\lim_{90x\to-1+}f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=2$

[정답]③

89) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]연속함수의 성질을 이해하고 이를 활용하기

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=2$이므로

다항함수 $f(x)=x^2+2x+a$꼴이다.

함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x+a}{x-1}=k$이어야 한다.

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값은 일정한 값이므로

(분자)$\to0$이어야 한다.

$2\times1+a=0$

$\therefore\ a=-2$

$f(x)=x^2+2x-2$이고 $\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{x-1}=2$

$\therefore\ k=2$

$\therefore\ k+f(3)=2+13=15$

[정답] 15

90) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]연속함수의 성질을 활용하여 극한값 구하기

주어진 구간 $0<x<1$에 대하여 $y=\lim_{n\to\infty}f^n(x)=1$이므로 상수함수이다.

[정답]①

91) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]미분가능성을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1,\ \lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고,

$\lim_{h\to0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2$이므로

$g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

92) 답 : ⑤

[해설]
[출제 의도]사이값의 정리를 알고 이를 활용하기
ㄱ. $f(x)=\cos\pi x - x$라 하면
$f(0)f(1)=-1<0$
ㄴ. $g(x)=2^x+x-2$라 하면
$g(0)g(1)=-1<0$
ㄷ. $h(x)=\cos\pi x - x$라 하면
$h(0)h(1)=-1<0$이므로
사이값의 정리에 의하여 $f(x)=0,\ g(x)=0,\ h(x)=0$은
열린 구간 $(0,1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.
[정답]⑤

93) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용하기
$x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

[정답]⑤

94) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]합성함수의 연속성을 알아낼 수 있는가를 묻는 문제이다.
합성함수 가 $x=0$에서 연속이면 구간 $[-2,2]$에서 연속
$(g\circ f)(x)$이다.
따라서 $\lim_{x\to 0}g(f(x))=g(f(0))$가 성립해야 한다.
이때, $\lim_{x\to 0+}g(f(x))=g(-1)$,
$\lim_{x\to 0-}g(f(x))=g(1),\ g(f(0))=g(0)$이므로
$g(-1)=g(1)=g(0)$이어야 한다.
이때, $g(-1)=g(1)=g(0)$을 만족하는 함수 $g(x)$는 ㄴ뿐이다.

95) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용하기
$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $4=4a+b$
미분가능 하므로 미분계수 $f'(2)=4=-4a$
$a=-1,\ b=8$
[정답]④