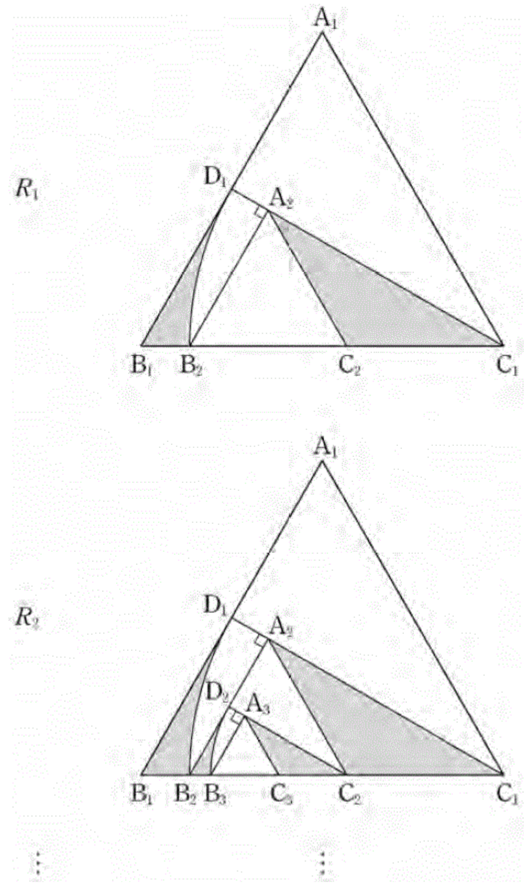
I.수열의 극한

2.급수

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 선분 A_1B_1의 중점을 D_1이라 하고, 선분 B_1C_1 위의 $\overline{C_1D_1}=\overline{C_1B_2}$인 점 B_2에 대하여 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1D_1B_2$를 그린다. 점 B_2에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 A_2, 선분 C_1B_2의 중점을 C_2라 하자. 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_1A_2C_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 A_2B_2의 중점을 D_2라 하고, 선분 B_2C_2 위의 $\overline{C_2D_2}=\overline{C_2B_3}$인 점 B_3에 대하여 중심이 C_2인 부채꼴 $C_2D_2B_3$을 그린다. 점 B_3에서 선분 C_2D_2에 내린 수선의 발을 A_3, 선분 C_2B_3의 중점을 C_3이라 하자. 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 D_2B_3으로 둘러싸인 영역과 삼각형 $C_2A_3C_3$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{56}$ ② $\dfrac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$ ③ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{56}$

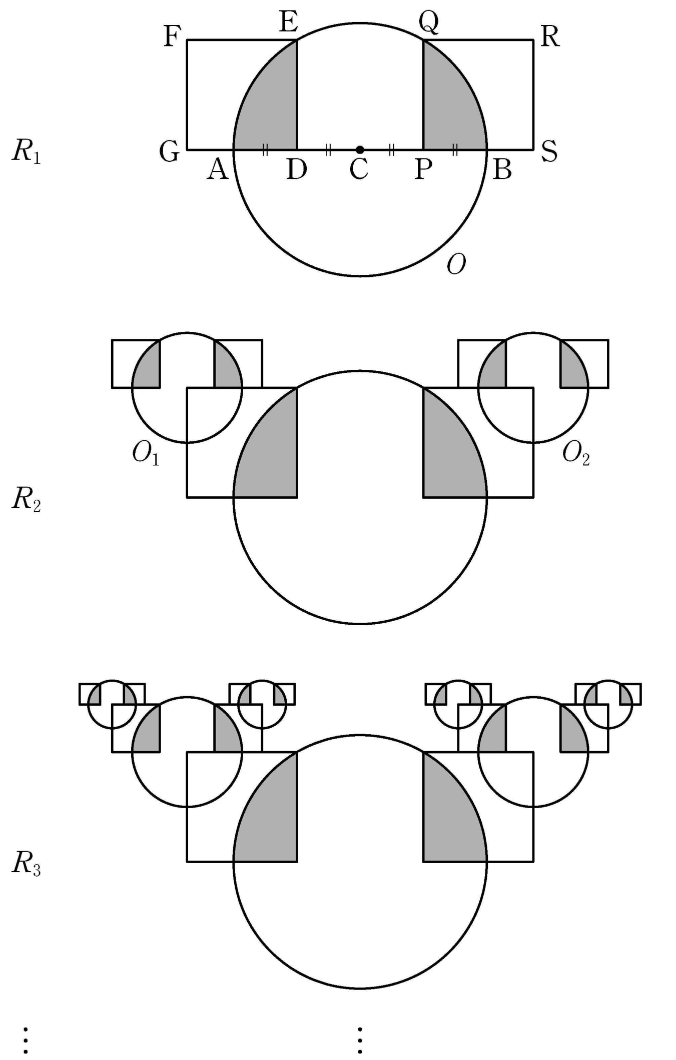
④ $\dfrac{15\sqrt{3}-6\pi}{52}$ ⑤ $\dfrac{15\sqrt{3}-4\pi}{52}$

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

2 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원의 중심을 C라 하고, 선분 AC의 중점과 선분 BC의 중점을 각각 D, P라 하자. 선분 AC의 수직이등분선과 선분 BC의 수직이등분선이 원 O의 위쪽 반원과 만나는 점을 각각 E, Q라 하자. 선분 DE를 한 변으로 하고 원 O와 점 A에서 만나며 선분 DF가 대각선인 정사각형 $DEFG$를 그리고, 선분 PQ를 한 변으로 하고 원 O와 점 B에서 만나며 선분 PR가 대각선인 정사각형 $PQRS$를 그린다. 원 O의 내부와 정사각형 $DEFG$의 내부의 공통부분인 모양의 도형과 원 O의 내부와 정사각형 $PQRS$의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{DE}$인 원 O_1, 점 R를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{PQ}$인 원 O_2를 그린다. 두 원 O_1, O_2에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형과 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{12\pi-9\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{8\pi-6\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{32\pi-24\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{28\pi-21\sqrt{3}}{10}$ ⑤ $\frac{16\pi-12\sqrt{3}}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

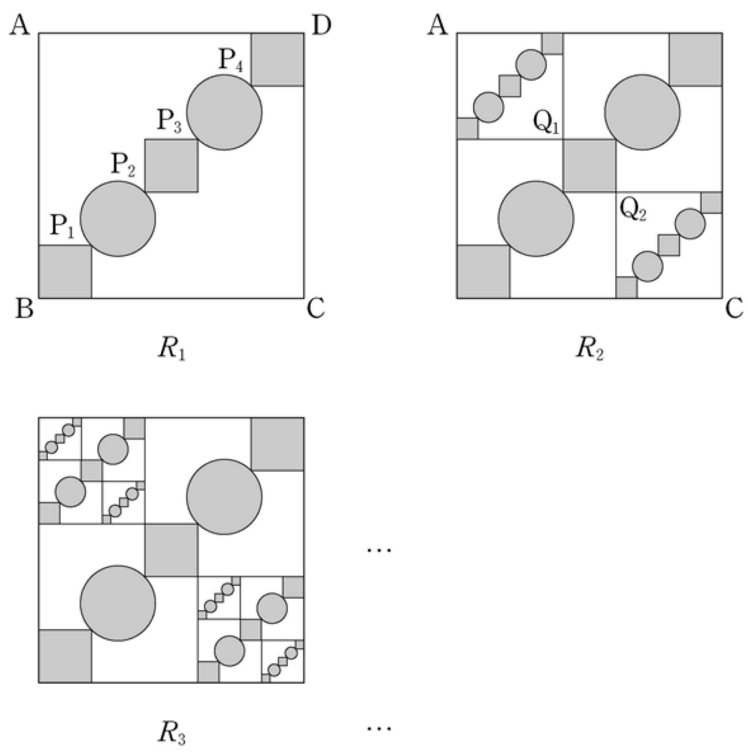
3 [*공통]그림과 같이 한 변의 길이가 5인 정사각형 $ABCD$의 대각선 BD의 5등분점을 점 B에서 가까운 순서대로 각각 P_1, P_2, P_3, P_4라 하고, 선분 BP_1, P_2P_3, P_4D를 각각 대각선으로 하는 정사각형과 선분 P_1P_2, P_2P_3를 각각 지름으로 하는 원을 그린 후, 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 P_2P_3을 대각선으로 하는 정사각형의 꼭짓점 중 점 A와 가장 가까운 점을 Q_1, 점 C와 가장 가까운 점을 Q_2라 하자. 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 2개의 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 선분 AQ_1을 대각선으로 하는 정사각형과 선분 CQ_2를 대각선으로 하는 정사각형에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

[4점][2016(A) /수능 15]



① $\frac{24}{17}(\pi+3)$ ② $\frac{25}{17}(\pi+3)$ ③ $\frac{26}{17}(\pi+3)$

④ $\frac{24}{17}(2\pi+1)$ ⑤ $\frac{27}{17}(2\pi+1)$

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

4 첫째항이 1 이고 공비가 $r(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\frac{3}{4}$ 이다. r의 값을 구하시오.[3점][2016(B) /수능 25]

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

5 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=3$, $a_2=1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2$의 값은? [3점]

① $\frac{81}{8}$ ② $\frac{83}{8}$ ③ $\frac{85}{8}$
④ $\frac{87}{8}$ ⑤ $\frac{89}{8}$

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

6 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

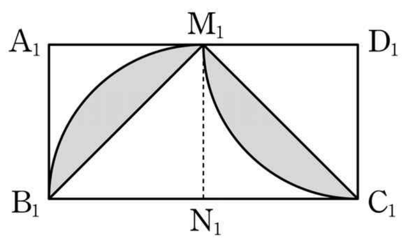
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5b_n)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

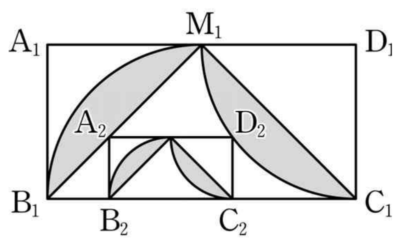
7 [*공통]직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$이다. 그림과 같이 선분 A_1D_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 M_1, N_1이라 하자. 중심이 N_1, 반지름의 길이가 $\overline{B_1N_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $N_1M_1B_1$을 그리고, 중심이 D_1, 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $D_1M_1C_1$을 그린다. 부채꼴 $N_1M_1B_1$의 호 M_1B_1과 선분 M_1B_1로 둘러싸인 부분과 부채꼴 $D_1M_1C_1$의 호 M_1C_1과 선분 M_1C_1로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 M_1B_1 위의 점 A_2, 호 M_1C_1 위의 점 D_2와 변 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

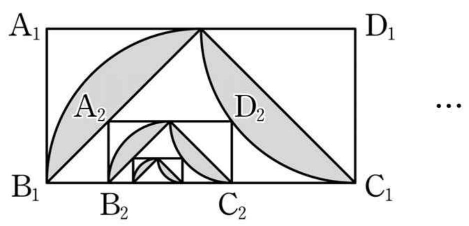
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3

① $\frac{25}{19}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ② $\frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ③ $\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$
④ $\frac{25}{22}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ ⑤ $\frac{25}{23}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

8 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n \cdot a_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+2a_n+2\right)$의 값은?[4점][2013학년도 수능]

① $\frac{13}{4}$ ② 3 ③ $\frac{11}{4}$

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

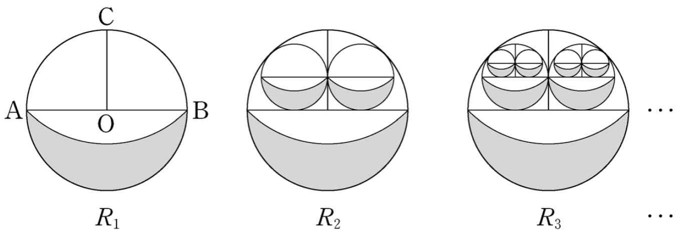
9 [공통]그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다.

원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라 하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.

그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 도형에 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◡ 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

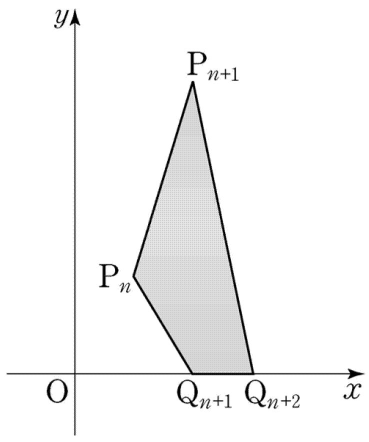
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점][2013학년도 수능]



[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

10 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(n, 3^n)$, 점 Q_n의 좌표를 $(n, 0)$이라 하자. 사각형 $P_nQ_{n+1}Q_{n+2}P_{n+1}$의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

11 [공통]반지름의 길이가 1인 원이 있다.

그림과 같이 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 3:1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

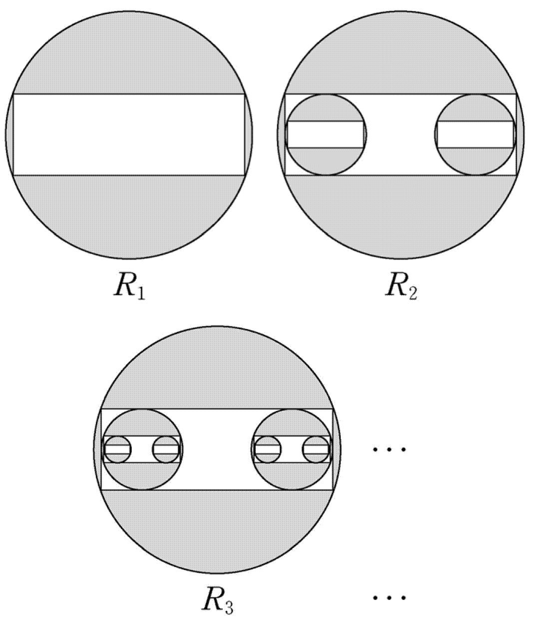
그림 R_1에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다.

새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 그려진 직사각형의 네 변에 접하도록 원 4개를 그린다.

새로 그려진 각 원에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{5}{4}\pi-\frac{5}{3}$　② $\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$　③ $\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{5}$
④ $\frac{5}{4}\pi-1$　⑤ $\frac{4}{3}\pi-\frac{16}{15}$

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

12 [공통]그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,3)$, $B_1(-3,0)$, $C_1(0,-3)$, $D_1(3,0)$이라 하자.

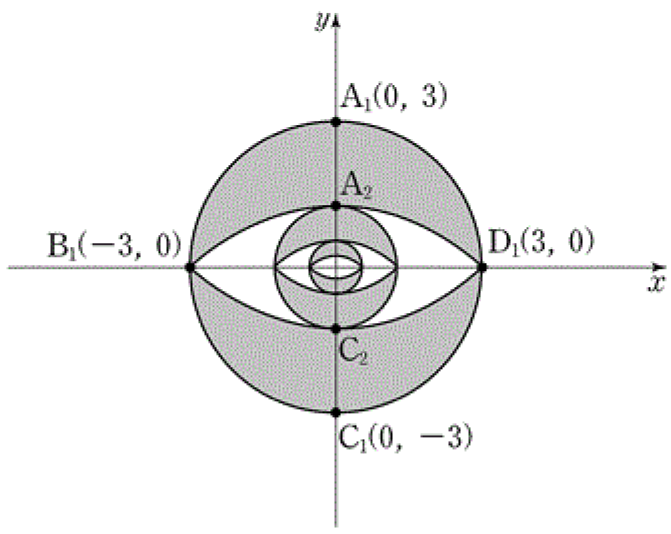
두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자.

호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.

선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자.

호 $B_2A_2D_2$와 호 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 호 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은?[4점]



① $5(\sqrt{2}+1)$　② $6(\sqrt{2}+1)$　③ $7(\sqrt{2}+1)$
④ $8(\sqrt{2}+1)$　⑤ $9(\sqrt{2}+1)$

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

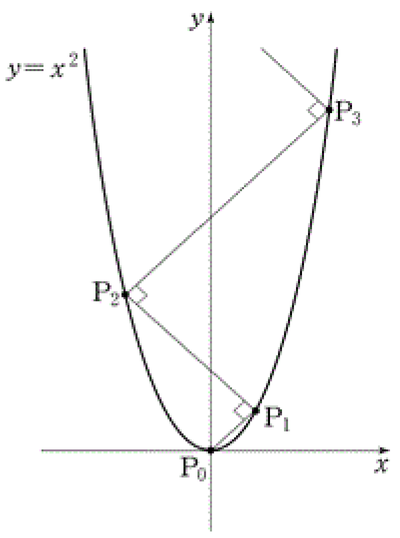
13 공비가 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_1 - b_1 = 1$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 8$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

14 [공통]자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가)두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0, 0)$, $(1, 1)$이다.
(나)점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $P_{n-1}P_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n = \overline{P_{n-1}P_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{n}$의 값은?[3점]



① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

15 [공통]좌표평면에 원 $C_1 : (x-4)^2 + y^2 = 1$이 있다. 그림과 같이 원점에서 원 C_1에 기울기가 양수인 접선 l을 그었을 때 생기는 접점을 P_1이라 하자.

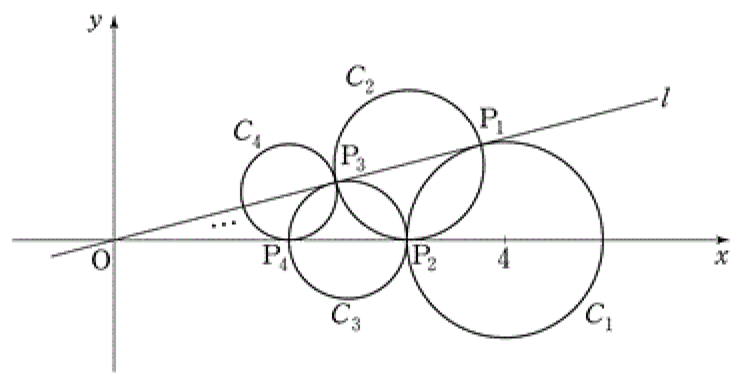
중심이 직선 l위에 있고 점 P_1을 지나며 x축에 접하는 원을 C_2라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_2라 하자.

중심이 x축 위에 있고 점 P_2를 지나며 직선 l에 접하는 원을 C_3이라 하고 이 원과 직선 l의 접점을 P_3이라 하자.

중심이 직선 l위에 있고 점 P_3을 지나며 x축에 접하는 원을 C_4라 하고 이 원과 x축의 접점을 P_4라 하자.

이와 같은 과정을 계속할 때, 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?(단, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이는 원 C_n의 반지름의 길이보다 작다.)[4점]



① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

[난이도 : ★★★] [2009 학년도 대수능]

16 $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C를 x축 방향으로 $\frac{2}{n}$만큼 평행이동시킨 원을 C_n이라 하자. 원 C와 원 C_n의 공통현의 길이를 l_n이라 할 때,

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n \times l_n)^2} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

이미지가 없거나 이미지 크기가 0 임

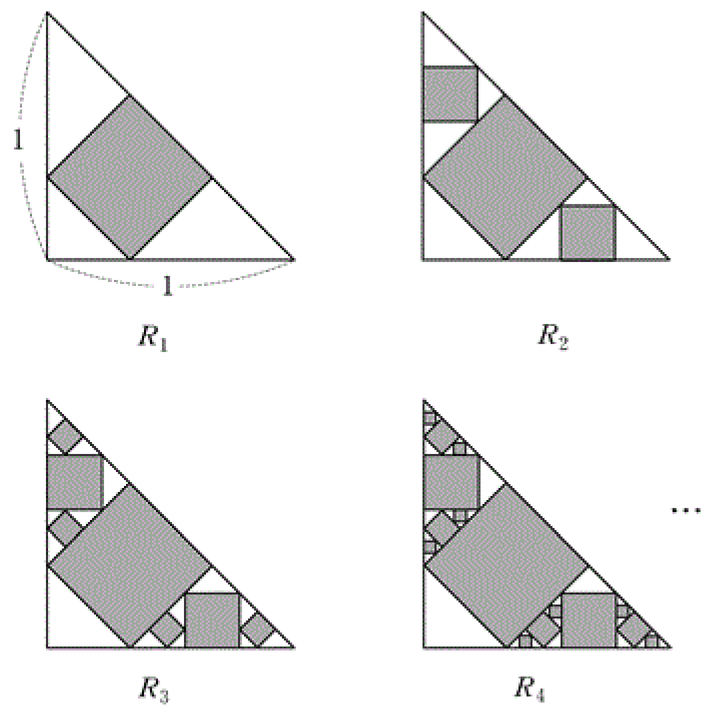
[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

17 [공통]아래와 같이 직각을 낀 두 변의 길이가 1인 직각이등변삼각형이 있다. 이 직각이등변삼각형의 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 합동인 2개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 2개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 합동인 4개의 직각이등변삼각형의 각 빗변에 2개의 꼭짓점이 있고, 직각을 낀 두 변에 나머지 2개의 꼭짓점이 있는 4개의 정사각형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 정사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{3\sqrt{2}}{20}$　② $\frac{\sqrt{2}}{5}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{2}{5}$

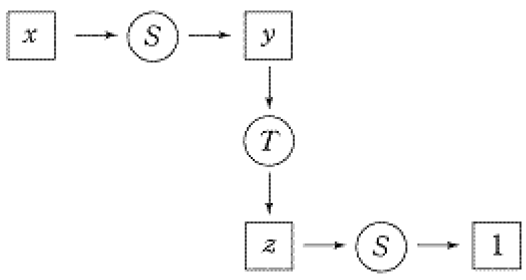
[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

18 [공통]실수 $a\,(a>1)$에 대하여 $b=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{n}$을 [그림 1]과 같이 나타내고, 실수 c에 대하여 $d=16^{c}$을 [그림 2]와 같이 나타내기로 한다.

[그림 1]

[그림 2]

아래 그림의 실수 x, y, z에 대하여 $\frac{xz}{y}$의 값을 구하시오.[4점]

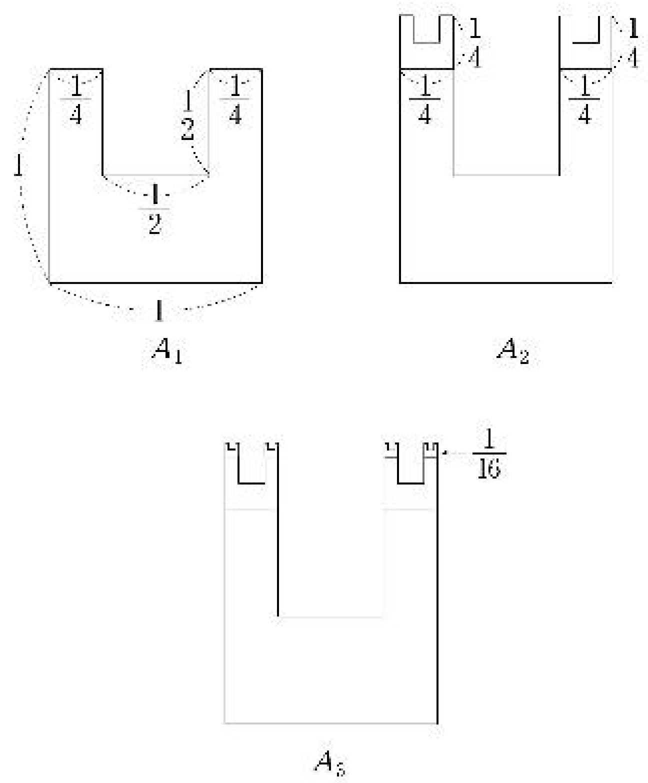


[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

19 [공통]아래 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형을 A_1이라 하자.

한 변의 길이가 $\frac{1}{4}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{8}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 2개를 A_1의 위쪽 두 변에 각각 붙인 도형을 A_2라 하자. 한 변의 길이가 $\frac{1}{16}$인 정사각형에서 한 변의 길이가 $\frac{1}{32}$인 정사각형을 잘라낸 후 남은 凹 모양의 도형 4개를 A_2의 위쪽 네 변에 각각 붙인 도형을 A_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형을 A_n이라 하고 그 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{p}{q}$ (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)일 때, $p+q$의 값을 구하여라. [4점]



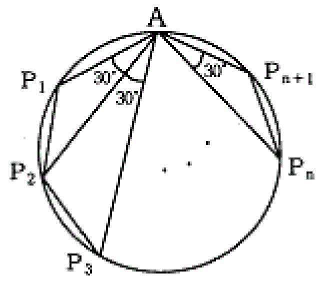
[난이도 : ★★☆] [2004 학년도 대수능]

20 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{3}\right\}^n$ 의 합을 S라고 할 때, $20S$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

21 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점 A를 꼭짓점으로 하고, A에서의 내각이 30° 인 삼각형을 원에 내접하며 서로 겹치지 않도록 최대한 붙였을 때, 삼각형들의 꼭짓점들을 꼭짓점 A로부터 시계반대 방향으로 순서대로 $P_1, P_2, \cdots, P_n, P_{n+1}$이라 하자.

선분 $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \cdots, \overline{P_nP_{n+1}}$의 길이의 합은?[3점]



① 5 ② $5\sqrt{3}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

22 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?[3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

23 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{A_1D_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1 위의 $\overline{B_1C_1}=\overline{B_1E_1}$, $\overline{C_1B_1}=\overline{C_1F_1}$인 두 점 E_1, F_1에 대하여 중심이 B_1 인 부채꼴 $B_1E_1C_1$과 중심이 C_1인 부채꼴 $C_1F_1B_1$을 각각 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 내부에 그리고, 선분 B_1E_1과 C_1F_1의 교점을 G_1이라 하자.

두 선분 G_1F_1, G_1B_1과 호 F_1B_1로 둘러싸인 부분과

두 선분 G_1E_1, G_1C_1과 호 E_1C_1로 둘러싸인 부분인

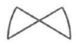
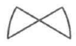
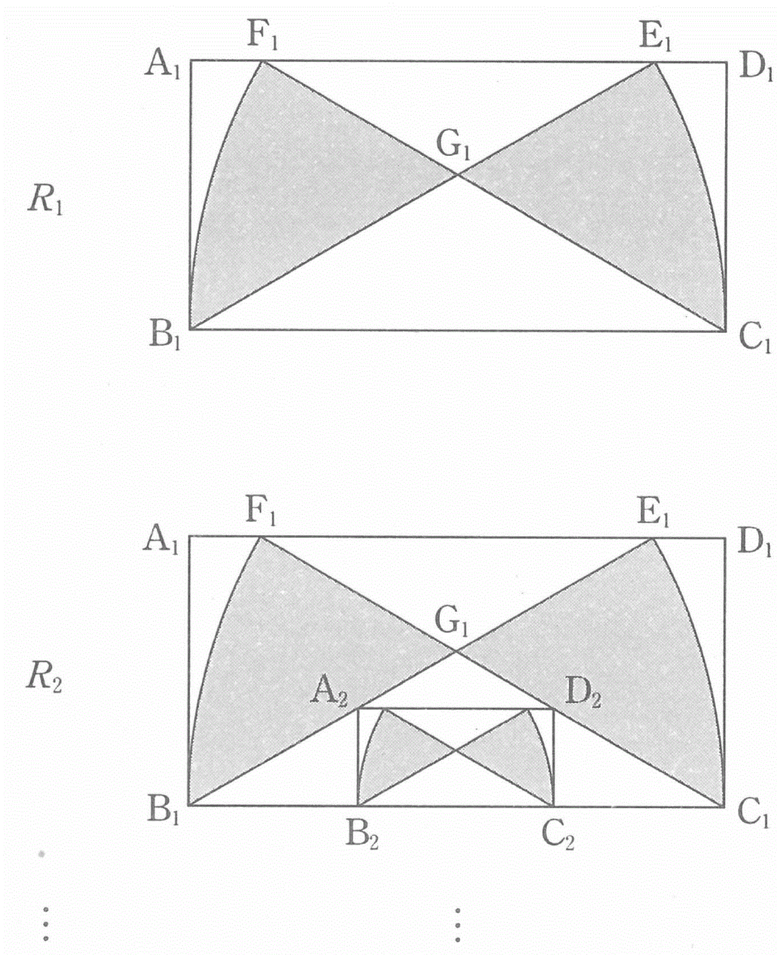
 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 선분 C_1G_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

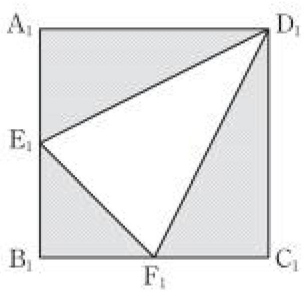
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



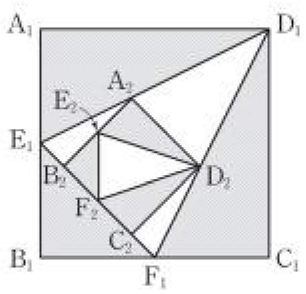
① $\frac{3\sqrt{3}\pi-7}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}\pi-5}{9}$
④ $\frac{4\sqrt{3}\pi-10}{9}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}\pi-8}{9}$

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

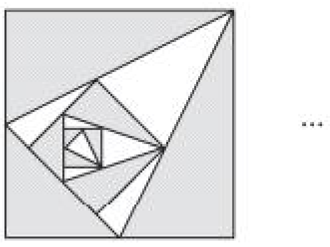
24 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 B_1C_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하자. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부와 삼각형 $E_1F_1D_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1에 선분 D_1E_1 위의 점 A_2 , 선분 D_1F_1 위의 점 D_2와 선분 E_1F_1 위의 두 점 B_2, C_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 삼각형 $E_2F_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 내부와 삼각형 $E_2F_2D_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{x\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2


R_3　　…

① $\frac{125}{37}$　② $\frac{125}{38}$　③ $\frac{125}{39}$
④ $\frac{25}{8}$　⑤ $\frac{125}{41}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

25 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은?[3점]

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

26 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=4$, $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

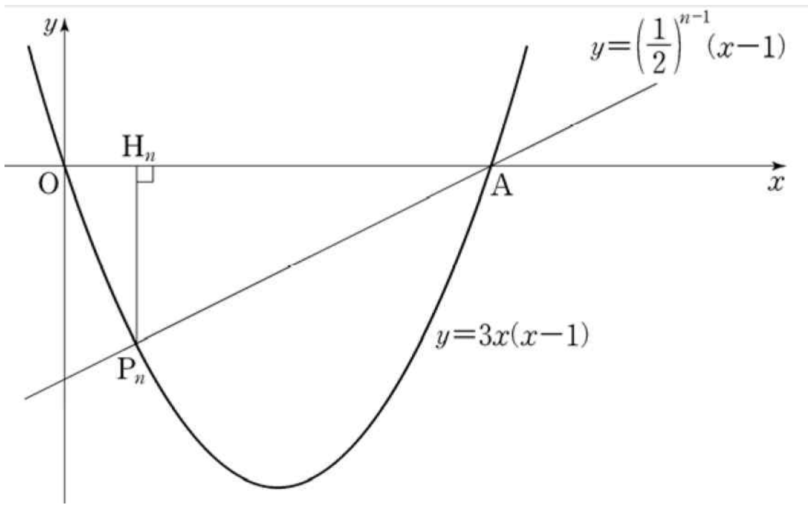
[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

27 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

28 자연수 n에 대하여 직선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 이차 함수 $y=3x(x-1)$의 그래프가 만나는 두 점을 $A(1,\ 0)$과 P_n이라 하자.

점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nH_n}$의 값은? [4점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{14}{9}$ ③ $\frac{29}{18}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{31}{18}$

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

29 그림과 같이 한 변의 길익 6인 정삼각형 ABC가 있다.
정삼각형 ABC의 외심을 O라 할 때, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AO}$인 원을 O_A, 중심이 B이고 반지름의 길이가 $\overline{BO}$인 원을 O_B, 중심이 C이고 반지름의 길이가 $\overline{CO}$인 원을 O_c라 하자.

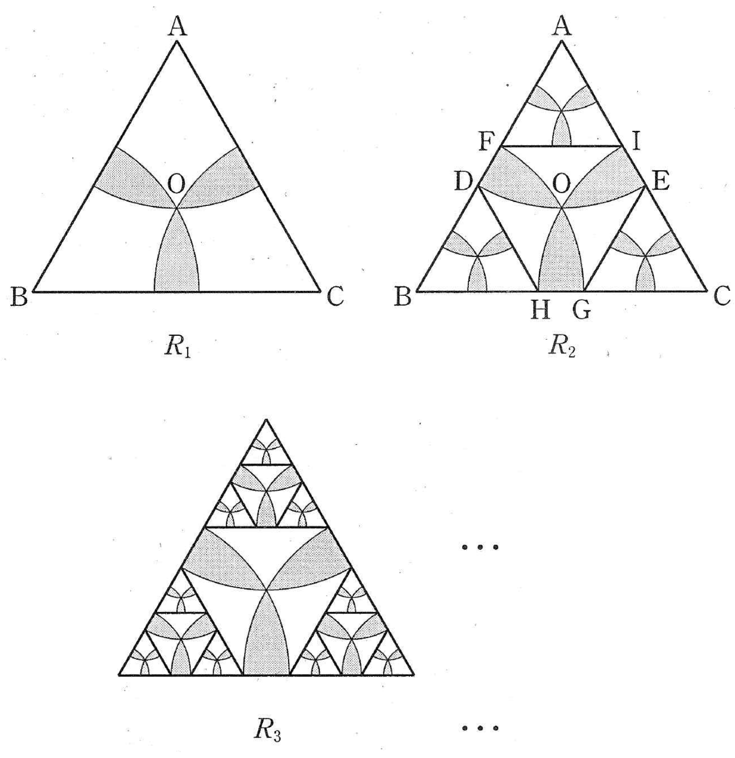
원 O_A와 원 O_B의 내부의 공통부분, 원 O_A와 원 O_c의 내부의 공통부분, 원 O_B와 원 O_c의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 원 O_A가 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_B가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 F, G, O_C가 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 H, I라 하고, 세 정삼각형 AFI, BHD, CEG에서 R_1을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는 모양의 도형 3개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1에서 R_2를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형 9개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

[4점]



① $(2\pi-3\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$ ② $(\pi-\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$
③ $(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$ ④ $(\pi-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$
⑤ $(2\pi-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+3)$

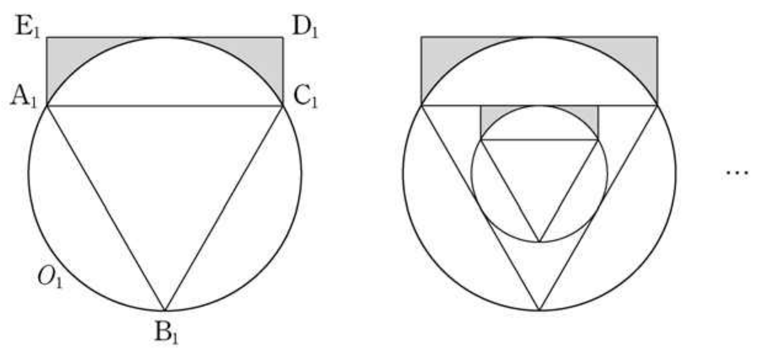
[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

30 (공통)반지름의 길이가 2인 원 O_1에 내접하는 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다.

그림과 같이 직선 A_1C_1과 평행하고 점 B_1을 지나지 않는 원 O_1의 접선 위에 두 점 D_1, E_1을 사각형 $A_1C_1D_1E_1$이 직사각형이 되도록 잡고, 직사각형 $A_1C_1D_1E_1$의 내부와 원 O_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 정삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그리고 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$를 그리고 직사각형 $A_2C_2D_2E_2$의 내부와 원 O_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1　　R_2　　…

[4점]

① $4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$　② $4\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$　③ $4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

④ $5\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$　⑤ $5\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

31 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1+a_2=20,\ \sum_{n=3}^{\infty} a_n=\frac{4}{3}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

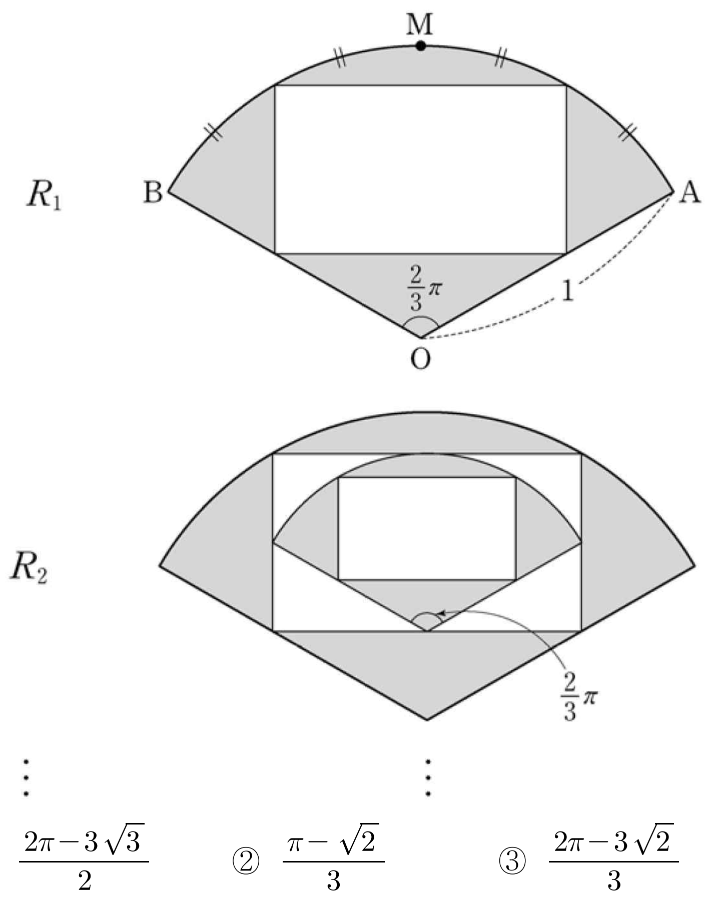
32 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴할때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

33 (공통)중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 그림과 같이 호 AB를 이등분하는 점을 M이라 하고 호 AM과 호 MB를 각각 이등분하는 점을 두 꼭짓점으로 하는 직사각형을 부채꼴 OAB에 내접하도록 그리고, 부채꼴의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고, 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 새로 그려진 직사각형의 네 변의 중점을 모두 지나도록 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴을 그리고 이 부채꼴에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\pi-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{2\pi-3\sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$

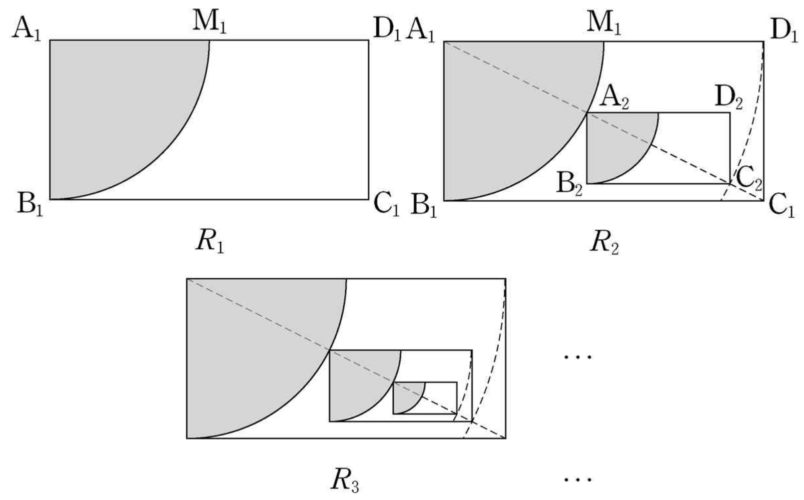
[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

34 그림과 같이 $\overline{A_1D_1}=2$, $\overline{A_1B_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하자.

중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $A_1B_1M_1$을 그리고, 부채꼴 $A_1B_1M_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 부채꼴 $A_1B_1M_1$의 호 B_1M_1이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 A_2라 하고, 중심이 A_1, 반지름의 길이가 $\overline{A_1D_1}$인 원이 선분 A_1C_1과 만나는 점을 C_2라 하자.

