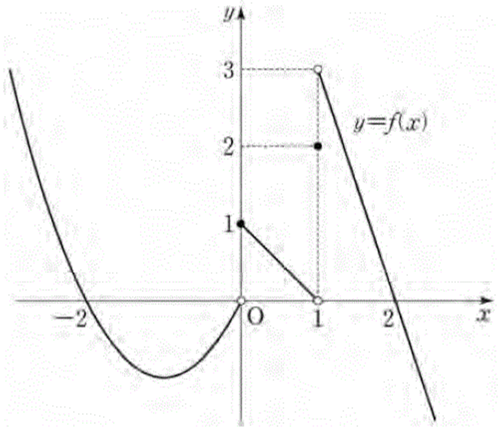
**II.함수의 극한과 연속성**

**1.함수의 극한**

# 중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

**1** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

**2** 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때,

$\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

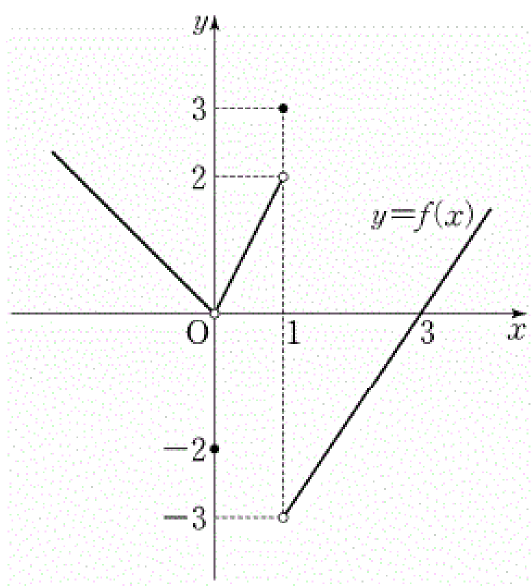
**3** 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차 함수 $f(x)$가

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

① 4
② 6
③ 8
④ 10
⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

**4** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

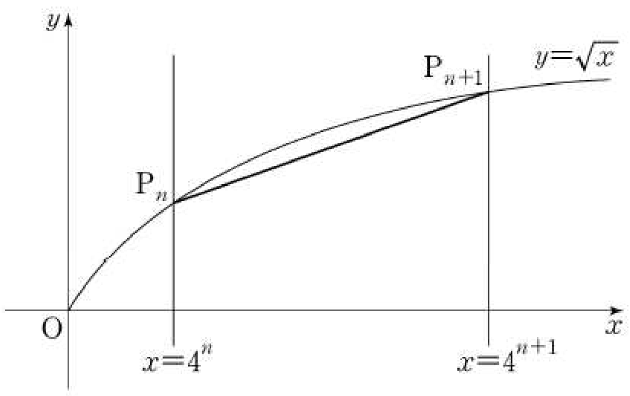



$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(x)$의 값은? [3점]

① −1 ② −2 ③ −3
④ −4 ⑤ −5

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

**5** 자연수 $n$에 대하여 직선 $x=4^n$이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 $P_n$이라 하자. 선분 $P_n P_{n+1}$의 길이를 $L_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점]




[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

**6** 최고차항의 계수가 1인 이차 함수 $f(x)$가

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha, \beta$라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, $a$는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

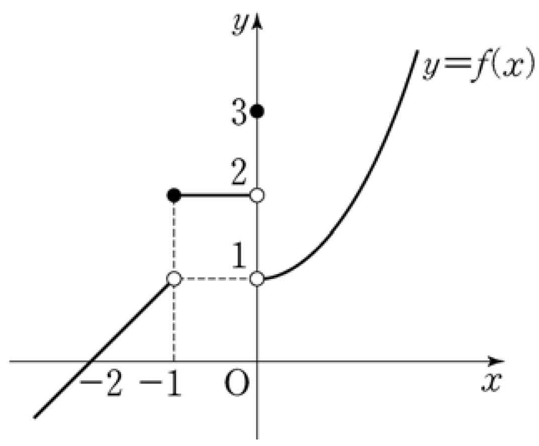
[난이도 : ★☆☆] [2016 학년도 대수능]

**7** $\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}$의 값은? [2점][2016(A) /수능 3]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

**8** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to -1-} f(x)+\lim_{x\to 0+} f(x)$의 값은? [3점][2016(A) /수능 8]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

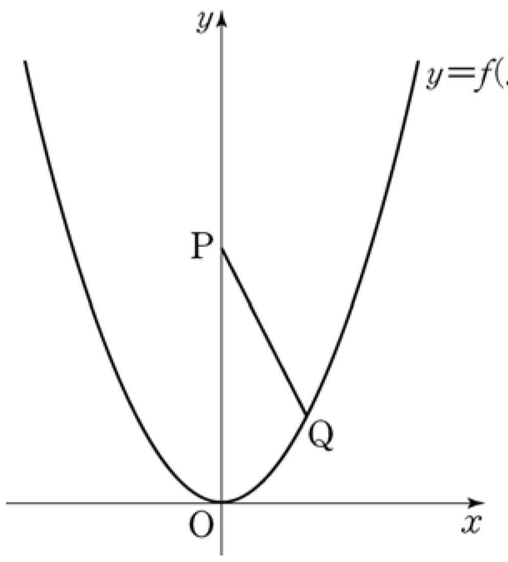
**9** 수열 $\{a_n\}$에 대하여 곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$은 $x$축과 만나고, 곡선 $y=x^2-nx+a_n$은 $x$축과 만나지 않는다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점][2016(A) /수능 10]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

**10** 자연수 $n$에 대하여 좌표가 $(0, 2n+1)$인 점을 $P$라 하고, 함수 $f(x)=nx^2$의 그래프 위의 점 중 $y$좌표가 $1$이고 제1사분면에 있는 점을 $Q$라 하자.




점 $R(0, 1)$에 대하여 삼각형 $PRQ$의 넓이를 $S_n$, 선분 $PQ$의 길이를 $l_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^2}{l_n}$의 값은? [4점][2016(A) /수능 14]

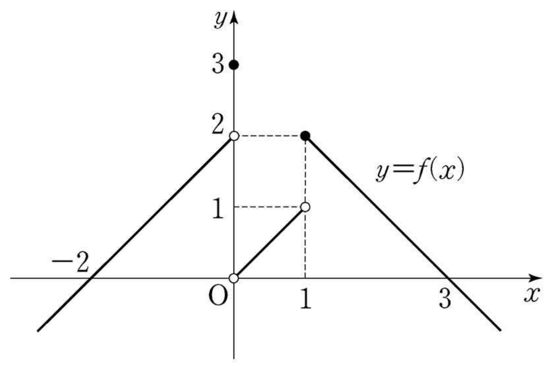
① $\frac{3}{2}$　② $\frac{5}{4}$　③ $1$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

**11** $\lim_{x\to 0}\frac{x(x+7)}{x}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

**12** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2014 학년도 대수능]

**13** $\lim_{x\to 4}\sqrt{2x+1}$의 값을 구하시오. [3점]

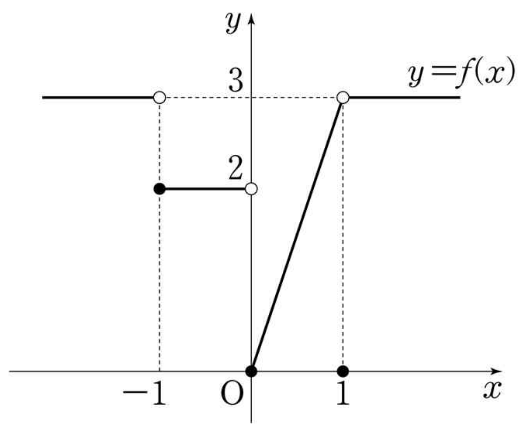
[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

**14** 함수 $f(x)=2x^2+ax$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=6$일 때, 상수 $a$의 값은? [3점]

① $-4$　② $-2$　③ $0$
④ $2$　⑤ $4$

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

**15** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to0+} f(x)$의 값은? [3점]

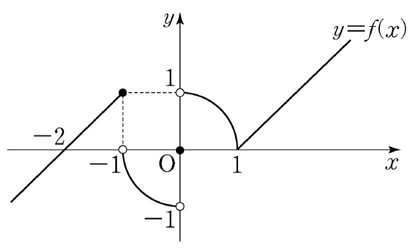
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2013 학년도 대수능]

**16** $\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-2}$의 값을 구하시오.[3점][2013학년도 수능]

[난이도 : ★★☆] [2013 학년도 대수능]

**17** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-} f(x)+\lim_{x\to0+} f(x)$의 값은?[3점]

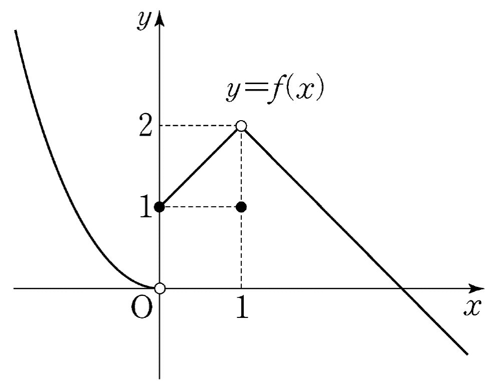
① $-2$　② $-1$　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2012 학년도 대수능]

**18** $\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+3x+7)}{x-1}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

**19** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]




| [보기] |
| --- |
| ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)=1$ |
| ㄴ. $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$ |
| ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. |

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2011 학년도 대수능]

**20** 두 상수 $a, b$에 대하여 $\lim_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\dfrac{1}{4}$일 때, $a+b$의 값은?[2점]

① 3　② 5　③ 7
④ 9　⑤ 11

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

**21** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

**22** 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 $m, n$이

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{m-1}}=a$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=b$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^{n-1}}=9$를

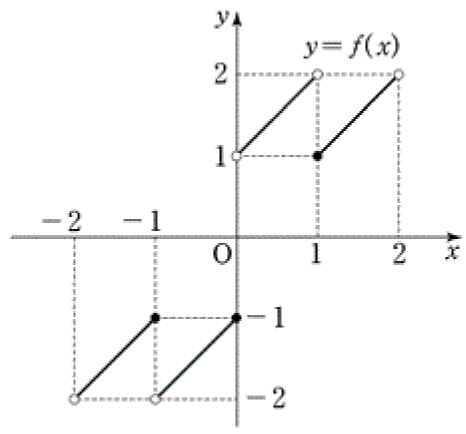
모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, $a, b$는 실수)[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $m\ge n$ |
| ㄴ. $ab\ge9$ |
| ㄷ. $f(x)$가 삼차 함수이면 $am=bn$이다. |

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009 학년도 대수능]

**23** 열린 구간 $(-2, 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.




열린 구간 $(-2, 2)$에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+f(-x)$로 정의할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)$가 존재한다. |
| ㄴ. $\lim_{x\to0}g(x)$가 존재한다. |
| ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. |

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2005 학년도 대수능]

**24** $\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

**25** [공통] $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$을 성립하게 하는 상수 $a, b$의 곱 $ab$의 값은?[2점]

① $-3$ ② $-2$ ③ $1$
④ $2$ ⑤ $3$

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

**26** [공통]함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+4}+2x}{x^{2n}+1}$ 일 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2002 학년도 대수능]

**27** 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{8(x^4-1)}{(x^2-2)f(x)}=1$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.[2점]

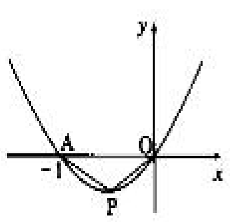
[난이도 : ★☆☆] [2000 학년도 대수능]

**28** $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 의 값은?[2점]

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $1$

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

**29** [공통]포물선 $y=x(x+1)$위에 점 $A(-1,0)$이 있다. 점 $P$가 점 $A$에서 포물선을 따라 원점 $O$로 한없이 가까이 갈 때, $\angle APO$의 크기의 극한값은?




① $90^{\circ}$ ② $120^{\circ}$ ③ $135^{\circ}$
④ $150^{\circ}$ ⑤ $180^{\circ}$

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

**30** [공통]모든 실수에 대하여 정의된 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^2(-1\le x\le1)$과 $f(x+2)=f(x)$를 만족하는 주기함수이다. 좌표평면 위에서 각 자연수 $n$에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2n}x+\frac{1}{4n}$과 함수 $y=f(x)$의 그래프와의 교점의 개수를 $a_n$이라 고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

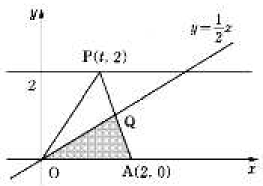
**31** $x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수는 $2$이다.

미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}=0$이 성립할 때, $\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$의 값은?

① $4$ ② $2$ ③ $0$
④ $-2$ ⑤ $-4$

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

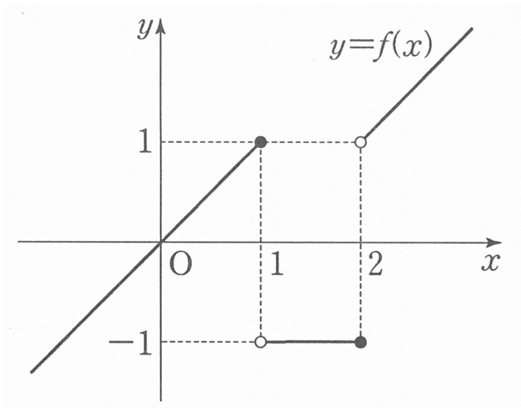
**32** [공통]좌표평면 위에 두 점 $O(0,0)$, $A(2,0)$과 직선 $y=2$위를 움직이는 점 $P(t,2)$가 있다. 선분 $AP$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점을 $Q$라 하자. $\triangle QOA$의 넓이가 $\triangle POA$의 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때, $t$의 값을 $t_1$, $\frac{1}{2}$일 때 $t$의 값을 $t_2$, $\cdots$, $\frac{n}{n+2}$일 때 $t$의 값을 $t_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty} t_n$의 값은?




① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

**33** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

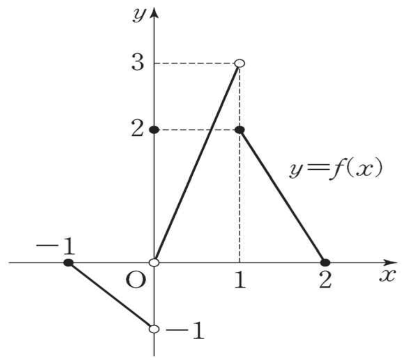



$\lim_{x\to 1-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① $-2$　② $-1$　③ 0　④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

**34** 닫힌구간 $[-1,2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

**35** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+7}{x-1}$의 값을 구하시오.[3점]

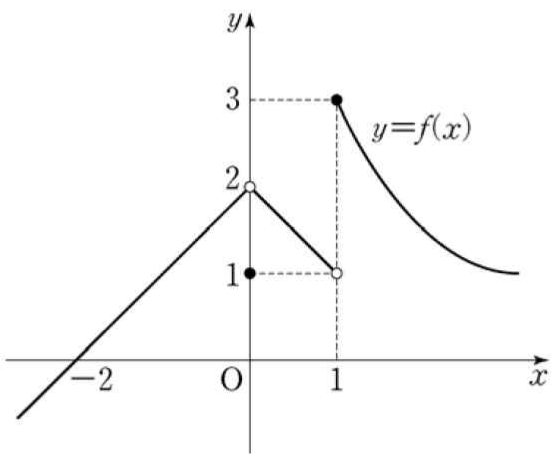
[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

**36** $\lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x+3)}{x-7}$의 값은? [3점]

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

**37** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

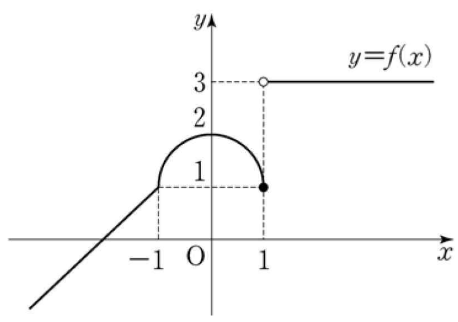



$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

**38** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



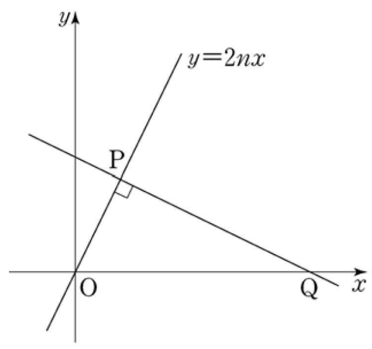

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

**39** 자연수 $n$에 대하여 직선 $y=2nx$ 위의 점 $P(n,\ 2n^2)$을 지나고 이 직선과 수직인 직선이 $x$축과 만나는 점을 $Q$라 할 때, 선분 $OQ$의 길이를 $l_n$이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n^3}$의 값은?

(단, $O$는 원점이다.)[3점]




① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

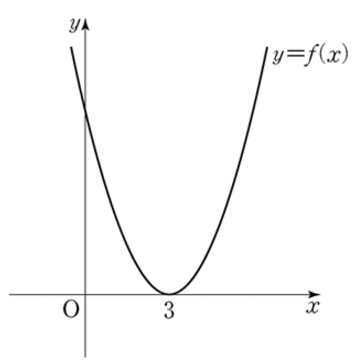
[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

**40** 함수 $f(x)$가

$f(x)=(x-3)^2$일 때,

자연수 $n$에 대하여 방정식 $f(x)=n$의 두 근이 $\alpha,\beta$일 때 $h(n)=|\alpha-\beta|$라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$의 값은?[4점]




① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\dfrac{5}{2}$

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

**41** 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$ |
| (나) $\lim_{x\to 0}f(x)=-7$ |

[난이도 : ★☆☆] [2014년 6월 모의평가]

**42** $\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$의 값은? [2점]

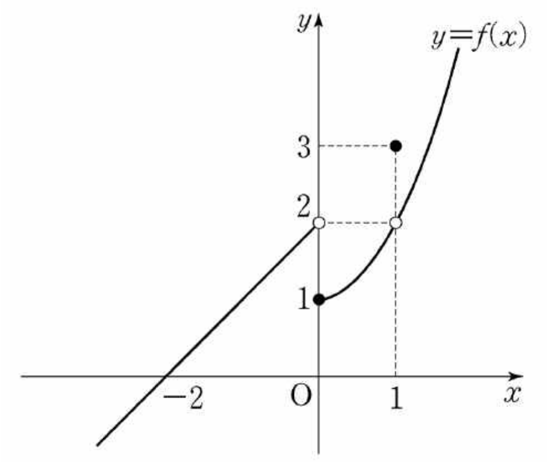
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

**43** $\lim_{x\to3}\frac{x^3}{x-2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

**44** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

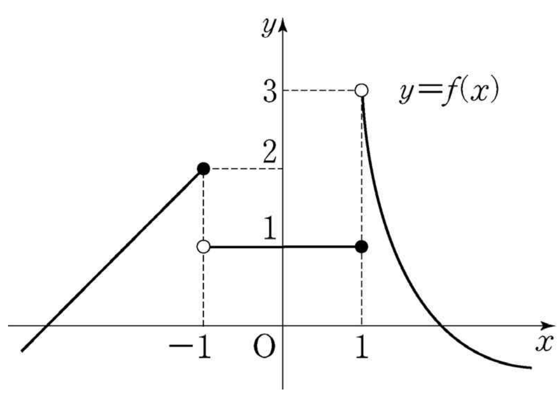



$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

**45** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

**46** 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

**47** 최고차항의 계수가 1인 두 삼차 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

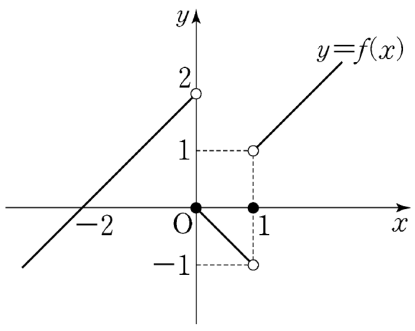
| |
|---|
| (가) $g(1)=0$ |
| (나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ |

$g(5)$의 값은? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

**48** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은?[3점][2012년 6월]

① −1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

**49** 두 상수 $a, b$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax}{x-1}=b$일 때, $a+b$의 값은?[3점][2012년 6월]

① −2 ② −1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

**50** 두 상수 $a, b$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, $10a+4b$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 모의평가]

**51** 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$, $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)f(x)}=1$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

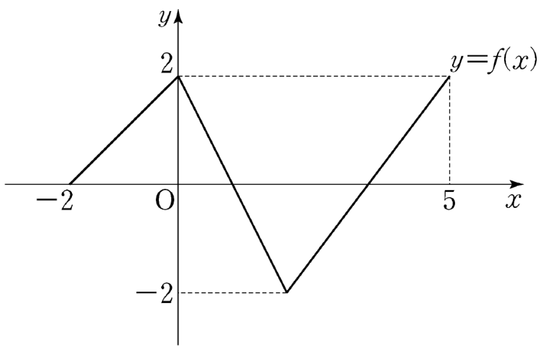
**52** 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때,

$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$
④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

**53** 닫힌 구간 $[-2, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

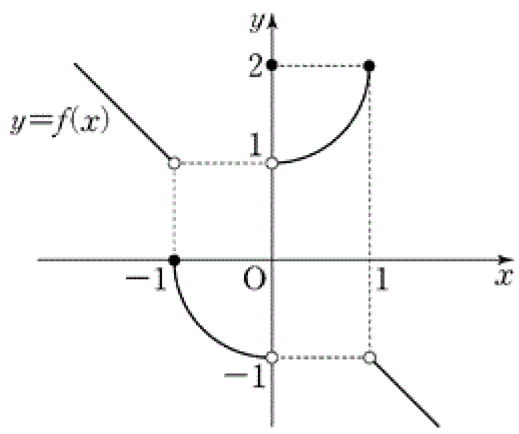



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 $a$의 개수는?[4점][2012년 6월]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

**54** 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.




$\lim_{x\to-1-}f(x)+f(0)+\lim_{x\to1+}f(x)$의 값은?[3점][2011년 9월 평가원]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

**55** 함수 $f(x)=x^2+ax$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$를 만족시킬 때, 상수 $a$의 값은?[3점]

① 4 ② 5
③ 6 ④ 7
⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

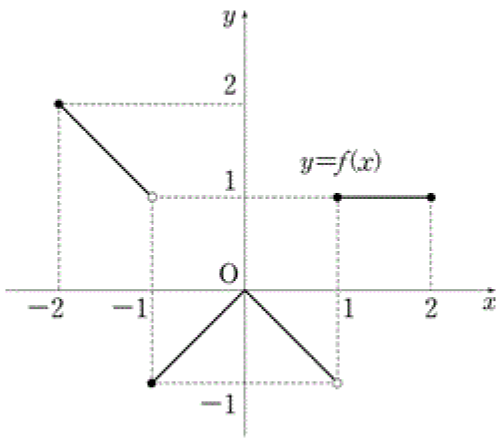
**56** $\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+ax+1}=\frac{1}{9}$일 때, 상수 $a$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

**57** $\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}$의 값을 구하시오.[3점][2011년 9월 평가원]

[난이도 : ★★☆] [2011년 6월 모의평가]

**58** 정의역이 $\{x|-2 \le x \le 2\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은?[3점]




① $-2$　② $-1$　③ $0$
④ $1$　⑤ $2$

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

**59** 실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 1-} f(t)$의 값은?[4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

**60** 다항함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 5$를 만족시킨다.

방정식 $f(x)=x$의 한 근이 $-2$일 때, $f(1)$의 값은?[3점]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

[난이도 : ★☆☆] [2009년 9월 모의평가]

**61** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+ax-b}{x^3-1} = 3$이 성립하도록 상수 $a$, $b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?[2점]

① 9　② 11　③ 13
④ 15　⑤ 17

[난이도 : ★☆☆] [2009년 6월 모의평가]

**62** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$의 값은?[2점]

① 0　② 3　③ 6
④ 9　⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

**63** 다항함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x^3 f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1}{x^3+x} = 5$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{3}$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2008년 9월 모의평가]

**64** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3} = b$가 성립하도록 상수 $a$, $b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?[2점]

① $-\dfrac{5}{6}$　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $0$
④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{5}{6}$

[난이도 : ★☆☆] [2008년 6월 모의평가]

**65** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ 의 값은?[2점]

① $-1$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $0$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $1$

[난이도 : ★☆☆] [2008년 6월 모의평가]

**66** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$ 의 값은?[2점]

① $-1$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $0$

④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $1$

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

**67** 다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)-2x}{x-1}$ 가 존재한다.

다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)}{x^2-1}$ 의 값은?[3점]

① $1$ ② $2$ ③ $3$

④ $4$ ⑤ $5$

[난이도 : ★☆☆] [2007년 6월 모의평가]

**68** 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=b$일 때, $ab$의 값은?[2점]

① $16$ ② $4$ ③ $1$

④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{16}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

**69** 최고차항의 계수가 $1$인 삼차 함수 $f(x)$가

$f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 의 값은?[3점]

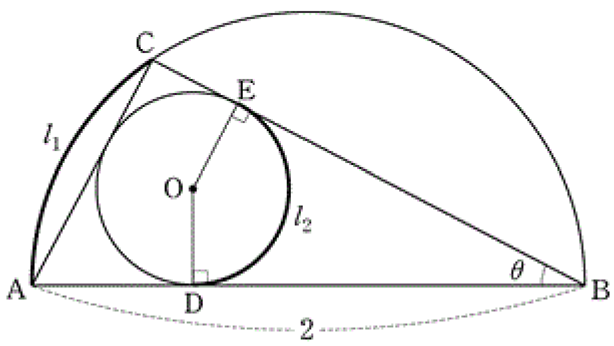
① $-1$ ② $-2$ ③ $-3$

④ $-4$ ⑤ $-5$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

**70** 그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 $A$, $B$를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 $C$가 있다. 삼각형 $ABC$의 내접원의 중심을 $O$, 중심 $O$에서 선분 $AB$와 선분 $BC$에 내린 수선의 발을 각각 $D$, $E$라 하자.

$\angle ABC=\theta$이고, 호 $AC$의 길이를 $l_1$, 호 $DE$의 길이를 $l_2$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{l_1}{l_2}$의 값은?(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.)[3점]




① 1 ② $\dfrac{\pi}{4}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}$
④ $\dfrac{2}{\pi}$ ⑤ $\dfrac{3}{\pi}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

**71** 극한 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $f(x)=4\lvert x\rvert$ |
| ㄴ. $f(x)=2x^2+2x$ |
| ㄷ. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2006년 9월 모의평가]

**72** 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-1}=\dfrac{1}{2}$일 때, $ab$의 값은?[2점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

**73** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

**74** 모든 실수 $x$에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+1)=f(x)$를 만족시키고, 0과 1사이에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases} x, & \left(0\le x\le \dfrac{1}{2}\right) \\ 1-x, & \left(\dfrac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$$

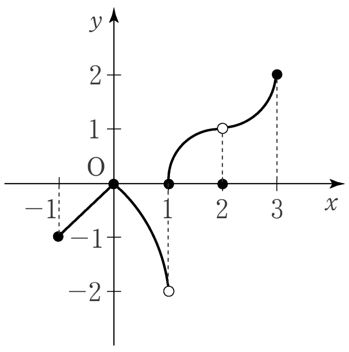
다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $f\left(f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ |
| ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}$ |
| ㄷ. 수열 $\left\{f\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}\right)\right\}$은 수렴한다. |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 6월 모의평가]

**75** 정의역이 $\{x|-1 \le x \le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]



| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$가 존재한다. |
| ㄴ. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$가 존재한다. |
| ㄷ. $-1<a<1$인 실수 $a$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재한다. |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2005년 09월 모의평가]

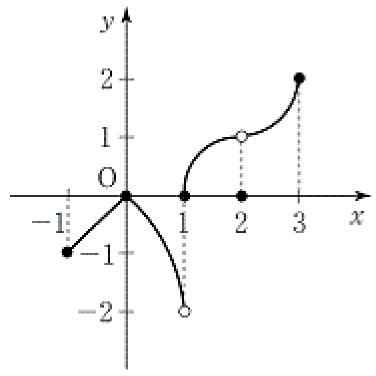
**76** 포물선 $y=x^2$ 위에서 두 점 $P(a,\ a^2)$, $Q(b, b^2)$ 가 조건 「선분 $PQ$와 포물선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 36」을 만족하면서 움직이고 있다. $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{\overline{PQ}}{a}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

**77** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 06월 모의평가]

**78** 정의역이 $\{x|-1 \le x \le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]



| 보기 |
|---|
| ㄱ. $\lim\limits_{x\to1} f\ (x)$가 존재한다. |
| ㄴ. $\lim\limits_{x\to2} f\ (x)$가 존재한다. |
| ㄷ. $-1<a$인 실수 $a$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재한다. |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