가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$이고 가로가 선분 A_1D_1과 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고, 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 부채꼴에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



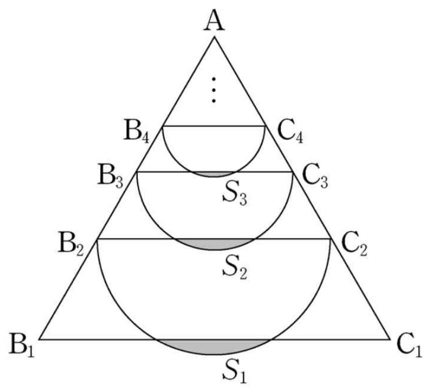
① $\frac{5}{16}\pi$ ② $\frac{11}{32}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$

④ $\frac{13}{32}\pi$ ⑤ $\frac{7}{16}\pi$

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

35 [공통]한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2과 선분 AC_2을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3라 하고, 선분 B_3C_3를 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3와 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[3점][2012년 6월]

① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$

④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$ ⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 모의평가]

36 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}=2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4n}{b_n+3n-2}$의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

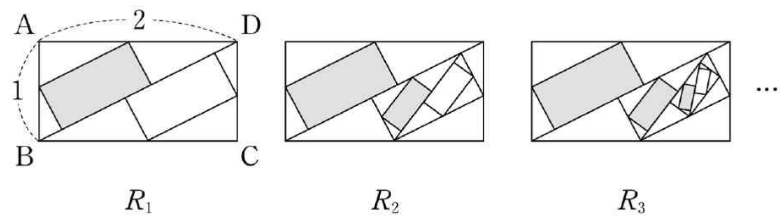
[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

37 직사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$ 이다.

그림과 같이 직사각형 $ABCD$의 한 대각선에 의하여 만들어지는 두 직각삼각형의 내부에 두 변의 길이의 비가 $1:2$인 두 직사각형을 긴 변이 대각선 위에 놓이면서 두 직각삼각형에 각각 내접하도록 그리고 새로 그려진 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 새로 그려진 두 직사각형 중 색칠되어 있지 않은 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 직사각형 중 하나에 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{37}{61}$ ② $\frac{38}{61}$ ③ $\frac{39}{61}$

④ $\frac{40}{61}$ ⑤ $\frac{41}{61}$

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 모의평가]

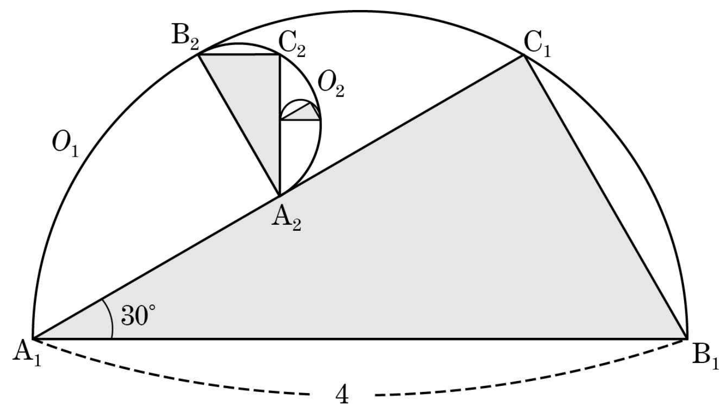
38 [공통]그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1을 그리고, 반원 O_1 위에 $\angle C_1A_1B_1 = 30^\circ$가 되도록 점 C_1을 정한다.

이때 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이를 S_1이라 하자.선분 A_1C_1의 중점을 A_2라 하고, 호 A_1B_2와 호 C_1B_2의 길이가 같도록 점 B_2를 정한다.

선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 그리고, 반원 O_2 위에 $\angle C_2A_2B_2 = 30^\circ$가 되도록 점 C_2를 정한다. 이때 삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 A_2C_2의 중점을 A_3이라 하고, 호 A_2B_3과 호 C_2B_3의 길이가 같도록 점 B_3을 정한다. 선분 A_3B_3을 지름으로 하는 반원 O_3을 그리고, 반원 O_3 위에 $\angle C_3A_3B_3 = 30^\circ$가 되도록 점 C_3을 정한다.

이때 삼각형 $A_3B_3C_3$의 넓이를 S_3이라 하자.이와 같은 과정을 계속하여 얻은 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $2\sqrt{3}$　② $\frac{32\sqrt{3}}{15}$　③ $\frac{34\sqrt{3}}{15}$

④ $\frac{12\sqrt{3}}{5}$　⑤ $\frac{38\sqrt{3}}{15}$

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

39 어느 학교 학생들의 통학 시간은 평균이 50분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다. 이 학교 학생들을 대상으로 16명을 임의추출하여 조사한 통학 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $P(50 \le \overline{X} \le 56) = 0.4332$일 때, σ의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.[4점][2011년 9월 평가원]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

40 그림과 같이 두 대각선의 길이가 각각 8, 4인 마름모 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자.

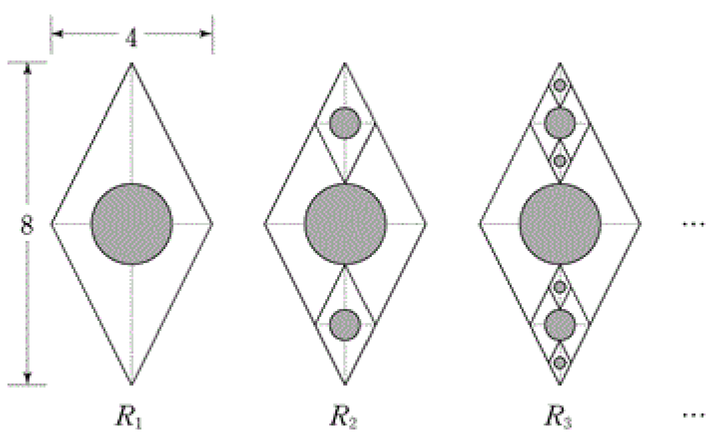
그림 R_1에 있는 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 2개 그린다.

새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 있는 작은 두 마름모에 긴 대각선의 양 끝점으로부터 그 대각선과 원의 두 교점 중 가까운 점까지의 선분을 각각 긴 대각선으로 하고, 마름모의 이웃하는 두 변 위에 짧은 대각선의 양 끝점이 놓이도록 마름모를 4개 그린다.

새로 그려진 각 마름모에서, 두 대각선의 교점을 중심으로 하고 짧은 대각선의 길이의 $\frac{1}{2}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



[3점][2011년 9월 평가원]

① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{32}{25}\pi$ ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{32}{23}\pi$ ⑤ $\frac{16}{11}\pi$

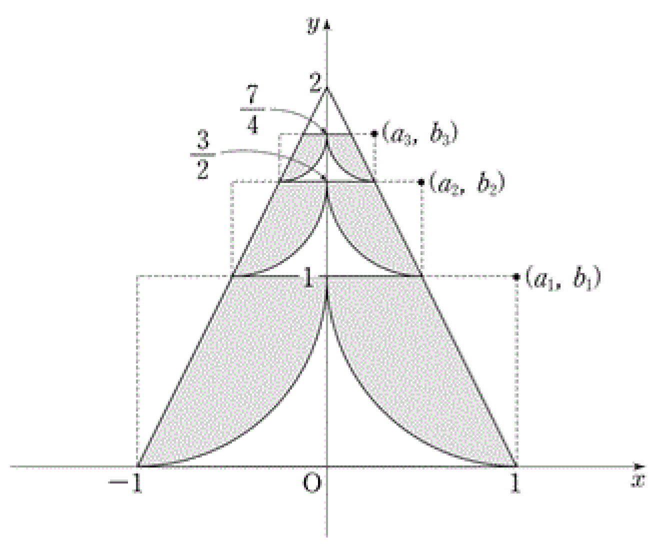
[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

41 [공통]두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ 이다.

좌표평면에서 중심이 (a_n, b_n)이고 y축에 접하는 원의 내부와 연립부등식 $\begin{cases} y \le b_n \\ 2x+y-2 \le 0 \end{cases}$이 나타내는 영역의 공통부분을 P_n이라 하고, y축에 대하여 P_n과 대칭인 영역을 Q_n이라 하자.

P_n의 넓이와 Q_n의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?



[4점][2011년 6월 평가원]

① $\frac{5(\pi-1)}{9}$ ② $\frac{11(\pi-1)}{18}$ ③ $\frac{2(\pi-1)}{3}$
④ $\frac{13(\pi-1)}{18}$ ⑤ $\frac{7(\pi-1)}{9}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 6월 모의평가]

42 [공통]모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n a_n - 2)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n + 5\cdot 4^{-n}}{a_n + 3^{-n}}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

43 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{3n}{n+1}\right)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$이 모두 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3-b_n}{a_n}$의 값은?(단, $a_n \neq 0$)[3점]

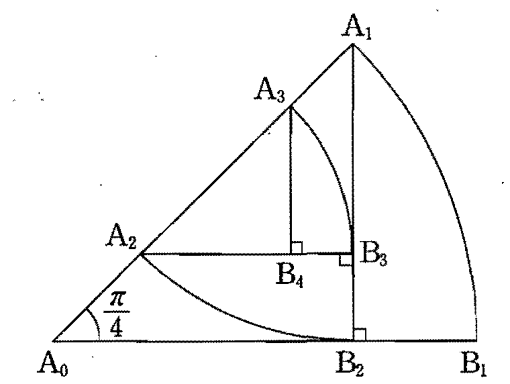
① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

44 [공통]그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_0A_1B_1$이 있다. 점 A_1에서 선분 A_0B_1에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 선분 A_0A_1 위의 $\overline{A_1B_2} = \overline{A_1A_2}$인 점 A_2에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_1A_2B_2$를 그린다. 점 A_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 B_3이라 하고, 선분 A_1A_2 위의 $\overline{A_2B_3} = \overline{A_2A_3}$인 점 A_3에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_2A_3B_3$을 그린다.

이와 같은 과정을 계속하여 점 A_n에서 선분 $A_{n-1}A_n$에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하고, 선분 $A_{n-1}A_n$ 위의 $\overline{A_nB_{n+1}} = \overline{A_nA_{n+1}}$인 점 A_{n+1}에 대하여 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 부채꼴 $A_nA_{n+1}B_{n+1}$을 그린다.

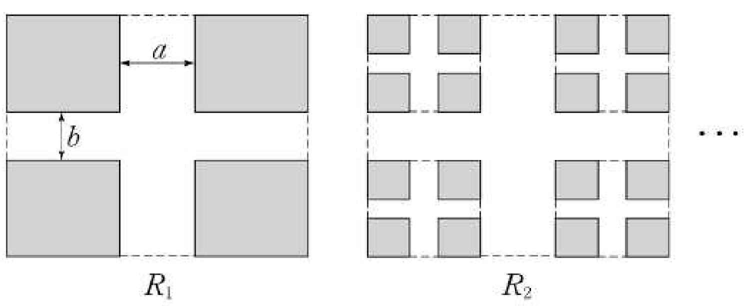
부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 호 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[3점]



① $(4-\sqrt{2})\pi$　② $(2+\sqrt{2})\pi$　③ $(2+2\sqrt{2})\pi$
④ $(4+\sqrt{2})\pi$　⑤ $(4+2\sqrt{2})\pi$

[난이도 : ★★★] [2010년 6월 모의평가]

45 [공통]가로의 길이가 5이고 세로의 길이가 4인 직사각형에서 그림과 같이 가로의 폭 a가 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭 b가 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 모양의 도형을 잘라내어 얻은 4개의 직사각형을 R_1이라 하고, 그 4개의 직사각형의 넓이의 합을 S_1이라 하자. R_1의 각 직사각형에서 가로의 폭이 각 직사각형의 가로의 길이의 $\frac{1}{4}$, 세로의 폭이 각 직사각형의 세로의 길이의 $\frac{1}{5}$인 모양의 도형을 잘라내어 얻은 16개의 직사각형을 R_2라 하고, 그 16개의 직사각형의 넓이의 합을 S_2라 하자. 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



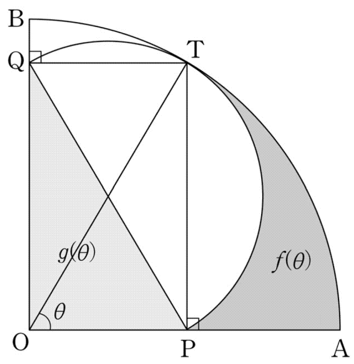
① 26 ② 30 ③ 34
④ 38 ⑤ 42

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

46 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle TOP=\theta$라 하자.

점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta + f(\theta)}{g(\theta)} = a$일 때, $100a$의 값을 구하시오.(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

47 등비수열 $\{a_n\}$이 $a_5 = 2^8$, $a_8 = 2^5$을 만족시킬 때, $\sum_{n=9}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

48 [공통]첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, $a_1>0$)[3점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{S_n\}$이 수렴한다.
ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$이 수렴한다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\right)$이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

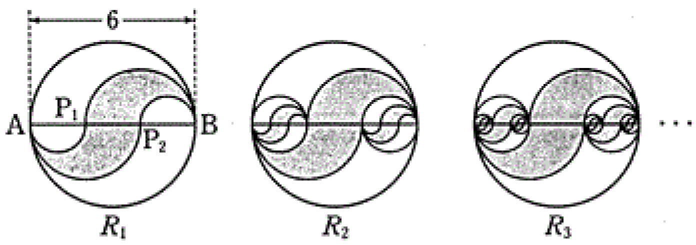
[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

49 [공통]그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB의 3등분점을 각각 P_1, P_2라 하고 선분 AP_1을 지름으로 하는 원의 아래쪽 반원, 선분 AP_2를 지름으로 한는 원의 아래쪽 반원, 선분 P_2B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원, 선분 P_1B를 지름으로 하는 원의 위쪽 반원을 경계로 하여 만든∽모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 P_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB위의 색칠되지 않은 두 선분 AP_1, P_2B를 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 두∽모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 두 선분 AP_1, P_2B위의 색칠되지 않은 네 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 네∽모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든∽모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[3점]



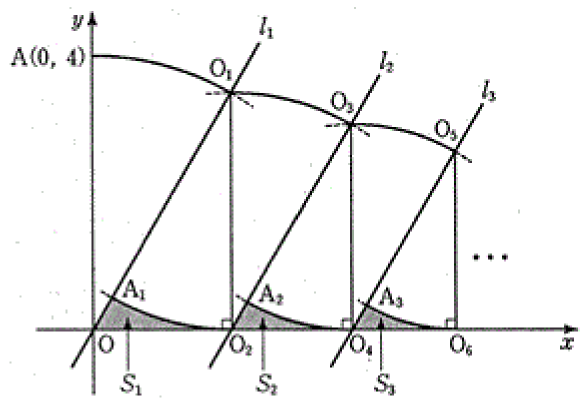
① $\frac{25}{7}\pi$ ② $\frac{27}{7}\pi$ ③ $\frac{29}{7}\pi$
④ $\frac{31}{7}\pi$ ⑤ $\frac{33}{7}\pi$

[난이도 : ★★★] [2009년 9월 모의평가]

50 [공통]그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선 l_1과 점 $A(0, 4)$가 있다. 점 O를 중심으로 하고 선분 OA를 반지름으로 하는 원이 직선 l_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 O_1이라 하자. 점 O_1에서 x축에 내린 수선의 발을 O_2라 하자. 점 O_2을 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 선분 OO_1과 만나는 점을 A_1이라 하자. 선분 A_1O, 선분 OO_2, 호 O_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

점 O_2를 중심으로 하고 선분 O_1O_2를 반지름으로 하는 원이 점 O_2를 지나고 직선 l_1에 평행한 직선 l_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 O_3이라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 O_4라 하자. 점 O_3을 중심으로 하고 선분 O_3O_4를 반지름으로 하는 원이 선분 O_2O_3과 만나는 점을 A_2이라 하자. 선분 A_2O_2, 선분 O_2O_4, 호 O_4A_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[3점]



① $4\sqrt{3}-2\pi$ ② $8\sqrt{3}-4\pi$
③ $4\sqrt{3}-\pi$ ④ $8\sqrt{3}-2\pi$
⑤ $16\sqrt{3}-4\pi$

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

51 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 15$일 때, 첫째항 a_1의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

52 자연수 n에 대하여 x에 관한 이차방정식 $(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$의 두 근이 $\alpha_n, \beta_n\,(\alpha_n > \beta_n)$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n)$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

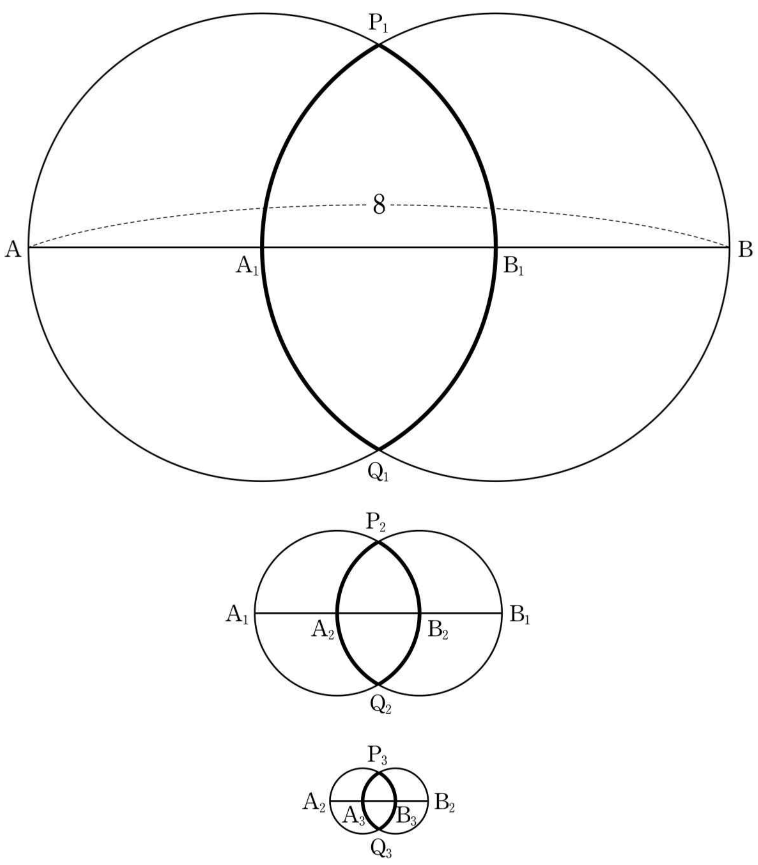
53 [공통]그림과 같이 길이가 8인 선분 AB가 있다.

선분 AB의 삼등분점 A_1, B_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라고 하자.

선분 A_1B_1의 삼등분점 A_2, B_2를 중심으로 하고 선분 A_2B_2를 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라고 하자.

선분 A_2B_2의 삼등분점 A_3, B_3을 중심으로 하고 선분 A_3B_3을 반지름으로 하는 두 원이 서로 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라고 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값을 구하시오.[3점]



① $\frac{10}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{14}{3}\pi$

④ $\frac{16}{3}\pi$ ⑤ 6π

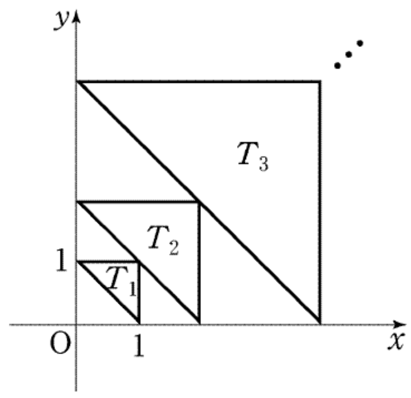
[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

54 [공통]자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 세 점

$A_n(x_n,\ 0)$, $B_n(0,\ x_n)$, $C_n(x_n,\ x_n)$

을 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 T_n을 다음 조건에 따라 그린다.

(가) $x_1 = 1$이다.
(나)변 $A_{n+1}B_{n+1}$의 중점이 C_n이다. $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



삼각형 T_n의 넓이를 a_n, 삼각형 T_n의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n b_n}{a_n+2^n}$의 값을 구하시오.[4점]

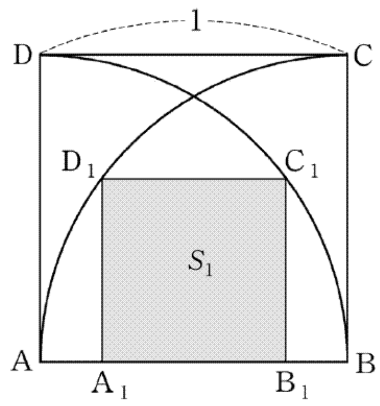
[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

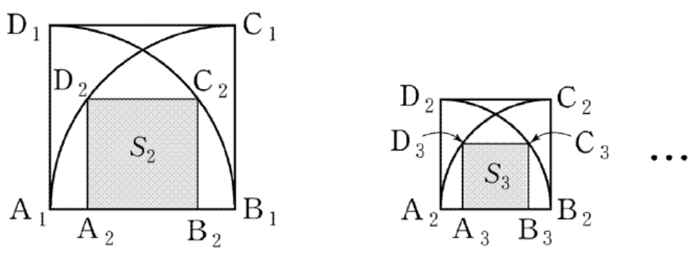
55 [공통]한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$가 있다.

그림과 같이 정사각형 $ABCD$안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_1B_1C_1D_1$이라 하자.

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$안에 두 점 A_1, B_1을 각각 중심으로 하고 변 A_1B_1을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형





$A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{9}{8}$ ⑤ $\frac{23}{16}$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

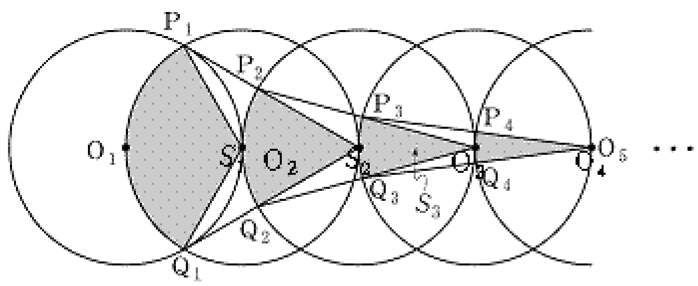
56 [공통]그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O_1, O_2, O_3, $\cdots$ 인 원들이 있다.

모든 원들의 중심은 한 직선 위에 있고, $\overline{O_nO_{n+1}}=1\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$이다.

두 원 O_1, O_2가 만나는 두 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 부채꼴 $O_2P_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자. 두 점 P_1, Q_1에서 원 O_3의 중심과 연결한 선분이 원 O_3과 만나는 두 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 부채꼴 $O_3P_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.

두 점 P_2, Q_2에서 원 O_4의 중심과 연결한 선분이 원 O_4와 만나는 두 점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 부채꼴 $O_4P_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $O_{n+1}P_nQ_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ $\frac{5}{6}\pi$

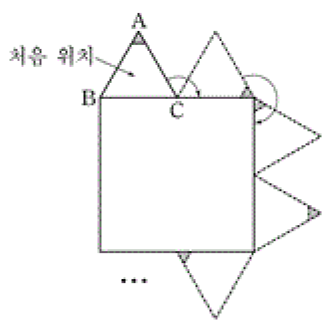
④ π ⑤ $\frac{7}{6}\pi$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

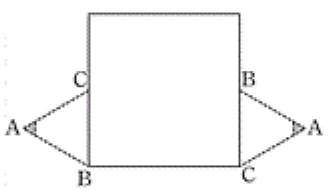
57 [공통]한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다.[그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자.

예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?[4점]



[그림 1]



[그림 2]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

58 좌표평면에서 직선 $x-3y+3=0$위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 자연수인 모든 점의 좌표를 각각 $(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \cdots,\ (a_n,\ b_n),\ \cdots$ 이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}$의 값은?(단, $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 이다.)[3점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 모의평가]

59 [공통]순환소수로 이루어진 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 $a_1=0.\dot{1}$

$a_2=0.\dot{1}\dot{0}$

$a_3=0.\dot{1}0\dot{0}$

$\vdots$

$a_n=0.\dot{1}00\cdots0\dot{0}$ {0은 $(n-1)$개}

$\vdots$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$의 값은?[4점]

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

60 [공통]다음 등식을 만족하는 소수 p는 2개 존재한다.

$$\frac{1}{p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}}+\frac{b}{6^{2n}}\right)$$

$=\frac{a}{6}+\frac{b}{6^2}+\frac{a}{6^3}+\frac{b}{6^4}+\cdots$ (단, $0\le a<6,\ 0\le b<6,\ a$와 b는 정수이다.)

위 등식을 만족하는 두 소수의 합을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 모의평가]

61 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^n}$에 대하여 기울기가 -1이고 제 1사분면을 지나는 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?[4점]

① 2 ② $2+\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4+\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2004년 09월 모의평가]

62 [공통]다음 등식을 만족하는 소수 p 는 2개 존재한다.

$$\frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}}+\frac{b}{6^{2n}}\right)$$
$$=\frac{a}{6}+\frac{b}{6^2}+\frac{a}{6^3}+\frac{b}{6^4}+\cdots$$

(단, $0\le a<6$, $0\le b<6$, a 와 b 는 정수이다.)

위 등식을 만족하는 두 소수의 합을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

63 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

64 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$이 수렴하도록 하는 정수 x의 개수는?[3점]

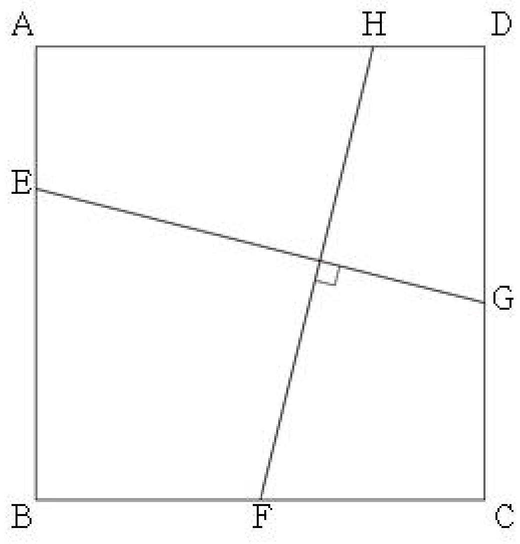
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

65 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}S_n=7$일 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3S_n)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

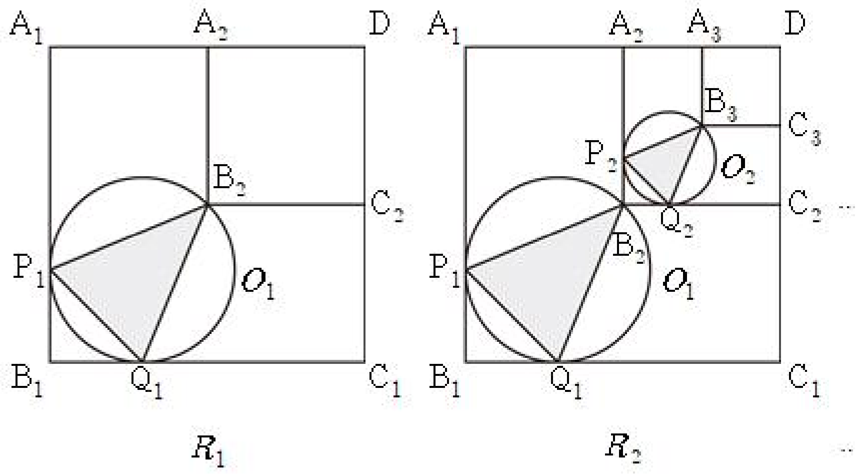
66 그림과 같이 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $2n$인 정사각형 $ABCD$가 있고, 네 점 E, F, G, H가 각각 네 변 AB, BC, CD, DA 위에 있다. 선분 HF의 길이는 $\sqrt{4n^2+1}$이고 선분 HF와 선분 EG가 서로 수직일 때, 사각형 $EFGH$의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}S_n$의 값은? [4점]



① 765 ② 770 ③ 775
④ 780 ⑤ 785

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

67 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D$가 있다.정사각형 $A_1B_1C_1D$의 두 대각선의 교점을 B_2라 하고, 점 B_2에서 두 변 A_1D, C_1D에 내린 수선의 발을 각각 A_2, C_2라 하자. 점 B_2를 지나고 두 변 A_1B_1, B_1C_1에 동시에 접하는 원을 O_1이라 하고, 원 O_1이 두 변 A_1B_1, B_1C_1에 접하는 점을 각각 P_1, Q_1이라 할 때, 삼각형 $B_2P_1Q_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.그림 R_1에서 정사각형 $A_2B_2C_2D$의 두 대각선의 교점을 B_3이라 하고, 점 B_3에서 두 변 A_2D, C_2D에 내린 수선의 발을 각각 A_3, C_3이라 하자. 점 B_3을 지나고 두 변 A_2B_2, B_2C_2에 동시에 접하는 원을 O_2라 하고, 원 O_2가 두 변 A_2B_2, B_2C_2에 접하는 점을 각각 P_2, Q_2라 할 때, 삼각형 $B_3P_2Q_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1　　R_2　…

① $\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$　② $\frac{4\sqrt{3}-5}{3}$　③ $\frac{8\sqrt{3}-8}{9}$

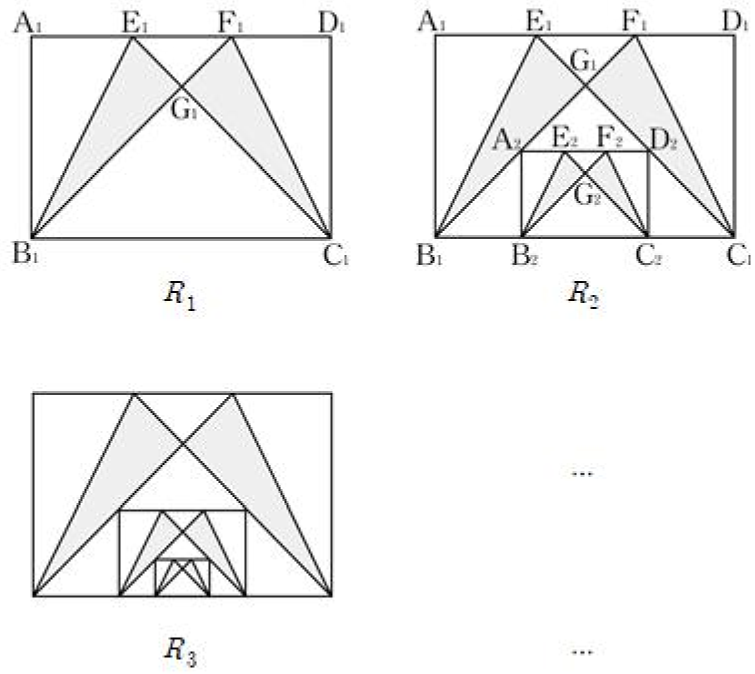
④ $\frac{4\sqrt{2}-3}{4}$　⑤ $\frac{5\sqrt{2}-3}{6}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

68 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 삼등분하는 점 중에서 A_1에 가까운 점부터 차례대로 E_1, F_1이라 하고, 선분 B_1F_1과 선분 C_1E_1의 교점을 G_1이라 하자. 삼각형 $B_1G_1E_1$과 삼각형 $C_1F_1G_1$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 B_1C_1 위에 두 꼭짓점 B_2, C_2가 있고, 선분 B_1G_1 위에 꼭짓점 A_2, 선분 C_1G_1 위에 꼭짓점 D_2가 있으며 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=2:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 선분 A_2D_2를 삼등분하는 점 중에서 A_2에 가까운 점부터 차례대로 E_2, F_2라 하고, 선분 B_2F_2와 선분 C_2E_2의 교점을 G_2라 하자. 삼각형 $B_2G_2E_2$와 삼각형 $C_2F_2G_2$의 내부에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



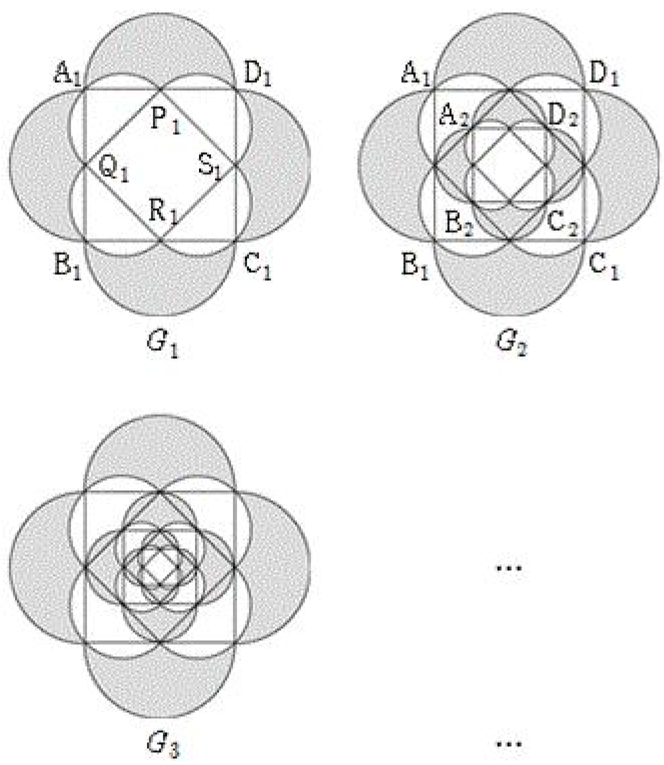
R_1　　R_2　　R_3

① $\frac{141}{80}$　② $\frac{143}{80}$　③ $\frac{29}{16}$

④ $\frac{147}{80}$　⑤ $\frac{149}{80}$

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

69 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 각각 지름으로 하는 반원을 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 외부에 그려 만들어진 4개의 호로 둘러싸인 모양의 도형을 E_1이라 하자. 네 변 D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1의 중점 P_1, Q_1, R_1, S_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 도형을 F_1이라 하자. 도형 E_1의 내부와 도형 F_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_1이라 하자. 그림 G_1에 네 변 P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1, S_1P_1의 중점 A_2, B_2, C_2, D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 모양의 도형을 E_2라 하자. 네 변 D_2A_2, A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2의 중점 P_2, Q_2, R_2, S_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 모양의 도형을 F_2라 하자. 그림 G_1에 도형 E_2의 내부와 도형 F_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_2라 하자.이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 G_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} T_n$의 값은? [4점]



① $\frac{4}{3}(\pi+2)$ ② $\frac{3}{2}(\pi+2)$ ③ $\frac{5}{3}(\pi+2)$
④ $\frac{4}{3}(\pi+4)$ ⑤ $\frac{5}{3}(\pi+4)$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

70 수열 $\{a_n\}$에 대하여집합
$A=\{x|x^2-1<a<x^2+2x,\ x\text{는 자연수}\}$가 공집합이 되도록 하는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

예를 들어, $a=3$은 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않는 첫 번째 수이므로 $a_1=3$이다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

71 한 변의 길이가 4인 정사각형이 있다. 그림과 같이 지름이 2인 두 원이 서로 한 점 P_1에서 만나고 정사각형의 두 변에 각각 접하도록 그린다.

정사각형의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_1이라 하고, 선분 P_1Q_1을 대각선으로 하는 정사각형 R_1을 그린다. 이때, R_1의 한 변의 길이를 l_1이라 하자.

지름이 $\frac{l_1}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_2에서 만나고 정사각형 R_1의 두 변에 각각 접하도록 그린다.

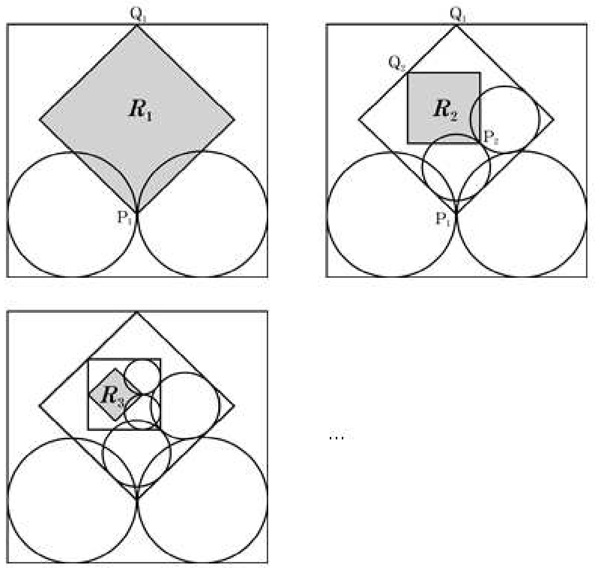
정사각형 R_1의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_2라 하고, 선분 P_2Q_2를 대각선으로 하는 정사각형 R_2를 그린다.

이때, R_2의 한 변의 길이를 l_2라 하자.

지름이 $\frac{l_2}{2}$인 두 원이 서로 한 점 P_3에서 만나고 정사각형 R_2의 두 변에 각각 접하도록 그린다. 정사각형 R_2의 네 변 중 원과 접하지 않는 변의 중점을 Q_3이라 하고, 선분 P_3Q_3을 대각선으로 하는 정사각형 R_3을 그린다.

이때, R_3의 한 변의 길이를 l_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그린 정사각형 R_n의 한 변의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



(가) $f(0)=f(2)=0$ (나) 이차방정식 $f(x)-6(x-2)=0$의 실근의 개수는 1이다.

① $\frac{12(3+4\sqrt{2})}{23}-\frac{1}{3}$　② $\frac{24(2+\sqrt{2})}{23}-\frac{2}{3}$

③ $\frac{12(1+4\sqrt{2})}{23}-1$　④ $\frac{3(3+2\sqrt{2})}{7}-\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{3(3+\sqrt{2})}{7}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

72 (공통)수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

73 수열 $\{a_n\}$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n+1}{n}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

74 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{84}{(2n+1)(2n+3)}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

75 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n+1}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{8}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{8}$

[난이도 : ★★☆] [2015년 10월 학력평가]

76 수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=5$를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-2n}{a_n+2n+1}$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

77 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=4$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(4a_n+\frac{3n^2-1}{n^2+1}\right)$의 값은? [3점]

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

78 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 중심으로 하고 x축에 접하는 원의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[3점]

① $\frac{\pi}{4}$　② $\frac{\pi}{2}$　③ $\frac{3}{4}\pi$　④ π　⑤ $\frac{5}{4}\pi$

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

79 좌표평면 위의 점 $P_n\,(n=1,2,3,\cdots)$은 다음 규칙을 만족시킨다.

(가)점 P_1의 좌표는 $(1,1)$이다. (나) $\overline{P_nP_{n+1}}=1$ (다)점 P_{n+2}는 점 P_{n+1}을 지나고 직선 P_nP_{n+1}에 수직인 직선 위의 점 중 $\overline{P_1P_{n+2}}$가 최대인 점이다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0$, $a_2=1$이고,

$a_n=\overline{P_1P_n}\,(n=3,4,5,\cdots)$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은? [4점]

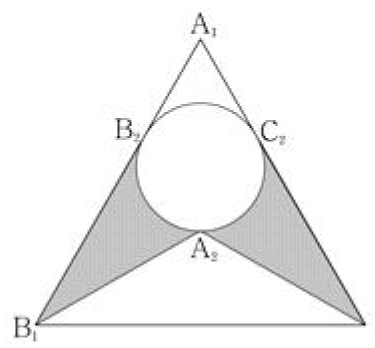
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

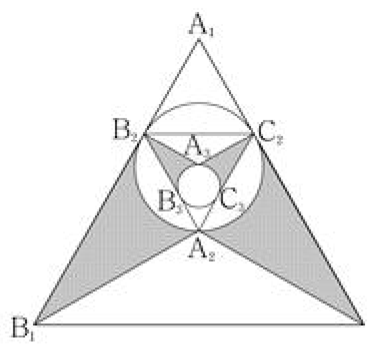
80 연립부등식 $\begin{cases} x^2+y^2\le\left(\frac{1}{n}\right)^2 \\ |x|+|y|\ge\frac{1}{n}\end{cases}$ $(n\ge1)$의 해 (x,y)가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{S_nS_{n+2}}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

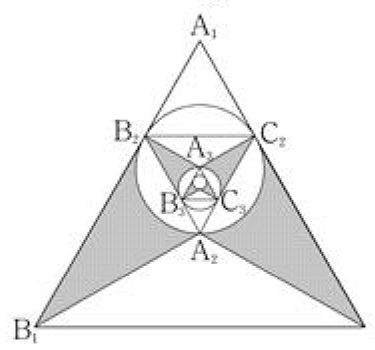
81 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심을 A_2, 점 A_2를 지나는 원과 두 변 A_1B_1, A_1C_1의 접점을 각각 B_2, C_2라 하자. 호 A_2B_2, 선분 B_2B_1, 선분 B_1A_2와 호 A_2C_2, 선분 C_2C_1, 선분 C_1A_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$의 무게중심을 A_3, 점 A_3을 지나는 원과 두 변 A_2B_2, A_2C_2의 접점을 각각 B_3, C_3이라 하자. 그림 R_1에 호 A_3B_3, 선분 B_3B_2, 선분 B_2A_3과 호 A_3C_3, 선분 C_3C_2, 선분 C_2A_3으로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_2라 하자.그림 R_2에서 삼각형 $A_3B_3C_3$의 무게중심을 A_4, 점 A_4를 지나는 원과 두 변 A_3B_3, A_3C_3의 접점을 각각 B_4, C_4라 하자. 그림 R_2에 호 A_4B_4, 선분 B_4B_3, 선분 B_3A_4와 호 A_4C_4, 선분 C_4C_3, 선분 C_3A_4로 둘러싸인 부분인 모양의 도형을 색칠하고 추가하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 R_n, 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2



R_3 …

① $\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$ ② $\frac{1}{16}(7\sqrt{3}-2\pi)$ ③ $\frac{1}{8}(21\sqrt{3}-4\pi)$

④ $\frac{1}{8}(7\sqrt{3}-2\pi)$ ⑤ $\frac{1}{8}(21\sqrt{3}-2\pi)$

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

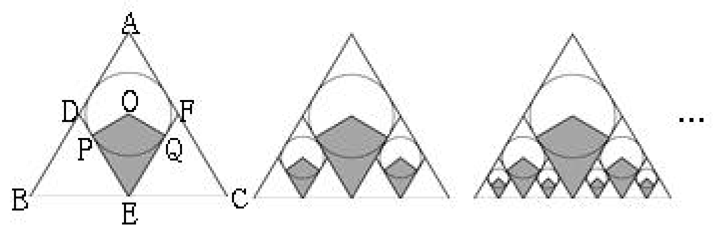
82 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 ABC가 있다.

세 선분 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라 하고 두 정삼각형 BED, ECF를 그린 후 마름모 $ADEF$에 중심이 O인 원을 내접하도록 그린다. 원과 두 선분 DE, EF의 접점을 각각 P, Q라 할 때, 사각형 $OPEQ$를 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 새로 그려진 두 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 새로 그려진 네 개의 정삼각형의 내부에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 개의 사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

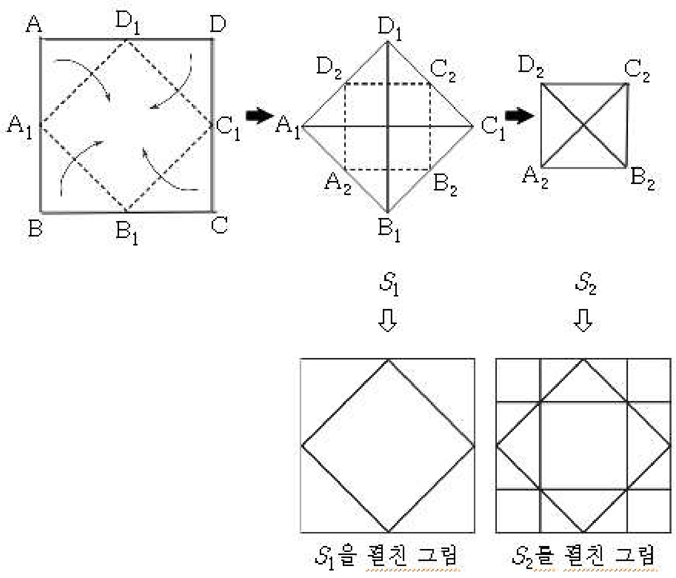
① $6\sqrt{3}$ ② $\frac{13}{2}\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$

④ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

83 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 모양의 종이 $ABCD$에서 각 변의 중점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1이라 하고 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1D_1}$, $\overline{D_1A_1}$을 접는 선으로 하여 네 점 A, B, C, D가 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_1이라 하자. S_1에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 각 변의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2, D_2라 하고 $\overline{A_2B_2}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2D_2}$, $\overline{D_2A_2}$를 접는 선으로 하여 네 점 A_1, B_1, C_1, D_1이 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 모양을 S_n이라 하고, S_n을 정사각형 모양의 종이 $ABCD$와 같도록 펼쳤을 때 접힌 모든 선들의 길이의 합을 l_n이라 하자. 예를 들어, $l_1 = 4\sqrt{2}$이다.

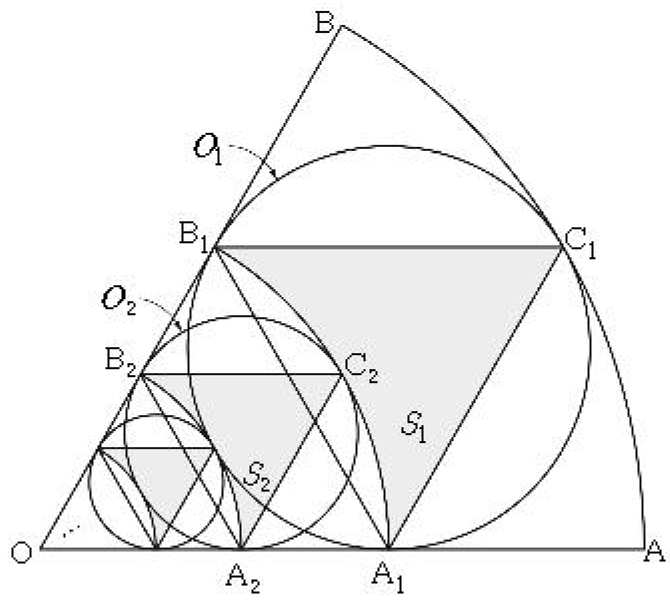
l_5의 값은?(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)[4점]



① $24+28\sqrt{2}$ ② $28+28\sqrt{2}$ ③ $28+32\sqrt{2}$
④ $32+32\sqrt{2}$ ⑤ $36+32\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2015년 4월 학력평가]

84 그림과 같이 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴 OAB에 내접하는 원 O_1이 두 선분 OA, OB, 호 AB와 만나는 점을 각각 A_1, B_1, C_1이라 하고, 부채꼴 OA_1B_1의 외부와 삼각형 $A_1C_1B_1$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1이라 하자. 부채꼴 OA_1B_1에 내접하는 원 O_2가 두 선분 OA_1, OB_1, 호 A_1B_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고, 부채꼴 OA_2B_2의 외부와 삼각형 $A_2C_2B_2$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_2라 하자. 위와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 OA_nB_n의 외부와 삼각형 $A_nC_nB_n$의 내부의 공통부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $8\sqrt{3}-3\pi$ ② $8\sqrt{3}-2\pi$ ③ $9\sqrt{3}-3\pi$
④ $9\sqrt{3}-2\pi$ ⑤ $10\sqrt{3}-3\pi$

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

85 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-7)=2014$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

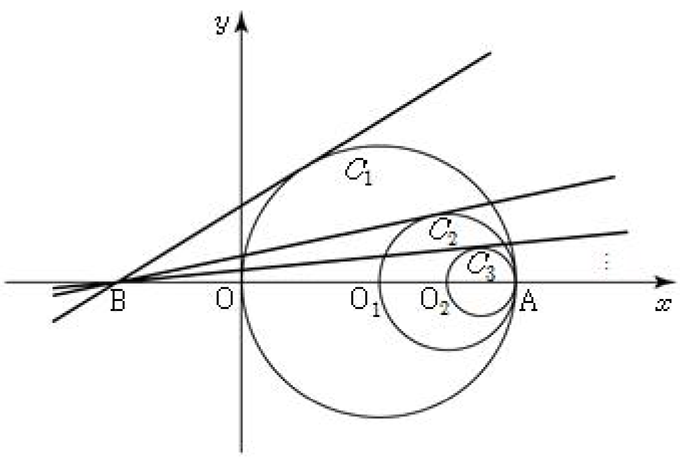
86 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 $2a_{n+1}=7a_n\,(n\ge 1)$을 만족시킬 때, 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

87 그림과 같이 좌표평면에 원 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$과 점 $A(2,\ 0)$이 있다. 원 C_1의 중심을 O_1이라 하고, 선분 O_1A를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심을 O_2라 하고, 선분 O_2A를 지름으로 하는 원을 C_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 원을 C_n이라 하자. 점 $B(-1,\ 0)$에서 원 C_n에 그은 접선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n$의 값은?(단, $a_n>0$이다.)[4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

88 그림과 같이 길이가 4인 선분 B_1C_1을 빗변으로 하고 $\angle B_1A_1C_1=90^\circ$인 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$을 그린다.

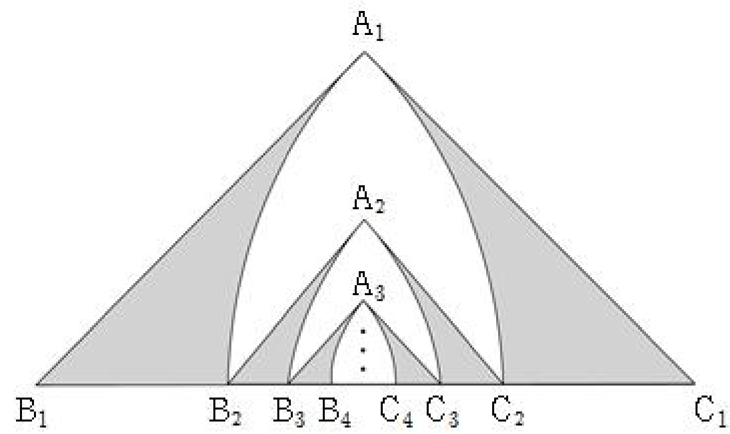
$\overline{B_1A_1}=\overline{B_1C_2}$이고 $\overline{C_1A_1}=\overline{C_1B_2}$인 선분 B_1C_1 위의 두 점 C_2와 B_2에 대하여 부채꼴 $B_1A_1C_2$와 부채꼴 $C_1A_1B_2$를 그린 후 생긴 모양에 색칠하고 그 넓이를 S_1이라 하자.

선분 B_2C_2를 빗변으로 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부의 점 A_2에 대하여 $\angle B_2A_2C_2=90^\circ$인 직각이등변삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다. $\overline{B_2A_2}=\overline{B_2C_3}$이고 $\overline{C_2A_2}=\overline{C_2B_3}$인 선분 B_2C_2 위의 두 점 C_3과 B_3에 대하여 부채꼴 $B_2A_2C_3$과 부채꼴 $C_2A_2B_3$을 그린 후 생긴 모양에 색칠하고 그 넓이를 S_2라 하자.

선분 B_3C_3을 빗변으로 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부의 점 A_3에 대하여 $\angle B_3A_3C_3=90^\circ$인 직각이등변삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다. $\overline{B_3A_3}=\overline{B_3C_4}$이고 $\overline{C_3A_3}=\overline{C_3B_4}$인 선분 B_3C_3 위의 두 점 C_4와 B_4에 대하여 부채꼴 $B_3A_3C_4$와 부채꼴 $C_3A_3B_4$를 그린 후 생긴 모양에 색칠하고 그 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여

$\displaystyle\frac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n=a+\sqrt{b}$ (a, b는 정수)일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점]



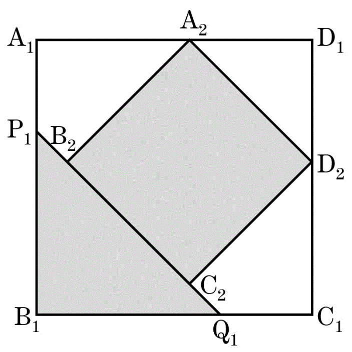
[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

89 (공통)그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 선분 A_1B_1을 $1:2$로 내분하는 점을 P_1, 선분 B_1C_1을 $2:1$로 내분하는 점을 Q_1이라 하자. 선분 A_1D_1 위의 점 A_2, 선분 P_1Q_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1D_1 위의 점 D_2를 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그리고 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 내부와 삼각형 $P_1B_1Q_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

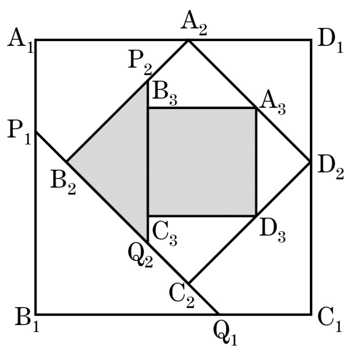
정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 선분 A_2B_2를 $1:2$로 내분하는 점을 P_2, 선분 B_2C_2를 $2:1$로 내분하는 점을 Q_2라 하자. 선분 A_2D_2 위의 점 A_3, 선분 P_2Q_2 위의 두 점 B_3, C_3, 선분 C_2D_2 위의 점 D_3을 네 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 그리고 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 내부와 삼각형 $P_2B_2Q_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

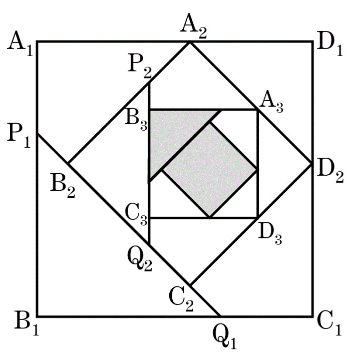
[4점]



R_1



R_2



R_3

…

…

① $\frac{375}{49}$ ② $\frac{400}{49}$ ③ $\frac{425}{49}$
④ $\frac{450}{49}$ ⑤ $\frac{475}{49}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

90 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1}$의 값은?[3점]

① -3 ② -2
③ -1 ④ 0
⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2012년 5월 학력평가]

91 자연수 n에 대하여 6^n의 모든 양의 약수 중 짝수의 개수를 $f(n)$, 홀수의 개수를 $g(n)$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 $a_n = f(n) - g(n)$으로 정의하자.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{a_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

92 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 19) = 2012$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

93 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$ 의 합은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

94 [공통] 함수 $f(x)$가 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+|x|)^{n-1}}$ 일 때, 직선 $y=2x+\frac{1}{2}$ 과 함수 $f(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은? [4점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ -1

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

95 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-5}{7}\right)^n$ 이 수렴하기 위한 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

96 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-n}{n}$ 이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{5n-a_n}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

97 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 네 직선 $x=1,\ x=n+1,\ y=x,\ y=2x$로 둘러싸인 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$ 의 값은?[4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

98 [공통]수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=\frac{6n}{n+1}$ 이다. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$의 값을 구하시오.[4점]

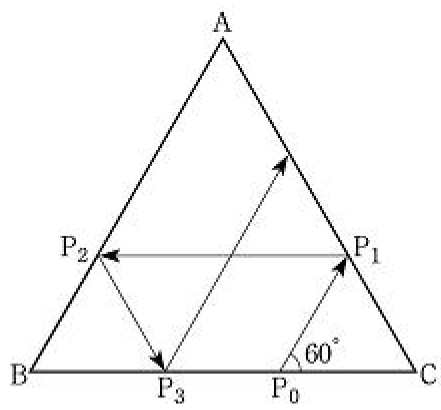
[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

99 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 변 BC위에 양 끝점이 아닌 한 점 P_0을 잡는다. 그림과 같이 P_0을 지나고 변 AB와 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 P_1, 점 P_1을 지나고 변 BC와 평행한 직선을 그어 변 AB와 만나는 점을 P_2, 점 P_2를 지나고 변 AC와 평행한 직선을 그어 변 BC와 만나는 점을 P_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 점을 P_n이라 하고, 점 P_0을 출발하여 점 P_n까지 이동한 거리 l_n을
$l_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{2n}}{2n+1} = \frac{b}{a}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

100 모든 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다. (나) 점 P_n의 x좌표는 n이다. (다) 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2^n}$이다.

두 직선 $x=n$, $x=n+1$과 선분 P_nP_{n+1}, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \alpha)$가 수렴할 때, 상수 α의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2
④ $\frac{9}{4}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

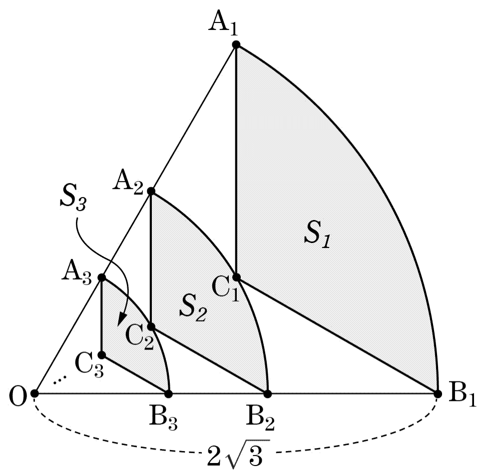
101 [공통]그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 $\angle A_1OB_1 = 60^\circ$ 인 부채꼴 A_1OB_1 이 있다.

세 점 A_1, O, B_1 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_1OB_1 의 무게중심을 C_1 이라 할 때, 두 선분 A_1C_1, B_1C_1 과 호 A_1B_1 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

점 O를 중심으로 하고 점 C_1 을 지나는 원이 두 선분 OA_1, OB_1 과 만나는 점을 각각 A_2, B_2 라 하자. 세 점 A_2, O, B_2 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_2OB_2 의 무게중심을 C_2 라 할 때, 두 선분 A_2C_2, B_2C_2 와 호 A_2B_2 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.

점 O를 중심으로 하고 점 C_2 를 지나는 원이 두 선분 OA_2, OB_2 와 만나는 점을 각각 A_3, B_3 이라 하자. 세 점 A_3, O, B_3 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_3OB_3 의 무게중심을 C_3 이라 할 때, 두 선분 A_3C_3, B_3C_3 과 호 A_3B_3 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?[4점]



① $2\pi-\sqrt{3}$　② $2\pi-2\sqrt{3}$　③ $2\pi-3\sqrt{3}$
④ $3\pi-3\sqrt{3}$　⑤ $3\pi-4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

102 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_c|x|$ 의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 x좌표를 각각 a_n, b_n ($a_n > b_n$)이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점][2012년 7월]

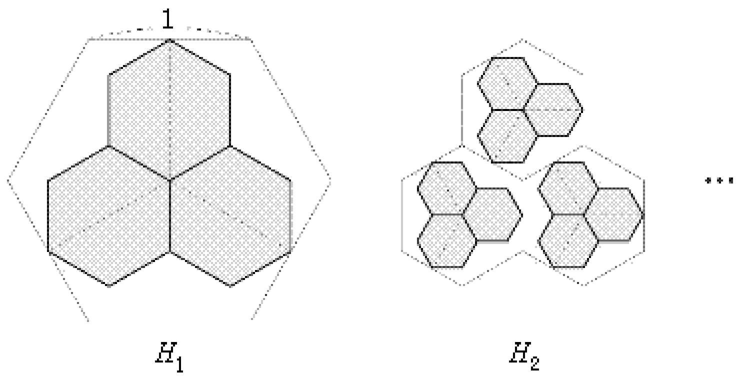
[보기]
ㄱ. $a_n + b_n = 0$
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{c}{1-c}$ 이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ 이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 4월 학력평가]

103 [공통]한 변의 길이가 1인 정육각형에서 서로 이웃하지 않는 세 변의중점과 이 정육각형에 외접하는 원의 중심을 각각 연결하여 세 선분을 얻는다. 이 세 선분을 각각 가장 긴 대각선으로 하는 3개의 정육각형을 그려서 얻은 모양의 그림을 H_1이라 하고, 그림 H_1의 넓이를 S_1이라 하자. 그림 H_1에서 새로 그려진 세 정육각형 내부에 각각 그림 H_1을얻은 것과 같은 방법으로 그려서 얻은 3개의 모양의 그림을 H_2라하고, 그림 H_2의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그려서 얻은 3^{n-1}개의 모양의 그림을 H_n이라 하고, 그림 H_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{27}{11}\sqrt{3}$ ② $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ ③ $\frac{27}{13}\sqrt{3}$

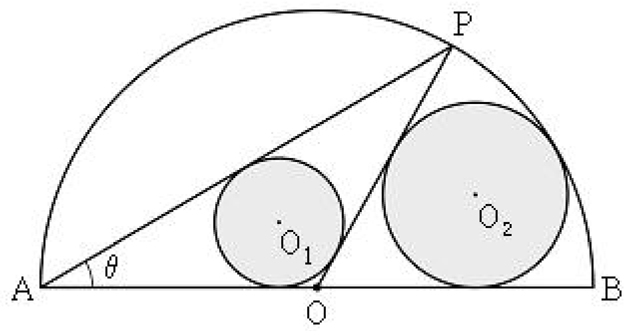
④ $\frac{27}{14}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{9}{5}\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

104 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 AOP에 내접하는 원을 O_1, 부채꼴 OBP에 내접하는 원을 O_2라 하자.

$\angle PAB = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$일 때, 원 O_1의 넓이를 $f(\theta)$, 원 O_2의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

이때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값을 구하시오. [4점]

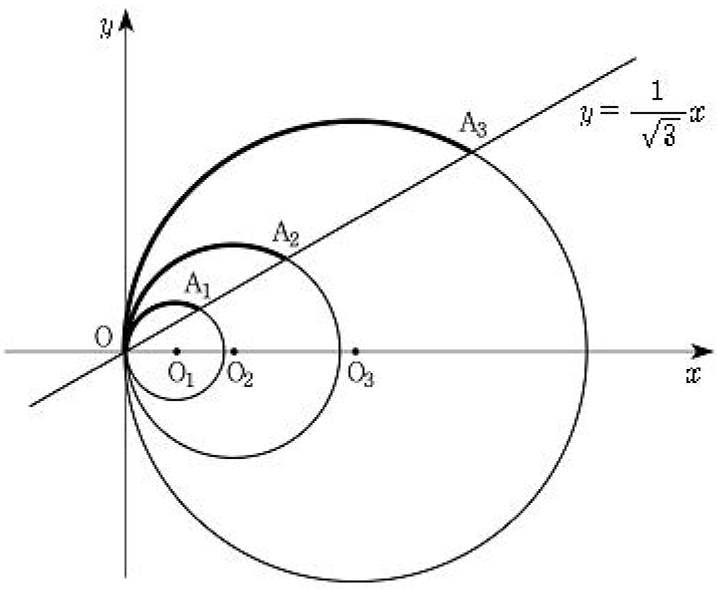


[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

105 [공통] 그림과 같이 중심이 $(1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다. 원 O_1이 직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_1이라 하고 직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.

중심이 $(l_1,\ 0)$이고 반지름의 길이가 l_1인 원 O_2를 그린다. 원 O_2가 직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_2라 하고 직선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_2의 길이를 l_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{\pi-3}$　② $\dfrac{2}{\pi-3}$　③ $\dfrac{1}{2\pi-3}$

④ $\dfrac{2}{2\pi-3}$　⑤ $\dfrac{3}{2\pi-3}$

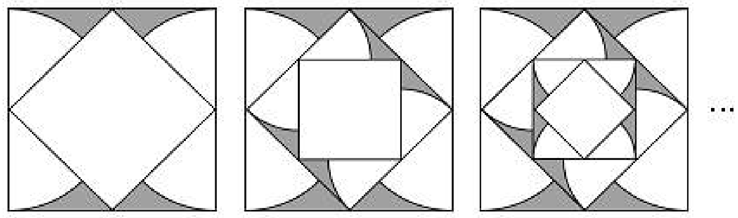
[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

106 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 R의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_1을 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_1이라 하자.

그림 T_1에서 정사각형 R_1의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_1의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_2를 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_2라 하자.

그림 T_2에서 정사각형 R_2의 한 변을 지름으로 하는 두 개의 반원을 접하게 그리고 정사각형 R_2의 각 변의 중점을 연결한 정사각형 R_3을 붙여서 만든 모양에 색칠하여 얻은 그림을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림을 T_n이라 하고 그림 T_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=p+q\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, $p,\ q$는 유리수이다.)[4점]



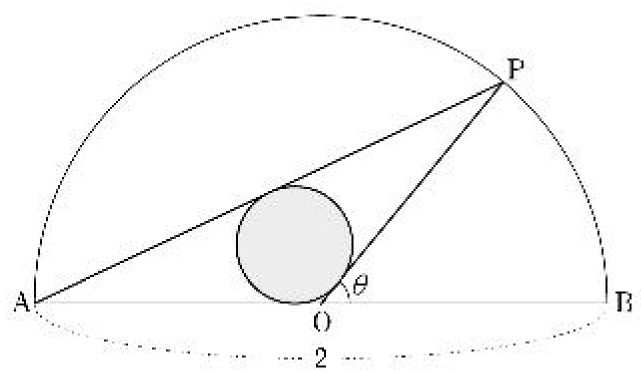
T_1　T_2　T_3　…

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

107 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다.

호 AB위를 움직이는 점 P에 대하여 $\angle POB=\theta$일 때, 삼각형 PAO에 내접하는 원의 넓이를 $f(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?(단, $0<\theta<\pi$이다.)[4점]



① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{8}$

④ $\frac{\pi}{16}$ ⑤ $\frac{\pi}{32}$

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

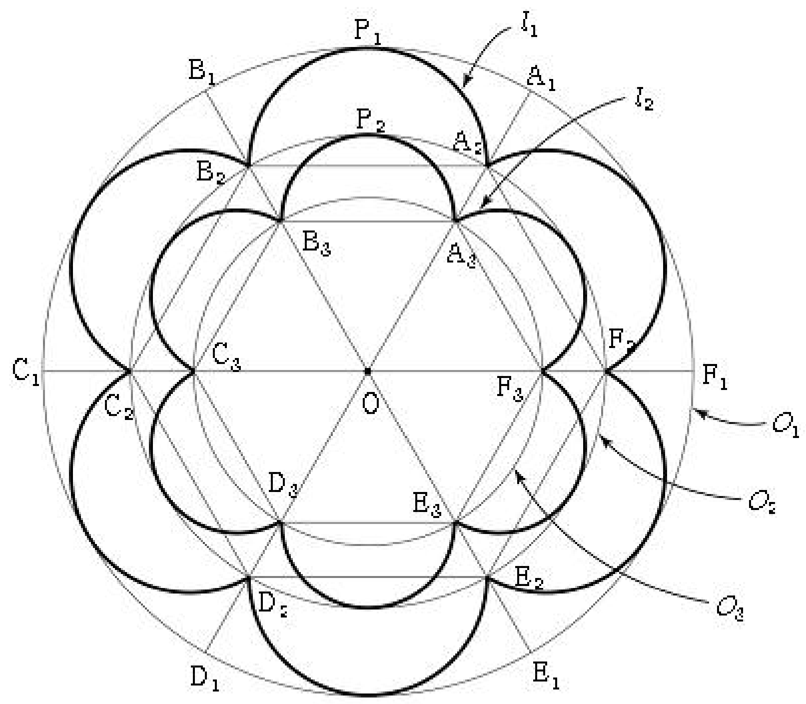
108 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1의 6등분점을 각각 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1이라 하자.

중심각의 크기가 60°인 부채꼴 OA_1B_1의 호 A_1B_1의 이등분점을 P_1이라 하고, 선분 OA_1 위에 $ANGLEOP_1A_2=45^\circ$가 되도록 점 A_2를 정한다.

중심이 O이고 선분 OA_2를 반지름으로 하는 원 O_2가 5개의 선분 OB_1, OC_1, OD_1, OE_1, OF_1과 만나는 점을 각각 B_2, C_2, D_2, E_2, F_2라 하고, 원 O_2의 외부에 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$의 각 변을 지름으로 하는 6개의 반원을 그리고, 이 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_1이라 하자.

중심각의 크기가 60°인 부채꼴 OA_2B_2의 호 A_2B_2의 이등분점을 P_2라 하고, 선분 OA_2 위에 $ANGLEOP_2A_3=45^\circ$가 되도록 점 A_3을 정한다. 중심이 O이고 선분 OA_3을 반지름으로 하는 원 O_3이 5개의 선분 OB_2, OC_2, OD_2, OE_2, OF_2와 만나는 점을 각각 B_3, C_3, D_3, E_3, F_3이라 하고, 원 O_3의 외부에 정육각형 $A_3B_3C_3D_3E_3F_3$의 각 변을 지름으로 하는 6개의 반원을 그리고, 이 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 6개의 반원의 호의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $6(1+\sqrt{3})\pi$ ② $6(2+\sqrt{3})\pi$ ③ $12(1+\sqrt{3})\pi$

④ $12(2+\sqrt{3})\pi$ ⑤ $12(1+2\sqrt{3})\pi$

[난이도 : ★★★] [2012년 11월 학력평가]

109 [공통] 반지름의 길이가 4인 원 O에 외접하고

$\angle ACB=90^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다.
그림과 같이 원 O와 접하고 빗변 AB에 수직인 직선을 l_1이라 하고, l_1과 변 AB와 변 BC의 교점을 각각 C_1, A_1이라 하자.

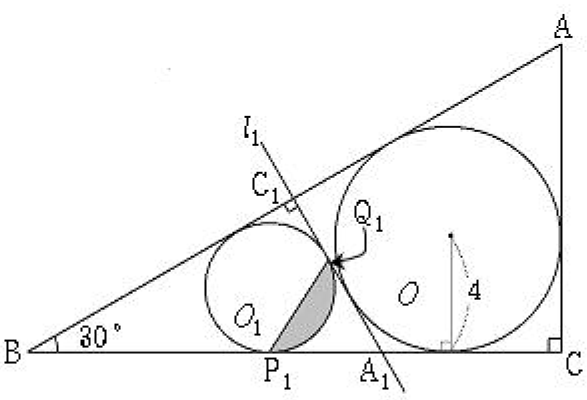
새로 그려진 직각삼각형 A_1BC_1에 내접원 O_1을 그려 원 O_1과 변 A_1B와 변 A_1C_1의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 현 P_1Q_1과 꼭짓점 A_1에 가까운 호 P_1Q_1로 둘러싸인 활꼴에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 원 O_1에 접하고 직각삼각형 A_1BC_1의 빗변 A_1B에 수직인 직선을 l_2라 하고, l_2와 변 A_1B와 변 BC_1의 교점을 각각 C_2, A_2라 하자.

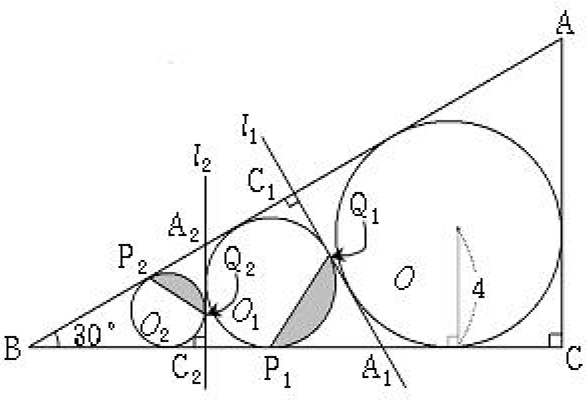
새로 그려진 직각삼각형 A_2BC_2에서 내접하는 원 O_2를 그려원 O_2와 변 A_2B와 변 A_2C_2의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고현 P_2Q_2와 꼭짓점 A_2에 가까운 호 P_2Q_2로 둘러싸인 활꼴에색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는모든 활꼴의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]

R_1



R_2

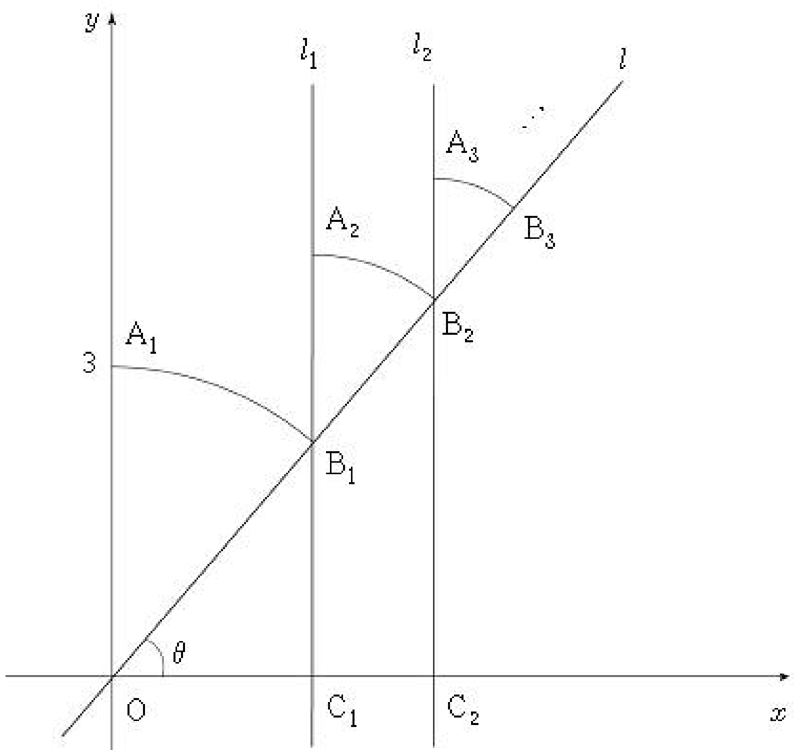


⋮

① $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　② $\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$　③ $4\pi-3\sqrt{3}$
④ $\frac{16}{3}\pi-4\sqrt{3}$　⑤ $\frac{20}{3}\pi-5\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

110 [공통]그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선 l과 점 $A_1(0, 3)$이 있다. 점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA_1}$을 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 B_1이라 하자. B_1을 지나고 y축에 평행한 직선 l_1이 x축과 만나는 점을 C_1이라 하고, 직선 l_1위에 $\overline{OC_1}=\overline{B_1A_2}$가 되는 점 A_2를 잡는다. 점 B_1을 중심으로 하고 $\overline{B_1A_2}$를 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 B_2라 하자. B_2를 지나고 y축에 평행한 직선 l_2가 x축과 만나는 점을 C_2라 하고, 직선 l_2위에 $\overline{C_1C_2}=\overline{B_2A_3}$이 되는 점 A_3을 잡는다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $B_{n-1}B_nA_n$의 호의 길이를 L_n이라 할 때,
$\sum_{n=1}^{\infty} L_n = 9\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이다. $\overline{B_1C_1}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고 B_0은 원점이다.) [4점][2012년 7월]



① $\sqrt{3}$　② 2　③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{7}$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

111 한 변의 길이가 2인 정사각형이 있다. 그림과 같이 정사각형의 한 변과 두 대각선에 접하는 원 4개를 그리고 그 중 2개의 원 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 색칠하지 않은 2개의 원에 각각 내접하는 정사각형 2개를 그린다.

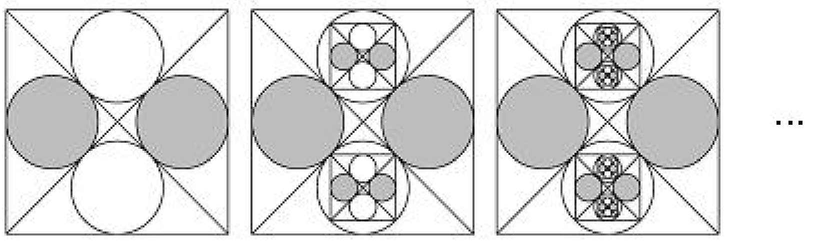
새로 그려진 2개의 정사각형 각각에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 색칠하지 않은 4개의 원에 각각 내접하는 정사각형 4개를 그린다.

새로 그려진 4개의 정사각형 각각에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = (p+q\sqrt{2})\pi$이다. 이때, $20(q-p)$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.)[4점]



R_1 R_2 R_3 …

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

112 그림과 같이 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형 AB_0C_0이 있다.

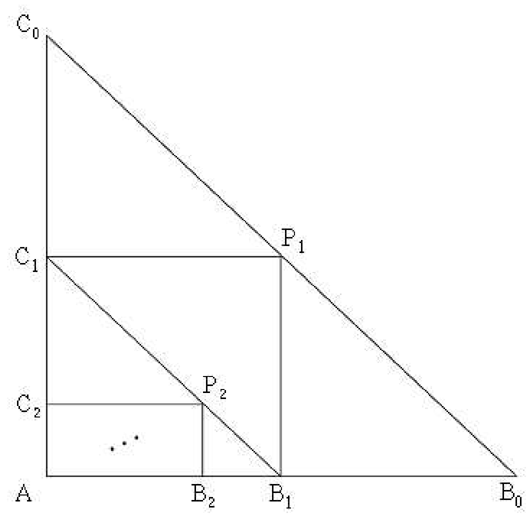
선분 B_0C_0 위에 꼭짓점 P_1이 있고, 각 A를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_1, C_1이 있는 직사각형 $AB_1P_1C_1$을 $\overline{P_1B_1} : \overline{P_1C_1} = 1:1$이 되도록 그린다.

선분 B_1C_1 위에 꼭짓점 P_2가 있고, 각 A를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_2, C_2가 있는 직사각형 $AB_2P_2C_2$를 $\overline{P_2B_2} : \overline{P_2C_2} = 1:2$가 되도록 그린다.

이와 같은 방법으로 선분 $B_{n-1}C_{n-1}$ 위에 꼭짓점 P_n이 있고, 각 A를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_n, C_n이 있는 직사각형 $AB_nP_nC_n$을 $\overline{P_nB_n} : \overline{P_nC_n} = 1:n$이 되도록 그린다.

선분 P_nB_n의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$의 값은?

(단, 점 B_n은 선분 AB_0 위에 있다.)[4점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 3월 학력평가]

113 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{3n-2} - a_{3n-1})$의 값은?[3점]

① $\frac{7}{19}$ ② $\frac{8}{19}$ ③ $\frac{9}{19}$
④ $\frac{10}{19}$ ⑤ $\frac{11}{19}$

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

114 순서대로 읽은 수와 거꾸로 읽은 수가 일치하는 자연수를 대칭수라 한다.

예를 들어 345543은 대칭수이고, 345567은 대칭수가 아니다.

0과 1만을 이용하여 n자리 대칭수를 만들 때, 사용된 1의 개수가 0의 개수보다 많은 n자리 대칭수의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{300}{a_{4n}}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

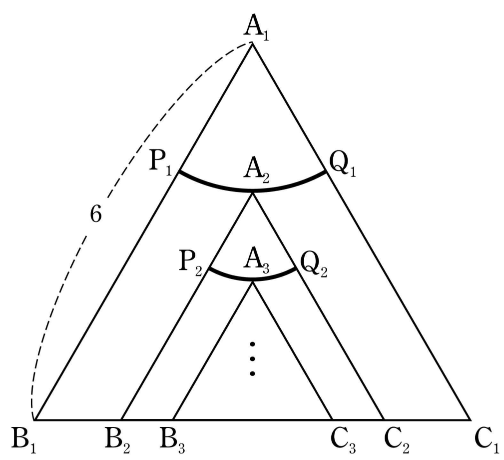
115 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다.

꼭짓점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$인 원이 삼각형 $A_1B_1C_1$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부에 있는 호 P_1Q_1을 이등분하는 점을 A_2라 하자. 점 A_2를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_2, C_2가 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다.

꼭짓점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}$인 원이 삼각형 $A_2B_2C_2$와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 있는 호 P_2Q_2를 이등분하는 점을 A_3이라 하자.