**79** 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 $n$에 대하여

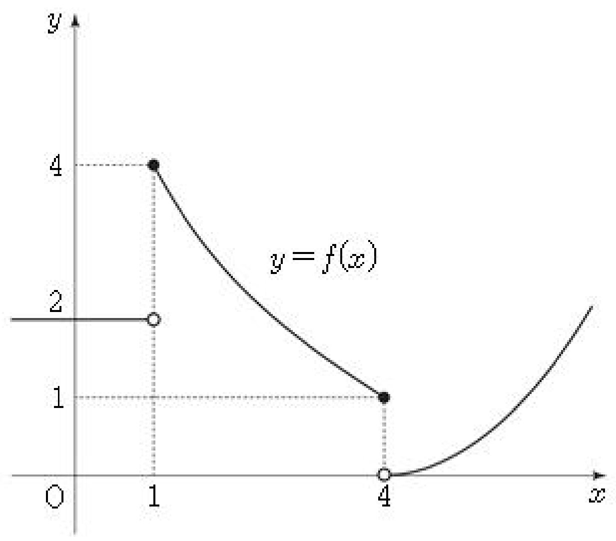
$$a_{n+1}=\frac{a_n+1}{3a_n-2}$$

을 만족시킬 때, $a_4$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

**80** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$f(1)+\lim\limits_{x\to 4+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

**81** 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?[4점]

| |
|---|
| (가) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x)}{x^2}+1\right\}=0$ |
| (나) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-3}{x^2}=-1$ |

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

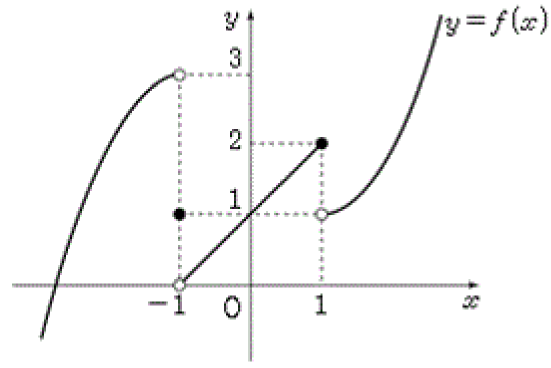
[난이도 : ★☆☆] [2016년 7월 학력평가]

**82** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

**83** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



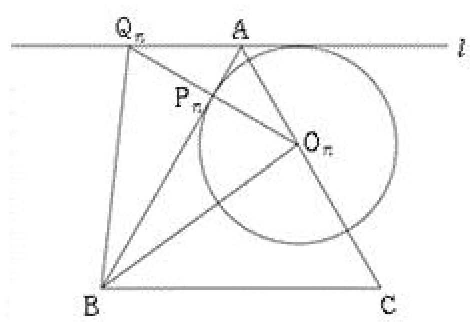

$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

**84** 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 $ABC$와 점 $A$를 지나고 직선 $BC$와 평행한 직선 $l$이 있다. 자연수 $n$에 대하여 중심 $O_n$이 변 $AC$위에 있고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원이 직선 $AB$와 직선 $l$에 모두 접한다. 이 원과 직선 $AB$가 접하는 점을 $P_n$, 직선 $O_nP_n$과 직선 $l$이 만나는 점을 $Q_n$이라 하자.

삼각형 $BO_nQ_n$의 넓이를 $S_n$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n S_n=k$이다. $k^2$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★☆☆] [2015년 7월 학력평가]

**85** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+11x}{x}$ 의 값은? [2점]

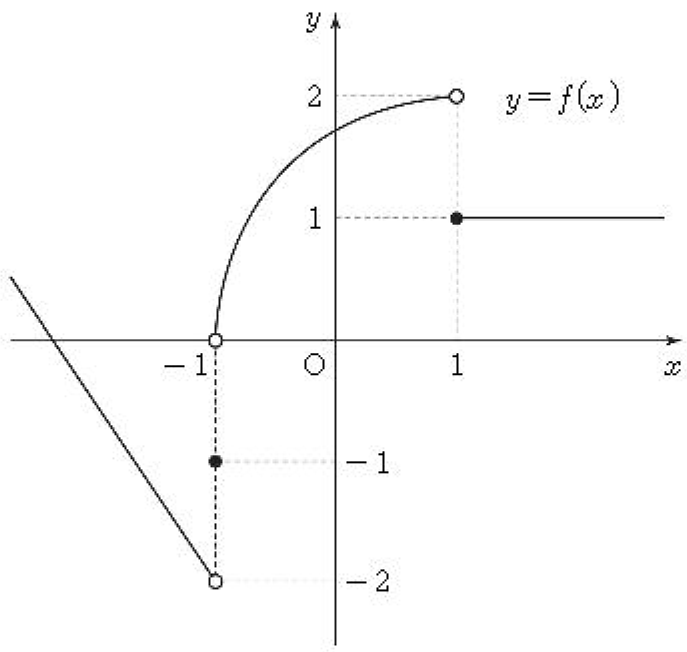
① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

**86** $\lim_{x\to 1}\dfrac{(x+7)^2(x-1)}{x-1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

**87** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to -1-}f(x)=a$일 때, $\lim_{x\to a+}f(x+3)$의 값은? [3점]

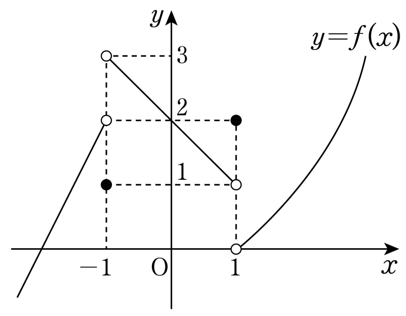
① $-2$　② $-1$　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

**88** $\lim_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+6)}{x-4}$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

**89** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

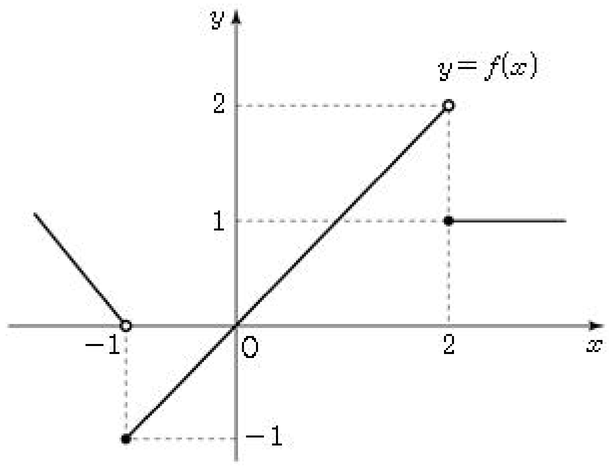



$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

**90** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

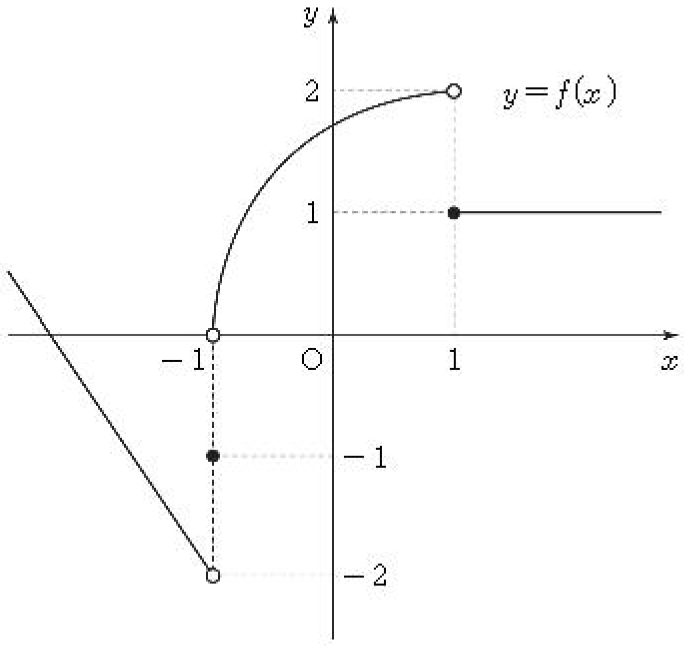



$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)$의 값은? [3점]

① $-2$　② $-1$　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

**91** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.

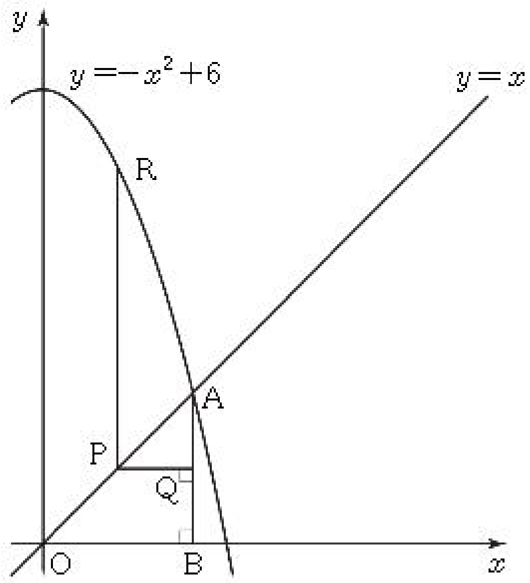



$\lim_{x \to -1-} f(x)=a$일 때, $\lim_{x \to a+} f(x+3)$의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ $0$
④ $1$ ⑤ $2$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

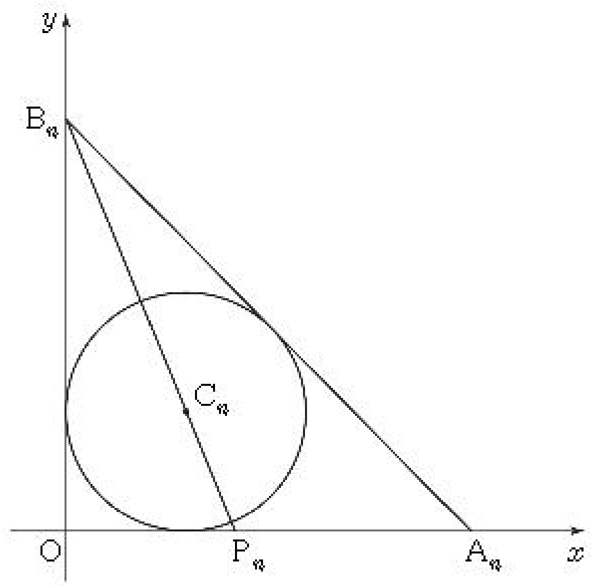
**92** 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 제1사분면에서 만나는 점을 $A$라 하고, 점 $A$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $B$라 하자. 직선 $y=x$ 위의 점 $P(a,\ a)$에서 선분 $AB$에 내린 수선의 발을 $Q$라 하고, 점 $P$를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 곡선 $y=-x^2+6$과 만나는 점을 $R$라 할 때, $\lim_{a \to 2-} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$의 값은?(단, $0<a<2$)[4점]




① $\frac{2}{15}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{4}{15}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

**93** 자연수 $n$에 대하여 그림과 같이 두 점 $A_n(n, 0)$, $B_n(0, n+1)$이 있다. 삼각형 $OA_nB_n$에 내접하는 원의 중심을 $C_n$이라 하고, 두 점 $B_n$과 $C_n$을 지나는 직선이 $x$축과 만나는 점을 $P_n$이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OP_n}}{n}$의 값은?(단, $O$는 원점이다.)[4점]




① $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　② $\sqrt{2}-1$　③ $2-\sqrt{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $2\sqrt{2}-2$

[난이도 : ★☆☆] [2014년 7월 학력평가]

**94** 두 실수 $a$, $b$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-a}{x-2}=b$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 14　② 16　③ 18
④ 20　⑤ 22

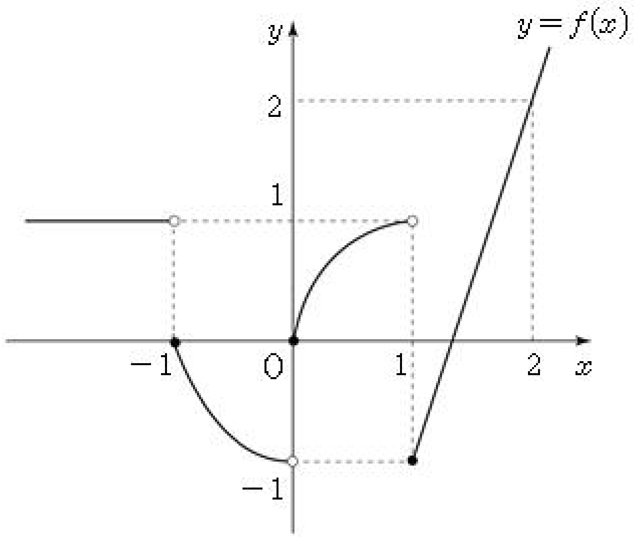
[난이도 : ★☆☆] [2014년 7월 학력평가]

**95** $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$의 값은? [2점]

① 12　② 16　③ 20
④ 24　⑤ 28

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

**96** 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값은? [3점]

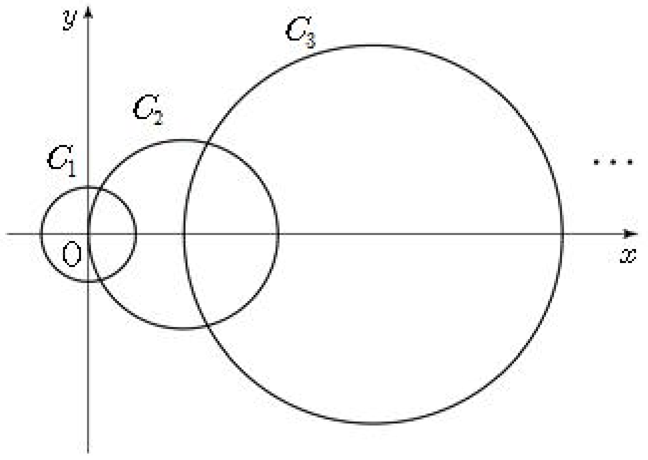
① $-2$　② $-1$　③ 0
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

**97** 자연수 $n$에 대하여 중심이 $x$축 위에 있고 반지름의 길이가 $r_n$인 원 $C_n$을 다음과 같은 규칙으로 그린다.

| |
|---|
| (가)원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 $C_1$을 그린다.<br>(나)원 $C_{n-1}$의 중심을 $x$축의 방향으로 $2r_{n-1}$만큼 평행이동시킨 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2r_{n-1}$인 원 $C_n$을 그린다.($n=2, 3, 4, \cdots$) |

원 $C_n$의 중심을 $(a_n, 0)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r_n}$의 값은? [4점]




① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

**98** 다음 두 조건을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 값을 구하시오. [3점][2012년 7월]

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+5}{f(x)}=\frac{1}{2}$<br>(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$ |