점 A_3을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_3, C_3이 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 P_nQ_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[4점]

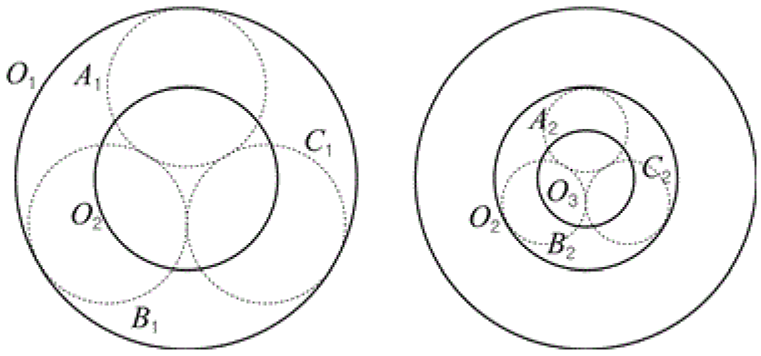


① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

116 [공통]반지름의 길이가 3인 원 O_1이 있다. 그림과 같이 원 O_1에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1의 중심을 지나는 원을 O_2라 하자. 원 O_2에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2의 중심을 지나는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[4점]



① $(5+4\sqrt{3})\pi$　② $(6+4\sqrt{3})\pi$　③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
④ $(8+4\sqrt{3})\pi$　⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

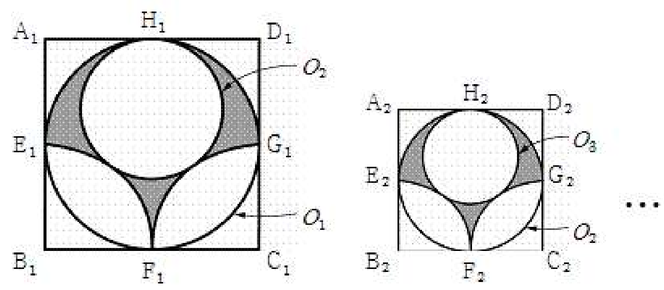
117 [공통]그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에 외접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1, H_1이라 하자.

점 B_1을 중심으로 하고 선분 B_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $B_1F_1E_1$의 호 E_1F_1과 점 C_1을 중심으로 하고 선분 C_1F_1을 반지름으로 하는 부채꼴 $C_1F_1G_1$의 호 G_1F_1과 원 O_1의 호 $E_1H_1G_1$로 둘러싸인 도형을 R_1이라 하자. R_1에 내접하는 원을 O_2라 하고 도형 R_1의 넓이에서 원 O_2의 넓이를 뺀 값을 S_1이라 하자.

원 O_2에 외접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 네 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 E_2, F_2, G_2, H_2라 하자. 점 B_2를 중심으로 하고 선분 B_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $B_2F_2E_2$의 호 E_2F_2와 점 C_2를 중심으로 하고 선분 C_2F_2를 반지름으로 하는 부채꼴 $C_2F_2G_2$의 호 G_2F_2와 원 O_2의 호 $E_2H_2G_2$로 둘러싸인 도형을 R_2라 하자. R_2에 내접하는 원을 O_3이라 하고 도형 R_2의 넓이에서 원 O_3의 넓이를 뺀 값을 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 E_nF_n, 호 G_nF_n, 호 $E_nH_nG_n$으로 둘러싸인 도형을 R_n이라 하고 R_n에 내접하는 원을 O_{n+1}이라 하자.

도형 R_n의 넓이에서 원 O_{n+1}의 넓이를 뺀 값을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{9-2\pi}{3}$　② $\frac{18-4\pi}{5}$　③ $\frac{9-2\pi}{2}$
④ $\frac{18-4\pi}{3}$　⑤ $9-2\pi$

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

118 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄴ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 수렴하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이다.

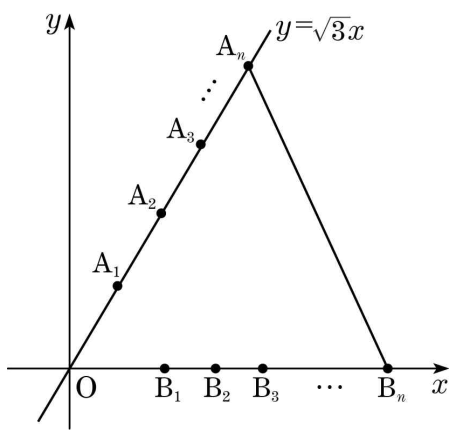
ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

119 그림과 같이 좌표평면 위의 두 점 $A_1(1, \sqrt{3})$과 점 $B_1(2, 0)$이 있다. 모든 자연수 n에 대하여 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 A_n과 x축 위의 점 B_n이 다음 식을 만족시킨다.

$$\overline{OA_{n+1}} = \overline{OA_n} + a, \ \overline{OB_{n+1}} = \overline{OB_n} + b$$

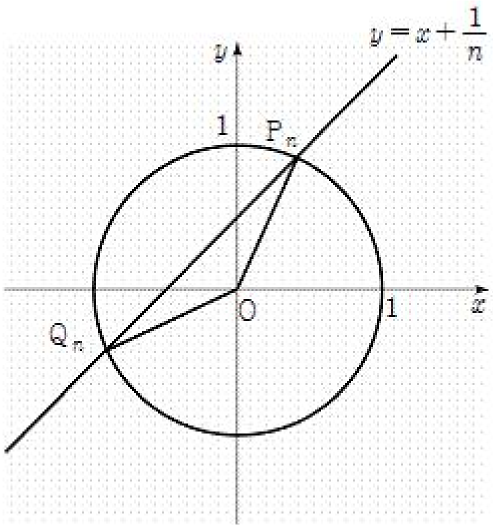


삼각형 OA_nB_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = 5\sqrt{3}$이 되도록 하는 양의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는?(단, O는 원점이다.)[4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

120 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $y=x+\frac{1}{n}$과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 A_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n \cdot A_n$의 값은?(단, O는 원점이다.)[4점]

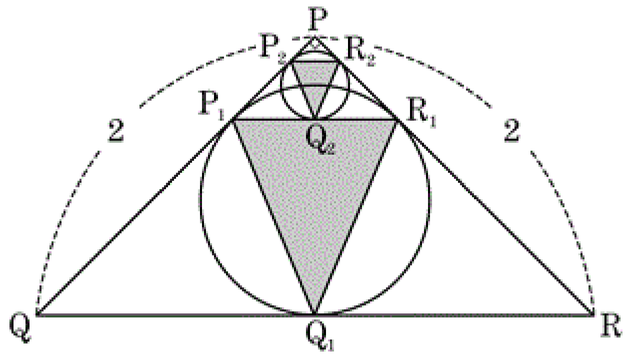


① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2011년 3월 학력평가]

121 [공통]그림과 같이 $\overline{PQ}=\overline{PR}=2$이고 $\angle QPR=90^\circ$인 삼각형 PQR의 내접원과 세 변 PQ, QR, RP의 접점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하자.

또, 삼각형 PP_1R_1의 내접원과 세 변 PP_1, P_1R_1, R_1P의 접점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하자.

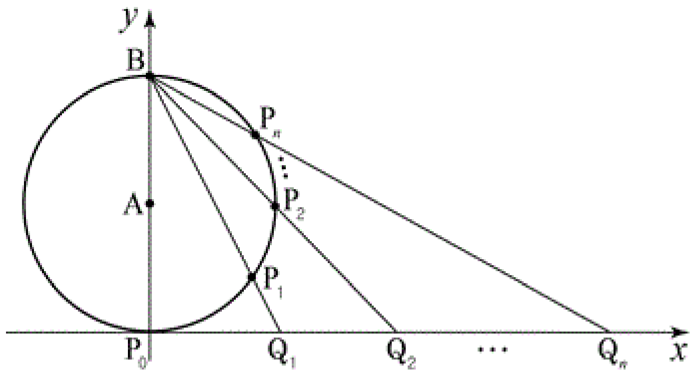


이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 점 P_n, Q_n, R_n을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $P_nQ_nR_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = p+q\sqrt{2}$를 만족시키는 두 유리수 p, q의 합 $p+q$의 값은?[4점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

122 [공통]그림과 같이 중심이 $A(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n은 다음 규칙을 만족한다.



㈎ 점 P_0은 원점이고, 점 P_n은 제 1사분면의 점이다.

㈏ 호 $P_{n-1}P_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $l_{n+1}=rl_n$이다.

㈐ 점 Q_n은 점 $B(0,\ 2)$와 점 P_n을 이은 직선이 x축과 만나는 점이다.

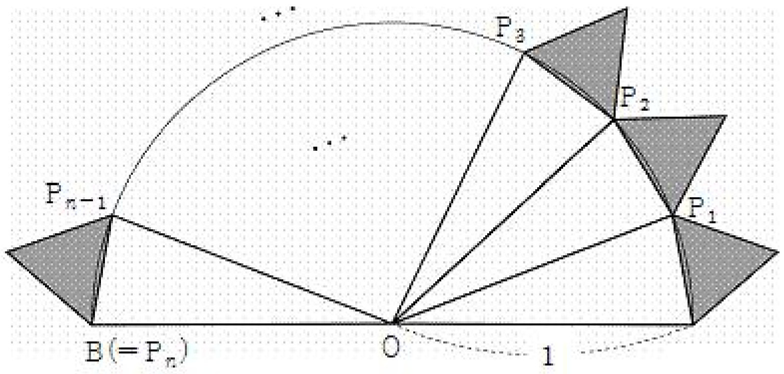
$Q_2(2,\ 0)$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{8}{15}\pi$일 때, 상수 r의 값은?[3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2011년 4월 학력평가]

123 그림과 같이 중심각의 크기가 π이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB에서 호 AB를 n등분한 각 점(양 끝점도 포함)을 차례로 $A=P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \cdots,\ P_{n-1},\ P_n=B$라 하자.

$\overline{P_0P_1},\ \overline{P_1P_2},\ \overline{P_2P_3},\ \cdots,\ \overline{P_{n-1}P_n}$을 각각 밑변으로 하는 정삼각형 n개의 넓이의 합을 $S(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n\cdot S(n)$의 값은?[3점]



① $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$ ② $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi^2$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$
④ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}\pi^2$

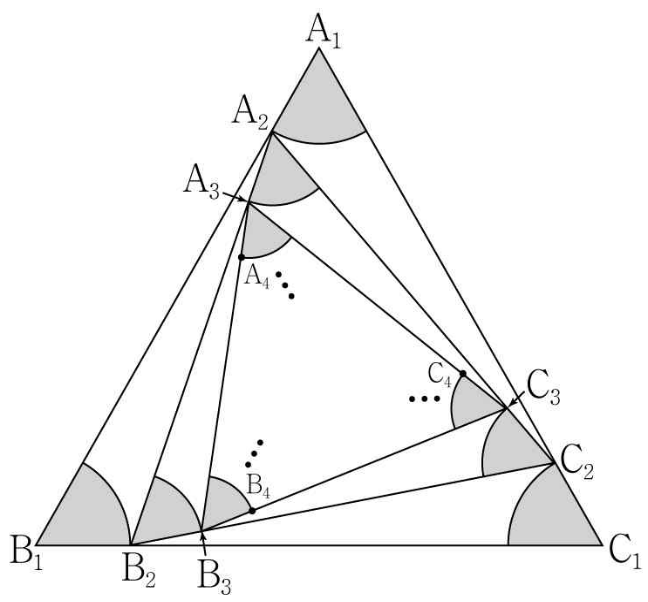
[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

124 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$에서 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$을 $1:5$로 내분하는 점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하고 $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$를 각각 반지름으로 하는 부채꼴을 그림과 같이 그리고 삼각형 $A_1B_1C_1$에 그려진 세 개의 부채꼴의 넓이의 합을 S_1이라 하자.

삼각형 $A_2B_2C_2$에서 $\overline{A_2B_2}$, $\overline{B_2C_2}$, $\overline{C_2A_2}$를 $1:5$로 내분하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하고 $\overline{A_2A_3}$, $\overline{B_2B_3}$, $\overline{C_2C_3}$을 각각 반지름으로 하는 부채꼴을 그림과 같이 그리고 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그려진 세 개의 부채꼴의 넓이의 합을 S_2라 하자. 삼각형 $A_3B_3C_3$에서 $\overline{A_3B_3}$, $\overline{B_3C_3}$, $\overline{C_3A_3}$을 $1:5$로 내분하는 점을 각각 A_4, B_4, C_4라 하고 $\overline{A_3A_4}$, $\overline{B_3B_4}$, $\overline{C_3C_4}$를 각각 반지름으로 하는 부채꼴을 그림과 같이 그리고 삼각형 $A_3B_3C_3$에 그려진 세 개의 부채꼴의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 계속하여 삼각형 $A_nB_nC_n$에 그려진 세 개의 부채꼴의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{p}{q}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2010년 10월 학력평가]

125 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$의 값은?[2점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

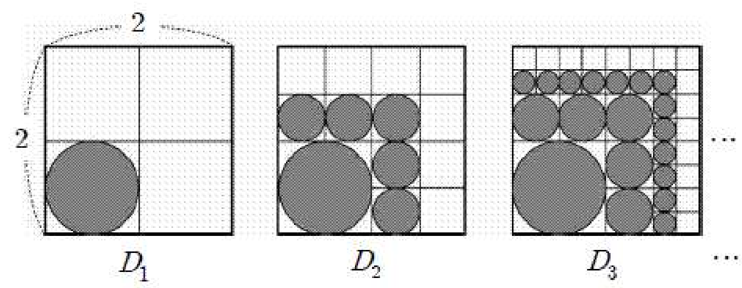
[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

126 아래와 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 이 중 한 개의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_1이라 하고, 이 내접원의 넓이를 S_1이라 하자.

D_1에서 내접원이 없는 나머지 정사각형을 각각 넓이가 같은 4개의 정사각형으로 만든 후, 새로 만들어진 정사각형 중에서 내접원이 있는 정사각형과 인접한 각각의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_2라 하고, D_2에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_2라 하자.

D_2에서 내접원이 없는 나머지 정사각형을 각각 넓이가 같은 4있는 정사각형과 인접한 각각의 정사각형에 내접원을 그려서 얻은 그림을 D_3라 하고, D_3에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_3라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 D_n에 있는 모든 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

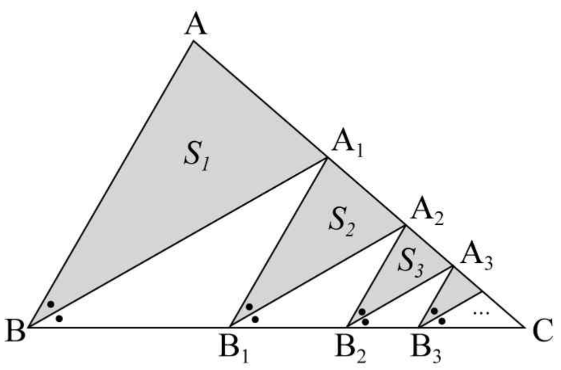
[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

127 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n-3)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{20a_n+3n^{-3}}{a_n+n^{-2}}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

128 $\angle B=\frac{\pi}{3}$, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$인 $\triangle ABC$에 대하여 $\angle B$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1이라 할 때, $\triangle ABA_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 A_1에서 $\overline{AB}$에 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}$와 만나는 점을 B_1, $\angle A_1B_1C$의 이등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_2라 할 때, $\triangle A_1B_1A_2$의 넓이를 S_2라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 $\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 값은 $\frac{q\sqrt{3}}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $A_0=A$, $B_0=B$이고 p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

129 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}=\frac{6}{7}$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공비는?[3점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

130 수열 $\{(a_n)\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2+2n$일 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a_na_{n+1}}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{7}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

131 무한수열 $\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

132 [공통]수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r3^r2^{n-r}$이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{a_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

133 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

134 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 대각선의 길이가 a_n인 정사각형의 넓이를 S_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값은?(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

① 22 ② 23 ③ 24
④ 25 ⑤ 26

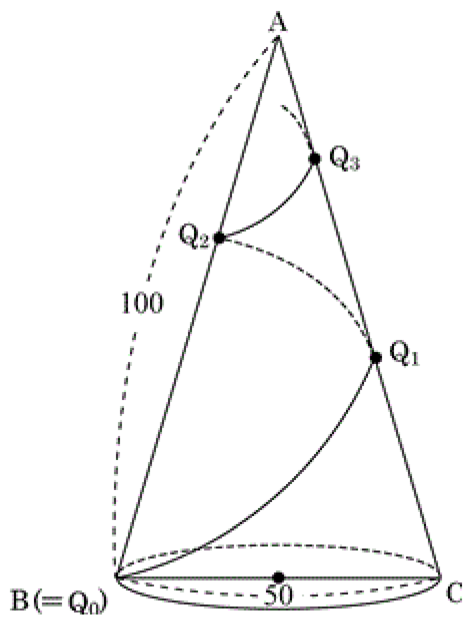
[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

135 [공통]연립부등식 $\begin{cases} |x|+2|y| \le 4 \\ 2^n(y-x)+y \ge 1 \end{cases}$의 해 (x, y)가 나타내는 영역의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?(단, n은 자연수이다.)[4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

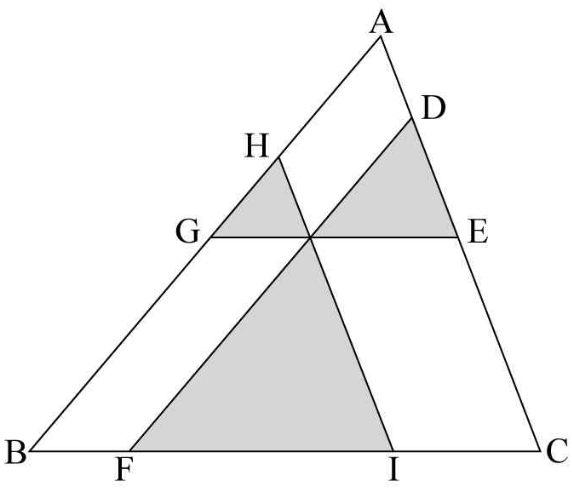
[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

136 [공통]그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하고 선분 BC를 밑면의 지름으로 하며 $\overline{AB}=100$, $\overline{BC}=50$인 직원뿔이 있다. 모선 AC위의 점 Q_1은 점 B에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AC에 최단 거리로 이르는 점이고, 모선 AB위의 점 Q_2는 점 Q_1에서 원뿔의 옆면을 돌아 모선 AB에 최단 거리로 이르는 점이다. 이와 같은 방법으로 점 Q_n은 모선 AB또는 AC위의 점 Q_{n-1}에서 원뿔의 옆면을 돌아 다른 모선에 최단 거리로 이르는 점이라고 하자. 점 Q_{n-1}에서 점 Q_n에 이르는 최단 거리를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, $B=Q_0$, a와 b는 유리수이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

137 그림과 같이 넓이가 M인 삼각형 ABC가 있고 자연수 n과 선분 AC위의 두 점 D, E에 대하여
$\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EC}=n:(2n+1):(3n+2)$이고
$\overline{DF}//\overline{AB}$, $\overline{GE}//\overline{BC}$이다. 선분 DF와 선분 GE의 교점을 지나는 선분 HI는 선분 AC와 평행하다. 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{q}{p}M$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



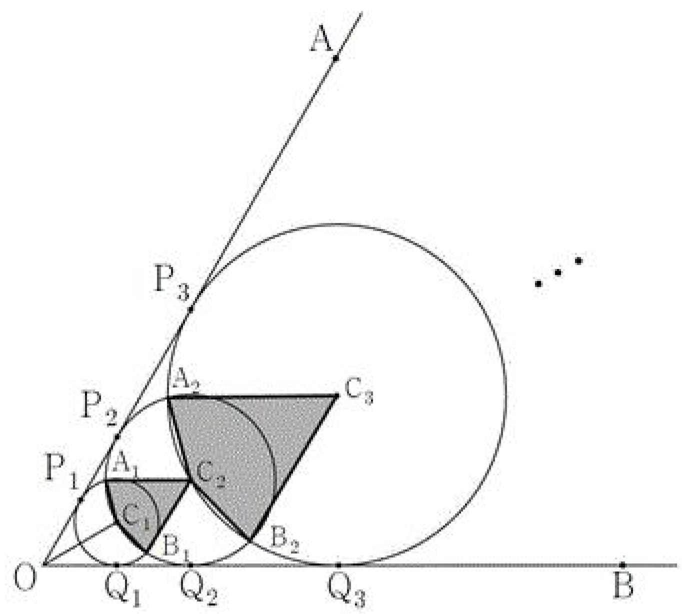
[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

138 [공통]그림과 같이 크기가 60°인 $\angle AOB$의 이등분선 위에 $\overline{OC_1}=2$인 점 C_1을 잡아 점 C_1을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 C_1을 그릴 때, 원 C_1과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_1, Q_1이라 하자.

점 C_1을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_2, 원 C_2와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 원 C_1과 원 C_2가 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 할 때, 사각형 $A_1C_1B_1C_2$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 C_2를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 C_3, 원 C_3과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 원 C_2와 원 C_3이 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 할 때, 사각형 $A_2C_2B_2C_3$의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

139 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

ㄴ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

ㄷ. 두 수열 $\{|a_n+b_n|\}$, $\{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

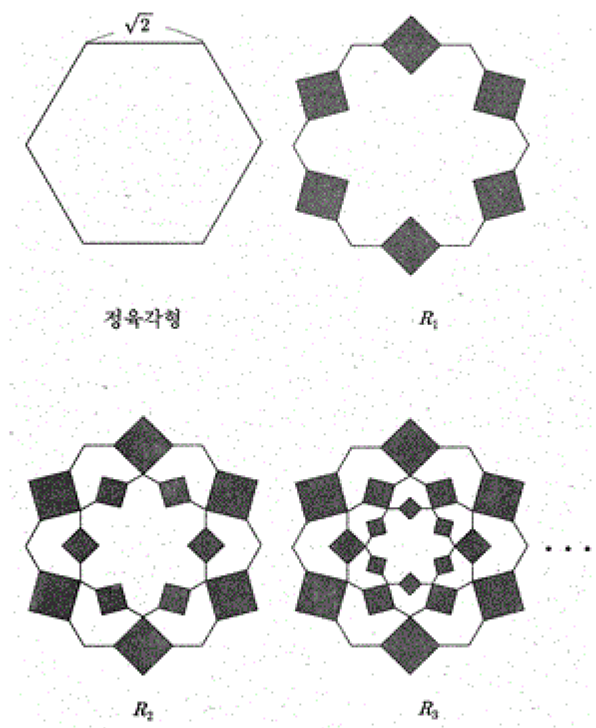
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

140 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정육각형이 있다.

이 정육각형의 한 변을 $1:3$과 $3:1$로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1의 정사각형들의 꼭짓점 중에서 정육각형의 내부에 있는 꼭짓점들을 연결하여 정육각형을 만들고, 이 정육각형의 한 변을 $1:3$과 $3:1$로 내분하는 두 점을 대각선의 양 끝점으로 하는 정사각형을 각 변에 만들어 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번 째 얻은 그림 R_n의 모든 정사각형의 둘레의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값은?[4점]

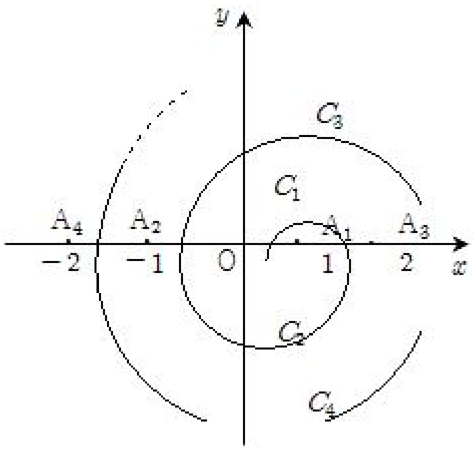


① $\frac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$ ② $\frac{28(2+3\sqrt{3})}{15}$
③ $\frac{18(1+2\sqrt{3})}{11}$ ④ $\frac{6(3+2\sqrt{3})}{11}$
⑤ $\frac{4(1+3\sqrt{3})}{13}$

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

141 그림과 같이

$A_1(1, 0)$, $A_2(-1, 0)$, $A_3(2, 0)$, $A_4(-2, 0)$, $\cdots$ 에 대하여 $\overline{OA_1}$ 을 지름으로 하는 반원을 C_1, $\overline{A_1A_2}$ 를 지름으로 하는 반원을 C_2, $\overline{A_2A_3}$ 를 지름으로 하는 반원을 C_3 라 하자.



이와 같은 방법으로 만든 반원 $C_k(k=1, 2, 3, \cdots)$ 의 호의 길이를 l_k 라 하자.

$\sum_{k=1}^{n} l_k = 189\pi$ 를 만족시키는 n 에 대하여, A_n 의 좌표가 $(a, 0)$ 일 때, $a+50$ 의 값은?[4점]

① 27 ② 33 ③ 39
④ 64 ⑤ 69

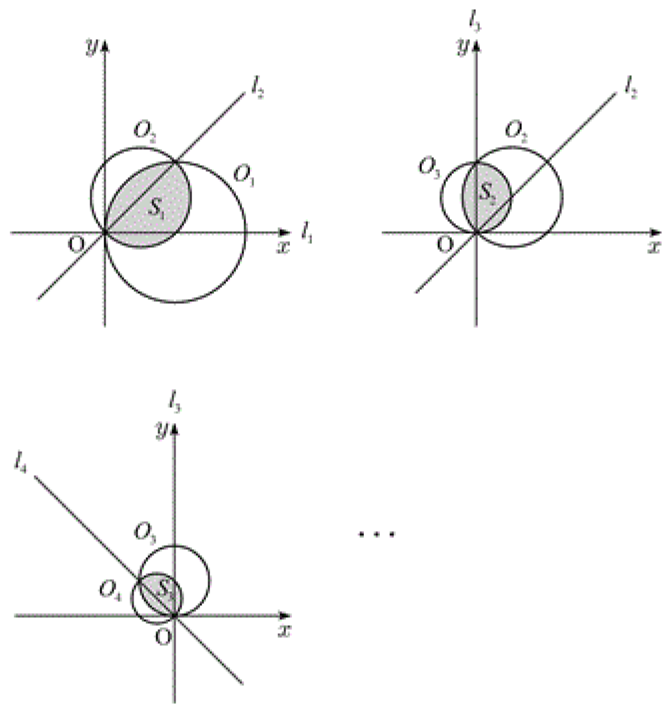
[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

142 좌표평면에서 점 $(3, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3 인 원을 O_1 이라 하고, x 축을 직선 l_1 이라 하자.

직선 l_1 을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_2 라 하고, 직선 l_2 와 원 O_1 의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_2 라 할 때, 두 원 O_1, O_2 의 공통부분의 넓이를 S_1 이라 하자.

직선 l_2 를 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_3 이라 하고, 직선 l_3 과 원 O_2 의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_3 이라 할 때, 두 원 O_2, O_3 의 공통부분의 넓이를 S_2 라 하자.

직선 l_3 을 원점을 중심으로 하여 45° 만큼 회전시킨 직선을 l_4 라 하고, 직선 l_4 와 원 O_3 의 두 교점을 지름의 양 끝점으로 하는 원을 O_4 라 할 때, 두 원 O_3, O_4 의 공통부분의 넓이를 S_3 이라 하자.



이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?[4점]

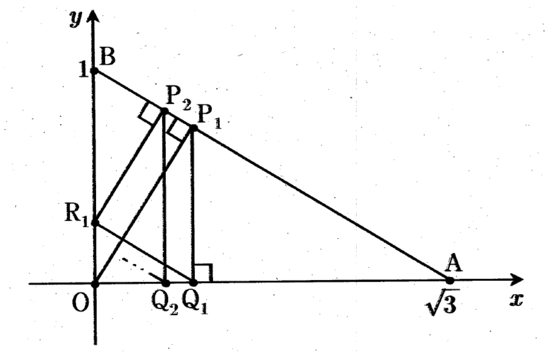
① $6(\pi-1)$ ② $7(\pi-1)$ ③ $8(\pi-1)$
④ $9(\pi-1)$ ⑤ $10(\pi-1)$

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

143 [공통]그림과 같이 원점 O에서 두 점 $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 1)$을 이은 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_1이라 하자. 점 P_1에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1, 점 Q_1을 지나고 선분 AB와 평행한 직선의 y절편을 R_1, 점 R_1에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_2라 하자.

점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2, 점 Q_2를 지나고 선분 AB와 평행한 직선의 y절편을 R_2, 점 R_2에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 P_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 점 Q_n, R_n, P_{n+1}을 정하여 나갈 때, 점 Q_n의 x좌표 x_n에 대하여 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$이다. $100a^2$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2009년 3월 학력평가]

144 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$의 값은?[2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

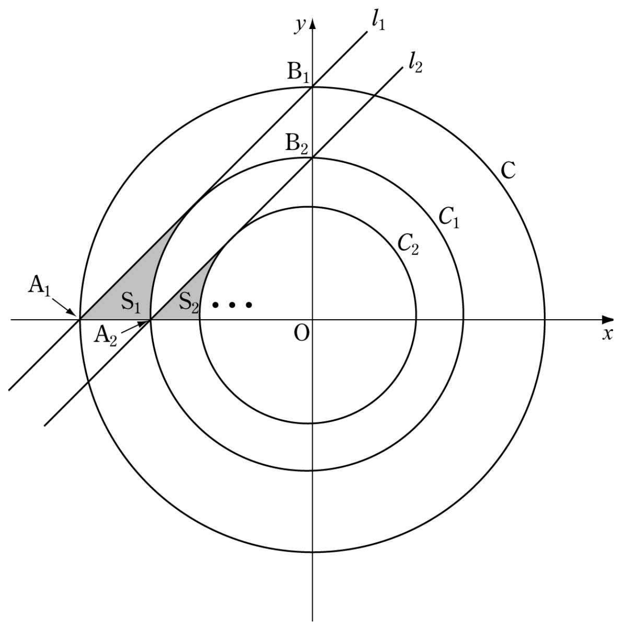
145 그림과 같이 중심이 원점, 반지름의 길이가 r인 원 C와 x축, y축과의 교점 A_1, B_1을 지나는 직선을 l_1이라 하자.

원점을 중심으로 하고 직선 l_1에 접하는 원을 C_1, 원 C_1과 x축, y축과의 교점 A_2, B_2를 지나는 직선을 l_2라 하자.

이때 원 C_1과 x축, 직선 l_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 원점을 중심으로 하고 직선 l_2에 접하는 원 C_2와 x축, 직선 l_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만들어진 어두운 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = 25\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$이다.

이때, 원 C의반지름의 길이 r의 값은?[4점]



① $9\sqrt{2}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

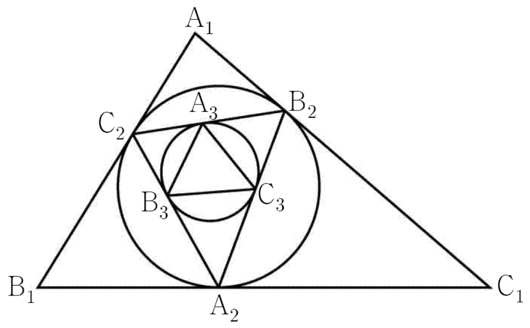
[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

146 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3)=4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -3$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{24a_n+2b_n^2}{2a_n-b_n^2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

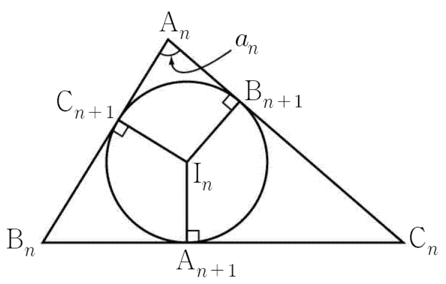
147 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내접원이 변 B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1과 접하는 점을 각각 A_2, B_2C_2라 하자.

삼각형 $A_2B_2C_2$의 내접원이 변 B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2와 접하는 점을 각각 A_3, B_3, C_3라 하자.



이와 같은 방법을 계속할 때, 삼각형 $A_nB_nC_n$의 내접원이 변 B_nC_n, C_nA_n, A_nB_n과 접하는 점을 각각 A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}이라 하자.

다음은 삼각형 $A_nB_nC_n$에서 $\angle B_nA_nC_n$의 크기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.



$\angle A_nB_nC_n = b_n$, $\angle B_nC_nA_n = c_n$, 삼각형 $A_nB_nC_n$의 내심을 I_n이라 하자.

$\overline{I_nA_{n+1}} \perp \overline{B_nC_n}$, $\overline{I_nC_{n+1}} \perp \overline{A_nB_n}$ 이므로

사각형 $I_nC_{n+1}B_nA_{n+1}$이 원에 내접한다.

따라서 $\angle I_nA_{n+1}C_{n+1} = \angle I_nB_nC_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$이고 같은 방법으로 $\angle I_nA_{n+1}B_{n+1} = $ [(가)]

$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + $ [(가)] 이므로

$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + $ [(나)]

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = $ [(다)]

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $\frac{1}{4}c_n$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$

② $\frac{1}{4}c_n$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$

③ $\frac{1}{2}c_n$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$

④ $\frac{1}{2}c_n$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$

⑤ $\frac{1}{2}c_n$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

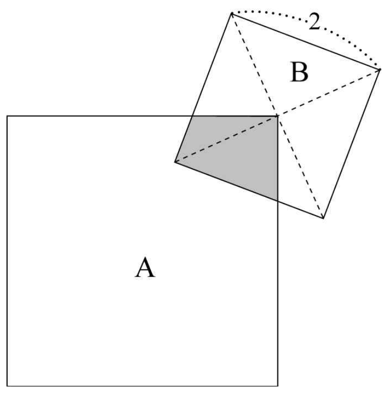
148 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + 3a_2 = 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 28$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

149 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 B의 대각선의 교점을 정사각형 A의 한 꼭짓점과 일치 시키면 두 정사각형이 겹쳐지는 부분이 생긴다.

겹쳐진 부분의 넓이가 A의 넓이의 $\frac{1}{n+1}$일 때, A의 넓이를 a_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^2}$ 의 값은?[3점]

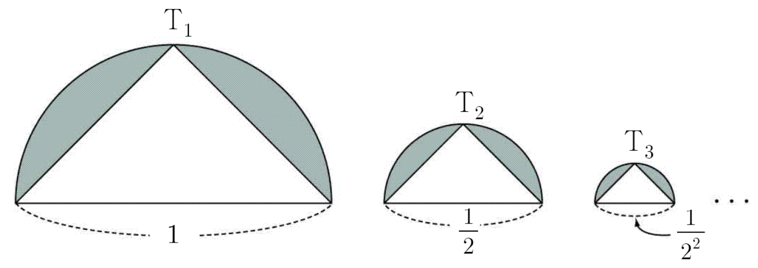


① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

150 그림과 같이 지름의 길이가 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots$ 인 등비수열을 이루는 반원의 내부에 지름을 빗변으로 하는 직각이등변 삼각형을 그리고 반원의 내부와 직각이등변삼각형의 외부의 공통부분(색칠한 부분)을 차례로 $T_1, T_2, T_3, \cdots$ 이라 하자.



T_n의 넓이를 $S_n(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n-1} \cdot S_n\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{\pi-3}{2}$　② $\frac{\pi-2}{2}$　③ $\frac{\pi-1}{2}$

④ $\frac{\pi}{2}$　⑤ π

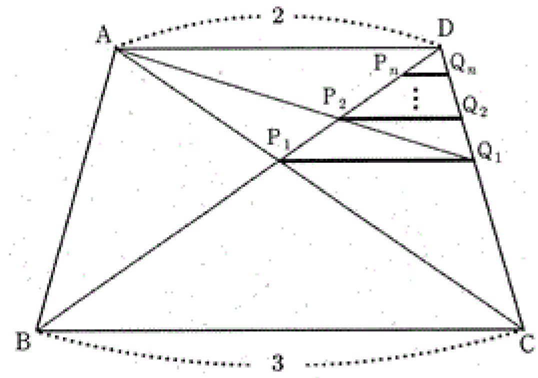
[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

151 [공통]등변사다리꼴 $ABCD$에서 두 대각선 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점을 P_1이라 하고, P_1에서 $\overline{BC}$에 평행인 선을 그어 $\overline{CD}$와 만나는 점을 Q_1이라 하자.

마찬가지 방법으로 $\overline{AQ_1}$과 $\overline{BD}$의 교점을 P_2라 하고, P_2에서 $\overline{BC}$에 평행인 선을 그어 $\overline{CD}$와 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 점 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \cdots, P_n, Q_n, \cdots$ 을 얻는다.

$\overline{P_nQ_n}=x_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot x_{n+1}$의 값은?[3점]



① $\frac{12}{5}$　② $\frac{18}{5}$　③ 4

④ $\frac{25}{6}$　⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 4월 학력평가]

152 [공통]수렴하는 급수만 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{2^n}$
ㄴ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

153 [공통]좌표평면 위의 두 점 $A(0,\ 0)$, $B(5,\ 0)$과 1보다 큰 자연수 n에 대하여 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:n$을 만족하는 점 $P(x,\ y)$들의 집합을 T_n이라 하자. 집합 T_n의 임의의 두 원소 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 최댓값을 $M(n)$이라고 할 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10M(n)}{n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

154 [공통]원에 다음 과정을 실행한다.

Ⅰ. 원의 지름을 $2:1$로 내분하는 점을 잡는다. Ⅱ. 이 원에 내접하면서 Ⅰ의 내분점에서 서로 외접하는 두 개의 원을 그린다.

지름의 길이가 6인 원이 있다.

이 원에[과정]을 실행하여 그린 2개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_1이라 하자.

그림 C_1에서 새로 그려진 2개의 원에 각각[과정]을 실행하여 그린 4개의 원의 내부를 제외하여 얻어진 그림을 C_2라 하자.

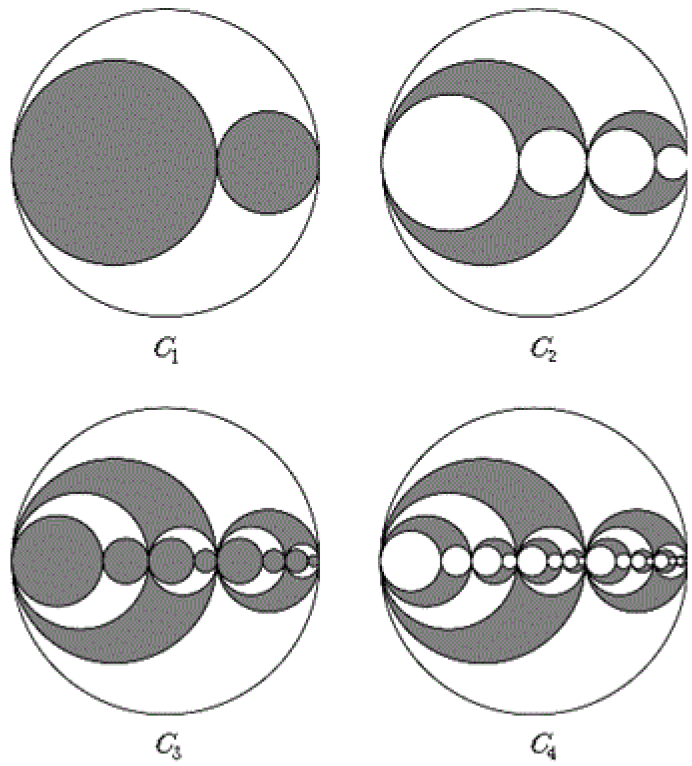
그림 C_2에서 새로 그려진 4개의 원에 각각[과정]을 실행하여 그린 8개의 원의 내부를 색칠하여 얻어진 그림을 C_3이라 하자.

그림 C_3에서 새로 그려진 8개의 원에 각각[과정]을 실행하여 그린 16개의 원의 내부를 제외하고 얻어진 그림을 C_4라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻어진 그림 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{q}{p}\pi$ (p와 q는 서로소인 자연수)이다.

$p+q$의 값을 구하여라.