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

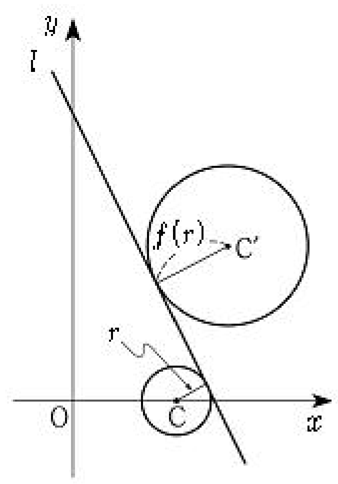
**99** 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{x^4}=4$<br>(나) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=3$ |

$f(10)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

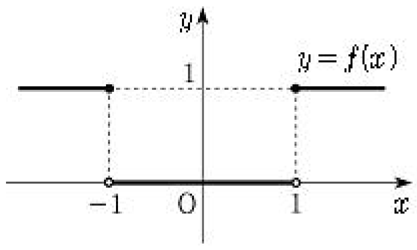
**100** 그림과 같이 중심이 $C(2, 0)$이고 반지름의 길이가 $r\,(r<\sqrt{5})$인 원 $C$가 있다. 기울기가 $-2$이고 원 $C$에 접하는 직선을 $l$이라 하자. 직선 $l$에 접하고 중심이 $C'(3, 3)$인 원 $C'$의 반지름을 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r\to 0+}f(r)$의 값은? [4점]

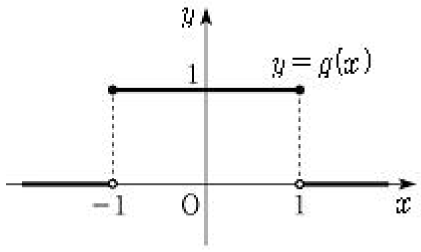



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

**101** 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]




| [보기] |
| --- |
| ㄱ. $\lim_{x\to-1-} f(x)=f(-1)$ |
| ㄴ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to1-} f(x)g(x)$ |
| ㄷ. $\lim_{x\to1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$ |

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2011년 10월 학력평가]

**102** $\lim_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2011년 7월 학력평가]

**103** 함수 $f(x)=x^2+2x$에 대하여 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

**104** 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하시오.[3점]

| |
| --- |
| (가) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-3x^3}{x^2}=2$ |
| (나) $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ |

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

**105** 함수 $f(x)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}(x^4+x^2)(1-x^2)^n, & (|x|<1)\\ 0, & (|x|\geq1)\end{cases}$에 대하여,

$\lim_{x\to-1+} f(x)$의 값은?[4점]

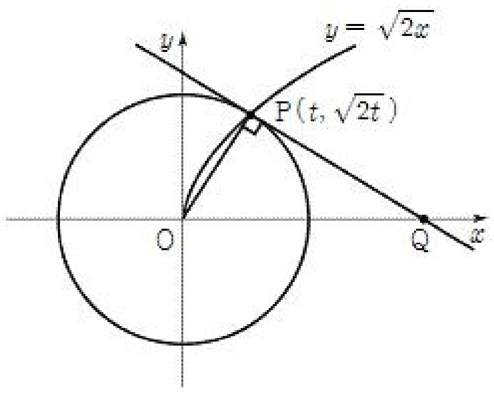
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

**106** 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 $P(t,\ \sqrt{2t})$가 있다.

원점 $O$를 중심으로 하고 선분 $OP$를 반지름으로 하는 원을 $C$, 점 $P$에서의 원 $C$의 접선이 $x$축과 만나는 점을 $Q$라 하자.

원 $C$의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{S(t)}{\overline{OQ}-\overline{PQ}}$의 값은?(단, $t>0$)[4점]




① $\sqrt{2}\pi$　　② $2\pi$　　③ $2\sqrt{2}\pi$
④ $4\pi$　　⑤ $4\sqrt{2}\pi$

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

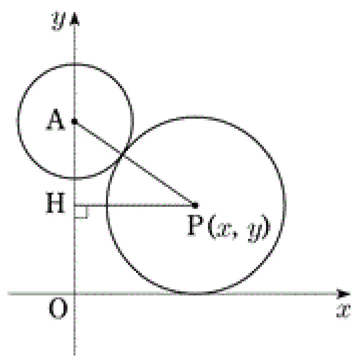
**107** 2이상의 자연수 $n$에 대하여 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$와 직선 $y=-x+2n$의 두 교점을 $A_n$, $B_n$이라 하고 선분 $A_nB_n$의 길이를 $l_n$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n}$의 값은?[4점]

① $2\sqrt{2}$　　② $3$　　③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$　　⑤ $4$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

**108** 그림과 같이 중심이 $A(0,3)$이고 반지름의 길이가 $1$인 원에 외접하고 $x$축에 접하는 원의 중심을 $P(x,y)$라 하자.

점 $P$에서 $y$축에 내린 수선의 발을 $H$라 할 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}$의 값은?[4점]




① 2　　② 4　　③ 6
④ 8　　⑤ 10

[난이도 : ★☆☆] [2010년 7월 학력평가]

**109** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$의 값은?[2점]

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2010년 10월 학력평가]

**110** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x}$의 값은?[2점]

① $-1$　　② $-\dfrac{1}{2}$　　③ $0$
④ $\dfrac{1}{2}$　　⑤ $1$

[난이도 : ★☆☆] [2010년 7월 학력평가]

**111** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ 의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

**112** 이차 함수 $f(x)=x^2+ax+b$($a$, $b$는 상수)가

$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)}{h}=5$를 만족시킬 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

**113** 다항함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\{[x, (-1\le x\le 1)$이 다음 조건을 만족시킨다. $f(4)$의 값을 구하시오.

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[3점]

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3+x-1}=2$ |
| (나)모든 실수 $x$에서 함수 $f(x)g(x)$는 연속이다. |

[난이도 : ★☆☆] [2009년 10월 학력평가]

**114** $\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ 의 값은?[2점]

① 32 ② 16 ③ 8
④ 4 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

**115** $\lim_{x\to3}\frac{x^3-3x^2}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

**116** 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$인 함수 $f(x)$가

$f(x)=-2\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\left(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)$이고, 함수

$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{1+f(x)\}^n-1}{\{1+f(x)\}^n+1}$ 일 때, $g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})$의 값은?[4점]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2008년 7월 학력평가]

**117** $\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+4}-2}$ 의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

**118** 함수 $f(x)=x^2-5x+6$에 대하여

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{h}=-36$을 만족하는 실수 $k$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 7월 학력평가]

**119** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^2-x}$ 의 값은?[3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-1$ ③ $-\frac{3}{2}$
④ $-2$ ⑤ $-\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

**120** $\lim_{x\to 3}\frac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3}=2$ 일 때, 두 상수 $a, b$의 합 $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

**121** 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$를 만족할 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=a$이다. 이때, 상수 $a$의 값은?[3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

**122** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x(\sqrt{9+x}-3)}=\alpha$ 일 때, $7\alpha$의 값을 구하시오.

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

**123** 두 함수 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=[x]$ 에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $[x]$는 $x$를 넘지 않는 최대 정수이다.)

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\lim_{x\to 0}g(x)=0$ |
| ㄴ. $\lim_{x\to 0}g(f(x))=-1$ |
| ㄷ. $\lim_{x\to 0}f(g(x))=-1$ |

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

**124** 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?[3점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$가 존재하면 $\lim_{x\to a}g(x)$도 존재한다. |
| ㄴ. $\lim_{x\to a}g(x)$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$가 존재하면 $\lim_{x\to a}f(x)$도 존재한다. |
| ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하면 $\lim_{x\to a}f(g(x))$도 존재한다. |

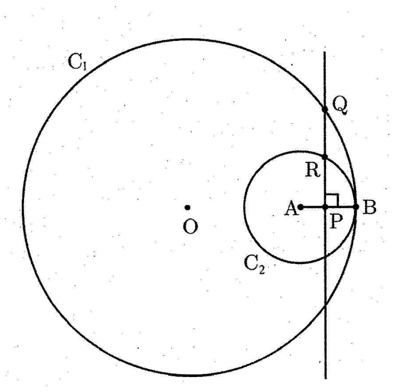
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

**125** 평면 위에 중심이 $O$이고 반지름의 길이가 3인 원 $C_1$과 중심이 $A$이고 반지름의 길이가 1인 원 $C_2$가 점 $B$에서 서로 내접하고 있다.

선분 $AB$위를 움직이는 점 $P$에 대하여, 점 $P$에서 선분 $AB$에 수직인 직선을 그어 두 원 $C_1$, $C_2$와 만나는 점을 $Q$, $R$이라 하자.

점 $P$가 점 $B$에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$의 극한값 $m$에 대하여 $100m^2$의 값을 구하시오.[4점]




[난이도 : ★☆☆] [2007년 10월 학력평가]

**126** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{ax+3}-3}{x-3}=b$일 때, 두 상수 $a$, $b$의 합 $a+b$의 값은?[2점]

① $\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{3}$
④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{8}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

**127** 함수의 극한에 대한 설명으로[보기]중 항상 옳은 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$이면 $f(0)=1$이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$이면 $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$이다.

ㄷ. $f(x)<g(x)<h(x)$이고 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}h(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2006년 6월 학력평가]

**128** $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+ax}=b$(단, $b\neq0$)가 성립하도록 상수 $a$, $b$의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?[2점]

① $-4$ ② $-2$ ③ $0$
④ $2$ ⑤ $4$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

**129** 다항식 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-a}{x-2}=4$이고, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지를 $bx+3$이라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

**130** 다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{ax+1}=2$ |
| (나) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{4}$ |

이때, $f(3)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

**131** 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{x-2}=-3$을 만족하고 $g(x)=(x-1)^2$이다. 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 $x$좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

**132** 두 함수 $f(x)=x+x^3+x^5$, $g(x)=x^2+x^4+x^6$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$의 값은?[3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

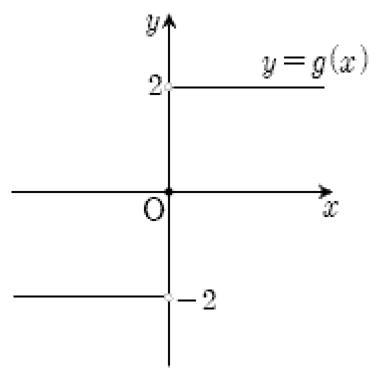
[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

**133** 미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))}{x-2}$의 값은?[3점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

**134** 두 함수 $f(x)=x^2$, $y=g(x)$에 대하여 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $\lim_{x\to 0}g(f(x))$의 값은?[3점]




① −2 ② −1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2006년 4월 학력평가]

**135** $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-bx+9}=3$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

**136** 연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}=4$를 만족할 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?[3점]

① $-4$　② $-1$　③ $1$
④ $2$　⑤ $4$

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

**137** 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 [보기] 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)$와 $\lim_{x\to 0}g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x\to 0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $y=|f(x)|$가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

**138** 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(t, \sqrt{t})$에서 점 $(1, 0)$까지의 거리를 $d_1$, 점 $(2, 0)$까지의 거리를 $d_2$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$의 값은?[3점]

① $1$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{8}$　⑤ $0$

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

**139** 다항함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$로부터 얻을 수 있는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$에 대하여, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, 모든 자연수 $n$에 대하여 $f'(n)\neq 0$이다.)[3점]

[보기]

ㄱ. $f(x)=2x^3+3x^2+1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{6}$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$이 수렴하면 $x\to\infty$일 때 $f'(x)$는 발산한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

**140** 함수 $f(x)=a[x]^3+b[x]^2\,(a\neq 0)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}f(x)=\alpha\,(\alpha$는 상수)일 때, $a$와 $b$의 관계로 옳은 것은?(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대 정수)[3점]

① $a-b=0$　② $a+b=0$　③ $2a-b=0$
④ $a+2b=0$　⑤ $2a+b=0$

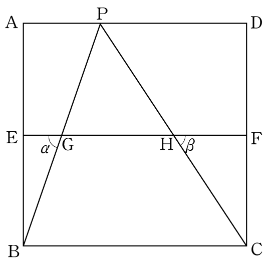
[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

**141** 두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $g(x)=-x(x^2-a^2)$에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 갖는 $a$의 최댓값은?[4점]

① $1$　② $\sqrt{2}$　③ $2$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ $3$

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

**142** 아래 그림과 같이 한 변의 길이가 $2$인 정사각형 $ABCD$에서 변 $AB$의 중점을 $E$, 변 $CD$의 중점을 $F$라 하자. 선분 $AD$위의 양 끝점이 아닌 임의의 점 $P$에 대하여 선분 $BP$와 선분 $EF$의 교점을 $G$, 선분 $CP$와 선분 $EF$의 교점을 $H$라 하자. $\angle BGE=\alpha$, $\angle CHF=\beta$라 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]




[보기]

ㄱ. $\overline{OF}GH$는 점 $P$의 위치에 관계없이 일정하다.

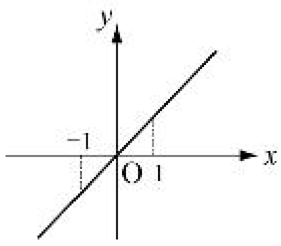
ㄴ. $\alpha+\beta$는 점 $P$의 위치에 관계없이 일정하다.

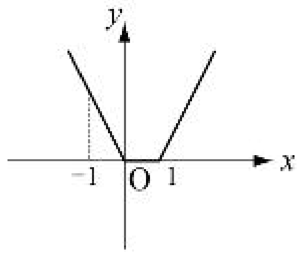
ㄷ. $\displaystyle\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{OF}AP}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=2$

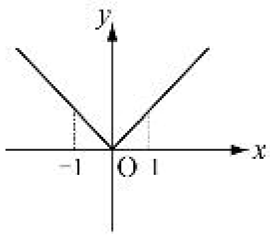
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

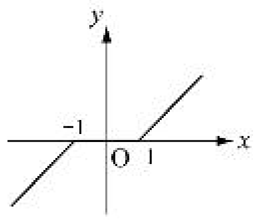
[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

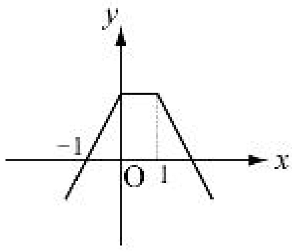
**143** 함수 $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}$와 함수 $y=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=g(f(x))$가 모든 실수에 대하여 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?[4점]

① 


② 


③ 


④ 


⑤ 


[난이도 : ★☆☆] [2005년 5월 학력평가]

**144** 미분가능한 함수 $f(x)$가

$f(1)=0$, $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}=10$을 만족시킬 때, $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

**145** 등식 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x+a}{x-2}=b$가 성립할 때, 상수 $a, b$에 대하여 $a+b$의 값은?[3점]

① $-3$ ② $-1$ ③ $1$
④ $3$ ⑤ $5$

[난이도 : ★★★] [2005년 4월 학력평가]

**146** 함수 $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$ |
| ㄴ. $\lim_{x\to -1+} f(x)=1$ |
| ㄷ. $\lim_{x\to 2-} f(x)=-\dfrac{1}{2}$ |

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

**147** $a>1$일 때, $\lim_{x\to 1}\dfrac{|x-a|-(a-1)}{x-1}$의 값은?[3점]

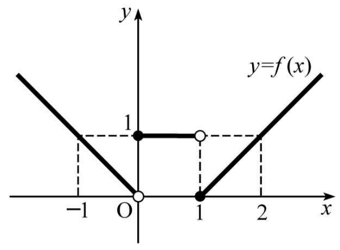
① $1$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $0$
④ $-1$ ⑤ $-2$

[난이도 : ★★★] [2005년 0월 학력평가]

**148** 함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases}-x, & (x<0)\\ 1, & (0\le x<1)\\ x-1, & (x\ge 1)\end{cases}$이고, 그 그래프는

그림과 같다.