(단, 모든 원의 중심은 처음 원의 한 지름 위에 있다.)[4점]



⋯

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

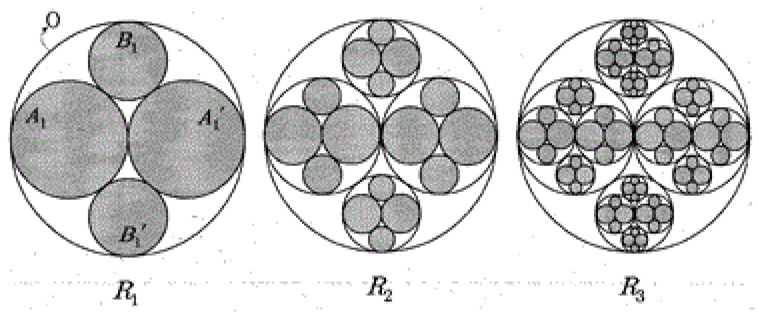
155 [공통]반지름의 길이가 1인 원 O가 있다. 원 O의 중심에서 서로 외접하고 원 O에 내접하는 두 원 A_1, $A_{1'}$을 그린 후 두 원 A_1과 $A_{1'}$에 외접하며 원 O에 내접하는 두 원 B_1, $B_{1'}$을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자.

새로 그려진 네 원 A_1, $A_{1'}$, B_1, $B_{1'}$의 내부에 그림 R_1의 제작과정을 반복하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 그림을 R_n이라 하자.

또한, 그림 R_1, R_2, $\cdots$, R_n, $\cdots$ 각각에 아래와 같이 어둡게 색칠을 하자.

그림 R_n의 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



① π　② $\frac{9}{5}\pi$　③ $\frac{13}{5}\pi$
④ $\frac{17}{5}\pi$　⑤ $\frac{21}{5}\pi$

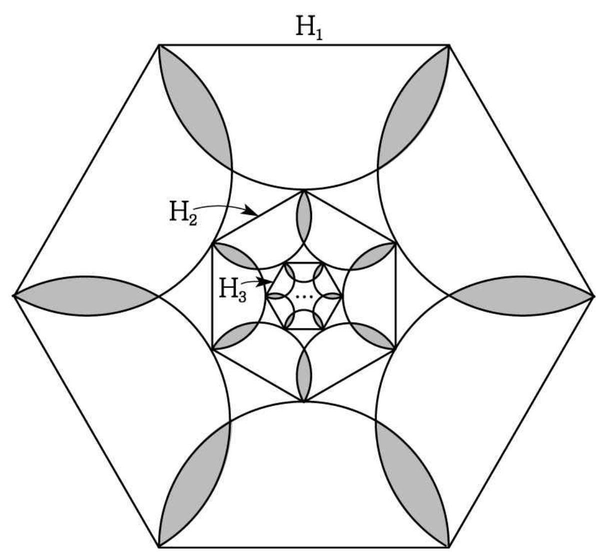
[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

156 [공통]그림과 같이 정육각형 H_1의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_1의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_1, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_2라 하자.

정육각형 H_2의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_2의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_2, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 정육각형 H_n의 각 변을 지름으로 하는 반원을 정육각형 H_n의 내부에 그리고, 반원이 겹쳐지는 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n, 각 반원의 호의 길이를 이등분하는 점을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 H_{n+1}이라 하자.

이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 S_1을 이용하여 나타낸 것은?[4점]



① $\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$　② $\frac{3-\sqrt{3}}{3}S_1$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}S_1$
④ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}S_1$　⑤ $2\sqrt{3}S_1$

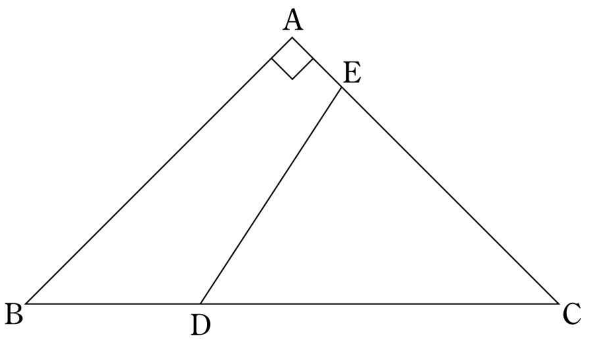
[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

157 그림과 같이 $\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{AC}=80$인 직각이등변삼각형이다.

점 D는 $\overline{BC}$를 $1:2$로 내분하는 점이고, 점 E는 $\overline{AC}$위에서 움직이는 점이다.

$\square ABDE$와 $\triangle DCE$의 넓이의 비가 $(n+1):n$일 때의 $\overline{AE}$의 길이를 a_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점]



① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

[난이도 : ★★★] [2009년 4월 학력평가]

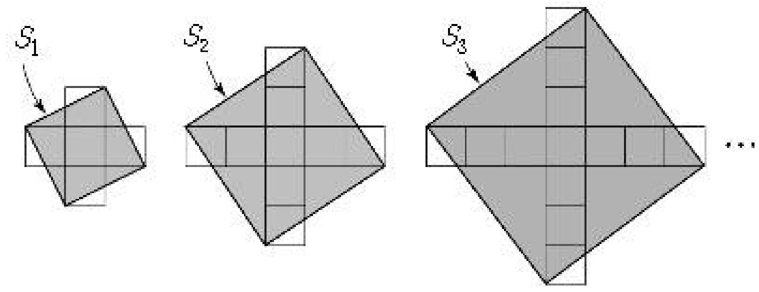
158 [그림 1]과 같이 한 개의 넓이가 1인 정사각형 5개로 이루어진 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_1이라 하자.

[그림 2]와 같이[그림 1]의 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_2라 하자.

[그림 3]과 같이[그림 2]의 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{10S_n}{n^2}$의 값을 구하시오.[4점]



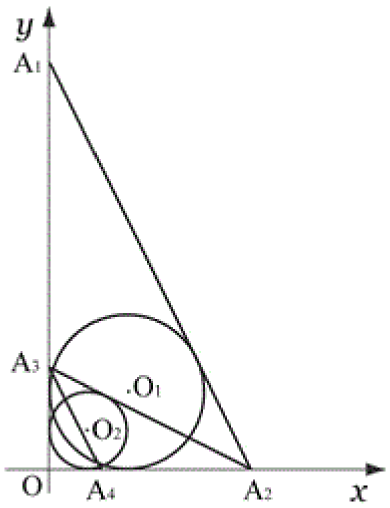
[그림 1] [그림 2] [그림 3]

[난이도 : ★★★] [2009년 7월 학력평가]

159 [공통]그림과 같이 세 점 $O(0, 0)$, $A_1(0, 4)$, $A_2(2, 0)$으로 이루어진 $\triangle OA_1A_2$에 내접하는 원을 O_1이라 하자. y축 위의 점 A_3이 선분 A_1A_2의 기울기와 선분 A_2A_3의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_2A_3$에 내접하는 원을 O_2라 하자.

x축 위의 점 A_4가 선분 A_2A_3의 기울기와 선분 A_3A_4의 기울기의 곱이 1이 되도록 하는 점일 때, $\triangle OA_3A_4$에 내접하는 원을 O_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 생기는 $\triangle OA_nA_{n+1}$에 내접하는 원을 O_n이라 하고, O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} r_n = a - 2\sqrt{b}$ (a, b는 자연수)이다. $a+b$의 값을 구하시오.[4점]



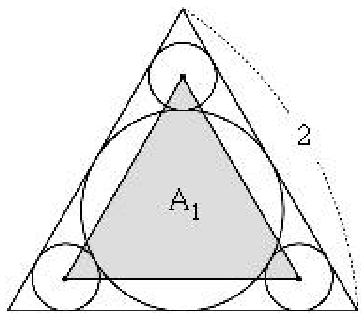
[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

160 한 변의 길이가 2인 정삼각형에 내접원을 그리고, 정삼각형의 두 변과 내접원에 접하는 세 원을 그린다.

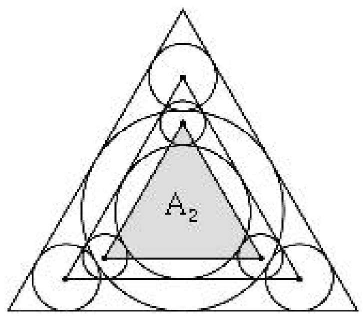
이 세 원의 중심을 잇는 정삼각형을 그린다. 새로 얻은 정삼각형을 A_1, 그 넓이를 S_1이라 하자. ([그림 1]참조).

A_2그 넓이를 S_2라 하자([그림 2]참조). A_2에 밑줄 친 과정을 시행하여 세 번째 얻은 정삼각형을 A_3, 그 넓이를 S_3라 하자. ([그림 3]참조).

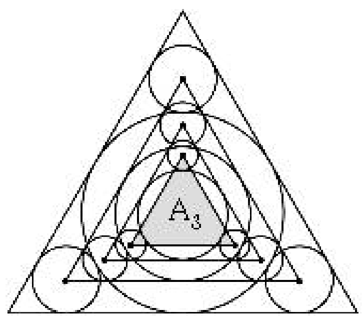
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정삼각형을 A_n, 그 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

① $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ② $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

④ $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

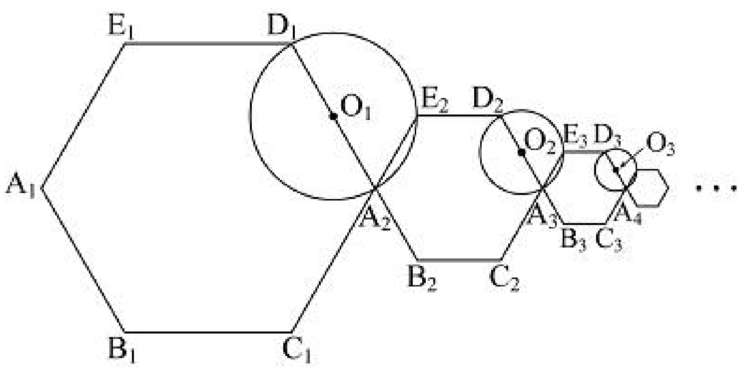
[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

161 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정육각형 $A_1B_1C_1A_2D_1E_1$의 변 A_2D_1을 지름으로 하는 원 O_1을 그린다.

원 O_1과 선분 C_1A_2의 연장선의 교점을 E_2라 할 때, 선분 A_2E_2를 한 변으로 하는 정육각형 $A_2B_2C_2A_3D_2E_2$를 그리고, 변 A_3D_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그린다.

원 O_2와 선분 C_2A_3의 연장선의 교점을 E_3이라 할 때, 선분 A_3E_3을 한 변으로 하는 정육각형 $A_3B_3C_3A_4D_3E_3$을 그리고, 변 A_4D_3을 지름으로 하는 원 O_3을 그린다.

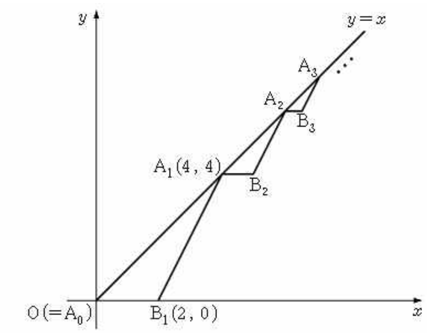
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[3점]



① 16π ② 18π ③ 20π
④ 22π ⑤ 24π

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

162 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$위에 점 $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$ 이 있다.
$\overline{A_1B_2},\ \overline{A_2B_3},\ \overline{A_3B_4},\ \cdots,\ \overline{A_nB_{n+1}},\ \cdots$ 이 x축과 평행하고, 삼각형 $A_{n+1}A_nB_{n+1}$의 넓이가 삼각형 $A_nA_{n-1}B_n$의 넓이의 $\frac{1}{4}$이고 두 삼각형이 닮음이 되도록 점 $B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots,\ B_n,\ \cdots$ 을 잡는다.
$A_1(4,\ 4),\ B_1(2,\ 0)$일 때, 삼각형 $A_nA_{n-1}B_n$의 무게중심의 좌표가 $(\alpha,\ \beta)$로 수렴한다. $\alpha+\beta$의 값은?(단, A_0는 원점)[4점]

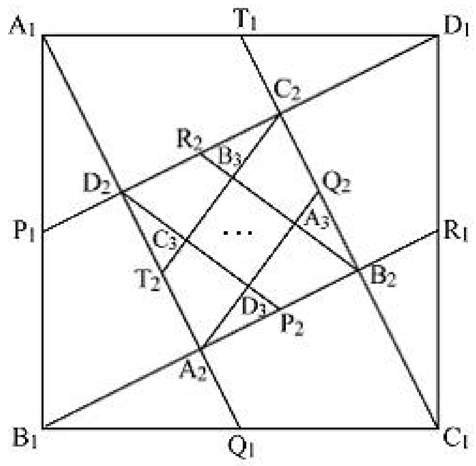


① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

163 그림과 같이 한 변의 길이가 10인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1, T_1이라 하고, 선분 A_1Q_1, B_1R_1의 교점을 A_2, 선분 B_1R_1, C_1T_1의 교점을 B_2, 선분 C_1T_1, D_1P_1의 교점을 C_2, 선분 D_1P_1, A_1Q_1의 교점을 D_2라 할 때, 사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이를 S_2라 하자. 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2A_2의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2, T_2라 하고, 선분 A_2Q_2, B_2R_2의 교점을 A_3, 선분 B_2R_2, C_2T_2의 교점을 B_3, 선분 C_2T_2, D_2P_2의 교점을 C_3, 선분 D_2P_2, A_2Q_2의 교점을 D_3이라 할 때, 사각형 $A_3B_3C_3D_3$의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

164 급수 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 21}+\cdots$의 합은?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

165 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)\left(1-\frac{x}{4}\right)^{n-1}$의 합이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

166 급수 $\frac{x+3}{5}+\frac{(x+3)(x-5)}{5^2}+\frac{(x+3)(x-5)^2}{5^3}+\cdots$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

167 급수

$$\left(\frac{a_1}{3}-5\right)+\left(\frac{a_2}{6}-\frac{8}{3}\right)+\left(\frac{a_3}{9}-\frac{11}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{a_n}{3n}-\frac{3n+2}{2n-1}\right)+\cdots$$ 이

수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+21n-7}{2a_n+3n+5}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

168 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{4n^2-1}$의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

169 다음 [보기]의 급수 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

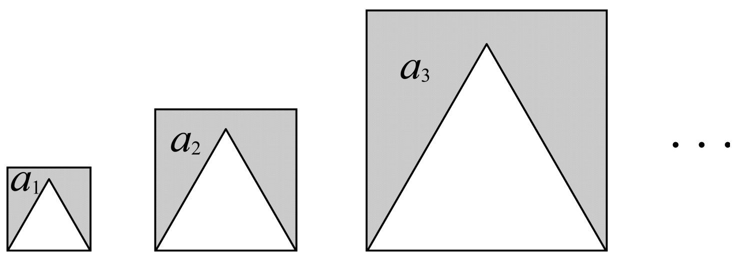
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 03월 학력평가]

170 넓이가 $1, 3, 9, 27, \cdots$ 인 등비수열을 이루는 정사각형들을 그림과 같이 왼쪽부터 차례로 배열하고, 각 정사각형의 내부에 정사각형과 한 변을 공유하는 정삼각형을 그린다.



정삼각형의 외부와 정사각형의 내부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 왼쪽부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}$ 의 값은? [4점]

① $2-\sqrt{3}$　② $3-\sqrt{3}$　③ $4-\sqrt{3}$
④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

171 자연수 n에 대하여 도형 $(n+1)|x|+n|y|=1$의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

172 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)(\log_2 x)^n$이 수렴할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. 수렴하기 위한 x값의 범위는 $\frac{1}{2}<x<2$이다.

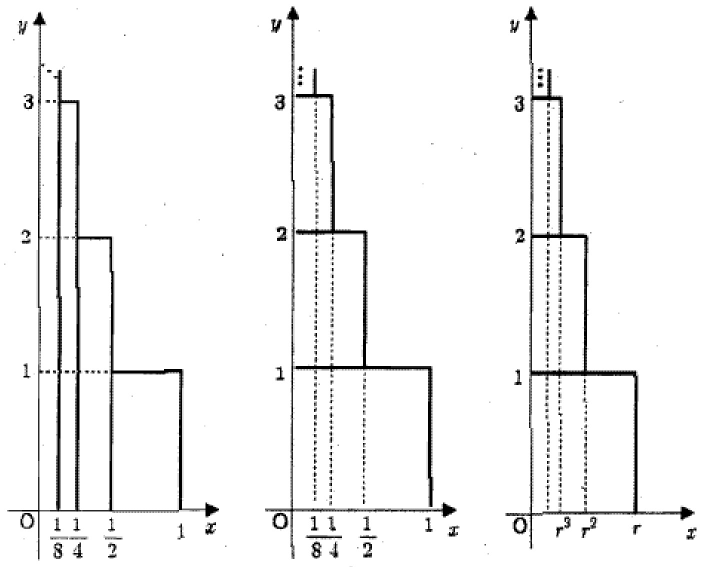
ㄴ. 급수의 합이 1이 되도록 하는 x의 값은 한 개 존재한다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log_2 x-1}{2}\right)^n$ 은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

173 다음은 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k\,(0<r<1)$의 값을 구하는 과정이다.



<그림1> <그림2> <그림3>

> 과는 각각 일정한 규칙으로 직사각형을 한없이 붙여나간 것이다.
> 과의 도형의 넓이를 구하여 비교하면 아래 등식이 성립함을 알 수 있다.
> $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$
> 그러므로 $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k=$ [(가)] 이다.
> 위와 마찬가지로 $0<r<1$일 때, [(나)]에서 $(r+2r^2+3r^3+\cdots)=r+r^2+r^3+\cdots$ 이 성립함을 알 수 있다.
> 따라서, $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k=$ [(다)] 이다.

위에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① 2, $1-r$, $\frac{r}{(1-r)^2}$

② 2, $2-r$, $\frac{r}{(2-r)(1-r)}$

③ 2, $3-r$, $\frac{r}{(3-r)(1-r)}$

④ 3, $1-r$, $\frac{r}{(1-r)^2}$

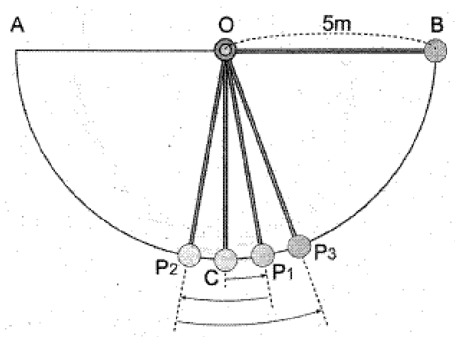
⑤ 3, $2-r$, $\frac{r}{(2-r)(1-r)}$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

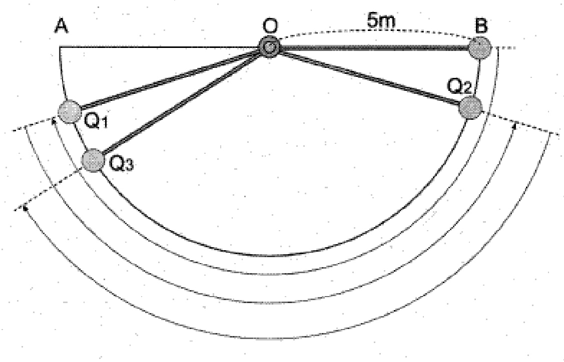
174 [공통]어떤 놀이 기구는 길이가 $10m$인 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 모양의 호를 따라 다음에 의해 움직이도록 만들어졌다.

> 먼저, [그림 1]에서와 같이 반원에서 중심 O로부터 지면과 수직인 방향에 위치한 C지점에서 B방향으로 10° 만큼 움직여 P_1지점에 도달한 후, 방향을 바꾸어 A방향으로 20° 만큼 움직여 P_2지점에 도달한다.
> 이와 같이 방향을 바꾸면서 직전보다 10° 씩 증가하는 움직임을 반복하여 B지점까지 도달한다.
> 다음으로, [그림 2]에서와 같이 동작 규칙이 바뀌어 B지점으로부터 A방향으로 호 BA길이의 $\frac{9}{10}$만큼 움직여 Q_1에 도달한 후, 방향을 바꾸어 호 Q_1B길이의 $\frac{9}{10}$만큼 움직여 Q_2에 도달한다.
> 이와 같이 방향을 바꾸면서 직전 운동거리의 $\frac{9}{10}$만큼 움직임을 계속하여 반복한다.

이와 같이 C지점을 출발한 놀이 기구가 호를 따라 한없이 계속하여 움직일 때, 움직인 거리의 총합은?[4점]



[그림1] ● : 놀이기구의 중심



[그림2] ● : 놀이기구의 중심

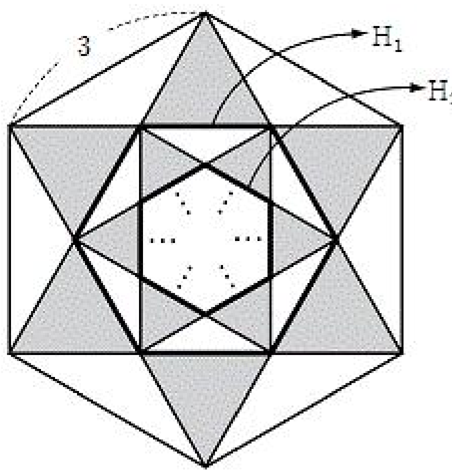
① $87.5\pi(m)$ ② $90\pi(m)$ ③ $92.5\pi(m)$
④ $95\pi(m)$ ⑤ $97.5\pi(m)$

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

175 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정육각형의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_1이라 하고, H_1의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.

H_1의 각 꼭짓점에서 짧은 대각선을 그려서 만들어진 정육각형을 H_2이라 하고, H_2의 외부에 새로 만들어진 정삼각형을 어둡게 칠한다.

이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, 어둡게 칠해진 모든 정삼각형의 넓이의 합은?[4점]



① $\frac{19}{4}\sqrt{3}$ ② $\frac{21}{4}\sqrt{3}$ ③ $\frac{23}{4}\sqrt{3}$

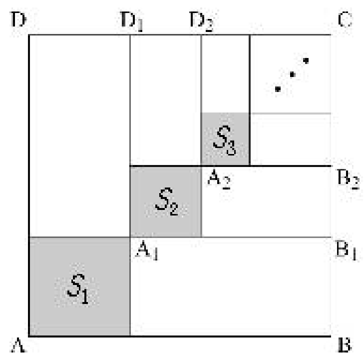
④ $\frac{25}{4}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{27}{4}\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

176 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$에서 선분 AB와 선분 AD를 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_1, 윗부분의 정사각형을 $A_1B_1CD_1$이라 하자.

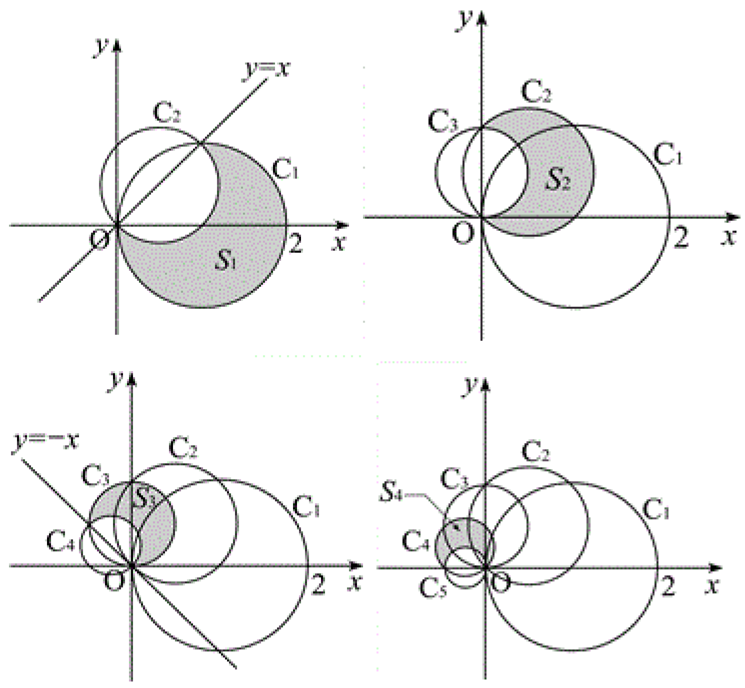
다시 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1B_1과 선분 A_1D_1을 각각 $m:n$으로 내분하는 점을 지나는 두 직선을 그어 만들어지는 4개의 사각형 중 아랫부분 정사각형의 넓이를 S_2, 윗부분의 정사각형을 $A_2B_2CD_2$라 하자.

이와 같은 시행을 무한히 반복할 때, $\sum_{k=1}^{\infty} S_k = \frac{1}{7}$이다. m^2+n^2의 값을 구하시오.(단, m, n은 서로소인 자연수)[4점]



[난이도 : ★★★] [2008년 3월 학력평가]

177 그림과 같이 원점 O와 점 $(2, 0)$을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 직선 $y=x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_2, 원 C_2와 y축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_3이라 하자. 또, 원 C_3과 직선 $y=-x$가 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_4, 원 C_4와 x축이 만나는 두 점을 지름의 양 끝으로 하는 원을 C_5라 하자.



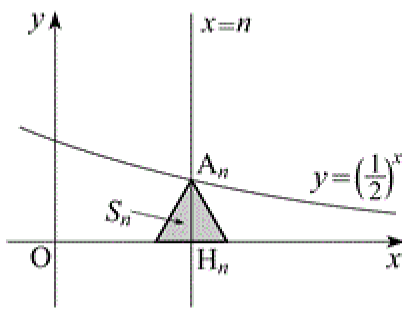
이와 같은 방법으로 중심이 차례로 직선 $y=x$, y축, 직선 $y=-x$, x축 위에 있는 원 C_6, C_7, C_8, C_9, $\cdots$ 를 한없이 만들어 갈 때, 원 C_n의 내부와 원 C_{n+1}의 외부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 S_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]

① $\pi+1$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{4}(\pi+1)$

④ $\frac{3}{2}(\pi+1)$ ⑤ 2π

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

178 그림과 같이 직선 $x=n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 및 x축과 만나는 점을 각각 A_n, H_n이라 하자. 선분 A_nH_n을 높이로 하는 정삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = a$이다. $\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오.[4점]

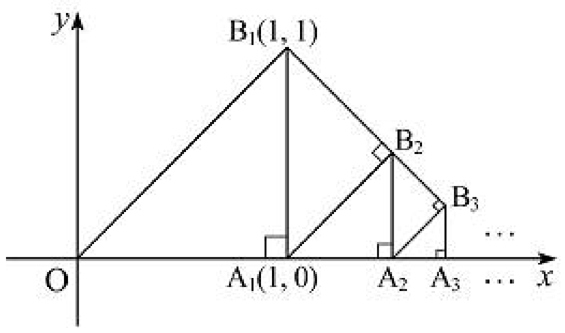


[난이도 : ★★★] [2008년 9월 학력평가]

179 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A_1(1, 0)$, 점 $B_1(1, 1)$과 원점 O를 꼭짓점으로 하는 직각이등변삼각형 OA_1B_1이 있다. 선분 A_1B_1을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_1B_2B_1$을 삼각형 OA_1B_1의 외부에 그린다.

선분 A_1B_2를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_1A_2B_2$를 삼각형 $A_1B_2B_1$의 외부에 그린다. 계속하여 선분 A_2B_2를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 $A_2B_3B_2$를 삼각형 $A_1A_2B_2$의 외부에 그린다.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 직각이등변삼각형 $A_{10}A_{11}B_{11}$의 무게중심을 $G(a, b)$라 하자. 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[4점]

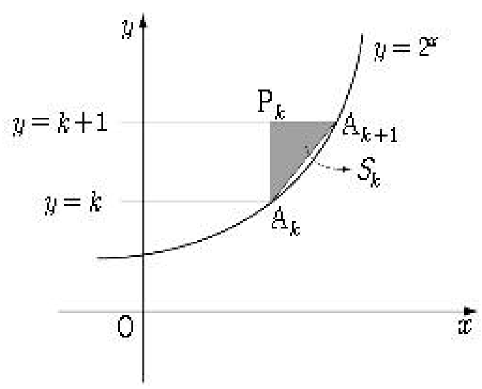


① $\dfrac{2^{10}-2}{2^{10}}$ ② $\dfrac{2^{10}-1}{2^{10}}$ ③ $\dfrac{2^{11}-3}{2^{10}}$

④ $\dfrac{2^{11}-2}{2^{10}}$ ⑤ $\dfrac{2^{11}-1}{2^{10}}$

[난이도 : ★★★] [2008년 7월 학력평가]

180 그림과 같이 곡선 $y=2^x$과 두 직선 $y=k$, $y=k+1$의 교점을 각각 A_k, A_{k+1}이라 하자. 점 A_k를 지나고 y축에 평행한 직선과 직선 $y=k+1$이 만나는 점을 P_k라 하고, 세 점 A_k, A_{k+1}, P_k를 연결한 삼각형의 넓이를 S_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{7} S_k$의 값은?[4점]



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

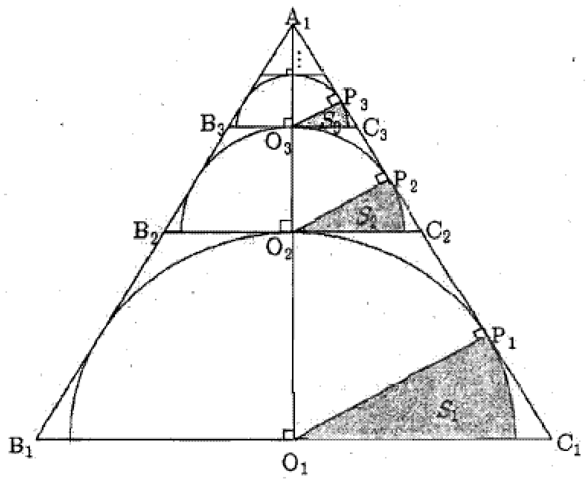
181 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다.

선분 B_1C_1의 중점 O_1을 중심으로 삼각형 $A_1B_1C_1$에 접하는 반원과 선분 A_1C_1의 교점이 P_1일 때, 선분 O_1P_1은 반원의 내부를 부채꼴 두 개로 나눈다. 그 중 작은 부채꼴(어두운 부분)의 넓이를 S_1이라 한다.

선분 A_1O_1과 반원의 교점을 O_2라 두고 점 O_2를 접점으로 하는 접선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1과 만나는 점은 각각 B_2, C_2이다.

정삼각형 $A_1B_2C_2$에서 점 O_2를 중심으로 삼각형 $A_1B_2C_2$에 접하는 새로운 반원과 선분 A_1C_2의 교점이 P_2일 때, 선분 O_2P_2는 반원의 내부를 부채꼴 두 개로 나눈다.

그 중 작은 부채꼴(어두운 부분)의 넓이를 S_2라 한다.



이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 부채꼴의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{12}$

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

182 [공통]한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$가 있다.

그림과 같이 두 선분 AD, DC의 중점을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 두 선분 AQ_1, CP_1의 교점을 D_1이라 하자.

이때, 사각형 $DP_1D_1Q_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 BD_1을 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_1D_1A_1$이라 하자.

두 선분 A_1D_1, D_1C_1의 중점을 각각 P_2, Q_2라 하고, 두 선분 A_1Q_2, C_1P_2의 교점을 D_2라 하자.

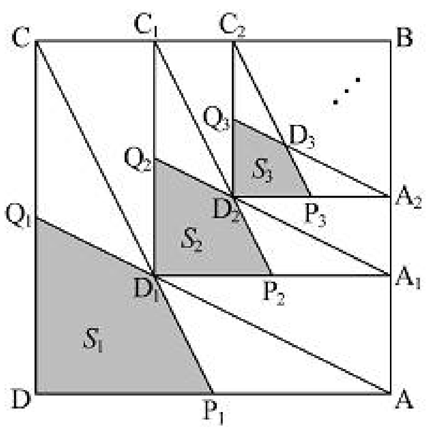
이때, 사각형 $D_1P_2D_2Q_2$의 넓이를 S_2라 하자.

선분 BD_2를 대각선으로 하는 정사각형을 $BC_2D_2A_2$라 하자.

두 선분 A_2D_2, D_2C_2의 중점을 각각 P_3, Q_3이라 하고, 두 선분 A_2Q_3, C_2P_3의 교점을 D_3이라 하자.

이때, 사각형 $D_2P_3D_3Q_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]

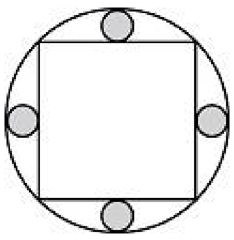


① 1 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{20}{3}$ ⑤ $\frac{36}{5}$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

183 [공통]그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정사각형을 그린다.

원의 내부와 정사각형의 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그려 어둡게 칠한다.

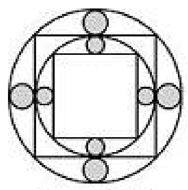


여기에 아래의 과정을 반복한다.

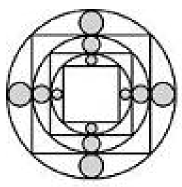
Ⅰ. 안에 있는 정사각형에 내접하는 원을 그리고 그 원에 내접하는 정사각형을 그린다. Ⅱ. 새로 그려진 원의 내부와 정사각형 외부에 모두 접하는 가장 큰 원 4개를 그려 어둡게 칠한다.

정사각형이 n개 일 때, 어두운 부분의 넓이를 S_n이라 하자.

이때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4점]



[$n=2$일 때]

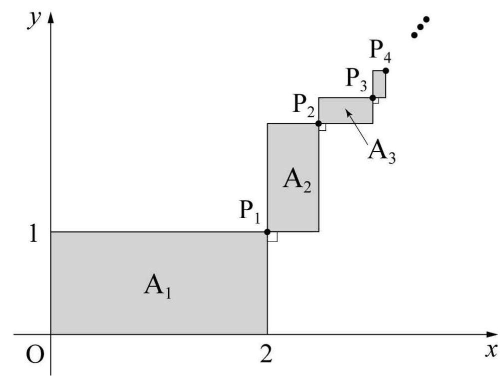


[$n=3$일 때]

① $(\sqrt{13}-2\sqrt{3})\pi$ ② $(2\sqrt{3}-\sqrt{11})\pi$ ③ $(\sqrt{11}-\sqrt{10})\pi$
④ $(\sqrt{10}-3)\pi$ ⑤ $(3-2\sqrt{2})\pi$

[난이도 : ★☆☆] [2007년 10월 학력평가]

184 가로와 세로의 길이가 각각 2, 1인 직사각형 A_1의 가로와 세로의 길이를 맞바꾸고 그 길이를 각각 $\frac{1}{2}$배로 줄인 직사각형을 A_2라 하고, 직사각형 A_2의 가로와 세로의 길이를 맞바꾸고 그 길이를 각각 $\frac{1}{2}$배로 줄인 직사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 방법을 계속하여 만든 직사각형 A_n을 좌표평면 위에 그림과 같이 붙여서 만나는 점을 각각 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n, $\cdots$ 이라 할 때, 점 P_n의 x좌표의 극한값은?[4점]



① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

185 [공통]수열 $\{a_n\}$의 계차수열은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20$일 때, a_1의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

186 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n}$의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 11월 학력평가]

187 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=3$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n+2}{2a_n+n-4}$의 값은?[3점]

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

188 이차 함수 $y=2x^2+x-4$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^n$의 합은?[3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

189 무한수열 $a_1, 2a_2, 2^2a_3, \cdots, 2^{n-1}a_n, \cdots$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $5n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

190 $\tan\frac{\theta}{2}=3$일 때, 급수 $1+\sin\theta+\sin^2\theta+\sin^3\theta+\cdots$의 합을 S라 하자. $20S$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

191 첫째항이 1인 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하고, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{4}{5}$가 성립한다. 이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$의 합은?[3점]

① $\frac{64}{15}$　② 5　③ $\frac{32}{5}$
④ $\frac{15}{2}$　⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

192 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$이 모두 수렴할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

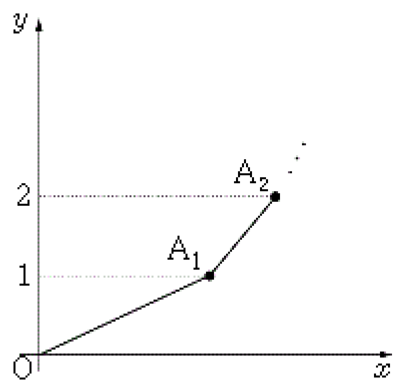
[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=1$
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

193 [공통]자연수 n에 대하여 점 A_n은 직선 $y=n$위에 있다.

선분 A_0A_1의 기울기가 $\frac{3}{4}$이고, 선분 A_nA_{n+1}의 기울기는 선분 $A_{n-1}A_n$의 기울기의 $\frac{4}{3}$배이다. 점 A_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은?(단, 원점 $O=A_0$)[3점]



① $\frac{16}{3}$　② 5　③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{13}{3}$　⑤ 4

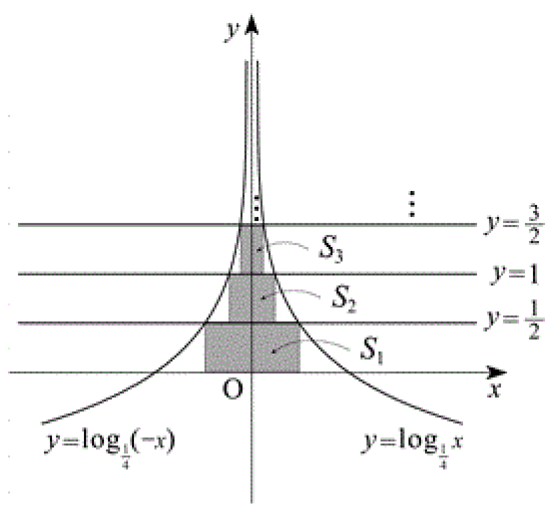
[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

194 [공통]두 곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 x축 위에 있는 직사각형의 넓이를 S_1이라 하자.

두 곡선이 직선 $y=1$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=\frac{1}{2}$위에 있는 직사각형의 넓이를 S_2라 하자.

두 곡선이 직선 $y=\frac{3}{2}$과 만나는 두 점을 꼭짓점으로 하고, 한 변이 직선 $y=1$위에 있는 직사각형의 넓이를 S_3이라 하자.

위와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 직사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[3점]

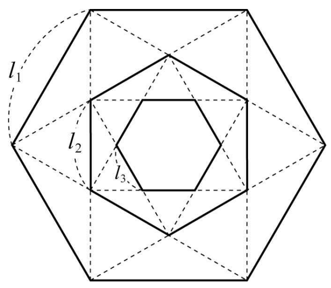


① $\frac{5}{8}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{7}{8}$

④ 1　⑤ $\frac{9}{8}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

195 그림과 같이 한변의 길이가 l_1인 정육각형의 꼭짓점을 연결하여 만든 정육각형의 한 변의 길이를 l_2, 한변의 길이가 l_2인 정육각형의 꼭짓점을 연결하여 만든 정육각형의 한 변의 길이를 l_3, $\cdots$ 이와 같이 무한히 반복한다. $l_1=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[4점]



① $6+2\sqrt{3}$ ② $6+3\sqrt{3}$ ③ $8+2\sqrt{3}$
④ $9+3\sqrt{3}$ ⑤ $8+4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

196 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-3n-1}{2a_n+2n+1}$의 값은?[3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1
④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

197 그림은 단계별로 만들어지는 어떤 입체를 위에서 본 모양과 앞에서 본 모양을 나타낸 것이다.

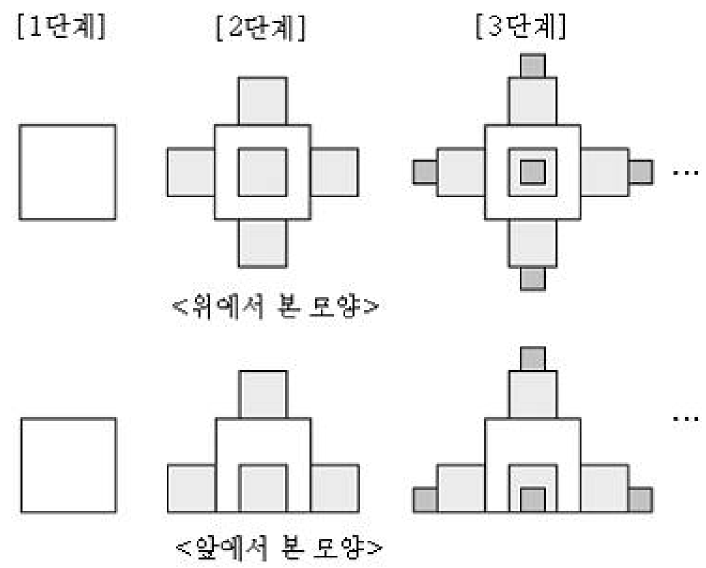
[1단계]한 모서리의 길이가 1인 정육면체를 평면 위에 놓는다.

[2단계][1단계]입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정육면체를 위, 왼쪽, 아래, 앞, 뒤에 각각 1개씩 붙인다.

[3단계][2단계]입체에 한 모서리의 길이가 $\frac{1}{2^2}$인 정육면체를 위, 왼쪽, 아래, 앞, 뒤에 각각 1개씩 붙인다.

⋮

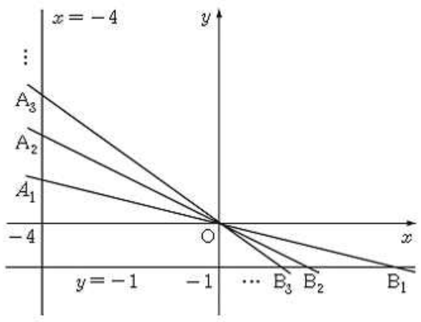
이와 같은 과정을 계속하여[n단계]에서 얻어진 입체의 부피를 V_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} V_n$의 값은?[4점]



① $\frac{8}{7}$ ② $\frac{9}{7}$ ③ $\frac{10}{7}$
④ $\frac{11}{7}$ ⑤ $\frac{12}{7}$

[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

198 원점 $O(0, 0)$과 직선 $x=-4$위에 점 $A_1(-4, 1)$, $A_2(-4, 2)$, $A_3(-4, 3)$, $\cdots$ 이 있다. 직선 $y=-1$과 직선 OA_1, 직선 OA_2, 직선 OA_3, $\cdots$ 과의 교점을 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$ 이라 하자. $\triangle A_nOA_{n+1}$의 넓이를 S_n, $\triangle B_nOB_{n+1}$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_kT_k$의 값은?[4점]



① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

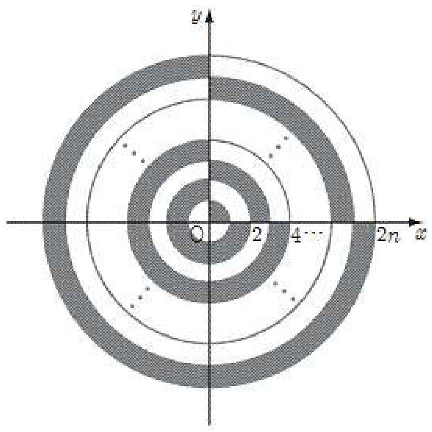
199 [공통]중심이 원점이고 반지름의 길이가 $1, 2, 3, \cdots, 2n$인 동심원이 있다.

[1단계]반지름의 길이가 1인 원 내부의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 1인 원과 반지름의 길이가 2인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

[2단계]반지름의 길이가 2인 원과 반지름의 길이가 3인의 원사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 3인 원과 반지름의 길이가 4인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.

⋮

[n단계]반지름의 길이가 $2n-2$인 원과 반지름의 길이가 $2n-1$인원 사이의 1사분면에 검은색을 칠하고, 반지름의 길이가 $2n-1$인 원과 반지름의 길이가 $2n$인 원 사이의 2, 3, 4사분면에도 검은색을 칠한다.



이와 같이 n단계까지 검은색으로 칠한 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}$의 값은?[4점]

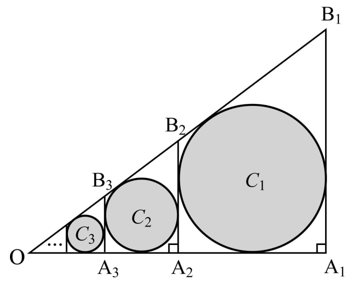
① $\frac{3}{4}\pi$ ② π ③ $\frac{4}{3}\pi$
④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

[난이도 : ★★★] [2007년 9월 학력평가]

200 그림과 같이 세 변의 길이가 $\overline{OA_1}=8$, $\overline{A_1B_1}=6$, $\overline{OB_1}=10$인 직각삼각형 OA_1B_1에 내접하는 원 C_1을 만든다.

원 C_1에 접하면서 변 OA_1에 수직인 직선이 두 변 OA_1, OB_1과 만나는 점을 각각 A_2, B_2라 하고, $\triangle OA_2B_2$에 내접하는 원 C_2를 만든다.

원 C_2에 접하면서 변 OA_1에 수직인 직선이 두 변 OA_1, OB_1과 만나는 점을 각각 A_3, B_3이라 하고, $\triangle OA_3B_3$에 내접하는 원 C_3을 만든다.



이와 같은 과정을 한없이 계속하여 만든 원 $C_1, C_2, C_3, \cdots$의 넓이를 각각 $S_1, S_2, S_3, \cdots$이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?[4점]

① $\frac{16}{3}\pi$　② 6π　③ $\frac{20}{3}\pi$　④ 7π　⑤ $\frac{22}{3}\pi$

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

201 무한수열의 극한값과 급수의 성질이다.[보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.(단, α, β는 상수)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 수렴한다.(단, α는 상수)

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

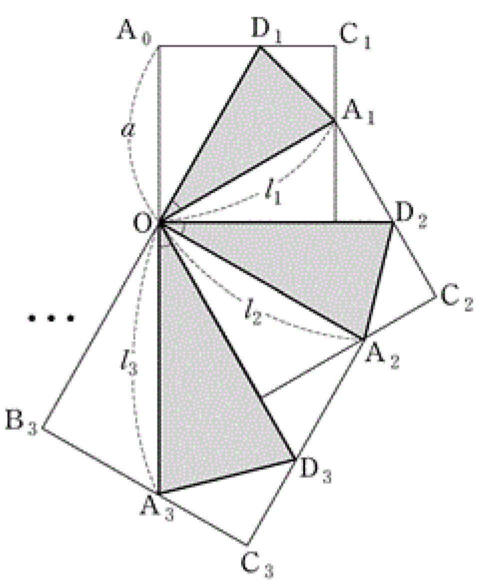
202 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 a인 정사각형 $OB_1C_1A_0$이 있다.

삼각형 OA_1D_1이 $\angle D_1OA_1 = 30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_1C_1, A_0C_1 위에 각각 점 A_1, D_1을 잡고 변 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.

선분 OA_1을 한 변으로 하는 정사각형 $OB_2C_2A_1$에서 삼각형 OA_2D_2가 $\angle D_2OA_2 = 30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_2C_2, A_1C_2 위에 각각 점 A_2, D_2를 잡고 변 OA_2의 길이를 l_2라 하자.

선분 OA_2를 한 변으로 하는 정사각형 $OB_3C_3A_2$에서 삼각형 OA_3D_3이 $\angle D_3OA_3 = 30^\circ$인 이등변삼각형이 되도록 변 B_3C_3, A_2C_3 위에 각각 점 A_3, D_3을 잡고 변 OA_3의 길이를 l_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 이등변삼각형 OA_nD_n에서 변 OA_n의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} = \sqrt{3}$일 때, a의 값은?[4점]



① $\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{3}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $3+\sqrt{3}$ ⑤ $6+\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

203 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $OA_1B_1C_1$에서 $\angle O$의 3등분선이 $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하자.

점 O가 중심이고 $\overline{OP_1}$을 반지름으로 하는 부채꼴 OP_1Q_1을 그린다.

[그림 1]에서 도형 $B_1Q_1P_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

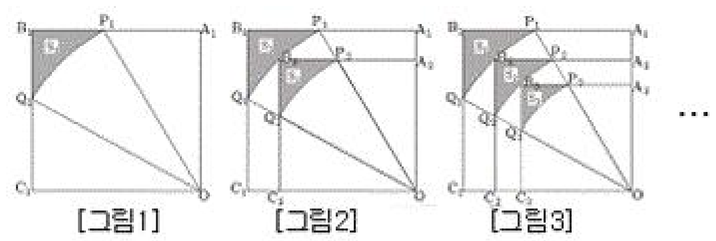
호 P_1Q_1의 중점 B_2, $\overline{OA_1} // \overline{C_2B_2}$인 $\overline{OC_1}$ 위의 점 C_2, $\overline{OC_1} // \overline{A_2B_2}$인 $\overline{OA_1}$ 위의 점 A_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그린다.

$\overline{OP_1}$과 $\overline{A_2B_2}$가 만나는 점을 P_2, $\overline{OQ_1}$과 $\overline{B_2C_2}$가 만나는 점을 Q_2라 하자.

점 O가 중심이고 $\overline{OP_2}$를 반지름으로 하는 부채꼴 OP_2Q_2를 그린다.

[그림 2]에서 도형 $B_2Q_2P_2$의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 합은?[4점]



① $-3+\pi$ ② $4-\pi$ ③ $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
④ $3-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ⑤ $4-\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

204 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$은 수렴한다.
ㄴ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\neq 0$이다.
ㄷ. 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

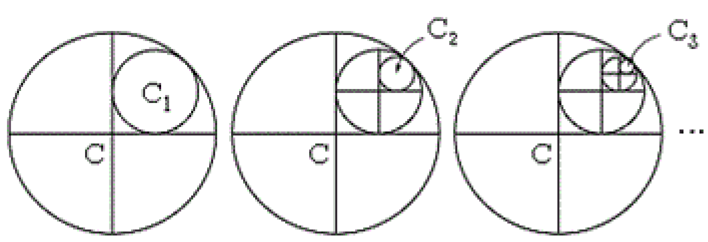
[난이도 : ★★★] [2007년 4월 학력평가]

205 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다.

원 C를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_1, 원 C_1을 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2를 사분원으로 나누어 한 사분원에 내접하는 원을 C_3,

⋮

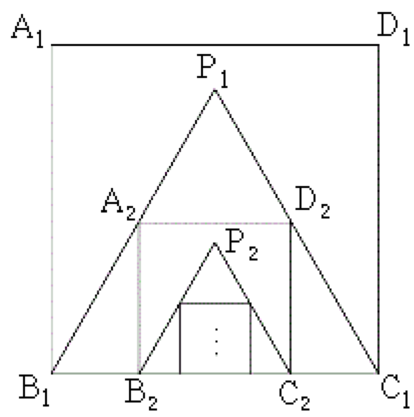
이와 같은 과정을 계속하여 얻어진 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r_k$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2007년 7월 학력평가]

206 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 내부에 선분 B_1C_1을 한 변으로 하는 정삼각형 $P_1B_1C_1$을 만든다. 다시 선분 B_1C_1 위에 정삼각형 $P_1B_1C_1$에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 만들어지는 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



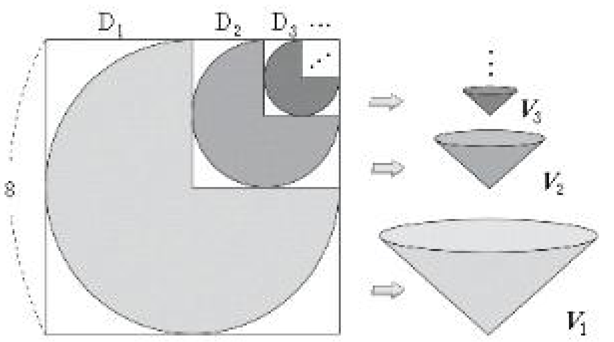
① $4\sqrt{3}+15$ ② $5\sqrt{3}+10$ ③ $5\sqrt{3}+25$
④ $6\sqrt{3}+5$ ⑤ $6\sqrt{3}+10$

[난이도 : ★★★] [2007년 11월 학력평가]

207 한 변의 길이가 8인 정사각형 D_1이 있다. 그림과 같이 정사각형 D_1의 네 변에 접하며 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴로 만든 원뿔의 부피를 V_1, 남은 정사각형 $D2$의 네 변에 접하며 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴로 만든 원뿔의 부피를 V_2, 남은 정사각형 $D3$의 네 변에 접하며 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴로 만든 원뿔의 부피를 V_3라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 만들어진 원뿔의 부피를 V_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$의 값은?

(단, 부채꼴로 원뿔을 만들 때, 겹쳐지는 부분은 없도록 한다.)[4점]



① $\frac{16\sqrt{7}}{7}\pi$ ② $\frac{20\sqrt{7}}{7}\pi$ ③ $\frac{24\sqrt{7}}{7}\pi$

④ $\frac{32\sqrt{7}}{7}\pi$ ⑤ $\frac{36\sqrt{7}}{7}\pi$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 9월 학력평가]

208 모든 항이 양수인 무한수열 $\{a_n\}$이 다음 세 조건을 모두 만족할 때 a_5의 값은?[4점]

(가) $(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2} (n=1, 2, 3, \cdots)$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2(a_1 + a_2)$

(다) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2(a_1 + a_3)$

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

209 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$의 합은?[3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

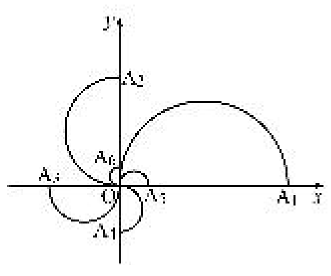
210 무한수열 $\{a_n\}$이 와 같을 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하는 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $3, 3, 3, \cdots 3, \cdots$
ㄴ. $\left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdots$
ㄷ. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \cdots$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

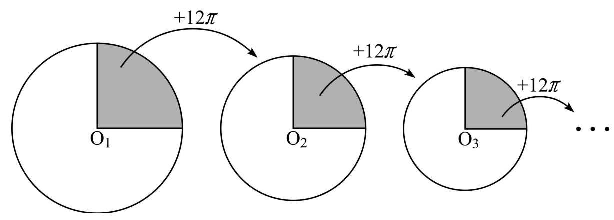
211 그림과 같이 x축 위의 점 $A_1(6\pi-12, 0)$에 대하여 $\overline{OA_1}$을 지름으로 하는 반원을 제 1사분면에 그리고, $\overline{OA_1}$= 호OA_2인 점 A_2를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_2}$를 지름으로 하는 반원을 제 2사분면에 그린다. 또, $\overline{OA_2}$= 호OA_3인 점 A_3를 x축 위에 잡아 $\overline{OA_3}$를 지름으로 하는 반원을 제 3사분면에 그리고, $\overline{OA_3}$= 호OA_4인 점 A_4를 y축 위에 잡아 $\overline{OA_4}$를 지름으로 하는 반원을 제 4사분면에 그린다. 같은 방법으로 제 1사분면, 제 2사분면, ...에 반원을 계속하여 그려나갈 때, 반원들의 호의 길이의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 호OA_n의 값은?(단, 호OA_n은 $\overline{OA_n}$을 지름으로 하는 반원의 호이고 $n=1, 2, 3, \cdots$ 이다.)[4 점]



① 9π　② $8\pi+1$　③ π^2+10
④ $2\pi^2+3$　⑤ $3\pi^2$

[난이도 : ★★★] [2006년 3월 학력평가]

212 [공통]넓이가 20π인 원 O_1을 그리고, 원 O_1의 사분원의 넓이보다 12π더 넓은 원 O_2를 그린다. 또 원 O_2의 사분원의 넓이보다 12π더 넓은 원 O_3를 그린다. 이와 같이 원 O_n의 사분원의 넓이보다 12π더 넓은 원 O_{n+1}을 계속하여 그려 간다. 원 O_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[4 점]



① 14π　② 15π　③ 16π
④ 17π　⑤ 18π

[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

213 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n을 $|x|+|y|=n$으로 둘러싸인 좌표평면 위의 도형의 넓이라고 하자.

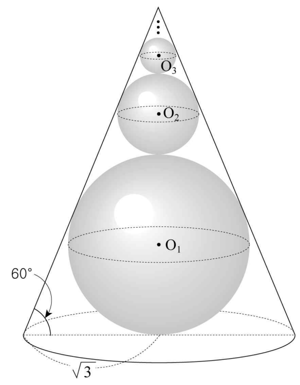
이때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{a_n a_{n+1}}$의 합을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

214 [공통]그림은 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이고 밑면과 모선 사이의 각도가 60인 직원뿔이다.

구 O_1이 직원뿔에 내접하고, 구 O_2는 구 O_1에 외접하고 직원뿔의 옆면과 접한다.

이와 같은 방법으로 $O_3, O_4, O_5, \cdots$ 를 한없이 만들어 나갈 때, 구들의 부피의 합은?[4점]



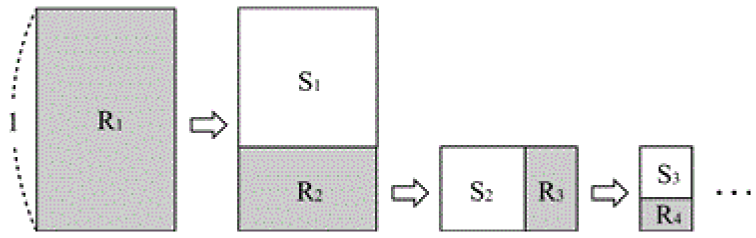
① $\frac{16}{13}\pi$ ② $\frac{18}{13}\pi$ ③ $\frac{20}{13}\pi$
④ $\frac{22}{13}\pi$ ⑤ $\frac{24}{13}\pi$

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

215 직사각형 중에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형을 잘라내고 남은 직사각형이 처음의 직사각형과 서로 닮음이 되는 것을 황금직사각형이라고 한다.

그림과 같이 긴 변의 길이가 1인 황금직사각형 R_1에서 짧은 변을 한 변으로 하는 정사각형 S_1을 잘라내고 남은 직사각형을 R_2, 직사각형 R_2에서 정사각형 S_2를 잘라내고 남은 직사각형을 R_3이라고 하자. 이와 같은 방법으로 직사각형 $R_4, R_5, R_6, \cdots$ 을 한없이 만들어 간다.

직사각형 $R_n (n=1, 2, 3, \cdots)$의 둘레의 길이 l_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = kl_1$일 때, 상수 k의 값은?[4점]

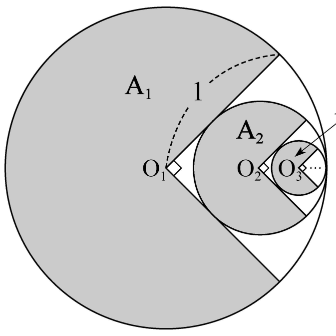


① $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
③ $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ ④ $3-\sqrt{5}$
⑤ $3+\sqrt{5}$

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 학력평가]

216 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O_1에서 서로 수직인 두 반지름을 그어 중심각의 크기가 각각 270°, 90°인 부채꼴 A_1, B_1을 만든 후, 부채꼴 B_1에 내접하는 원 O_2를 그린다.

다시 원 O_2에서 서로 수직인 두 반지름을 그어 중심각의 크기가 각각 270°, 90°인 부채꼴 A_2, B_2를 만든 후, 부채꼴 B_2에 내접하는 원 O_3을 그린다. 이와 같은 과정을 한없이 계속하여 얻어진 부채꼴 $A_1, A_2, A_3, \cdots$의 넓이를 각각 $S_1, S_2, S_3, \cdots$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $\frac{(3\sqrt{2}+2)\pi}{8}$ ② $\frac{(3\sqrt{2}+3)\pi}{8}$ ③ $\frac{(3\sqrt{2}-1)\pi}{4}$
④ $\frac{(\sqrt{3}+2)\pi}{4}$ ⑤ $\frac{(3\sqrt{3}+2)\pi}{8}$

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

217 [공통]다음과 같이 무한히 나열된 수를 모두 더하면?[4점]

9

0.9 0.9

0.09 0.09 0.09

0.009 0.009 0.009 0.009

0.0009 0.0009 0.0009 0.0009 0.0009

⋮ ⋮ ⋮

① $\frac{98}{9}$ ② 11 ③ $\frac{100}{9}$
④ $\frac{101}{9}$ ⑤ $\frac{34}{3}$

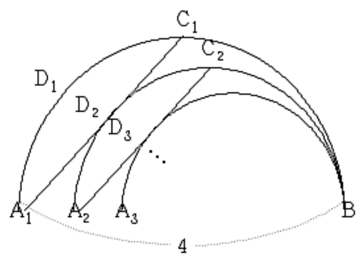
[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

218 [공통]그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 D_1이 있다.

호 A_1B를 이등분하는 점을 C_1, 점 B를 지나면서 선분 A_1C_1과 접하고 중심이 선분 A_1B위에 있는 반원을 D_2, 반원 D_2가 선분 A_1B와 만나는 점을 A_2라 하자.

호 A_2B를 이등분하는 점을 C_2, 점 B를 지나면서 선분 A_2C_2와 접하고 중심이 선분 A_1B위에 있는 반원을 D_3, 반원 D_3이 선분 A_1B와 만나는 점을 A_3이라 하자.

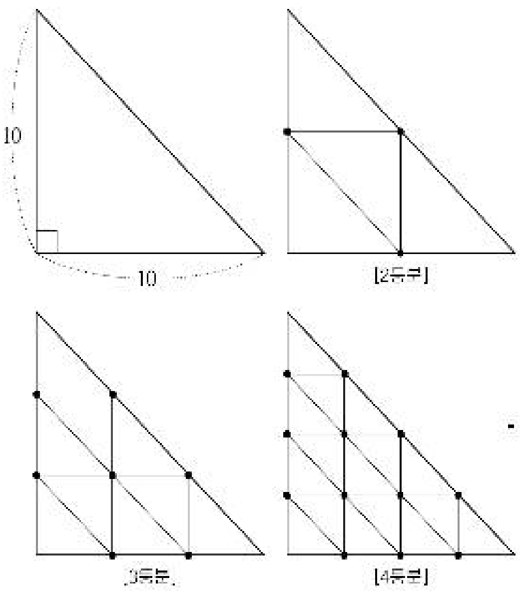
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 반원 D_n의 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은?[4점]



① $2(1+\sqrt{2})\pi$ ② $2(2+\sqrt{2})\pi$ ③ $2(3+\sqrt{2})\pi$
④ $2(2+2\sqrt{2})\pi$ ⑤ $2(3+2\sqrt{2})\pi$

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

219 [공통]그림은 두 변의 길이가 10인 직각이등변삼각형이다. 세 변을 n등분하는 점에서 각 변에 평행한 선분을 그어 만들어지는 가장 작은 직각이등변삼각형 한 개의 넓이를 a_n, 선분들의 교점의 총 개수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

220 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\left(a_1-\frac{2}{1^2}\right)+\left(a_2-\frac{2+4}{3^2}\right)+\cdots+\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}+\cdots \text{ 이}$$

수렴할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점]

① 0 ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2006년 6월 학력평가]

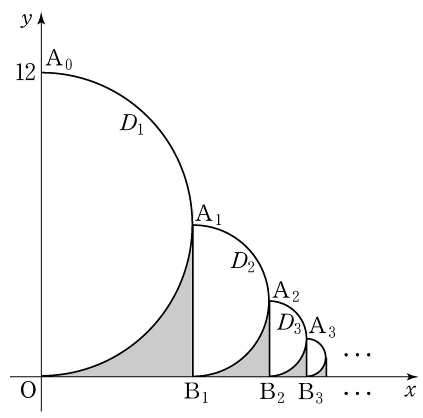
221 [공통]그림과 같이 원점과 점 $A_0(0, 12)$를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 아래 반원을 D_1이라 하자.

원점을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_1과 제 1사분면에서 만나는 점을 A_1, 점 A_1에서 x축에 내린 수선의 발을 B_1이라 하고, 반원 D_1, x축, 선분 A_1B_1으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원의 아래 반원을 D_2라 하자.

점 B_1을 지나고 기울기가 1인 직선이 D_2와 제 1사분면에서 만나는 점을 A_2, 점 A_2에서 x축에 내린 수선의 발을 B_2라 하고, 반원 D_2, x축, 선분 A_2B_2로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?[4점]



① $9(4-\pi)$ ② $12(4-\pi)$ ③ $15(4-\pi)$ ④ $4(8-\pi)$ ⑤ $6(8-\pi)$

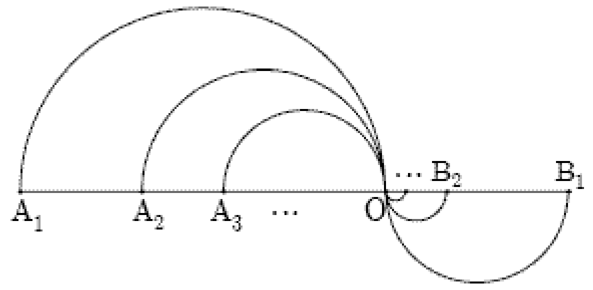
[난이도 : ★★★] [2006년 9월 학력평가]

222 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

223 [공통]그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$이고 점 O는 선분 $\overline{A_1B_1}$을 $2:1$로 내분하는 점이다. 점 A_2는 선분 OA_1을 $2:1$로 내분하는 점, 점 A_3은 선분 OA_2를 $2:1$로 내분하는 점, ..., 점 A_{n+1}은 선분 OA_n을 $2:1$로 내분하는 점이다. 점 B_2는 선분 OB_1을 $1:2$로 내분하는 점, 점 B_3은 선분 OB_2를 $1:2$로 내분하는 점, ..., 점 B_{n+1}은 선분 OB_n을 $1:2$로 내분하는 점이다. 선분 OA_n을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 s_n, 선분 OB_n을 지름으로 하는 반원의 호의 길이를 t_n이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-t_n)$의 합은?[4점]



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{3\pi}{4}$

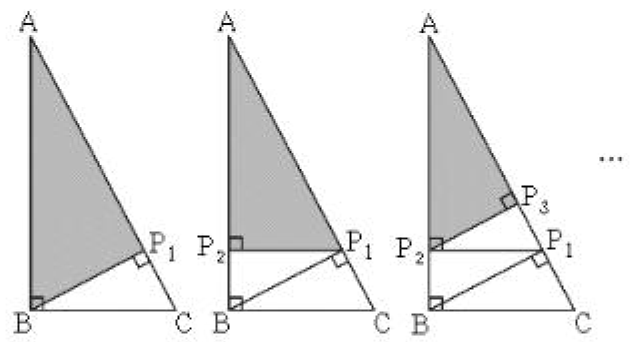
[난이도 : ★★★] [2006년 11월 학력평가]

224 [그림 1]과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 대변 AC에 내린 수선의 발을 P_1, $\triangle ABP_1$의 넓이를 S_1이라 하자.

[그림 2]와 같이 직각삼각형 $\triangle ABP_1$의 꼭짓점 P_1에서 대변 AB에 내린 수선의 발을 P_2, $\triangle AP_1P_2$의 넓이를 S_2라 하자.

[그림 3]과 같이 직각삼각형 $\triangle AP_1P_2$의 꼭짓점 P_2에서 대변 AP_1에 내린 수선의 발을 P_3, $\triangle AP_2P_3$의 넓이를 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 $\triangle AP_{n-1}P_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 합은?(단, $B=P_0$)[4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2006년 9월 학력평가]

225 자연수 n에 대하여 이차방정식

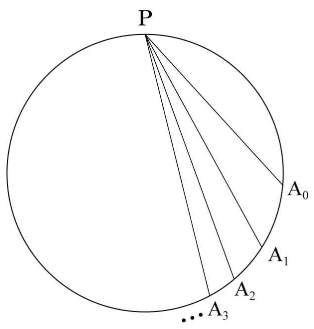
$x^2+(\sqrt{n}+1)x-\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{3}{4}=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

226 반지름의 길이가 2인 원 위의 점 P에 대하여

$\angle A_0PA_1 = \frac{\pi}{6}$, $\angle A_1PA_2 = \frac{\pi}{18}$, $\angle A_2PA_3 = \frac{\pi}{54}$, $\cdots$ 이 되도록 점 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 을 잡을 때, 호A_0A_1, 호A_1A_2, 호A_2A_3, $\cdots$ 의 길이를 각각 $l_1, l_2, l_3, \cdots$ 라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은?[4점]



① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ $\frac{3}{2}\pi$
④ 2π　⑤ $\frac{5}{2}\pi$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 3월 학력평가]

227 급수 $\log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[4]{2} + \log_2 \sqrt[8]{2} + \cdots$ 의 합은?[2점]

① 1　② 2　③ 4
④ 8　⑤ 16

[난이도 : ★☆☆] [2005년 4월 학력평가]

228 [공통]무한수열 $\{a_n\}$을 $a_n = \begin{cases} 0, & (n=3k-2) \\ 1, & (n=3k-1) \\ 2, & (n=3k) \end{cases}$ (단, k는 자연수)로 정의할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^n}$ 의 값은?[4점]

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{2}{21}$　③ $\frac{13}{32}$
④ $\frac{17}{54}$　⑤ $\frac{29}{63}$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 7월 학력평가]

229 [공통]등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 합이 -1일 때, 다음 중 상수 a의 값이 될 수 있는 것은?[3점]

① $-\frac{7}{2}$　② $-\frac{5}{2}$　③ $-\frac{3}{2}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 4월 학력평가]

230 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?[4점]

① $\frac{11}{21}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{31}{21}$
④ $\frac{40}{21}$　⑤ $\frac{50}{21}$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 10월 학력평가]

231 급수 $(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)+\cdots+(a_n-1)+\cdots$ 이 10에 수렴하고 $S_n = (a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n + S_n + 2)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

232 [공통] K보험사에는 다음과 같은 종신연금 상품이 있다.

> [1]최초 가입시 단 한번 납입한 1억 원을 연이율 5%, 1년 단위의 복리로 계산하여 10년 후의 원리합계를 연금 준비금으로 한다.
> [2]가입하여 10년이 지난 후부터 매년 A원씩 연금을 영구히 받는다.
> [3]n번째의 연금 A원을 연금 지급이 시작된 해의 가치로 환산하면 $\dfrac{A}{(1+0.05)^{n-1}}$원이다.
> [4]매년 받을 수 있는 연금을 연금 지급이 시작된 해의 가치로 환산하여 모두 더한 금액이 연금 준비금과 같아지도록 한다.

2005년 초에 이와 같은 종신연금에 가입했을 때, 2015년 초부터 매년 받을 수 있는 연금액은?(단, $1.05^9=1.55$로 계산한다.)[4점]

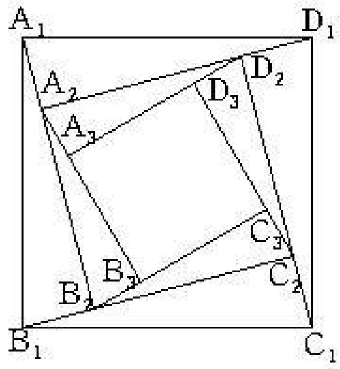
① 675만원　② 725만원　③ 775만원
④ 825만원　⑤ 875만원

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

233 [공통]급수 $a_1+\left(a_2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(a_3-\dfrac{2}{3}\right)+\left(a_4-\dfrac{3}{4}\right)+\cdots$가 수렴할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

234 [공통]그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$내부에 합동인 4개의 직각삼각형의 넓이의 합과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이가 같도록 만들고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$내부에 같은 방법으로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$을 만든다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하여 만들어진 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n$의 합은?[3점]



① 2　② $\dfrac{9}{4}$　③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{11}{4}$　⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

235 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8}{n(n+2)}$의 합은?[3점]

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

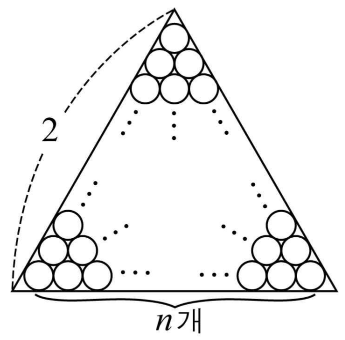
[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

236 급수 $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5}{4}\right)+\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{6}{5}\right)+\cdots$의 합은?[3점]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1　⑤ $\dfrac{3}{2}$

[난이도 : ★★★] [2005년 0월 학력평가]

237 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, ..., n개가 배열되어 있다. 이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다. 자연수 n의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가?[4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

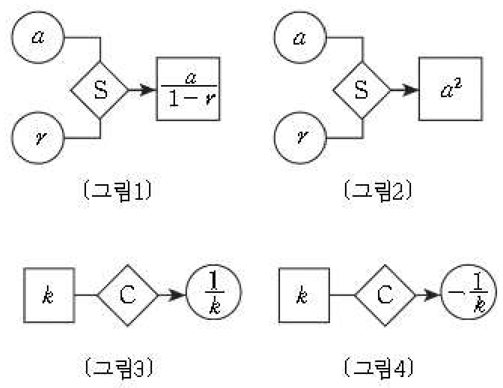
④ $\frac{2}{5}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[난이도 : ★★★] [2005년 10월 학력평가]

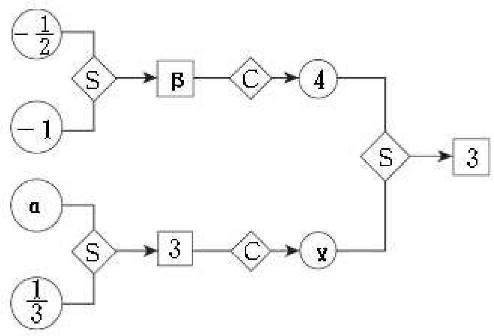
238 [공통]첫째항이 1인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 α, β라 하자. 이때, α, β를 이차방정식 $3x^2-7x+2=0$의 두 근이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

239 두 실수 a, r에 대하여 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 수렴하면 〔그림 1〕, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$이 발산하면 〔그림 2〕와 같이 나타내고, 0이 아닌 실수 k에 대하여 $|k| \le 1$인 경우 〔그림 3〕, $|k|>1$인 경우에는 〔그림 4〕와 같이 나타내기로 한다.



아래 그림의 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?[4점]

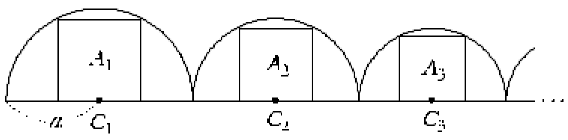


① $\frac{23}{12}$ ② $\frac{25}{12}$ ③ $\frac{9}{4}$

④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{31}{12}$

[난이도 : ★★★] [2005년 4월 학력평가]

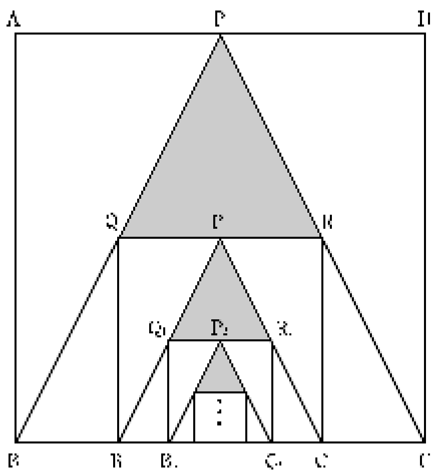
240 [공통]그림과 같이 반지름의 길이가 a인 반원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하자. A_1의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_2에 내접하는 정사각형을 A_2라 하자. A_2의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 반원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_3라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 정사각형을 만들어 나갈 때, 이들 정사각형의 넓이의 합은?[4점]



① a^2 ② $2a^2$ ③ $3a^2$
④ $4a^2$ ⑤ $5a^2$

[난이도 : ★★★] [2005년 10월 학력평가]

241 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$에서 변 AD의 중점을 P, 변 BP와 변 CP의 중점을 각각 Q, R이라 하고 점 Q, R에서 변 BC에 수선을 그어 만나는 점을 각각 B_1, C_1이라 하자. 이와 같은 방법을 한없이 되풀이 할 때, $\triangle PQR + \triangle P_1Q_1R_1 + \triangle P_2Q_2R_2 + \cdots$ 의 값은?[4점]



① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

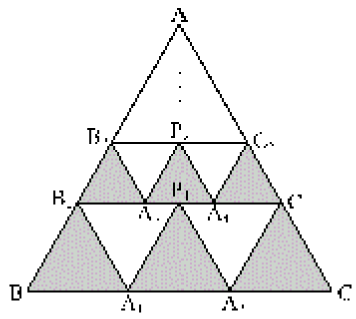
[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

242 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다.

선분 BC의 삼등분 점을 A_1, A_2라 하고 선분 BA_1, A_1A_2, A_2C를 각각 한 변으로 하는 정삼각형 B_1BA_1, $P_1A_1A_2$, C_1A_2C를 만든다.

다시 삼각형 AB_1C_1에서 선분 B_1C_1의 삼등분 점을 A_3, A_4라 하고 같은 방법으로 세 정삼각형 $B_2B_1A_3$, $P_2A_3A_4$, $C_2A_4C_1$을 만든다.

이와 같은 방법으로 계속하여 삼각형을 만들어 나갈 때, 어두운 부분의 넓이의 합은?[4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{20}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

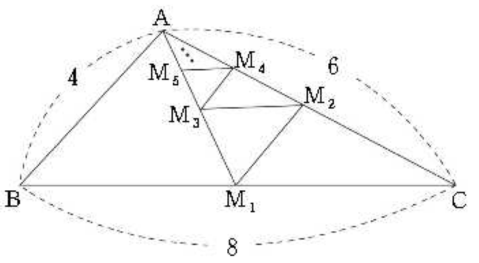
[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

243 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CA}=6$인 $\triangle ABC$가 있다.

선분 BC의 중점을 M_1, 선분 AC의 중점을 M_2, 선분 AM_1의 중점을 M_3, 선분 AM_2의 중점을 M_4, 선분 AM_3의 중점을 M_5,
$\vdots$

선분 AM_n의 중점을 M_{n+2}, $\vdots$

이라 할 때, $\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\overline{M_3M_4}+\cdots$ 의 값은?[4점]



① $4+2\sqrt{3}$ ② $6+2\sqrt{2}$ ③ $6+\sqrt{10}$
④ $8+2\sqrt{2}$ ⑤ $8+\sqrt{10}$

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

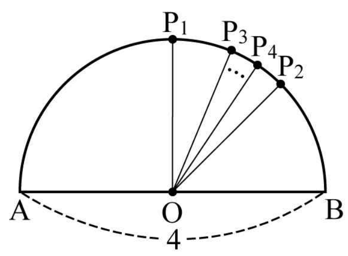
244 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB가 지름이고 점 O가 중심인 반원이 있다.

호 AB의 이등분점을 P_1, 호 BP_1의 이등분점을 P_2, 호 P_1P_2의 이등분점을 P_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 계속하여 호 $P_nP_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots)$의 이등분점을 P_{n+2}라 하자.

부채꼴 AOP_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

(단, 부채꼴에서 중심각의 이등분선이 호와 만나는 점을 호의 이등분점이라 한다.)[4점]

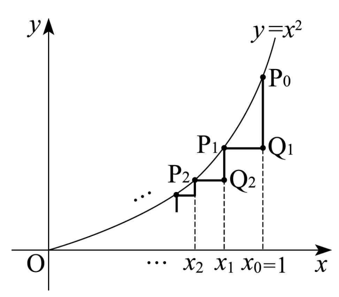


① $\frac{6}{5}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{7}{5}\pi$
④ $\frac{8}{5}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

245 $x_0=1$, $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{5}{8}$, $\cdots$, $x_n=\frac{2^n+1}{2^{n+1}}$, $\cdots$ 에 대하여 점 $P_0(1, 1)$과 $P_n\left(x_n, x_n^2\right)$, $Q_n\left(x_{n-1}, x_n^2\right)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$을 그림과 같이 나타낸다.