이때, 다음 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]




| [보기] |
|---|
| ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)=0$ |
| ㄴ. $\lim_{x\to 1+} f(f(x))=1$ |
| ㄷ. $\lim_{x\to 1-} f(f(x))=0$ |

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

**149** 다음 두 조건을 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(7)$의 값을 구하시오.[3점]

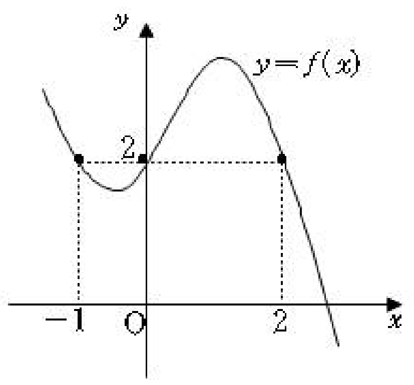
| |
|---|
| I. $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$ |
| II. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+2x+3}=\dfrac{1}{2}$ |

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

**150** 그림과 같이 삼차 함수 $y=f(x)$는

$f(-1)=f(0)=f(2)=2$를 만족한다.

다음 [보기]중 극한값이 존재하는 것을 모두 고르면?[4점]




| [보기] |
| --- |
| ㄱ. $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-2}$ |
| ㄴ. $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{f(x-2)}$ |
| ㄷ. $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x-2}$ |

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

# 정답 및 해설

**1.함수의 극한**

## 중단원 기출문제

1) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$x\to 0-$ 일 때, $f(x)\to 0$이므로

$\lim_{x\to 0-} f(x)=0$

또, $x\to 1+$ 일 때, $f(x)\to 3$이므로

$\lim_{x\to 1+} f(x)=3$

따라서

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)\ =0+3\ =3$

2) 답 : 30

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)=1$이므로

$g(x)=(x+1)f(x)$로 놓으면 $\lim_{x\to 1} g(x)=1$

따라서 $x\neq -1$일 때, $f(x)=\dfrac{g(x)}{x+1}$이므로

$$[\text{구하는 값}]=\lim_{x\to 1}(2x^2+1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{(2x^2+1)\times\frac{g(x)}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to 1} g(x)$$
$$=\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{2}$$

그러므로 $20a=20\times\dfrac{3}{2}=30$

3) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 미분법을 이용하여 조건을 만족시키는 삼차 함수의 함수값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{(x-2)\{f'x)\}^2}=\dfrac{1}{4}$에서 $x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$이므로

(분자)$\to 0$이어야 한다. 즉 $f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$로 놓을 수 있다.

이때, $f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$ 이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x+a)}{\{f'(x)\}^2}=\frac{2+a}{(2+a)^2}=\frac{1}{2+a}$$

따라서 $\dfrac{1}{2+a}=\dfrac{1}{4}$에서 $a=2$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$

즉 $f(3)=2\times 1\times 5=10$

4) 답 : ③

[해설]

$\lim_{x\to 0-} f(x)+\lim_{x\to 1+} f(x)=0+(-3)=-3$

5) 답 : 16

[해설]

출제 의도: 곡선 위의 두 점 사이의 거리를 구한 후 극한값을 구할 수 있는가?

$P_n(4^n,\ 2^n)$, $P_{n+1}(4^{n+1},\ 2^{n+1})$

$$[\text{중간 계산}]\ L_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(3\times 4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\times 16^n+4^n}$$
$$[\text{구하는 값}]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times 16^n+4^n}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times 16^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$
$$=\frac{9\times 16+4\times 0}{9+}=16$$

6) 답 : ④

[해설]

출제 의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 이차방정식의 두 근의 차를 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to a} f(x)\neq 0$이면

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\dfrac{3}{5}$ 이므로

$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=0$

따라서, $a=\alpha$라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$$
$$=\lim_{x-\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$
$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$$
$$=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{3}{5}$$

즉, $5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$

$2(\alpha-\beta)=8$이므로

$|\alpha-\beta|=4$

7) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+5)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2+5)=(-2)^2+5=9$$

# 정답 및 해설

8) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 그래프를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x \to -1-} f(x) = 1,\ \lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ 이므로

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 + 1 = 2$

9) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 부등식을 이용한 극한을 구할 수 있는가?

이차방정식 $x^2 - (n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 $D_1$ 이라 하면

$D_1 = (n+1)^2 - 4a_n \geq 0$ 에서 $a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$

또 이차방정식 $x^2 - nx + a_n = 0$ 의 판별식을 $D_2$ 이라 하면

$D_2 = n^2 - 4a_n < 0$ 에서 $a_n > \frac{n^2}{4}$

즉 $\frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$

$\frac{n^2}{4n^2} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{4n^2} < \lim_{n \to} \frac{a_n}{n^2} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{4n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$ 이므로

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

10) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 넓이와 길이를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$Q\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right)$ 이므로 $\overline{PR} = 2n$, $\overline{QR} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 2n = \sqrt{n}$

$l_n = \sqrt{4n^2 + \frac{1}{n}}$ 이므로

[구하는 값] $= \lim_{n \to \infty} \frac{S_n^2}{l_n}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + \frac{1}{n}}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{1}{2}$

11) 답 : 7

[해설]

$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+7)}{x} = \lim_{x \to 0} (x+7) = 0 + 7 = 7$

12) 답 : ④

[해설]

$x \to 0-$ 일 때, $f(x) \to 2$ 이고, $x \to 1+$ 일 때, $f(x) \to 2$ 이므로

$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 2 + 2 = 4$

13) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x+1} = \sqrt{9} = 3$

14) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 미분계수를 이해하여 함수를 구할 수 있는가?

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 6$ 이고 $f'(x) = 4x + a$ 이므로

$\therefore f'(1) = 4 + a = 6$

$\therefore a = 2$

15) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가?

그래프에서 $\lim_{x \to -1-} f(x) = 3$, $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 3$

16) 답 : 5

[해설]

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+3) = 5$

17) 답 : ⑤

[해설]

$\lim_{x \to -1-0} f(x) + \lim_{x \to +0} f(x) = 1 + 1 = 2$

MIMEDU[@자세한 문제풀이@@]

문제에 주어진 함수의 그래프를 보면 5가지 경우로 나누어진 분류함수이며

항상 경계 값에서 모든 문제는 발생되며 복잡해 진다.

이 분류함수는 양쪽 끝은 직선의 일부는 확실하지만 가운데 것은 반드시 원의 일부라고 단정 지을 수 없어서 함수식을 찾을 수는 없다.

꼭 찾는다면 아래와 같이 모르는 함수를 이용하여 구할 수도 있다.

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & (x \leq -1) \\ g_2(x), & (-1 < x < 0) \\ 0, & (x = 0) \\ g_3(x), & (0 < x \leq 1) \\ g_4(x), & (1 \leq x) \end{cases} \quad \cdots \ ㉠$$

문제에서 주어진 수학기호인 [ $\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x)$ ]은

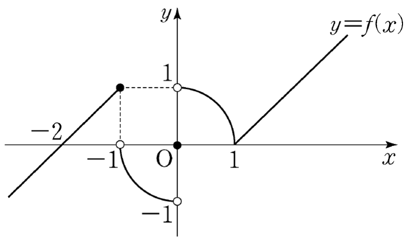
노골적 수학기호인 우극한과 좌극한을 모르면 절대 풀 수 없다.

구하는 값인 $\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 + 1 = 2$

MIMEDU[@변형시킨 수능문제@@]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

# 정답 및 해설




$\lim\limits_{x\to -1} f(f(x))$, $\lim\limits_{x\to 0} f(f(x))$ 중 수렴하는 값은?[3점][2013학년도 수능_변형]

18) 답 : 11

[해설]

(주어진 식) $=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+7)=1+3+7=11$

19) 답 : ③

[해설]

ㄱ.(참) $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$

ㄴ.(거짓) $x=1$에서 함수 $f(x)$는 연속이 아니므로

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

ㄷ.(참) $g(x)=(x-1)f(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0\cdot 2=0$

$g(1)=(1-1)\cdot f(1)=0$

그러므로 $g(x)=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

20) 답 : ①

[해설]

$\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+a}-b)=0$에서 $b=\sqrt{3+a}$ ⋯①

(주어진 식) $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a})}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{3+a}}$

$\therefore \dfrac{1}{2\sqrt{3+a}}=\dfrac{1}{4}$에서 $a=1$

① 에서 $b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

21) 답 : 28

[해설]

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x+1)-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-8}{(x-1)^2-4}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-8}{(x+1)(x-3)}=5$

$f(3)-8=\lim\limits_{x\to 3}\{f(x)-8\}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-8}{(x+1)(x-3)}(x+1)(x-3)=5\times 0=0$

$\therefore f(3)=8$ ...①

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-8}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{(x+1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$

$=\dfrac{1}{4}f'(3)=5$

$\therefore f'(3)=20$ ...②

[구하는 값]$=f(3)+f'(3)=28$

22) 답 : ⑤

[해설]

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^m}=1$이므로

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 $m$차 다항식이다.

만일 $m<n$이라고 하면 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}$의 값은 존재하지 않는다.

그러므로 $m\geq n$이다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}$의 값이 존재하므로

다항식 $f(x)$는 다음과 같은 꼴이 되어야 한다.

$f(x)=x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\cdots+p_{m-n-1}x^{n+1}+p_{m-n}x^n$

이때

$f'(x)=mx^{m-1}+p_1(m-1)x^{m-2}+p_2(m-2)x^{m-2}+\ldots$

$\cdots+p_{m-n-1}(n+1)x^n+p_{m-n}nx^{n-1}$

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x^{m-1}}=m\therefore\ a=m$

또 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=p_{m-n}\therefore\ b=p_{m-n}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^{n-1}}=np_{m-n}\therefore\ np_{m-n}=9$

그러므로 $nb=9\Leftrightarrow b=\dfrac{9}{n}$

$m\geq n\Leftrightarrow\dfrac{m}{n}\geq 1$이므로 $ab=\dfrac{9m}{n}\geq 9\therefore\ ab\geq 9$

$f(x)$가 삼차식일 때 $a=m=3$

$3\times 3=\dfrac{9}{n}\times n$에 의하여 $am=bn$

그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[다른 풀이]

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^m}=1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 $x^m$이다.

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$이므로 $m=a$ 이다.

한편, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=b$이므로 $f(x)$의 계수가 0이 아닌 항 중 차수가 가장 낮은 항은 $bx^n$이다.

이때 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$이므로 $bn=9$이다.

ㄱ. $f(x)$의 최고차항이 $x^m$이고 차수가 가장 낮은 항이 $bx^n$이므 로 $m\geq n$ (참)

ㄴ. $m=a$, $bn=9$이므로 $ab=m\times\dfrac{9}{n}\geq 9$ ($\because\ m\geq n$) (참)

ㄷ. $f(x)$가 삼차 함수이면 $m=a=3$, $bn=9$이므로 $am=bn$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

23) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to0-} f(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to0} f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to0+} g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

$\lim_{x\to0-} g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x)+f(-x)\}$

$=-1+1=0$

$\therefore\ \lim_{x\to0} g(x)=0$ ∴ 참

ㄷ. $g(1)=f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$

$\lim_{x\to1+} g(x)=\lim_{x\to1+}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

$\lim_{x\to1-} g(x)=\lim_{x\to1-}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

$\therefore\ g(1)=\lim_{x\to1} g(x)=0$이므로, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

∴ 참

24) 답 : 12

[해설]

$\frac{0}{0}$ 꼴의 무리식이므로 분모를 유리화하면

구하는 값 $=\lim_{x\to-2}\frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(2x+4)(\sqrt{x+11}+3)}{(x+11)-9}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)(\sqrt{x+11}+3)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}2(\sqrt{x+11}+3)=2(3+3)=12$

25) 답 : ②

[해설]

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로,

$\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore\ b=-1-a\cdots$①

이때, ①을 주어진 식에 대입하면,

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+ax-(1+a)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1+a)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1+a)}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=1$

한편, ①에서 $b=-2$이므로 $ab=-2$

26) 답 : 17

[해설]

(i) |x|< 1 일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+4}+2x}{x^{2n}+1}=2x$

(ii) |x|> 1 일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^4+\frac{2}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{x^4+0}{1+0}=x^4$

따라서, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f(2)=1+16=17$

27) 답 : 16

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{8(x^4-1)}{(x^2-1)f(x)}=1$을 풀면

$\lim_{x\to1}\frac{8(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2-1)f(x)}=1$에서

$\lim_{x\to1}\frac{8(x^2+1)}{f(x)}=1$

따라서, $\frac{8(1^2+1)}{f(1)}=1$

$\therefore\ f(1)=16$

28) 답 : ④

[해설]

[구하는 값] $=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

$=\frac{1}{2}$

29) 답 : ③

[해설]

점 $P$의 좌표를 $P(a,\ a^2+a)$, $\angle APO=\theta$라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a+1)^2+(a^2+a)^2}=(a+1)\sqrt{1+a^2}$

$\overline{OP}=\sqrt{a^2+(a^2+a)^2}=-a\sqrt{2+2a+a^2}$ (단, $-1<a<0$)

$\therefore\ \cos\theta=\frac{(a+1)^2(1+a^2)+a^2(2+2a+a^2)-1}{2(a+1)\sqrt{1+a^2}\,(-a)\sqrt{2+2a+a^2}}$

$=\frac{2a(a^3+2a^2+3a+1)}{-2a(a+1)\sqrt{1+a^2}\,\sqrt{2+2a+a^2}}$ 이고

$P\to0$일 때 $a\to0$이므로

$\lim_{a\to0}\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 에서 $\theta=135^\circ$

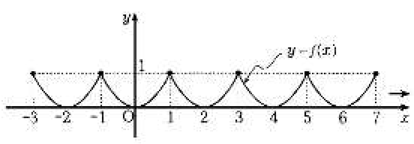
30) 답 : ③

[해설]

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

함수 $y=f(x)$는 주기가 2인 함수이다.