급수 $\overline{P_0Q_1}+\overline{Q_1P_1}+\overline{P_1Q_2}+\overline{Q_2P_2}+\overline{P_2Q_3}+\cdots$ 의 합을 S라 할 때 $100S$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2005년 4월 학력평가]

246 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=\frac{1}{3}$ 일 때,

$\lim_{n\to\infty} a_n$ 의 값은?[3점]

① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}$

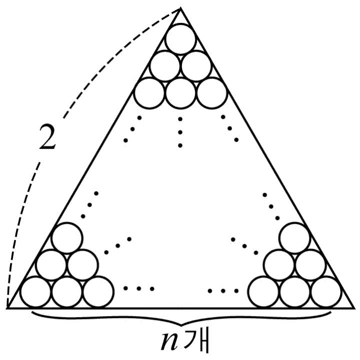
④ $\frac{2}{3}$　⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2005년 10월 학력평가]

247 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, $\cdots$, n개가 배열되어 있다.

이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다.

자연수 n의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가? [4점]



① $\sqrt{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{\pi}{3}$

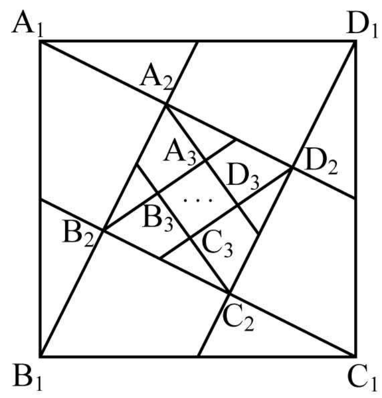
④ $\frac{2}{5}\pi$　⑤ $\frac{\pi}{2}$

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 학력평가]

248 그림과 같이 넓이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 각 변의 중점과 꼭짓점을 이은 선분으로 둘러싸인 정사각형을 $A_2B_2C_2D_2$라 하고, 다시 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 각 변의 중점과 꼭짓점을 이은 선분으로 둘러싸인 정사각형을 $A_3B_3C_3D_3$이라 하자.

이와 같은 방법으로 계속하여 만든 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)의 넓이를 S_n이라 할 때,

$100\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ 의 값을 구하시오.[4점]



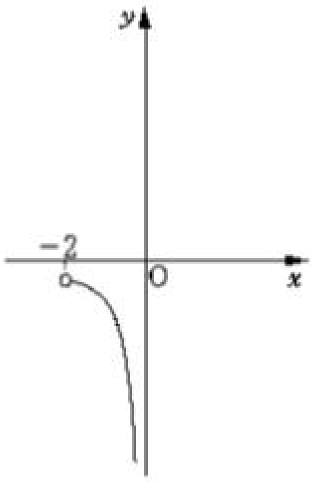
[난이도 : ★☆☆] [2004년 9월 학력평가]

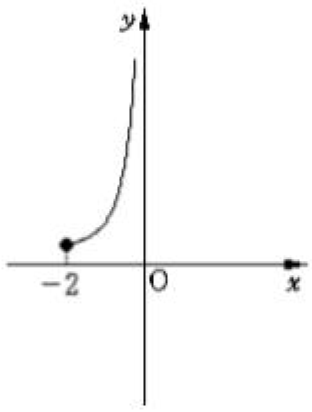
249 급수 $P(x)=x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 와 이 급수의 제 n항까지의 부분합 $P_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n$에 대하여

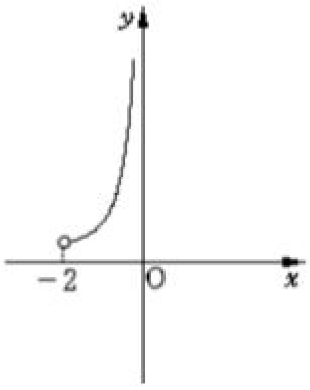
$P\left(\frac{1}{2}\right)-P_n\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{10^{10}}$ 을 만족하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.(단, $\log 2=0.3010$로 계산한다.)[4점]

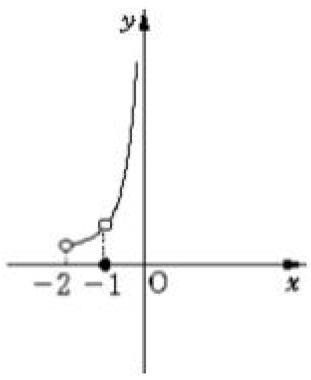
[난이도 : ★☆☆] [2004년 4월 학력평가]

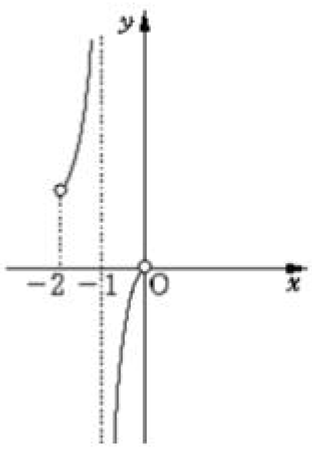
250 급수 $1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^{n-1}+\cdots$ 가 수렴할 때, 그 합을 $f(x)$라고 하자. 이때, $y=f(x)$의 그래프는?[3점]

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

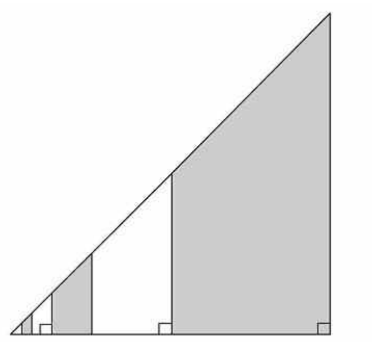
[난이도 : ★☆☆] [2004년 5월 학력평가]

251 순환소수 $0.3\dot{2}$를 분수로 나타내면?[3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{10}$ ③ $\frac{8}{25}$
④ $\frac{17}{50}$ ⑤ $\frac{29}{90}$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

252 한 변의 길이가 10인 직각이등변삼각형에서 O와 A_1의 중점을 A_2, O와 A_2의 중점을 A_3, O와 A_3의 중점을 A_4, $\cdots$ 이와 같이 무한히 반복하고 어두운 부분의 넓이를 아래부터 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 라 할 때, $S_1+S_2+S_3+\cdots$ 의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

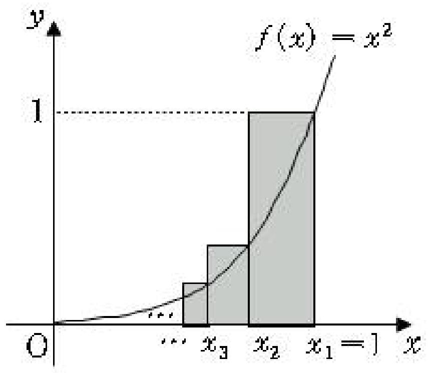
253 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 α에 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3S_n+6)=3$일 때, α의 값은? (단, $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$)[3점]

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

254 [공통]이차 함수 $f(x)=x^2$에서

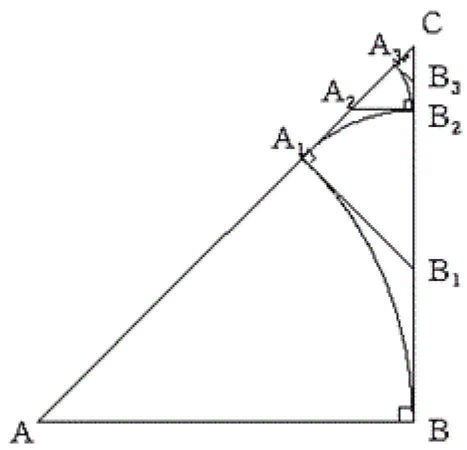
$x_1=1,\ x_2=\frac{2}{3},\ x_3=\frac{4}{9},\ \cdots,\ x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\ \cdots$ 을 그림과 같이 정할 때, x_n-x_{n+1}을 밑변의 길이, $f(x_n)$을 높이로 하는 직사각형의 넓이를 A_n이라 하자. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 은?[4점]



① $\frac{5}{19}$ ② $\frac{6}{19}$ ③ $\frac{7}{19}$
④ $\frac{8}{19}$ ⑤ $\frac{9}{19}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

255 [공통]그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC에서 꼭짓점 A를 중심, $\overline{AB}$를 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{AC}$와 만나는 점을 A_1, $\overline{AC}\perp\overline{A_1B_1}$ 이면서 $\overline{BC}$ 위에 있는 점을 B_1 , 다시 꼭짓점 B_1을 중심, $\overline{A_1B_1}$을 반지름으로 하는 원을 그렸을 때, $\overline{CB_1}$과 만나는 점을 B_2, $\overline{CB_1}\perp\overline{A_2B_2}$ 이면서 $\overline{A_1C}$위에 있는 점을 A_2라고 정하기로 한다.



위와 같은 과정을 계속 반복해 나갈 때, $\overline{AB}+\overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\cdots$의 값은? (단, $\overline{AB}=2$) [4점]

① $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $4-\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

256 [공통]두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대한 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2004년 3월 학력평가]

257 급수 $\frac{2004}{1\cdot 3}+\frac{2004}{3\cdot 5}+\frac{2004}{5\cdot 7}+\cdots$ 의 값은?[2점]

① 1002　② 1004　③ 2000
④ 2002　⑤ 2004

[난이도 : ★★★] [2004년 5월 학력평가]

258 [공통]급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

259 어느 장학재단은 14억 원의 기금을 조성하였다. 매년 초에 기금을 운용하여 연말까지 20%의 이익을 내고, 기금과 이익을 합한 금액의 40%를 매년 말에 장학금으로 지급하려 한다.
장학금으로 지급하고 남은 금액을 기금으로 하여 기금의 운용과 장학금의 지급을 매년 이와 같은 방법으로 실시 할 계획이다. 이 계획대로 해마다 지급한 장학금의 총액의 극한값은?(단, 단위는 억 원이다.)[4점]

① 24　② 26　③ 28
④ 30　⑤ 32

[난이도 : ★★★] [2004년 11월 학력평가]

260 좌표평면에서 이차 함수 $y=27^n x^2-(9^n+2\cdot 3^n)x+2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}l_n$은?(단, n은 자연수이다.)[4점]

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

261 $\frac{12}{99}$를 순환소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n째 자리의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_3=1$이다. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값은?[3점]

① $\frac{4}{3}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{3}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★★] [2004년 11월 학력평가]

262 다음은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3^4}{2^n}+\frac{1}{2}\right]$의 합을 구하는 과정을 나타낸 것이다.

(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수이다.)

> $[x]=n$(n은 정수)로 놓으면, $n \le x < n+1$
>
> (i) $n \le x < n+\frac{1}{2}$ 일 때, $[x]=n$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n$, $[2x]=2n$
>
> (ii) $n+\frac{1}{2} \le x < n+1$ 일 때,
>
> $[x]=n$, $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n+1$, $[2x]=2n+1$
>
> (i), (ii)에 의해서 $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ 이다.
>
> 한편, $\left[\left(\frac{3^4}{2^n}\right)\right]$이므로
>
> $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3^4}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{3^4}{2^{k-1}}\right]-\left[\frac{3^4}{2^k}\right]\right\}=[B]$
>
> $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3^4}{2^n}+\frac{1}{2}\right]=[A]$

이 과정에서 (A)에 알맞은 것은?[4점]

① 55　② 67　③ 73
④ 79　⑤ 81

정답 및 해설

2.급수

중단원 기출문제

1) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

$\angle B_1C_1D_1 = 30^\circ$, $\angle C_1D_1B_1 = 90^\circ$ 이므로

직각삼각형 $B_1C_1D_1$ 에서

$$\overline{C_1D_1} = \overline{B_1C_1}\cos 30^\circ = 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편, 두 선분 B_1B_2와 B_1D_1과 호 D_1B_2로 둘러싸인 영역의 넓이는

$\triangle B_1C_1D_1 - B_2C_1D_1$

$$= \frac{1}{2}\times\overline{C_1D_1}\times\overline{D_1B_1} - \overline{C_1D_1}^2\times\pi\times\frac{30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\pi\times\frac{1}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} \ \ldots ㉠$$

또, 삼각형 $C_1A_2C_2$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{C_2C_1}\times\overline{C_1A_2}\times\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\overline{B_2C_1}\right)\times\left(\overline{B_2C_1}\cos 30^\circ\right)\times\sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{64} \ \ldots ㉡$$

따라서 R_1의 넓이 S_1은 ㉠과 ㉡에 의해

$$S_1 = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{64} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}$$

한편, 직각삼각형 $A_2B_2C_1$에서

$\angle B_2C_1A_2 = 30^\circ$ 이므로 $\angle A_2B_2C_1 = 60^\circ$

또, $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_1}\sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{2}\overline{B_2C_1} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

그러므로 삼각형 $A_2B_2C_2$에서

$\angle A_2B_2C_2 = 60^\circ$ 이고 $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$

즉, 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 인 정삼각형이다.

그러므로 길이의 비가 $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로 넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$ 이다.

따라서 $$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11\sqrt{3}-4\pi}{64}}{1-\frac{3}{16}} = \frac{11\sqrt{3}-4\pi}{52}$$

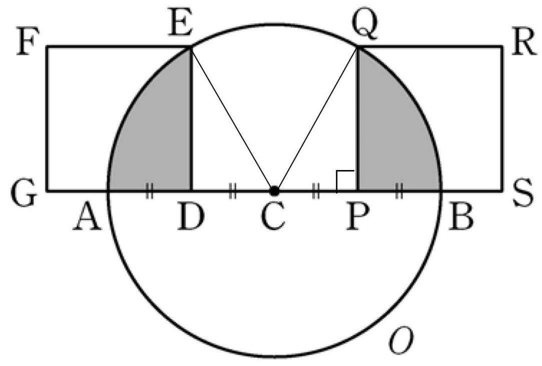
2) 답 : ③

[해설]

출제 의도: 도형의 넓이를 등비급수의 합을 이용하여 구할 수 있는가?

그림 R_1에서 아래 그림과 같이 두 점 C, Q를 연결하여

직각삼각형 QCP를 만든다.



직각삼각형 QCP에서 $\overline{CQ} = 2$, $\overline{CP} = 1$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CQ}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{2^2-1^2} = \sqrt{3}$$

이때, $\angle QCP = \frac{\pi}{3}$ 이다.

그러므로 도형 R_1에 색칠된 부분의 넓이는

$2\{(\text{부채꼴 }QCB\text{의 넓이}) - (\triangle QCP\text{의 넓이})\}$

$$= 2\left\{\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \ \ldots ㉠$$

한편 그림 R_2에서 새로 그려진 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 그림 R_1에 있는 원과 그림 R_2에 있는 원의 반지름의 길이의 비는

$2:\frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, $1:\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이다. 이때 넓이의 비는 $1:\frac{3}{16}$ 이다.

한편, 그림 R_1의 원의 개수와 그림 R_2의 원의 개수의 비는 $2:4$

즉, $1:2$ 이므로 공비는 $\frac{3}{16}\times 2 = \frac{3}{8}$

이다. 따라서, 구하는 극한값은

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}{1-\frac{3}{8}} = \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

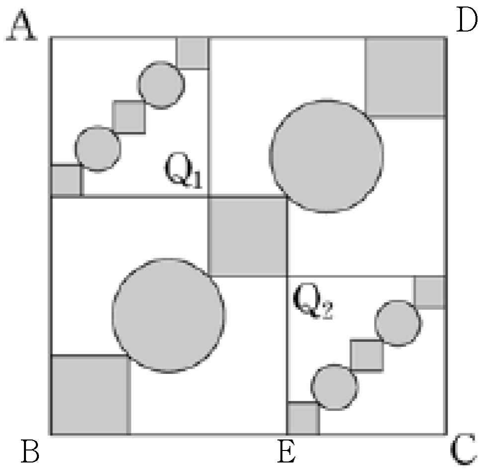
3) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에

정답 및 해설

대한 극한값을 구할 수 있는가?



$\overline{BE}:\overline{EC}=3:2$이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$이다.

따라서 넓이의 비는 $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로

무한등비급수의 공비는 $\frac{4}{25}\times2=\frac{8}{25}$

또한, 그림 R_1에서 $\overline{BD}=5\sqrt{2}$이므로

$$S_1=3\times1+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\pi=3+\pi$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3+\pi}{1-\frac{8}{25}}=\frac{25}{17}(\pi+3)$$

4) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

첫째항이 1, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=r^{n-1}$ 또, $S_n=\frac{r^n-1}{r-1}$ 이므로

$$[\text{구하는 값}]=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}}{\frac{r^n-1}{r-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r^{n-1}}{r^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{r-1}{r-\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}$$

$$=\frac{r-1}{r}$$

$$=1-\frac{1}{r}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{r}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore r=4$$

5) 답 : ①

[해설]

$a_1=3$, $a_2=1$이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}$이다.

여기서 수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a_1^2=9$,

공비가 $\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}=\frac{81}{9-1}=\frac{81}{8}$$

6) 답 : 54

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=10$이므로

무한급수의 성질에 의해

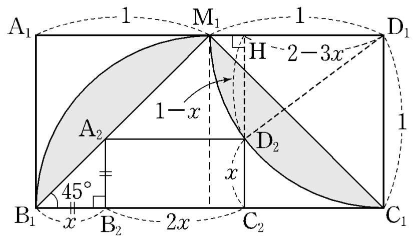
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+5b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+5\sum_{n=1}^{\infty}b_n=4+5\cdot10=54$$

7) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 반복되는 도형에서 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

무한등비급수 $S=\frac{a}{1-r}$를 구한다.



R_1의 넓이 $a=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{\pi}{2}-1$

공비 r를 구하기 위해 먼저 길이의 닮음비 $\frac{\overline{C_2D_2}}{\overline{C_1D_1}}$를 구한다.

$\overline{C_2D_2}=x$라 두면 D_2에서 $\overline{A_1D_1}$에서 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{B_1M_1}$과 $\overline{B_1C_1}$이 이루는 각이 45°이므로

$\overline{B_1B_2}=\overline{A_2B_2}=x$, $\overline{B_2C_2}=2x$, $\overline{HD_1}=2-3x$, $\overline{HD_2}=1-x$가 되고

$\overline{HD_1}^2+\overline{HD_2}^2=\overline{D_1D_2}^2=1$에서

$$(2-3x)^2+(1-x)^2=1$$

$$5x^2-7x+2=0$$

$$(5x-2)(x-1)=0 \quad \therefore x=\frac{2}{5},\ 1$$

$$x\neq1\text{이므로 } x=\frac{2}{5}$$

따라서, 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$이고, 이것이 공비가 된다.

$$\therefore S=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

8) 답 : ①

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n-\frac{n^2+1}{2n+1}\right)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(na_n - \frac{n^2+1}{2n+1}\right)=0$ 이다.

즉, $\lim_{n\to\infty} n\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)=0$ 에서 $\lim_{n\to\infty} n \neq 0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{2n+1}$$

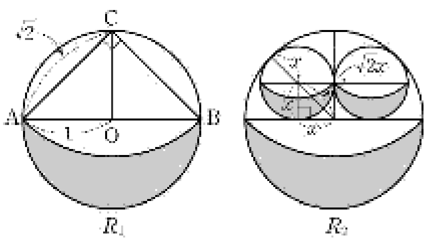
$$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n+2)=\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2+2\lim_{n\to\infty} a_n+2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}+2=\frac{13}{4}$$

9) 답 : 4

[해설]



R_n 에서 새로 만들어지는 모든 ◡ 모양의 넓이의 합을 a_n 이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a_1 은 반원의 넓이에서 활꼴의 넓이를 빼면 되므로

$$a_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\pi-\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{2})^2\pi-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\right\}=1$$

위의 그림과 같이 R_2 에서 새로 생긴 원의 반지름의 길이를 x 라 하면

$$x+\sqrt{2}x=1 \text{에서 } x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

$$a_2=2\times(\sqrt{2}-1)^2=6-4\sqrt{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1 이고, 공비가 $6-4\sqrt{2}$ 인 등비수열이다.

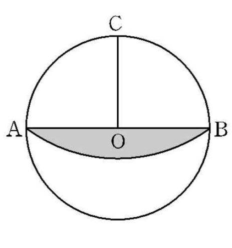
$$\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{1-(6-4\sqrt{2})}=\frac{1}{4\sqrt{2}-5}$$

$$=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$$

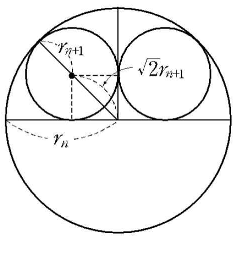
[다른 풀이]

R_n 에서 새로 생긴 작은 원의 반지름을 r_n 이라 하고

새로 생긴 작은 원의 색칠된 부분의 넓이를 a_n 이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

a_1 은 반원에서 [그림 1]의 색칠된 부분의 넓이를 빼면 되므로

$$a_1=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2-\left(\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\right)=1$$

[그림 2]에서 $\sqrt{2}r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

$$\therefore \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2$$

새로 생기는 작은 원들은 직전 원의 개수의 2배씩 생기므로

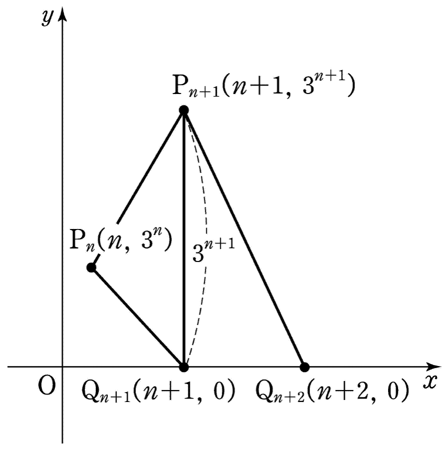
$$(\text{공비})=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$\therefore \frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-2(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$$

10) 답 : 37

[해설]

사각형의 꼭짓점의 좌표를 구하여 그림으로 표현하면 다음과 같다.



그림에서 P_{n+1} 과 Q_{n+1} 의 x 좌표가 같으므로

넓이 a_n 은 $a_n=\left(\frac{1}{2}\times\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}\times 1\right)\times 2=3^{n+1}$

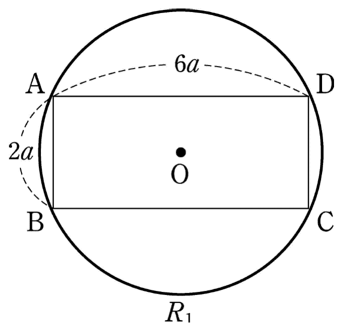
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore p^2+q^2=6^2+1^2=37$$

11) 답 : ②

[해설]

그림과 같이 R_1 의 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $6a$, $2a$ 라 하면



$$\overline{OA}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10}a=1$$

$$\therefore a=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

그림 R_1 에서 직사각형의 세 변에 접하도록 그려진 원의 반지름이 a 이므로

정답 및 해설

R_n의 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cdots$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{10}} r_n$$

각 원에 색칠된 부분의 넓이는 첫 항이 $\pi - 12a^2 = \pi - \frac{12}{10} = \pi - \frac{6}{5}$,

공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이고, 개수는 1개, 2개, 4개, $\cdots$의 등비수열을 이루므로

$$S_n = \left(\pi - \frac{6}{5}\right) + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5}\right) + 2^2 \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5}\right) + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \left(\pi - \frac{6}{5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi - \frac{6}{5}}{1 - \frac{2}{10}} = \frac{5\pi - 6}{4} = \frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$$

12) 답 : ⑤

[해설]

$S_1 =$ (반원 $B_1A_1D_1$의 넓이) $-$ (부채꼴 $C_1D_1B_1$의 넓이 $-$ 삼각형 $C_1D_1B_1$의 넓이)

$$= \frac{9\pi}{2} - \left(\frac{18\pi}{4} - 9\right) = 9$$

원 O_1의 반지름의 길이는 3이고 원 O_2의 반지름의 길이는 $3(\sqrt{2}-1)$이므로

$$\frac{S_2}{S_1} = (\sqrt{2}-1)^2$$

S_n은 등비수열을 이루고 $S_n = T_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (S_n + T_n) = \frac{2 \cdot 9}{1 - (\sqrt{2}-1)^2} = 9(\sqrt{2}+1)$$

13) 답 : 16

[해설]

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 공비를 r이라 하면

$|r| < 1$이고

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-r} = 8, & \ldots ① \\ \dfrac{b_1}{1-r} = 6, & \ldots ② \end{cases}$$

$a_1 - b_1 = 1 \ldots ③$

① -②: $\frac{a_1 - b_1}{1-r} = \frac{1}{1-r} = 2 \therefore\ r = \frac{1}{2}$

① 에서 $a_1 = 4$

③ 에서 $b_1 = 3$

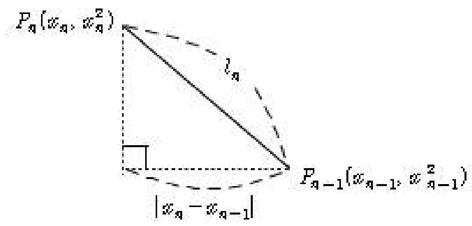
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{a_1 b_1}{1-r^2} = \frac{12}{1 - \frac{1}{4}} = 16$$

14) 답 : ②

[해설]

직선 $P_0P_1,\ P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4,\ \cdots$의 기울기를 열거하면

$1, -1, 1, -1, \cdots$이므로 직선 $P_{n-1}P_n$의 기울기는 $(-1)^{n-1}$



즉, $\frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{x_n - x_{n-1}} = x_n + x_{n-1} = (-1)^{n-1}$

$\Leftrightarrow x_n = -x_{n-1} + (-1)^{n-1}$

이 점화식의 양변을 $(-1)^n$으로 나누면

$$\frac{x_n}{(-1)^n} = \frac{x_{n-1}}{(-1)^{n-1}} - 1\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

그러므로 수열 $\frac{x_0}{(-1)^0}, \frac{x_1}{(-1)^1}, \frac{x_2}{(-1)^2}, \cdots, \frac{x_n}{(-1)^n}, \cdots$은 공차가 -1인 등차수열이다. 그러므로

$$\frac{x_n}{(-1)^n} = \frac{x_0}{(-1)^0} + (n+1-1)(-1) = -n$$

$$\therefore\ x_n = (-1)^{n-1} n$$

그림에서 삼각형은 직각이등변삼각형이므로 빗변의 길이 l_n은

$$l_n = \sqrt{2}\,|x_n - x_{n-1}| = \sqrt{2}\,|(-1)^{n-1}n - (-1)^{n-2}(n-1)|$$
$$= \sqrt{2}\,|(-1)^{n-1}\{n + (n-1)\}| = \sqrt{2}\,|(-1)^{n-1}|\,|2n-1|$$
$$= \sqrt{2}(2n-1)$$

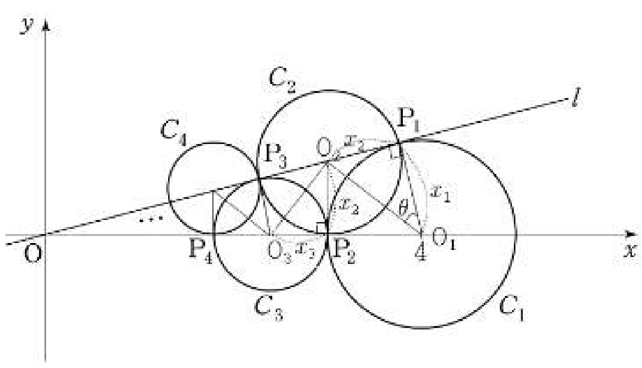
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2\sqrt{2}$$

15) 답 : ③

[해설]

원 C_n의 중심을 O_n, 반지름을 x_n이라 하고

$\angle P_1O_1O_2 = \angle P_2O_2O_3 = \angle P_3O_3O_4 = \cdots = \theta$라 놓는다.



$\triangle OO_1P_1 \backsim \triangle OO_2P_2$이므로 $\overline{OO_1} : \overline{OO_2} = \overline{O_1P_1} : \overline{O_2P_2}$

즉, $4 : \sqrt{15} - x_2 = x_1 : x_2 = 1 : x_2 \Leftrightarrow 4x_2 = \sqrt{15} - x_2$

$$\therefore\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

따라서 $\tan\theta = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$x_{n+1} = x_n \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$이므로

수열 $\{x_n\}$은 공비 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$인 등비수열

$$\therefore\ x_n = x_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}$$

$\therefore\ S_n = \pi x_n^2 = \pi\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\pi$$

16) 답 : 19

[해설]

$\triangle A_nOO_n$은 이등변삼각형이고, $\overline{A_nB_n}\perp\overline{OO_n}$이므로

$\overline{OH_n} = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{2}l_n = \overline{A_nH_n} = \sqrt{1^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$= n\times l_n = 2\sqrt{n^2-1}$$

$$\therefore (n\times l_n)^2 = 4(n^2-1) = 4(n-1)(n+1)$$

$$[\text{구하는 값}] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(nl_n)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

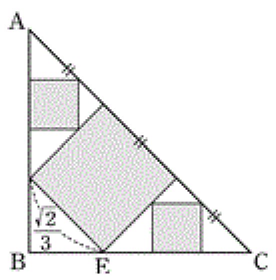
$$= \frac{1}{8}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{16}$$

17) 답 : ⑤

[해설]

처음 정사각형 넓이를 a_1이라고 하면 $a_1 = \frac{2}{9}$

$\overline{AB}:\overline{CD} = 1:\frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로 넓이의 비는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ 이다.



$$\therefore\ a_2 = 2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)$$

$$\therefore\ a_n = 2^{n-1}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{2}{5}$$

18) 답 : 40

[해설]

아래의 그림에서

$\boxed{z} \Rightarrow (S) \Rightarrow \boxed{1}$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}$$

$\left(\because\ z>1\text{이므로 } \left|\frac{1}{z}\right|<1\right)$

즉, $z-1=1$에서 $z=2$

$\boxed{y}$

$\Downarrow$

(T)

$\Downarrow$

$\boxed{2}$ 에서 $2=16^y$

$\therefore\ y = \frac{1}{4}$

$\boxed{x} \Rightarrow (S) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}}$ 에서

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

$\left(\because\ x>1\text{이므로 } \left|\frac{1}{x}\right|<1\right)$

즉, $x-1=4$에서 $x=5$

$$\therefore\ \frac{xz}{y} = \frac{5\cdot 2}{\frac{1}{4}} = 40$$

19) 답 : 13

[해설]

A_1의 넓이는 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

도형 A_1과 도형 A_n 위에 붙인 도형의 조각들은 모두 닮은꼴이고,

n번째 조각과 $(n+1)$번째 조각의 닮음비는 $4:1$이다.

즉, 넓이의 비는 $16:1$이다.

또, 조각의 개수는 2배씩 늘어나므로

$$S_n = \frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}\times 2+\frac{3}{4}\times\frac{1}{16}\Big)\cdots$$

$$= \frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{8}\Big)\cdots$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{6}{8-1} = \frac{6}{7}$$

$\therefore\ p+q = 7+6 = 13$

20) 답 : 16

[해설]

수열 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{3}\right\}^n$ 을 차례로 나열하면

$$0,\ \left(\frac{2}{3}\right)^2,\ 0,\ \left(\frac{2}{3}\right)^4,\ 0,\ \left(\frac{2}{3}\right)^6,\ \cdots$$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^n}{3}\right\}^n = \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

$= \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$

즉, $S=\frac{4}{5}$ 이므로 $20S=\frac{4}{5}\times 20=16$

21) 답 : ①

[해설]

원의 중심을 O라 하면 $\angle P_1AP_2=30^\circ$ 는

원주각이므로 중심각 $\angle P_1OP_2=60^\circ$ 이다.

즉, $\overline{P_1P2}=1$이 된다.

$\angle P_1OP_{n+1}$은 180° 보다 작고 30° 의 배수이므로

n의 최대값은 5이다.

마찬가지 방법으로

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_4}=\overline{P_4P_5}=\overline{P_5P_6}=1$

$\therefore\ \overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_4P_5}+\overline{P_5P_6}=5$

22) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 등비급수의 수렴조건을 물어보는 문제이다.

공비가 r인 등비급수의 수렴 조건은 $-1<r<1$이다.

주어진 등비수열의 공비는 $\frac{x}{5}$이므로 등비급수가 수렴하는

x의 범위는 $-1<\frac{x}{5}<1$ 이고 $-5<x<5$이다.

따라서 모든 정수 x의 개수는 9개 이다.

23) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 그림에서 무한등비급수를 찾아 구하는 문이다.

도형 R_1의 색칠된 부분의 넓이 S_1은

$S_1=$ (부채꼴 $F_1C_1B_1$의 넓이) + (부채꼴 $E_1B_1C_1$의 넓이)

$-2\times(\triangle G_1B_1C_1)$의 넓이이다.

점 F_1와 G_1에서에서 $\overline{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 각각 H, M라고 하자.

$\overline{F_1C_1}:\overline{F_1H}=2:1$ 이므로 $\angle F_1C_1H=30^\circ$ 이다.

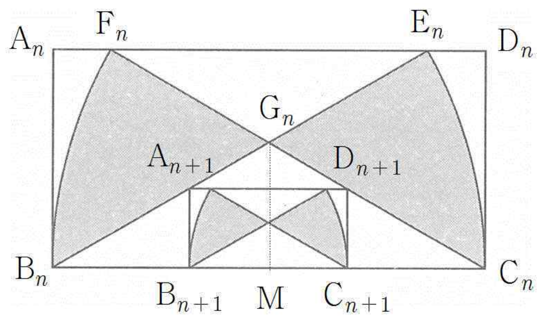
따라서 부채꼴 $F_1C_1B_1$의 넓이 $=\frac{30}{360}\times 4\pi=\frac{\pi}{3}$이고

부채꼴 $F_1C_1B_1$과 부채꼴 $E_1B_1C_1$는 합동이므로 부채꼴 $E_1B_1C_1$의 넓이 $=\frac{\pi}{3}$

$\overline{C_1M}=1$ 이고, $\angle G_1C_1M=30^\circ$ 이므로 $\overline{G_1M}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

따라서 $(\triangle G_1B_1C_1$의넓이$)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

즉, $S_1=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$



직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 x_n이라 하고, 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$에서 새로 그려진 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이를 x_{n+1}이라고 하면

$\overline{B_nB_{n+1}}:\overline{B_{n+1}A_{n+1}}=\sqrt{3}:1$ 이므로 $(x_n-x_{n+1}):x_{n+1}=\sqrt{3}:1$

이다. 비례식을 정리하여 풀면 $x_{n+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}x_n$이 되어 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 내부에 그려진 도형의 넓이와 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 내부에 새로 그려진 도형의 넓이의 비는

$1:\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ 이 되어 S_n은 초항이 $\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}$ 이고

공비가 $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ 인 등비수열의 합이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}\pi-12}{9}$$

[다른 풀이]

[출제 의도] 그림에서 무한등비급수를 찾아 구하는 문제이다.

첫째항과 공비만 구하여 빠르게 풀 수 있다.

첫째항: R_1의 넓이

R_1의 넓이는 부채꼴 $B_1C_1F_1$ 의 넓이 + 부채꼴 $B_1C_1E_1$의 넓이 - 삼각형 $B_1C_1G_1$의 넓이 $\times 2$이다.

$\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1F_1}=2$ 이므로

$\angle F_1C_1B_1=\frac{\pi}{6}$ 이다.

따라서 부채꼴 $B_1C_1F_1$ 의 넓이=부채꼴 $B_1C_1E_1$의 넓이=

$\frac{1}{2}2^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

삼각형 $B_1C_1G_1$의 넓이 $=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

R_1의 넓이 $=\frac{2\pi}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

넓이의 공비: R_1과 R_2의 길이 비의 제곱

직사각형의 밑변:높이 길이 비가 2:1이므로

$\overline{A_2B_2}=t\to\overline{B_2C_2}=2t$

$\overline{B_1B_2}=\sqrt{3}t\to\overline{B_1C_1}=(2+2\sqrt{3})t=2$

$\to t=\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

따라서 길이 비 $=t=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

공비: $t^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}\pi - 12}{9}$$

、

24) 답 : ⑤

[해설]

$S_1 = (\triangle A_1E_1D_1$의 넓이$)+(\triangle E_1B_1F_1$의 넓이$)+(\triangle D_1F_1C_1$의 넓이$)$

$= 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$\triangle E_1F_2D_1$으로부터 $\overline{E_1F_2} : \overline{D_1F_2} = 1 : 3$이므로

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 두면

$\triangle A_2E_1B_2$로부터 $\overline{E_1B_2} : \overline{A_2B_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right) : x = 1 : 3$

따라서 $x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

□$A_1B_1C_1D_1$과 □$A_2B_2C_2D_2$의 길이비는 $1 : \frac{3\sqrt{2}}{10}$

$$\lim_{x\to\infty} S_n = \frac{\frac{5}{2}}{1-\left(\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{82}{100}} = \frac{125}{41}$$

[다른 풀이]

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이 비가 R_1의 색칠된 넓이와 R_2에서 $A_2B_2C_2D_2$ 내부에 색칠된 넓이비와 같다.

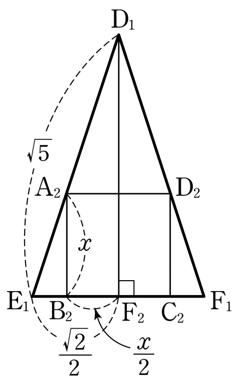


그림 R_1에서 $\overline{A_1B_1} = 2$

$\overline{D_1E_1} = \sqrt{5}$, $\overline{E_1F_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $\overline{D_1F_2}$의 길이는

$$\overline{D_1F_2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle A_2E_1B_2$, $\triangle D_1E_1F_2$닮음이므로

$\overline{E_1B_2} : \overline{A_2B_2} = \overline{E_1F_2} : \overline{D_1F_2}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right) : x = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{3\sqrt{2}}{2}$

정리하면

$x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ 이므로 $\overline{A_2B_2} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

따라서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는 $2 : \frac{3\sqrt{2}}{5}$ 이므로

넓이비는 $4 : \frac{18}{25}$

그러므로 공비는 $\frac{\frac{18}{25}}{4} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$

$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{5}{2}$

S_n은 첫째항이 $\frac{5}{2}$이고 공비가 $\frac{9}{50}$인 등비급수가 되므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{9}{50}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{41}{50}} = \frac{5}{2}\times\frac{50}{41} = \frac{125}{41}$$

25) 답 : ②

[해설]

$S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{3-1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{3^n} = \frac{a_1}{2} = 5 \quad \therefore \ a_1 = 10$

26) 답 : ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4 - a_2 = 2d = 4 \to d = 2$

$\therefore \ a_n = 2n + 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{na_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(2n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

27) 답 : 9

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$

$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 9n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} + 9\right) = 9$

28) 답 : ②

[해설]

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$과 $y = 3x(x-1)$의 교점 A_n, P_n의 좌표는

$(1, \ 0)$, $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

따라서 $\overline{P_nH_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$[\text{구하는 값}] = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nH_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

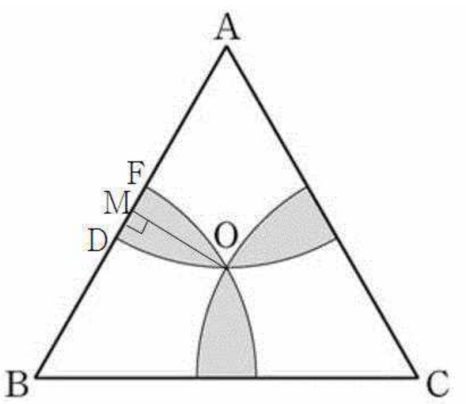
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$$

$=2-\frac{4}{9}$

$=\frac{14}{9}$

29) 답 : ③

[해설]



O가 정삼각형의 외심이므로 무게중심과 일치한다.

$\overline{DF}$의 중점을 M이라 하자.