따라서, $f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



직선 $y=\frac{1}{2n}x+\frac{1}{4n}$ 과 함수 $y=f(x)$의 그래프와의 교점의 개수는 $a_n$ 이므로

$n=1$일 때, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ 이므로 $a_1=3$

$n=2$일 때, $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}$ 이므로 $a_2=5$

$n=3$일 때, $y=\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}$ 이므로 $a_3=7$

...

$a_1=3,\ a_2=5,\ a_3=7,\ \ldots$이므로 일반항은 $a_n=2n+1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$

31) 답 : ①

[해설]

$x=a$에서 함수 $f(x)$의 미분계수는 2이므로

$f'(a)=2\ldots$①

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}=0$에서

[좌변] $=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-g(h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2-\frac{g(h)}{h}\right\}$

$=2f'(a)-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$

$=2\times2-\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=0$에서

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}=4$

32) 답 : ⑤

[해설]

$\frac{\triangle QOA}{\triangle POA}=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\frac{n}{n+2}$ 으로 놓으면

점 $Q$는 $\overline{AP}$를 $n:2$로 내분한 점이므로 $Q\left(\frac{tn+4}{n+2},\ \frac{2n}{n+2}\right)$

$n\to\infty$일 때, $Q\to(t,\ 2)$이고

이때, 두 점 $P,\ Q$는 모두 $(4,\ 2)$로 수렴한다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}t_n=4$

33) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 그래프를 보고 좌우 극한값을 알아내는 문제이다.

$x\to1-$ 일 때, $f(x)\to1$ 이고 $x\to2+$ 일 때, $f(x)\to1$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=2$

34) 답 : ①

[해설]

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=(-1)+2=1$

35) 답 : 11

[해설]

풀이

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+7}{x-1}=\frac{4+7}{2-1}=11$

36) 답 : ③

[해설]

$\lim_{x\to7}\frac{(x-7)(x+3)}{x-7}=\lim_{x\to7}(x+3)=10$

37) 답 : ⑤

[해설]

$\lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=2+3=5$

38) 답 : ④

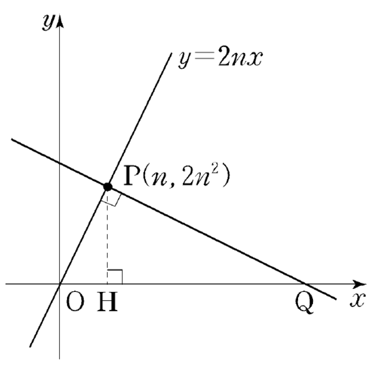
[해설]

[해설]

$\lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+3=4$

39) 답 : ④

[해설]




점 $P(n,\ 2n^2)$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $H$라 하면,

$\triangle OPH$와 $\triangle PQH$가 닮음이므로

$\overline{OH}:\overline{HP}=\overline{HP}:\overline{HQ}$

$n:2n^2=2n^2:l_n-n$

$4n^4=n\cdot l_n-n^2$

$l_n=4n^3+n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3}=4$

40) 답 : ②

[해설]

[해설]

$f(x)=n$의 두 근이 $\alpha,\beta$이므로

$(x-3)^2=n$

$x^2-6x+9-n=0$

$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha\beta=9-n\end{cases}$

$h(n)=|\alpha-\beta|$

$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{(36-4(9-n)}$

$=2\sqrt{n}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$=1$

41) 답 : 13

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{3x}=2$ 로부터

$f(x)-x^3=6x+a \to f(x)=x^3+6x+a$ ( $a$는 상수)라 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=-7 \to \lim_{x\to 0}(x^3+6x+a)=-7 \to$

$a=-7$

$\therefore\ f(x)=x^3+6x-7\ \ \therefore\ f(2)=13$

42) 답 : ③

[해설]

$\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$

43) 답 : 27

[해설]

$\lim_{x\to 3}\dfrac{x^3}{x-2}=\dfrac{27}{3-2}=27$

44) 답 : ④

[해설]

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1}f(x)=2+2=4$

45) 답 : ⑤

[해설]

그래프에서 $\lim_{x\to -1-}f(x)=2$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=3$

따라서 구하는 정답은 $2+3=5$

46) 답 : 10

[해설]

$f(x)$가 다항함수이고 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$ 에서 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴이어야 하므로

$f(x)=x^3-11x^2+ax+b$ 이고

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=-9$ 에서 $\dfrac{0}{0}$ 꼴이어야 하므로

$f(1)=0$, $f'(1)=-9$ 이다.

따라서 $f(1)=1-11+a+b=0$ 에서 $a+b=10$ 이고

$f'(x)=3x^2-22x+a$ 이므로

$f'(1)=3-22+a=-9$ 이다.

따라서 $a=10$, $b=0$ 이고 $f(x)=x^3-11x^2+10x$ 이다.

$t=\dfrac{1}{x}$ 이라 하면

$x\to\infty$ 일 때 $t\to 0$ 이고 다항함수이므로

모든 실수에서 미분가능하기 때문에 $\lim_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$

$=f'(0)=10$

47) 답 : ⑤

[해설]

$n=1$ 일 때, $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉠

$n=2$ 일 때, $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉡

$n=3$ 일 때, $\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$ ……㉢

$n=4$ 일 때, $\lim_{x\to 4}\dfrac{f(x)}{g(x)}=6$ ……㉣

조건 ㈎에서 $g(1)=0$ 이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차 함수 $g(x)$는

$g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓을 수있다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ 이고

㉢에서 $\dfrac{f(3)}{g(3)}=\dfrac{2}{9+3a+b}=2$ 이므로 $3a+b+8=0$ ……㉤

㉣에서 $\dfrac{f(4)}{g(4)}=\dfrac{6}{16+4a+b}=6$ 이므로 $4a+b+15=0$ ……㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=13$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

48) 답 : ⑤

[해설]

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=2+1=3$

49) 답 : ③

[해설]

(분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax)=1+a=0\ \therefore\ a=-1$

(준식) $=\lim_{x\to 1}x=1=b\ \therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=0$

50) 답 : 25

[해설]

$\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$ 에서 $\sqrt{2+a}=2$, $a=2$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\times\dfrac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$

$=\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}=b$

$10a+4b=21$

51) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 다항함수의 극한의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$ 이므로 $f(x)-x^2$은 일차항의 계수가 3인 일차식이다.

$f(x)-x^2=3x+a$ 에서 $f(x)=x^2+3x+a$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)f(x)}=\lim_{x\to1}x+\frac{1}{f(x)}=1$ 이므로

$\frac{2}{f(1)}=1$ 즉, $f(1)=2$ 이다.

$f(1)=1+3+a=2$ 에서 $a=-2$

따라서 $f(x)=x^2+3x-2$ 이므로

$f(2)=2^2+3\cdot2-2=8$

52) 답 : ⑤

[해설]

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$ 이므로 $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한이 되어야 한다.

그러므로 $\lim_{x\to2}f(x)=3$ 이다.

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)-3\}\{f(x)+3\}}$$

$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-2}}\times\frac{1}{f(x)+3}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{30}$$

53) 답 : ②

[해설]

ⅰ) $nf(a)\ge1$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n+3}\right)=0\ne1$ 이므로 모순

ⅱ) $nf(a)<1$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{-2nf(a)+1}{2n+3}=-f(a)=1$ 에서 $f(a)=-1$

따라서 $f(a)=-1$ 인 $a$는 2개다.

54) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]그래프로부터 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

주어진 그래프에서

$\lim_{x\to-1-}f(x)+f(0)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+2+(-1)=2$

55) 답 : ①

[해설]

해설

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{x}$

$\lim_{x\to0}(x+a)=a$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$ 이므로, $a=4$

56) 답 : 16

[해설]

해설

$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+ax+1}$

$\frac{1+1}{1^2+a+1}=\frac{2}{a+2}=\frac{1}{9}$

$\therefore\ a=16$

57) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]함수의 극한을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+5)=10$

58) 답 : ⑤

[해설]

해설

주어진 함수의 그래프에서,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=1$ 이 된다.

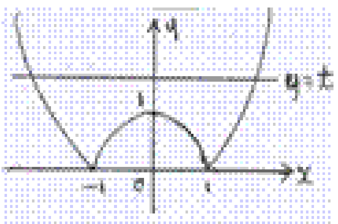
따라서 구하고자 하는

$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to-1+}f(x)=2$

59) 답 : ④

[해설]

해설




위 그래프에서 $y=t$의 위치에 따라 다음과 같은 함수가 만들어진다.

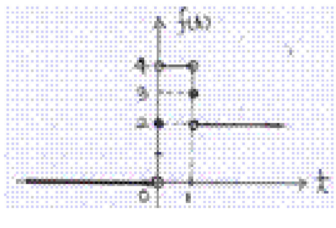
$t>1,\ t=0$ 일 때, $f(t)=2$

$t=1$ 일 때, $f(t)=3$

$0<t<1$ 일 때, $f(t)=4$

$t=0$ 일 때, $f(t)=2$

$t<0$ 일 때, $f(t)=0$




$\therefore\ \lim_{t\to1-}f(t)=4$

60) 답 : ②

[해설]

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=0$에서 $f(x)$의 차수는 이차이하라는 것을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=ax^2+bx+c$라고 두자.

또, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=5\cdots$①이므로 $f(0)=0$이다. ∴ $c=0$

∴ $f(x)=ax^2+bx$

① 에서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+bx}{x}=\lim\limits_{x\to0}(ax+b)=b=5$

∴ $f(x)=ax^2+5x$

마지막으로 $f(x)=x$의 한 근이 $-2$이므로 $f(-2)=-2$

$f(-2)=4a-10=-2$이므로 ∴ $a=2$

∴ $f(1)=a+b=2+5=7$

61) 답 : ④

[해설]

$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax-b)=0$에서 $1+a-b=0$

대입해서 정리하면

(준식) $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+a+1}{x^2+x+1}=\dfrac{a+2}{3}=3$

따라서 $a=7,\ b=8$

62) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{a\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+39)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)(\sqrt{x+8}+39)=2\times6=12$$

63) 답 : 10

[해설]

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}$ ( $\dfrac{1}{x}=t$라 놓으면)

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

∴ $f(x)=x^3+5x^2+ax+b$

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$에서 $f(1)=0$

∴ $f(1)=6+a+b=0$

∴ $b=-a-6$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{3}$에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x+a+6}{x+2}=\dfrac{13+a}{3}=\dfrac{1}{3}$

∴ $a=-12,\ b=6$

∴ $f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

∴ $f(2)=10$

64) 답 : ⑤

[해설]

주어진 함수의 극한은 수렴하고, $\lim\limits_{x\to-3}(x+3)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to-3}\left(\sqrt{x^2+x+3}+ax\right)=0$이 성립한다.

따라서 $\sqrt{(-3)^2-(-3)-3}+a(-3)=0$,

∴ $a=1$

위 결과를 주어진 식에 대입하여 극한값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}\times\frac{\sqrt{x^2-x-3}-x}{\sqrt{x^2-x-3}-x}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)\left(\sqrt{x^2-x-3}-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}-\frac{1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=-\frac{1}{\sqrt{9}+3}=-\frac{1}{6}=b$$

∴ $a+b=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

65) 답 : ②

[해설]

$-x=t$로 놓으면

$x\to-\infty$이면 $t\to\infty$

∴ (주어진 식) $=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

66) 답 : ②

[해설]

$-x=t$로 놓으면

$x\to-\infty$이면 $t\to\infty$

∴ (주어진 식) $=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1}=-\dfrac{1}{2}$

67) 답 : ①

[해설]

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-2x}{x-1}$의 값이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$

∴ $g(1)=2$

[구하는 값] $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(g(x)-1)\cdot g(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(g(x)-1)\cdot g(x)}{x+1}$$

$$=\frac{(g(1)-1)\cdot g(1)}{2}=1$$

68) 답 : ③

[해설]

$x\to1$일 때 분모 $\to0$이므로 분자 $\to0$이어야 한다.

$\sqrt{2+a}-\sqrt{4}=0$ ∴ $a=2$

(주어진식) $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}=\dfrac{1}{8}$

$\therefore$

$b=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ ab=2\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$

69) 답 : ③

[해설]

$f(x)=x(x^2+ax+b)$이므로

$f(-1)=a-b-1=2$

$\therefore\ a-b=3\cdots$①

$f(1)=a+b+1=-2$

$\therefore\ a+b=-3\cdots$②

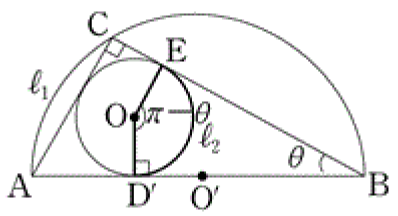
① , ②에서 $a=0,\ b=-3$

$\therefore\ f(x)=x(x^2-3)$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x^2-3)=-3$

70) 답 : ④

[해설]




$\overline{AB}$의 중점을 $O'$이라 하면 $\angle AO'C=2\theta$이므로

$l_1=1\times2\theta=2\theta$

직각삼각형 $ABC$에서 $\overline{AC}=2\sin\theta,\ \overline{BC}=2\cos\theta$

$\triangle ABC$의 넓이를 $S$, 원 $O$의 반지름을 $r$라 하면

$S=\dfrac{1}{2}(2+2\sin\theta+2\cos\theta)r=\dfrac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta$

$\therefore\ r=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$\angle DOE=\pi-\theta$이므로 $l_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}(\pi-\theta)$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{l_1}{l_2}=\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{2\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)}=\dfrac{2}{\pi}$

71) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{16|x|^2}{4|x^2|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{16x^2}{4x^2}=4$ ∴ 참

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x^2+2x)^2}{2x^4+2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2x+2)^2}{2x^2+2}=2$ ∴ 거짓

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(x+\dfrac{4}{x}\right)^2}{x^2+\dfrac{4}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2+4)^2}{x^4+4}=4$ ∴ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

72) 답 : ①

[해설]

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서

$\sqrt{1+a}-b=0\Leftrightarrow b=\sqrt{1+a}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+a}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 1+a=4,\ a=3,\ b=2$

$\therefore\ ab=6$ [정답]①

73) 답 : 2

[해설]

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}$

$=2$

74) 답 : ⑤

[해설]

모든 실수 $x$에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+1)=f(x)$이므로

함수 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이다.

ㄱ.

$f\left(f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ :(참)

ㄴ.

$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)\right)$

$\because\ \left(\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}<1\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄷ.

ⅰ) $n=2k-1$($k$는 자연수)일 때,

$f\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2k-1}{2}\right)$

$=f\left(k-\dfrac{1}{4}\right)$

$=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

ii) $n=2k$($k$는 자연수)일 때,

$f\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{2k}{2}\right)$

$=f\left(k+\frac{1}{4}\right)$

$=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

따라서 $\frac{1}{4}$에 수렴:(참)

75) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=-2$이고 $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $x=2$에서 불연속이지만

$\lim_{x\to2}f(x)=1$이므로 존재한다.

ㄷ. 위의 그래프에서 $-1<a<1$인 실수 $a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$은 존재한다.

76) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]함수의 극한과 연속성

직선 $PQ$의 방정식을 구하면

$y=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)+a^2$

$=(b+a)x-ab$

이때, 직선과 곡선 사이의 넓이를 구하면

$\int_a^b\{(b+a)x-ab-x^2\}dx$

$=\int_a^b\{-x^2+(a+b)x-ab\}dx$

$=\int_a^b-(x-a)(x-b)dx$

$=\frac{1}{6}(b-a)^3$

$=36$

$\therefore\ (b-a)^3=6^3$

$\therefore\ b-a=6$ ... ㉠

이때, $\overline{PQ}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}$

$=6\sqrt{1+(2a+6)^2}$ ($\because$ ㉠)

$=6\sqrt{4a^2+24a+37}$

이므로

$\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{6\sqrt{4a^2+24a+37}}{a}$

$=6\times2$

$=12$

77) 답 : 2

[해설]

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}$

$=2$

78) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=-2$이고 $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.(거짓)

ㄴ. $x=2$에서 불연속이지만

$\lim_{x\to2}f(x)=1$이므로 존재한다.

ㄷ.위의 그래프에서 $-1<a$인 실수 $a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$은 존재한다.

79) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

$a_1=1$

$a_2=\frac{a_1+1}{3a_1-2}=\frac{1+1}{3\times1-2}=2$

$a_3=\frac{a_2+1}{3a_2-2}=\frac{2+1}{3\times2-2}=\frac{3}{4}$

$a_4=\frac{a_3+1}{3a_3-2}=\frac{\frac{3}{4}+1}{3\times\frac{3}{4}-2}=7$

80) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한 이해하기

$f(1)=4$, $\lim_{x\to4÷}f(x)=1$이므로 $f(1)+\lim_{x\to4÷}f(x)=4+1=5$

81) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

(가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=-1$이므로 $f(x)$는 이차항의 계수가 $-1$인 이차 함수이다.

$f(x)=-x^2+ax+b$($a$, $b$는 상수)라 하면

(나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x^2}=-1$이고 $\lim_{x\to0}x^2=0$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)-3\}=0$, $b=3$

그러므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+ax}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(-1+\frac{a}{x}\right)=-1$에서

$a=0$이다.

따라서 $f(x)=-x^2+3$이므로 $f(1)=2$

82) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+1)=3$$

83) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to-1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$

따라서 $\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=4$

84) 답 : .102

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 활용하여 문제 해결하기

원 $O_n$이 직선 $AB$와 점 $P_n$에서 접하므로

직선 $AB$와 직선 $O_nQ_n$은 서로 수직이다.

직선 $l$과 직선 $BC$가 평행이므로

$\angle Q_nAB=\angle ABC=60^\circ$

두 직각삼각형 $AP_nQ_n$과 $AP_nO_n$은 합동이므로

$$\overline{Q_nO_n}=2\overline{P_nO_n}=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

직각삼각형 $AP_nO_n$에서

$$\frac{\overline{O_nP_n}}{\overline{AP_n}}=\sqrt{3}\text{ 이므로 }\overline{AP_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\overline{BP_n}=\overline{AB}-\overline{AP_n}=4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$k=\lim_{n\to\infty}2^nS_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=8\sqrt{3}$$

따라서 $k^2=192$

85) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to0}\frac{x(x+11)}{x}=11$$

86) 답 : 64

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+7)^2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+7)^2=64$$

87) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to-1-}f(x)=-2$이므로

$a=-2$

$x+3=t$라 하면 $x\to-2+$일 때, $t\to1+$이므로

$$\lim_{x\to-2+}f(x+3)=\lim_{t\to1+}f(t)=1$$

88) 답 : 10

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+6)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+6)=10$$

89) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 이해하고 조건을 만족하는 값을 구한다.

$$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=2+0=2$$

90) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 좌극한과 우극한 이해하기

$$\lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)=0+1=1$$

91) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 우극한과 좌극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to-1-}f(x)=-2$이므로 $a=-2$

$x+3=t$라 하면 $x\to-2+$일 때, $t\to1+$이므로

$$\lim_{x\to-2+}f(x+3)=\lim_{t\to1+}f(t)=1$$

92) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

점 $A$는 곡선 $y=-x^2+6$과 직선 $y=x$가 만나는 점이므로

$-x^2+6=x$

$x=2$ ( $\because x>0$ )

$\therefore A(2,\ 2)$

$\overline{PQ}=2-a$

$\overline{PR}=-a^2+6-a$

$$[\text{구하는 값}]=\lim_{a\to2-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}$$

$$=\lim_{a\to2-}\frac{2-a}{-a^2-a+6}$$

$$=\lim_{a\to2-}\frac{2-a}{(a+3)(2-a)}$$

$$=\lim_{a\to2-}\frac{1}{a+3}=\frac{1}{5}$$

93) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제 해결하기

그림과 같이 삼각형 $OA_nB_n$에 내접하는 원의 중심을 $C_n(r_n,\ r_n)$이라 하고

내접하는 원이 삼각형 $OA_nB_n$의 세 변과 만나는 점을 각각 $D_n$, $E_n$, $F_n$이라 하자.

$\triangle B_nF_nC_n \backsim \triangle B_nOP_n$ 이므로

$$\overline{B_nF_n} : \overline{B_nO} = \overline{F_nC_n} : \overline{OP_n}$$

$$(n+1-r_n) : (n+1) = r_n : \overline{OP_n}$$

$$\overline{OP_n} = \frac{(n+1)r_n}{n+1-r_n} \ \cdots ㉠$$

$\overline{B_nF_n} = \overline{B_nE_n}$, $\overline{D_nA_n} = \overline{E_nA_n}$ 이고

$\overline{B_nE_n} + \overline{E_nA_n} = \overline{B_nA_n}$ 이므로

$$(n+1-r_n) + (n-r_n) = \sqrt{2n^2+2n+1}$$

$$r_n = \frac{1}{2}\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right) \ \cdots ㉡$$

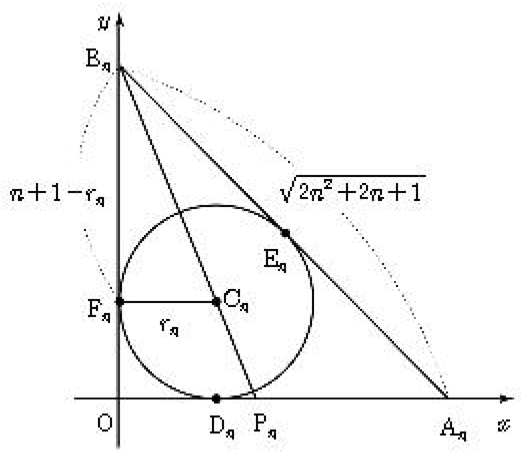
㉡을 ㉠에 대입하여 계산하면

$$\overline{OP_n} = \frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{1+\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

[구하는 값] $= \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{OP_n}}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{n\left(1+\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$




94) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-a}{x-2} = b$ 이므로

$f(x) = x^3 - a$라 하면 $f(2) = 0$이므로 $a = 8$

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12 = b$

따라서 $a+b = 20$

95) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$ 에서

분모, 분자에 $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$를 곱하면

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2} = 16$$

96) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -1+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x) = 0+1 = 1$

97) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 도형과 무한수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$C_1$ : $x^2+y^2 = 1$

$C_2$ : $(x-2)^2+y^2 = 2^2$

$C_3$ : $\{x-(2+2^2)\}^2+y^2 = (2^2)^2$

⋮

$C_n$ : $\{x-(2+2^2+\cdots+2^{n-1})\}^2+y^2 = (2^{n-1})^2$

원 $C_n$의 중심의 $x$좌표 $a_n = 2+2^2+\cdots+2^{n-1} = 2^n-2$ $(n \ge 2)$

원 $C_n$의 반지름의 길이 $r_n = 2^{n-1}$

따라서 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-2}{2^{n-1}} = 2$

98) 답 : 5

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수 추론하기

조건(가), (나)에 의하여 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차 함수이고, $f(1) = 0$ 이므로

$f(x) = 2(x-1)(x+a)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x-1} = 2(1+a) = 3$$

$\therefore$ $a = \frac{1}{2}$

$f(x) = (x-1)(2x+1)$

$\therefore$ $f(2) = 5$

99) 답 : 208

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이해하여 조건을 만족시키는 다항함수를 구한다.

조건 ㈎에서 $f(x)$는 이차 함수임을 알 수 있다.

$f(x) = ax^2+bx+c$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{(ax^2+bx+c)^2}{x^4} = a^2 = 4$$

$\therefore$ $a = 2$ ∵ $a > 0$)

조건 ㈏에서

$f(x) - x^2 = (2x^2+bx+c) - x^2$

$= x^2+bx+c$

$= (x-1)(x-c)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-c)}{x-1}$$

$1-c=3$

$\therefore\ c=-2,\ b=1$

따라서 $f(x)=2x^2+x-2$이므로 $f(10)=208$

100) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 도형에서 함수의 극한을 이해한다.

기울기가 $-2$인 직선 $l$의 $y$절편을 $b$라 하면

직선 $l$의 방정식은 $2x+y-b=0$

점 $C(2,\ 0)$에서 직선 $l:2x+y-b=0$에 이르는 거리

$r=\frac{|2\cdot2-b|}{\sqrt5}=\frac{|4-b|}{\sqrt5}$에서 $b=4\pm\sqrt5 r\cdots$ ㉠

점 $C'(3,\ 3)$에서 직선 $l:2x+y-b=0$에 이르는 거리

$f(r)=\frac{|9-b|}{\sqrt5}$에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면

$$\lim_{r\to0+}f(r)=\lim_{r\to0+}\frac{|5\pm\sqrt5 r|}{\sqrt5}=\sqrt5$$

101) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 이해한다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1-}f(x)=1$이고 $f(-1)=1$이므로 (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1+}g(x)=1\cdot0=0$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1-}g(x)=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0,\ f(1)g(1)=1\cdot1=1$ (거짓)

102) 답 : ④

[해설]

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+2)=2+2=4$$

103) 답 : ④

[해설]

$f'(x)=2x+2$

따라서 $f'(1)=4$

104) 답 : 7

[해설]

[출제 의도]함수의 극한에 관한 성질을 알고 추론하기

조건㈎에 의해 $f(x)-3x^3=2x^2+ax+b$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2+ax+b}{x}=2\text{이므로}$$

$a=2,\ b=0$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+2x$이므로 $f(1)=7$

105) 답 : ④

[해설]

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4+x^2)(1-x^2)^n=\frac{x^4+x^2}{1-(1-x^2)}=x^2+1$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & (|x|<1,\ x\neq0)\\ 0, & (|x|\geq1,\ x=0)\end{cases}$$

따라서 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x^2+1)=2$

106) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값 구하기

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+2t}$이므로 $S(t)=(t^2+2t)\pi$

원 $C$위의 점 $P$에서의 접선의 방정식이 $tx+\sqrt{2t}y=t^2+2t$이므로 $Q(t+2,\ 0)$

$\overline{OQ}=t+2,\ \overline{PQ}=\sqrt{2t+4}$이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{OQ}-}\overline{PQ}=\lim_{t\to0+}\frac{(t^2+2t)\pi}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}=4\pi$$

따라서 $\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{OQ}-\overline{PQ}}=4\pi$

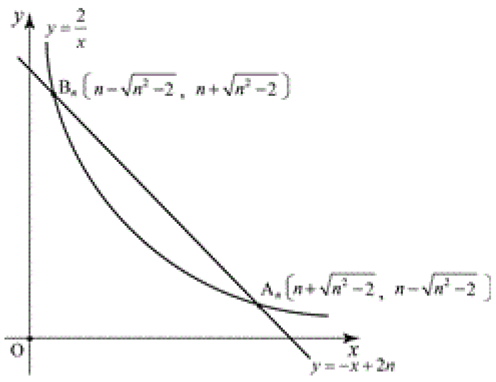
107) 답 : ①

[해설]

$y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+2n$의 두 교점을 구하면

$\frac{2}{x}=-x+2n$에서 양변에 $x$를 곱하여 정리하면

$x^2-2nx+2=0$이며 근의 공식을 사용하여 아래 그림과 같다.




두 점 사이의 거리 $l_n=\sqrt{8n^2-16}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8n^2-16}}{n}=2\sqrt2$

108) 답 : ④

[해설]

중심이 $P(x,\ y)$이므로 $x$축에 접하는 원의 반지름의 길이는 $y$이다.

두 원이 외접하므로 $\overline{PA}=y+1$

즉, $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=y+1$이다.

$x^2+(y-3)^2=(y+1)^2$에서 $x^2=8y-8$

이때, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{y\to\infty}\frac{8y-8}{y+1}=8$$

109) 답 : ②

[해설]

$-x=t$로 치환하면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

110) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)}=1$$

111) 답 : ②

[해설]

$-x=t$로 치환하면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

112) 답 : 25

[해설]

$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)}{h}=5$에서 $f(0)=0$이고, $2f'(0)=5$이므로 $b=0,\ a=\frac{5}{2}$이다.

113) 답 : 120

[해설]

$f(x)$는 삼차항의 계수가 2인 삼차 함수이고

$f(-1)=f(0)=f(1)=0$이므로 $f(x)=2x(x-1)(x+1)$

$\therefore\ f(4)=120$

114) 답 : ①

[해설]

(주어진 식) $=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)(x+4)=32$

115) 답 : 27

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to3}\frac{x^3-3x^2}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$의 분자, 분모에 $\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}$을 곱하여 정리하면

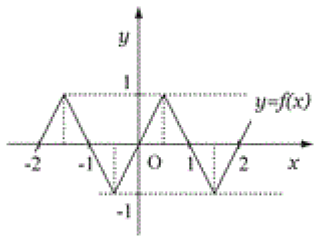
$$\lim_{x\to3}\frac{x^2}{2}(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})=27$$

116) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$y=f(x)$의 그래프는



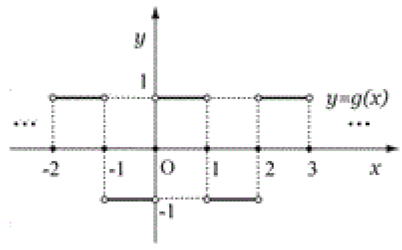

함수 $y=g(x)$는

1) $x$가 정수이면 $f(x)=0$이므로
$g(x)=0$

2) $2k-1<x<2k$ ($k$는정수)이면
$0\le1+f(x)<1$이므로 $g(x)=-1$

3) $2k<x<2k+1$ ($k$는정수)이면
$1<1+f(x)\le2$이므로 $g(x)=1$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는




$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})=1-(-1)=2$

117) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\sqrt{t^2+4}-2}=\lim_{t\to0}\frac{t^2(\sqrt{t^2+4}+2)}{t^2}=4$$

118) 답 : 12

[해설]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+kh)^2-5(1+kh)+6-(1-5+6)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{k^2h^2-3kh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(k^2h-3k)$$
$$=-3k=-36$$

$\therefore\ k=12$

119) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값 계산하기

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{x(x-1)}{2x}}=-2$$

120) 답 : 48

[해설]

[출제 의도]무리함수의 극한값 구하기

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+6}-b)=0$이고 $b=3a$이다.

$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}=\frac{a}{6}=2$

$\therefore\ a=12,\ b=36$

121) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 극한값 구하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$에서

$f(x)=x^2+2x+k$($k$는 상수)꼴이고

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=a$에서 $f(2)=0$이므로 $k=-8$

$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=6$

$\therefore\ a=6$

122) 답 : 21

[해설]

(준식) $=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2-1)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)(9+x-9)}=3$

$\therefore\ 7\alpha=21$

123) 답 : ①

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to0-}g(x)=-1,\ \lim_{x\to0+}g(x)=0$

$\therefore$ 좌극한 $\neq$ 우극한(거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to0-}g(f(x))=-1,\ \lim_{x\to0+}f(g(x))=-1$

$\therefore$ (참)

ㄷ. $\lim_{x\to0-}f(g(x))=0,\ \lim_{x\to0+}f(g(x))=-1$

$\therefore$ 좌극한 $\neq$ 우극한(거짓)

124) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]극한의 성질 이해하기

ㄱ.(반례) $f(x)=x,\ g(x)=[x]$에 대하여

$\lim_{x\to0}f(x)=0,\ \lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$이지만 $\lim_{x\to0}g(x)$는 존재하지 않는다. ∴ 거짓

ㄴ. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta,\ \lim_{x\to a}g(x)=\alpha$라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)\frac{f(x)}{g(x)}$

$=\lim_{x\to a}g(x)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$ ∴ 참

ㄷ.(반례) $f(x)=[x],\ g(x)=x$라 하면

$\lim_{x\to0}f(g(x))=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}[x]$가 되어 극한값이 존재하지 않는다. ∴ 거짓

125) 답 : 300

[해설]

원점을 $O$, 두 점 $A, B$를 $x$축 위에 오도록 좌표축을 설정하고, 점 $P$의 좌표를 $(x,0)$이라 하면,

구하고자 하는 극한값 $m$은

$m=\lim_{x\to3-}\frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}=\lim_{x\to3-}\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{1-(x-2)^2}}$

$=\lim_{x\to3-}\sqrt{\frac{(3+x)(3-x)}{(x-1)(3-x)}}=\lim_{x\to3-}\sqrt{\frac{(3+x)}{(x-1)}}=\sqrt{3}$

126) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 극한을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{3a+3}-3=0$에서 $a=2,\ b=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{7}{3}$

127) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]함수의 극한에 대한 성질 추론하기

[해설]ㄱ. $\lim_{n\to\infty}f(x)=1$이지만 $x=0$에서 불연속일 경우 $f(0)\neq1$이거나 존재하지 않을 수 있다.(거짓)

ㄴ. $\frac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이다.

(준식) $=\lim_{t\to0}f(1+t)=\lim_{x\to1}f(x)=1$이다.(참)

ㄷ. $f(x)<g(x)<h(x)$이면

$\lim_{x\to0}f(x)\le\lim_{x\to0}g(x)\le\lim_{x\to0}h(x)$이다.

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}h(x)=0$이므로 $\lim_{x\to0}g(x)=0$.(참)

128) 답 : ③

[해설]

함수의 극한과 연속성

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$에서

$x\to2$일 때(분자)$\to0$이고 $b(\neq0)$로 수렴하므로(분모)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax)=0$이므로

$4+2a=0$

$\therefore\ a=-2$

$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x}$

$=\frac{2+2}{2}=2=b$

$\therefore\ a+b=-2+2=0$

129) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]미분을 이용하여 다항식의 나머지 구하기

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$에서(분모)가 0에 가까워지므로

$f(2)-a=0$에서 $f(2)=a$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$$

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$

$x=2$일 때, $f(2)=2b+3=a$

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

여기에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=b$

$\therefore\ a=11,\ b=4$

130) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 함수값 구하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{ax+1}=2$에서

$f(x)=x^2+2ax+b$

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{4}$에서 $f(1)=0$이므로

$1+2a+b=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2ax+b}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2ax-2a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2a+1)}$$

$$=\frac{1}{2a+2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=1,\ b=-3$

$\therefore\ f(3)=12$

131) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]미분계수를 이용하여 접선의 방정식 구하기

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=-3$에서(분모)가 0으로 가까워지므로

$f(2)-2=0$에서 $f(2)=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-3$$

$g(x)=(x-1)^2$에서 $g'(x)=2(x-1)$이므로

$g(2)=1,\ g'(2)=2$

$x=2$일 때 $y=f(x)g(x)$에서의 접선의 기울기는

$y'_{x=2}=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=1$

따라서 기울기가 1이다.

132) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=x+x^3+x^5,\ g(x)=x^2+x^4+x^6$

구하는 값 $=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$

$=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)=10$

$\because\ (f'(1)=9,\ g'(1)=12)$

133) 답 : ⑤

[해설]

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 $f(2)=0,\ f'(2)=3$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $f(0)=0,\ f'(0)=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(f(x))}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(f(x))-f(f(2))}{f(x)-f(2)}\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$=f'(f(2))\cdot f'(2)$

$=f'(0)\cdot f'(2)=6$

134) 답 : ⑤

[해설]

$x\to0$일 때, $f(x)\to0+$이므로 $f(x)=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=2$$

135) 답 : 35

[해설]

[출제 의도]함수의 극한이 수렴할 조건을 이용하여 값 구하기

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{x^2-bx+9}=3\cdots$①

$\lim_{x\to1}(x^2-bx+9)=0$이므로 $b=10$

$b$의 값을 ①에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x-9)}=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{x-9}=3$$

$a=25\ \therefore\ a+b=35$

136) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]함수의 극한

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}}=4\text{에서}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\ln(1-x)}{-x}=-\lim_{x\to0}\ln(1-x)^{\frac{1}{-x}}=-1\text{이므로}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-4$$

137) 답 : ①

[해설]

함수의 극한과 연속성

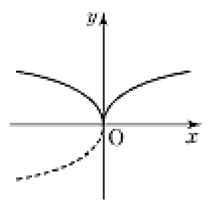
ㄱ.(거짓)【반례】 $f(x)=\frac{1}{x^2},\ g(x)=-\frac{1}{x^2}$이면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$이지만

$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}0=0$이다.

ㄴ.(참) $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

(ⅰ) $f(0)=0$인 경우

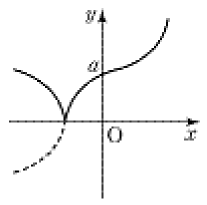



$\lim_{x\to0+}|f(x)|=\lim_{x\to0+}f(x)=f(0)=0$

$\lim_{x\to0-}|f(x)|=\lim_{x\to0-}\{-f(x)\}=-f(0)=0$

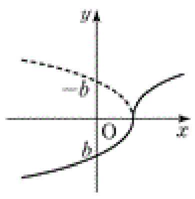
$\therefore\ \lim_{x\to0}|f(x)|=|f(0)|$

(ⅱ) $f(0)=a(a>0)$인 경우




$\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=a=|f(0)|$

(ⅲ) $f(0)=b(b<0)$인 경우

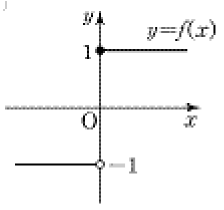


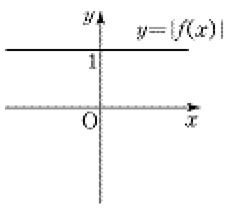

$\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}\{-f(x)\}=-f(0)=-b=|f(0)|$

$(\because b<0)$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ.(거짓)【반례】 $f(x)=\begin{cases}1, & (x\geq0)\\ -1, & (x<0)\end{cases}$




위의 그림에서 $y=|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이지만 $y=f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서, 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

138) 답 : ①

[해설]

함수의 극한과 연속성

점 $(t,\ \sqrt{t})$에서 두 점 $(1,0)$, $(2,0)$까지의 거리 $d_1$, $d_2$는

$$d_1=\sqrt{(t-1^2)+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$$

$$d_2=\sqrt{(t-2^2)+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

139) 답 : ④

[해설]

다항함수의 미분법

ㄱ.(참) $f'(x)=6x^2+6x$이므로

구하는 값 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2+6n}$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6}$$

ㄴ.(거짓)【반례】 $f(x)=x$일 때

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty$이지만

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\cdots=\infty$이므로 수렴하지 않는다.

ㄷ.(참) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f'(n)}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}f'(n)=\infty$

즉, $x\to\infty$일 때 $f'(x)$는 발산한다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

140) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]극한값 계산하기

$\lim_{x\to1+}(a[x]^3+b[x]^2)=a+b$

$\lim_{x\to1-}(a[x]^3+b[x]^2)=0$이므로

$\therefore\ a+b=0$

141) 답 : ②

[해설]

함수의 극한과 연속성

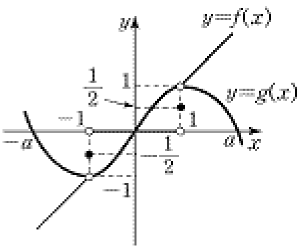
$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$에서

(ⅰ) $|x|>1$일 때 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x$

(ⅱ) $|x|<1$일 때 $f(x)=0$

(ⅲ) $x=1$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}$

(ⅳ) $x=-1$일 때 $f(x)=-\frac{1}{2}$




방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 가지려면

$f(x)=g(x)$에서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 오직 한 점에서만 만나야 한다.

$y=g(x)$의 그래프는 원점 대칭이므로

점(1, 1), (-1, -1)을 지날 때 $a$의 값이 최대이다.

$g(1)=1$에서 $1=-\left(1-a^2\right)$

$a^2=2$ ∴ $a=\pm\sqrt{2}$

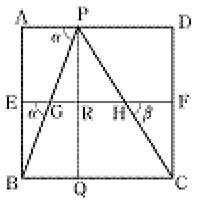
따라서, $a$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

142) 답 : ⑤

[해설]

함수의 극한

아래 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{PQ}$와 $\overline{EF}$가 만나는 점을 R라 하자.




ㄱ.(참) $\overline{EG}=\overline{GR}$, $\overline{RH}=\overline{HF}$이므로

$$\overline{GH}=\overline{GR}+\overline{RH}=\frac{1}{2}\overline{EF}=1\ (\text{일정})$$

ㄴ.(거짓) $\triangle PGH$에서 $\angle GPH+\alpha+\beta=180^\circ$

∴ $\alpha+\beta=180^\circ-\angle GPH$

이때, 점 $P$의 위치에 따라 $\angle GPH$의 크기가 달라지고, $\angle GPH$의 크기가 달라지면

$\alpha+\beta$의 값이 달라진다.

ㄷ.(참) $\triangle ABP$에서 $\tan\alpha=\dfrac{2}{\overline{AP}}$이므로

$$\overline{AP}=\frac{2}{\tan\alpha}=2\cot\alpha$$

$$\therefore \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{AP}}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cot\alpha}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$$

$$=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=2$$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

143) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]극한으로 정의된 함수의 연속성 이해하기

$f(x)=\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}$에서

1)

2)

3) $x=1$, $f(x)=\dfrac{1}{2}$

4) $x=-1$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}$

∴ $x=\pm1$에서 불연속

$y=g(f(x))$에서 $x=\pm1$에서 연속이 되려면

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}g(f(x))=g(f(1))\\ \lim\limits_{x\to-1}g(f(x))=g(f(-1))\end{cases}$$

위 식을 만족하려면 좌극한값, 우극한값과 함수값이 같아야 하므로

$$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$$

$$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$$

$$g(f(1))=g\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g(1)=g(0)=g\left(\frac{1}{2}\right)$$

이와같은 방법으로

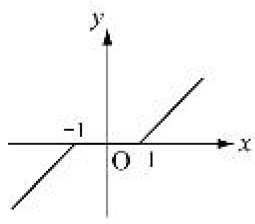
$$\lim_{x\to-1+}g(f(x))=\lim_{x\to0}g(x)=g(0)$$

$$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=\lim_{x\to-1-}g(x)=g(-1)$$

$$g(f(-1))=g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$g(0)=g(-1)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$을 만족시키는

$y=g(x)$의 개형은 ④번




144) 답 : 5

[해설]

[출제 의도]미분계수의 뜻을 알고 문제 해결하기

$$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{2-f(x)\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\{2-f(x)\}$$

$$=f'(1)\{2-f(1)\}=10$$

∴ $f'(1)=5$

[정답] 5

145) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]극한의 의미와 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x\to2$일 때(분모)$\to0$이므로(분자)$\to0$에서

$4+6+a=0$

∴ $a=-10$

$$\therefore\ b=\lim_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+5)(x-2)}{x-2}=7$$

∴ $a+b=-3$

146) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]여러 가지 함수의 극한값을 구하기

ㄱ. $x\to1-$ 일 때, $0<x<1$이므로 $[x]=0$

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{(-1)^0}{x}=1$$

ㄴ. $x\to-1+$ 일 때, $-1<x<0$이므로 $[x]=-1$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{(-1)^{(-1)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-1+}\left(-\frac{1}{x}\right)=1$$

ㄷ. $x\to2-$ 일 때, $1<x<2$이므로 $[x]=1$

$$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$$

[정답]⑤

147) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]절대값이 포함된 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a>1$이므로 $x\to1$일 때, $|x-a|=-(x-a)$

$$\lim_{x\to1}\frac{-(x-a)-(a-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{x-1}=-1$$

148) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]합성함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{x\to1-}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다. ∴ 거짓

ㄴ. $\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{h\to0+}f(h)=1$ ∴ 참

ㄷ. $\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{x\to1-}f(1)=0$ ∴ 참

149) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]함수의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+k)$ ( $k$는 상수)이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+k}{2}=\frac{1+k}{2}=1\text{에서}$$

$k=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+1)$

∴ $f(7)=24$

150) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 극한에 관한 성질을 이해하고, 여러가지 함수의 극한값을 구하기

$f(x)-2=kx(x+1)(x-2)$, $k$는 상수

ㄱ. $\frac{1}{6k}$ ㄴ. 0 ㄷ. $\infty$

[정답]③