$S_1=6\times$(부채꼴$AOD-$삼각형AOM)

부채꼴$AOD-$삼각형$AOM=a$라 하면

$\overline{AO}=2\sqrt{3}$, $\overline{AM}=3$

$a=\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}$

$=\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore\ S_1=6\left(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

$\overline{AF}=6-\overline{BF}=6-2\sqrt{3}$ 이므로

한 변의 길이가 6인 정삼각형 ABC가

삼각형 AFI 로 축소되므로

길이의 비는 $\frac{6-2\sqrt{3}}{6}$,

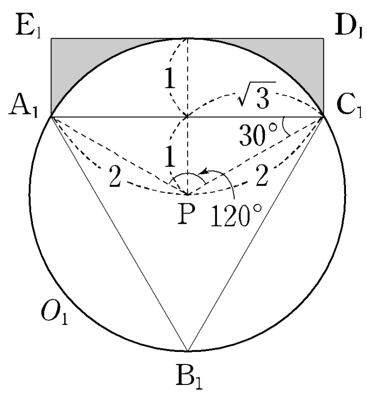
넓이의 비는 $\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{6}\right)^2$,

개수는 3배로 증가하므로,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6\left(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)}{1-3\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{6}\right)^2}=(2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$$

30) 답 : ①

[해설]



$\therefore\ \square A_1C_1D_1E_1$의 넓이 $=2\sqrt{3}\times1$

부채꼴 PA_1C_1의 넓이 $=\frac{1}{3}\pi\cdot2^2$이므로

선분 A_1C_1을 현으로 갖는 활꼴의 면적

$=\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1$

$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$

따라서

$S_1=2\sqrt{3}-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

$=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

또한 닮음비는 O_1과 O_2의 반지름의 비이므로

닮음비 $=\frac{1}{2}$ $\therefore$ 공비 $=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

31) 답 : 16

[해설]

[무한등비급수]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_n=a\cdot r^{n-1}$

$a_1+a_2=a+ar=20\cdots$ ①

$\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\frac{4}{3}$으로 수렴하므로 $-1<r<1$이고

$\sum_{n=3}^{\infty}a_n=\frac{a_3}{1-r}=\frac{ar^2}{1-r}=\frac{4}{3}\ \cdots$ ②

① 과 ②를 연립하면

$16r^2=1\ \therefore\ r=\frac{1}{4}$ ($\because$ 조건에 의하여 공비 $r>0$)

이 값을 ①에 대입하여 풀면

$\frac{5}{4}a=20\ \therefore\ a=16$

32) 답 : 5

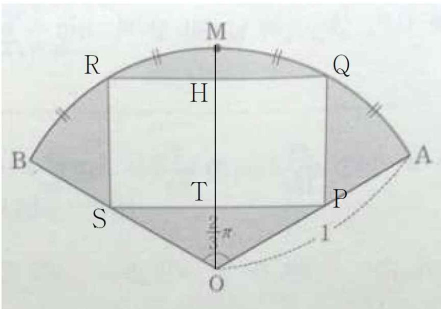
[해설]

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하려면

$\lim_{n\to\infty}a_n-\frac{5n}{n+1}=0$으로 수렴해야 하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=5$이다.

33) 답 : ④

[해설]



위의 그림 R_1 에서 직사각형의 꼭짓점을 각각 P, Q, R, S 라 하자. 선분 OM 과 두 선분 QR, PS 의 교점을 각각 H, T 라 하자.

$\angle POQ = \angle QOM = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$\overline{RQ} = 2\overline{HQ} = 2\times\overline{OQ}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$= 2\times\frac{1}{2} = 1$

$\overline{OH} = \overline{OQ}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$= 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

한편, 삼각형 OPT 에서

$\angle POT = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{PT} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{OT} = \dfrac{\overline{PT}}{\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\therefore\ \overline{HT} = \overline{OH} - \overline{OT} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

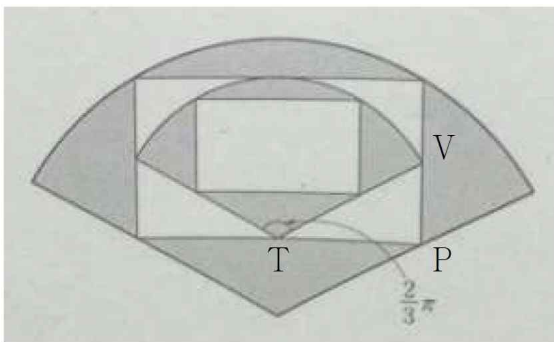
따라서 직사각형 $PQRS$ 의 넓이는

$1\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 그림 R_1 에서 색칠한 부분의 넓이 S_1 은

$S_1 = \frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$



위의 그림 R_2 에서 그림 R_1 의 직사각형과 그 내부에 있는 부채꼴이 만나는 한 점을 그림과 같이 점 V 라 하자.

삼각형 TPV 에서

$\angle VTP = \frac{\pi}{6}$ 이고 $\overline{TP} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{TV} = \dfrac{\overline{TP}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

즉, 그림 R_1 에서 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{OA} = 1$ 이고 그림 R_2 에서 작은 부채꼴의 반지름의 길이는 $\overline{TV} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

$S_2 = S_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_1$

……

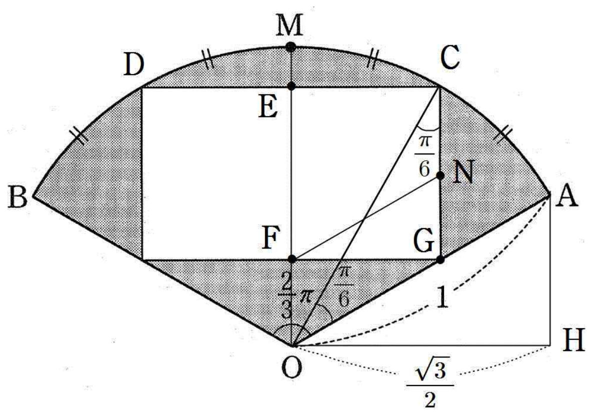
따라서,

$\lim_{n\to\infty} S_n = S_1 + \frac{1}{3}S_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_1 + \cdots$

$= \dfrac{S_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}S_1$

$= \frac{3}{2}\times\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$

$= \frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$



처음 직사각형의 넓이 $= \overline{CD}\times\overline{CG}$

$\overline{CE} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \overline{CD} = 1$

$\triangle FOG$에서 $\overline{OG} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ …㉮

$\therefore\ \overline{OG} = \overline{CG}\ \left(\because\ \angle COG = \angle GCO = \frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ S_1 = \frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{2}{3}\pi - 1\times\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{3}$

$\overline{FN}$ 과 $\overline{OA}$는 평행하므로 닮음인 두 도형의 길이의 비는

$\overline{OH} : \overline{FG} = \cos\frac{\pi}{6} : \sin\frac{\pi}{6} = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로

닮음인 두 도형의 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{3}$ 이다. 즉, 공비는 $\frac{1}{3}$ 이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{\pi-\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

다른 풀이다른 풀이

$\overline{OA} = \overline{OC}$

$\overline{CG}$가 두 번째 부채꼴의 지름이므로

$\overline{CG} = \overline{OG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$?? 위의 풀이 중 ㉮

길이의 비 $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CG}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ 넓이의 비는 $\dfrac{1}{3}$ 이다.

[다른 풀이]

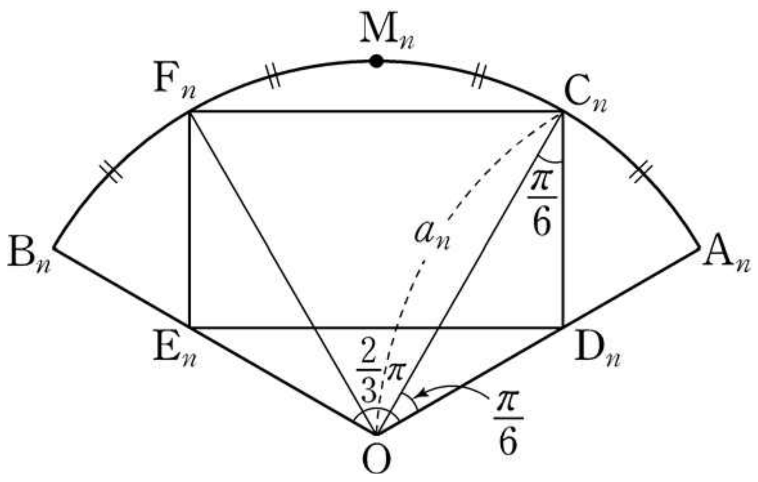
호 A_nM_n을 이등분하는 점을 C_n이라 하고

부채꼴 $O_nA_nB_n$에 내접하는 직사각형의 꼭짓점을 각

각 D_n, E_n, F_n이라 하자.

그림 R_n에서 가장 작은 부채꼴 $O_nA_nB_n$의 반지름

을 a_n이라 하면 $\overline{C_nD_n}=a_{n+1}$이다.



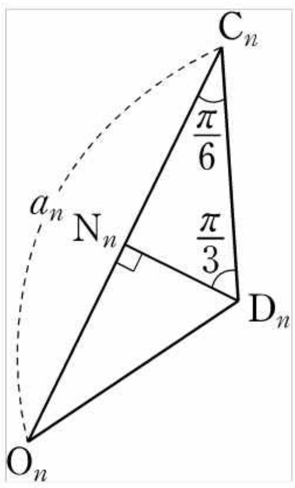
$\angle C_nO_nF_n=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{O_nC_n}=\overline{O_nF_n}$ 이므로

삼각형 $O_nC_nF_n$은 정삼각형이다.

$\angle O_nC_nD_n=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle C_nO_nD_n=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로

삼각형 $O_nC_nD_n$은 $\overline{O_nD_n}=\overline{C_nD_n}$인 이등변삼각형

이다.



그림에서

$\overline{C_nN_n}=\dfrac{1}{2}a_n$

$\overline{C_nD_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$ 이다.

따라서 $a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$ 이다.

그림 R_1에서 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{3}\pi$이고

직사각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ $S_1=\dfrac{1}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

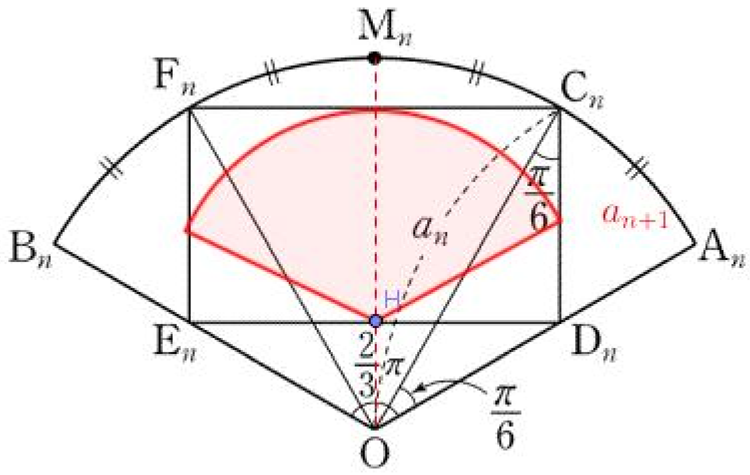
$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3-1}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

[ ] ④

[MIM edu:자세한 풀이]

부채꼴 $O_nA_nB_n$의 반지름을 a_n이라 하면 $\overline{C_nD_n}=a_{n+1}$이며

아래 그림과 같다.



삼각형 OD_nC_n은 $\overline{OD_n}=\overline{C_nD_n}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{ND_n}=\dfrac{1}{2}a_n\ldots$㉮

직각삼각형 $\triangle \overline{ND_nC_n}$에서 비례관계를 사용하면

$\overline{NC_n}:\overline{D_nC_n}=\sqrt{3}:2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a_n:a_{n+1}=\sqrt{3}:2$

따라서 $a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n$ 이다.

그림 R_1에서 부채꼴의 넓이는 $\dfrac{1}{3}\pi$이고

직사각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore$ $S_1=\dfrac{1}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{3-1}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$$

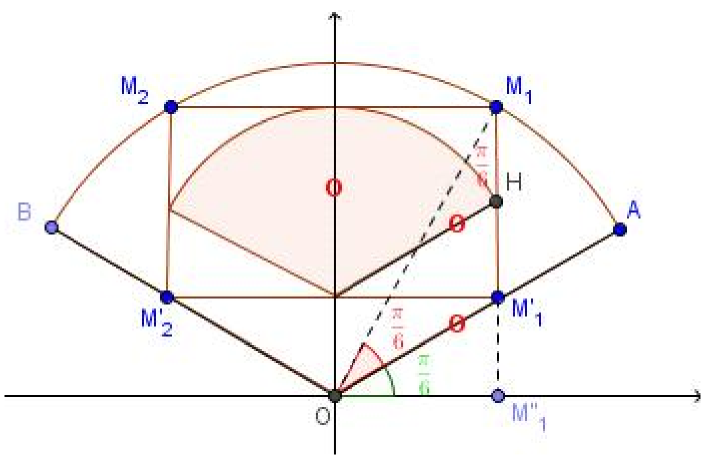
[ ] ④

[참고]특수각이 있는 직각삼각형에서는 비례관계가 주로 사용됨

[MIM edu:자세한 풀이]

이런 식으로 좌표축을 도입하면 의외로

문제를 쉽게 풀 수 있으니 알아두도록 하자.



(풀이)위의 그림에서 $\triangle OM_1M''_1$은 빗변이 $\overline{OM_1}=1$이고

$\angle M_1OM''_1=\frac{\pi}{3}$인 직각삼각형이므로 비례관계에서

$\begin{cases}\overline{OM'_1}=\frac{1}{2}\\ \overline{M_1M'_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 이며 $\overline{OM'_1}=\frac{1}{2}$이므로 $\begin{cases}\overline{M_1M'_1}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \overline{OM_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

$S_1=\frac{\pi}{3}-\overline{M_1M_2}\times\overline{M_1M_1'}$ 에서

$\overline{M_1M_1'}=\overline{M_1M_1''}-\overline{M_1'M_1''}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

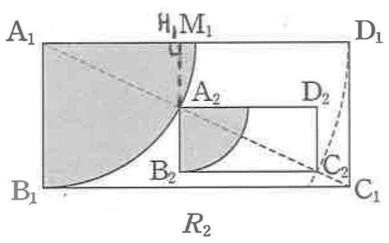
또, $\overline{M_1M_2}=1$이므로 $S_1=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

큰 부채꼴의 반지름은 1, 작은 부채꼴의 반지름은 $\overline{OM_1}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\overline{M_1M_1'}\right)^2=1:\frac{1}{3}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

34) 답 : ①

[해설]



두 도형의 닮음비를 구하기 위해서 A_2에서

$\overline{A_1D_1}$에 수선을 긋고 이를 H_1이라 놓자.

이때 두 부채꼴의 반지름의 비는 사각형의 변의 길이의 비와 같으므로

$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}=\overline{A_1D_1}:\overline{A_2D_2}=\overline{A_1D_1}:\overline{A_1H_1}=2\overline{A_1A_2}:\overline{A_1H_1}$이다.

따라서 두 도형의 닮음비는 $\frac{\overline{A_1H_1}}{2\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{A_1D_1}}{2\overline{A_1C_1}}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 이고

넓이의 비는 $\frac{1}{5}$이다.

부채꼴 $A_1M_1B_1$의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5\pi}{16}$이다.

35) 답 : ②

[해설]

$S_1=\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$, 넓이의 비 $9:4$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$$

36) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4n}{b_n+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{n}+4}{\frac{b_n}{n}+3-\frac{2}{n}}$$

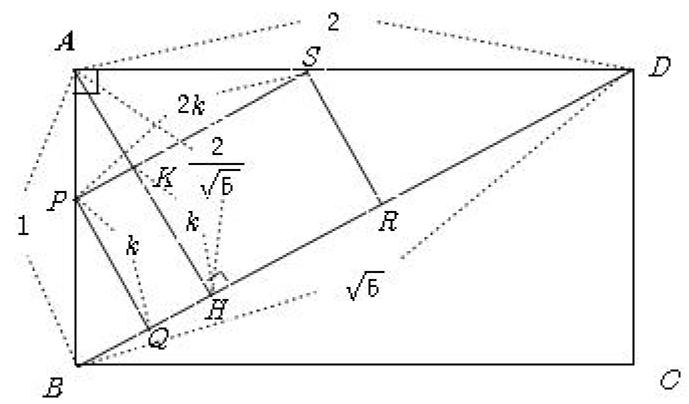
$$=\frac{1+4}{0+3-0}$$

$$=\frac{5}{3}$$

37) 답 : ④

[해설]

[해설] 아래 그림과 같이 삼각형 ABD에 내접하는 직사각형을 $PQRS$라고 할 때,



주어진 조건에 의해 직사각형의 두 변의 길이가 $1:2$이므로

$\overline{PQ}=k$, $\overline{PS}=2k$가 된다.

직각삼각형 ABD에서 $\overline{BD}=\sqrt{5}$

A에서 $\overline{BD}$에 내린 수선의 발을 H라 두면

삼각형 ABD의 넓이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BD}\times\overline{AH}$

$\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AH}$

$1\times2=\sqrt{5}\times\overline{AH}$

$\therefore\ \overline{AH}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{AH}$와 $\overline{PS}$의 교점을 K라 하면

$\overline{AK}=\frac{2}{\sqrt{5}}-k$

삼각형 ABD와 삼각형 APS는 닮음이므로

$\overline{PS}:\overline{BD}=\overline{AK}:\overline{AH}$

$$2k:\sqrt{5}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-k\right):\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$k=\frac{2\sqrt{5}}{9}$$

그러므로 직사각형 $ABCD$의 짧은 변의 길이 1이 직사각형 $PQRS$ 의

짧은 변 k로 줄었기 때문에 길이가 줄어드는 비율은 k이고 넓이가 줄어드는 비율은 $k^2=\frac{40}{81}$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$이 의미하는 것은 발생하는 모든 직사각형의 합이므로

등비급수의 공식에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2k^2}{1-k^2}=\frac{2\times\frac{20}{81}}{1-\frac{20}{81}}=\frac{40}{61}$$ 이다.

38) 답 : ②

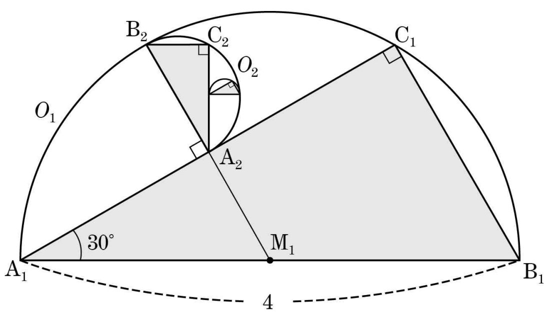
[해설]

[출제 의도] 도형의 닮음비를 이용하여 등비급수 문제를 해결한다.

점 C_1이 반원 O_1 위에 있으므로 삼각형 $A_1B_1C_1$은 선분 A_1B_1이 빗변인 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{A_1C_1}=4\cos30^\circ=2\sqrt{3}$, $\overline{B_1C_1}=4\sin30^\circ=2$이다.

$$\therefore\ S_1=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$$



이때 반원 O_1의 지름의 중점을 M_1이라 하면

선분 A_2B_2는 선분 A_1C_1의 수직이등분선이고 현의 수직이등분선은

원의 중심을 지나므로

선분 A_2B_2의 연장선은 반원 O_1의 지름의 중점 M_1을 지난다.

$\overline{M_1A_2}=2\sin30^\circ=1$이므로

$\overline{A_2B_2}=2-1=1$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

마찬가지로, 삼각형 $A_nB_nC_n$은 $\overline{A_nB_n}$이 빗변인 직각삼각형이고,

삼각형 $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$의 빗변은

$$\overline{A_{n-1}B_{n-1}}=\frac{1}{4}\times\overline{A_nB_n}$$

두 닮은 삼각형의 길이의 비는 $4:1$이므로 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{16}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$=\frac{32\sqrt{3}}{15}$$

39) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따르므로

$$P(50\le\overline{X}\le56)=P\left(\frac{50-50}{\frac{\sigma}{4}}\le\frac{\overline{X}-50}{\frac{\sigma}{4}}\le\frac{56-50}{\frac{\sigma}{4}}\right)$$

$$=P\left(0\le Z\le\frac{24}{\sigma}\right)=P(0\le Z\le1.5)$$

따라서 $\frac{24}{\sigma}=1.5$이므로

$$\sigma=\frac{24}{1.5}=24\times\frac{2}{3}=16$$

40) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

R_1에서 주어진 원의 반지름의 길이가 1이므로

넓이는 π이고 긴 대각선의 길이는 8이다.

이때 R_2에서 새로 생긴 마름모의 긴 대각선의 길이가 3이므로

짧은 대각선의 길이는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 이 마름모 안에 새로 생긴 원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{8}$이므로

R_2에 들어 있는 원의 넓이의 합은 $\pi+2\times\left(\frac{3}{8}\right)^2\pi$이다.

같은 방법으로 R_n에 들어 있는 모든 원의 넓이의 합 S_n을 구하면

$$S_n=\pi+2\times\frac{9}{64}\pi+4\times\left(\frac{9}{64}\right)^2\pi+\cdots+2^{n-1}\times\left(\frac{9}{64}\right)^n\pi$$

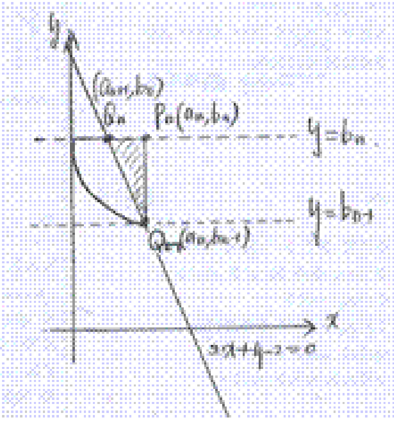
$$=\frac{\pi\left(1-\left(\frac{9}{32}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{32}}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{9}{32}}=\frac{32}{23}\pi$$

41) 답 : ③

[해설]

n번째 사분원의 방정식은 $(x-a_n)^2+(y-b_n)^2=a_n^2$이다.



y축의 오른쪽 영역에서의 n번째 도형의 넓이는 사분원에서 직각삼각형의 넓이를 빼면 되므로,

먼저, 삼각형 $P_nQ_nQ_{n-1}$의 넓이를 구하면,

$$\frac{1}{2}\overline{P_nQ_n}\times\overline{P_nQ_{n-1}}$$
$$=\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})(b_n-b_{n-1})$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$\because\ a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

그러므로, 구하고자 하는 n번째 넓이는 사분원에서 삼각형 $P_nQ_nQ_{n-1}$의 넓이를 빼서 구하면

$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 가 된다.

등비급수를 적용하면 $\dfrac{\frac{1}{4}\pi}{1-\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{\pi-1}{3}$

그러므로, 구하는 정답은 $\dfrac{2(\pi-1)}{3}$

42) 답 : 4

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}(3^na_n-2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(3^na_n-2)=0$

$b_n=3^na_n-2$라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+5\times4^{-n}}{a_n+3^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\{6\times3\}^na_n+5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^na_n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(b_n+2)+5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{b_n+3}=\frac{12}{3}=4$$

43) 답 : ②

[해설]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=3$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3+\lim_{n\to\infty}b_n=0$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-3$$

[구하는 값] $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3-b_n}{a_n}=\dfrac{3-(-3)}{3}=2$

44) 답 : ②

[해설]

$\angle A_nA_{n-1}B_n=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$

따라서 부채꼴 $A_{n-1}A_nB_n$의 중심각의 크기를 θ_n, 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$$\theta_n=\frac{\pi}{4},\ r_n=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ l_n=r_n\theta_n=\frac{\pi}{4}\times4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\pi}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2\pi}{2-\sqrt{2}}=\pi(2+\sqrt{2})$$

45) 답 : ②

[해설]

R_n의 한 직사각형의 가로의 길이를 x, 세로의 길이를 y라 하면 A 도형의 가로 길이는

$\frac{3}{4}x\times\frac{1}{2}$, 세로의 길이는 $\frac{4}{5}y\times\frac{1}{2}$가 되므로 넓이는 $\frac{3}{20}xy$이다.

따라서, R_n의 색칠한 부분의 넓이는

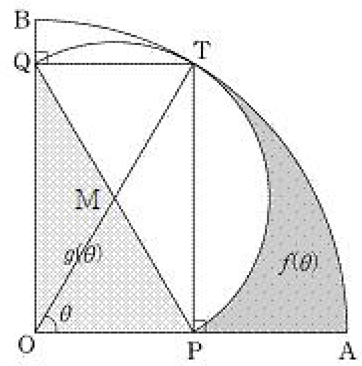
$$S_n=\frac{3}{20}xy\times4=\frac{3}{5}xy$$

즉, $S_n=\frac{3}{5}S_{n-1}$

그런데 $S_1=\frac{3}{5}\times4\times5=12$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{12}{1-\frac{3}{5}}=\dfrac{60}{2}=30$

46) 답 : 50

[해설]



점 T의 좌표를 $T(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$라 하고, 직사각형 $OPTQ$에서 두 대각선 $OT,\ PQ$의 교점을 M이라 하자.

$f(\theta)=$ (부채꼴 OAT의넓이) − (삼각형 OPM의 넓이) − (부채꼴 MPT의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times1\times\sin\theta-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$$
$$=\theta-\cos\theta\sin\theta$$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 2\cos\theta\times 2\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$

∴ $a=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\theta-\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta}$

$\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\theta}{\cos\theta\sin\theta}-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

∴ $100a=50$

47) 답 : 32

[해설]

$ar^4=2^8\cdots$①

$ar^7=2^5\cdots$②이므로

① ÷ ② 를 계산하면 $r^3=2^{-3}$이므로

$r=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a=2^{12}$

$\sum_{n=9}^{\infty}a_n$은 첫째항이 a_9이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비급수이므로

$\sum_{n=9}^{\infty}a_n=\frac{a_9}{1-\frac{1}{2}}=2^5=32$

48) 답 : ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1=a$라 하면

$a_n=a+(n-1)a=an\ (a>0)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a\times\frac{n(n+1)}{2}$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$이므로 ∴ 거짓

ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{a}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\frac{2}{a}$

따라서 수렴 ∴ 참

ㄷ. $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$

$=\frac{a(n+1)}{\sqrt{\frac{a}{2}(n+1)(n+2)}+\sqrt{\frac{a}{2}(n)(n+1)}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a(n+1)}{\sqrt{\frac{a(n^2+3n+2)}{2}}+\sqrt{\frac{a(n^2+n)}{2}}}$

$=\sqrt{\frac{a}{2}}$ (수렴)∴ 참

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

49) 답 : ②

[해설]

$S_1=\frac{1}{2}\{4\pi-\pi\}\times 2=3\pi$이고

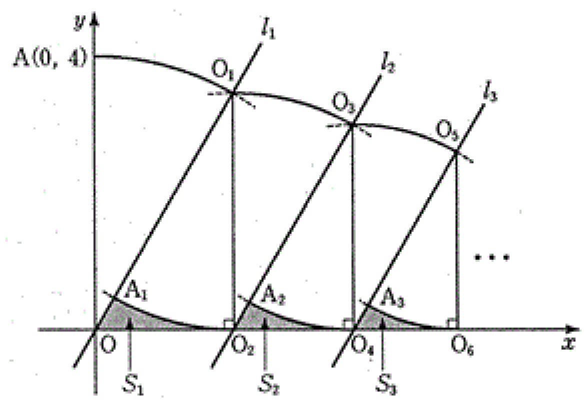
이후 모양의 도형은 넓이 $\frac{1}{9}$배, 개수는 2배로 변화하므로

$\lim_{n\to\infty}S_n$은 공비가 $\frac{1}{9}\times 2=\frac{2}{9}$ 인 등비급수가 된다.

∴ $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\pi}{1-\frac{2}{9}}=\frac{27\pi}{7}$

50) 답 : ②

[해설]



$S_1=$(△O_1OO_2의넓이)부채꼴 $O_1A_1O_2$의넓이)

$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}-\pi$

닮음비 $\overline{OO_1}:\overline{O_2O_3}=\overline{OA}:\overline{O_2O_1}=4:2\sqrt{3}=2:\sqrt{3}$

이므로 $\overline{O_2O_3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OO_1}$

∴ $S_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2S_n=\frac{3}{4}S_n$ (∵ 넓이비는 닮음비의 제곱비)

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{1-\frac{3}{4}}=8\sqrt{3}-4\pi$

51) 답 : 12

[해설]

$r=\frac{1}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}=\frac{a_1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}a_1=15$

∴ $a_1=12$

52) 답 : ①

[해설]

$(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$에서

$\{(2n-1)x-1\}\{(2n+1)x-1\}=0$

$x=\frac{1}{2n-1},\ \frac{1}{2n+1}$

$\alpha_n>\beta_n$이고 n이 자연수이므로

$\alpha_n=\frac{1}{2n-1},\ \beta_n=\frac{1}{2n+1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$

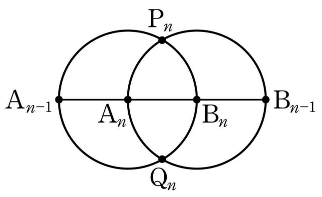
$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

53) 답 : ④

[해설]

아래 그림과 같이 n번째 얻어진 도형에 있는 두 원의 반지름의 길이를 r_n이라하면



$\overline{A_nB_n}=\overline{A_nP_n}=\overline{B_nP_n}=r_n$

이므로 $\angle P_nA_nB_n=\angle P_nB_nA_n=\frac{\pi}{3}$

두 호 $P_nA_nQ_n$, $P_nB_nQ_n$의 길이의 합

$l_n=2\times r_n\times\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi r_n$

또 선분 $A_{n-1}B_{n-1}$의 삼등분점이 A_n, B_n이므로

$\overline{A_nB_n}=\frac{1}{3}\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$

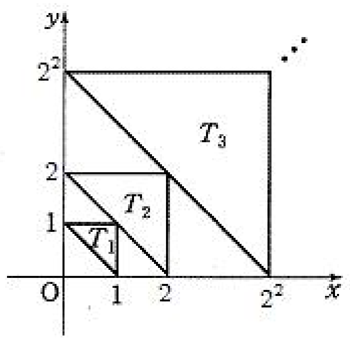
$\therefore\ r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}$

따라서, 수열 l_n의 공비는 $\frac{1}{3}$, $r_1=\frac{8}{3}$이므로 첫째 항 $l_1=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{8}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{32}{9}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\frac{16}{3}\pi$$

54) 답 : 12

[해설]



위 그림에서 T_n의 한 변의 길이는 2^{n-1}이므로

$a_n=\frac{1}{2}\cdot(2^{n-1})^2=2\cdot4^{n-1}$

T_n에서 세 개의 꼭짓점을 제외한 각 변에 존재하는 격자점의 개수는 모두 $2^{n-1}-1$개이므로

$b_n=3(2^{n-1}-1)+3=3\times2^{n-1}$

(준식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times3\cdot2^{n-1}}{\frac{1}{2}\cdot4^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n-2}}}=12$

(참고) T_n위에 일일이 격자점을 그려서 세어 보면

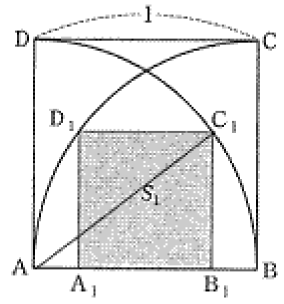
$b_1=3,\ b_2=6,\ b_3=12,\ b_4=24,\ \cdots$

가 되어, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 2인 등비수열임을 알 수 있다.

55) 답 : ②

[해설]

그림에서 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하면



$\overline{AA_1}=\frac{1-a}{2}$

$\overline{AB_1}^2+\overline{B_1C_1}^2=\overline{AC_1}^2$이므로

$\left(\frac{1-a}{2}+a\right)^2+a^2=1$

전개하여 정리하면 $5a^2+2a-3=0$

$(5a-3)(a+1)=0\ \therefore\ a=\frac{3}{5}$

따라서 $S_1=a^2=\frac{9}{25}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

정사각형 $ABCD$와 $A_1B_1C_1D_1$의 닮음비와 같고

그 값은 $1:\frac{3}{5}$이다.

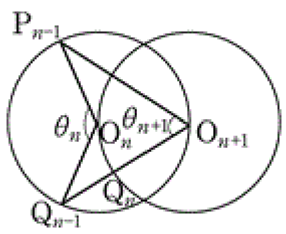
따라서 넓이의 비는 $1:\frac{9}{25}$이다. 그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$은 첫째항 $\frac{9}{25}$이고

공비가 $\frac{9}{25}$인 등비급수가 된다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{9}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{9}{16}$$

56) 답 : ②

[해설]



$P_n=\ \angle P_{n-1}O_nQ_{n-1}=\theta_n\ (n\geq2)$

$\angle P_nO_{n+1}Q_n=\theta_{n+1}$이라고 하면

$\theta_{n+1}=\frac{1}{2}\theta_n$

($\because$ (원주각) $=\frac{1}{2}$(중심각))

$\therefore\ S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$

$\angle P_1O_2Q_1=\frac{2}{3}\pi$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\pi$$

57) 답 : ①

[해설]

정삼각형 ABC가 한 바퀴 도는 동안 정삼각형의 변은 정사각형의 변 위에 8번 놓인다.

따라서, 정삼각형 ABC가 세 바퀴 도는 동안 정삼각형의 변은 정사각형의 변 위에 24번 놓인다.

이때, 변 BC는 8번이 놓이게 되므로 3바퀴 더 돌면 8번 더 놓인다.

$\therefore\ a_{n+3} = a_n + 8$

$a_{3n-2} = a_{1+3(n-1)} = a_1 + 8(n-1) = 8n-6$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{8n-6}{n} = 8$$

58) 답 : ③

[해설]

직선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x+1$이므로

x는 3의 배수이다.

$x=3n$로 놓으면 $y=n+1$이다. ($n=1, 2, 3, \cdots$)

따라서 $a_n = 3n,\ b_n = n+1$이다.

$\frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{3n(n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n b_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{3}$$

[정답]③

59) 답 : ②

[해설]

$a_1 = \frac{1}{9},\ a_2 = \frac{10}{99},\ a_3 = \frac{100}{999}$, ...이므로

$\frac{1}{a_1} = 9,\ \frac{1}{a_2} = \frac{99}{10},\ \frac{1}{a_3} = \frac{999}{100}$, ...

따라서 $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{9}{10},\ \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} = \frac{9}{100}$, ...,

$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{9}{10^n}$ 이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$ [정답]②

60) 답 : 12

[해설]

수열의 극한[정답]12

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}} + \frac{b}{6^{2n}}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{6} + \frac{a}{6^3} + \frac{a}{6^5} + \cdots\right) + \left(\frac{b}{6^2} + \frac{b}{6^4} + \frac{b}{6^6} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\frac{a}{6}}{1-\frac{1}{6^2}} + \frac{\frac{b}{6^2}}{1-\frac{1}{6^2}}$$

$$= \frac{6a+b}{6^2-1}$$

$$= \frac{6a+b}{35}$$

$$= \frac{1}{p}$$

$$\therefore\ p = \frac{35}{6a+b} = \frac{5\times 7}{6a+b}$$

따라서, p는 소수이므로

$6a+b=7$일 때 $p=5$이고, $6a+b=5$일 때 $p=7$이다.

$\therefore\ 5+7=12$

61) 답 : ②

[해설]

수열의 극한[정답]②

기울기가 -1이고, 점 $(a_n, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-a_n)$이며 $x+y-a_n=0 \cdots$①

원 $x^2+y^2 = \frac{1}{2^n}$이 직선 ①과 접하므로

원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 ①과의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{\frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore\ a_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^n}} = \sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

구하는 값 $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$

$$= 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2^2}} + \sqrt{\frac{1}{2^3}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$= 2+\sqrt{2}$$

62) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]수열의 극한

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{6^{2n-1}} + \frac{b}{6^{2n}}\right)$$

$$= \left(\frac{a}{6} + \frac{a}{6^3} + \frac{a}{6^5} + \ldots\right) + \left(\frac{b}{6^2} + \frac{b}{6^4} + \frac{b}{6^6} + \ldots\right)$$

$$= \frac{a}{6}/1-\frac{1}{6^2} + \frac{b}{6^2}/1-\frac{1}{6^2}$$

$=6a+\dfrac{b}{6^2-1}$

$=6a+\dfrac{b}{35}$

$=\dfrac{1}{p}$

$\therefore\ p=\dfrac{35}{6a+b}\ =\dfrac{5\times 7}{6a+b}$

따라서, p는 소수이므로 $6a+b=7$일 때 $p=5$이고, $6a+b=5$일 때 $p=7$이다.

$\therefore\ 5+7=12$

63) 답 : 1

[해설]

[출제 의도] 급수의 뜻 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n+1)(n+2)}\ =2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle =2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\ =2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\ =1$

64) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 등비급수가 수렴하도록 하는 정수의 개수를 구한다.

x가 정수일 때, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$은 첫째항과 공비가 모두 $\dfrac{2x-3}{7}$인 등비급수이다.

그러므로 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2x-3}{7}\right)^n$이 수렴하기 위한 필요충분조건은

$-1<\dfrac{2x-3}{7}<1$이다.

$-7<2x-3<7$

$-4<2x<10$

$-2<x<5$

따라서 정수 x의 개수는 $5-(-2)-1=6$

65) 답 : 21

[해설]

[출제 의도] 부분합의 극한과 수열의 일반항의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

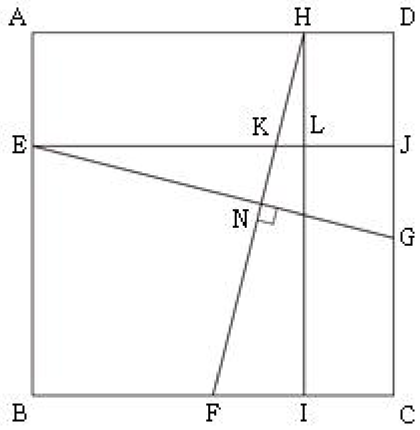
따라서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n+3S_n)\ =2\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}S_n\ =2\times 0+3\times 7\ =21$

66) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기



점 H에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 J라 하자.

두 선분 HF, HI와 선분 EJ가 만나는 점을 각각 K, L이라 하고, 선분 EG와 선분 HF가 만나는 점을 N이라 하면

$\angle HKL=\angle NKE$이고, $\angle KLH=\angle ENK=90^\circ$

이므로 $\angle KEN=\angle LHK$

또한 $\overline{HI}=\overline{EJ}$이고 $\angle FIH=\angle GJE=90^\circ$ 이므로

두 삼각형 HFI, EGJ는 합동이다.

따라서 $\overline{EG}=\overline{HF}=\sqrt{4n^2+1}$

$S_n\ =\dfrac{1}{2}\times\sqrt{4n^2+1}\times\sqrt{4n^2+1}\ =\dfrac{4n^2+1}{2}=2n^2+\dfrac{1}{2}$

따라서

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}S_n\ =\sum_{n=1}^{10}\left(2n^2+\frac{1}{2}\right)\ =2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{1}{2}\times 10\ =775$

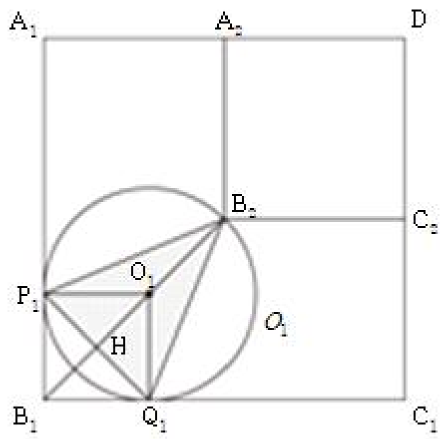
67) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

그림 R_1에서

원 O_1의 중심을 O_1, 반지름의 길이를 x라 하고, 점 B_2에서 선분 P_1Q_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{B_1D}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{B_1B_2}=\sqrt{2}$이다.

두 점 P_1, Q_1은 원 O_1이 변 A_1B_1, B_1C_1과 각각 접하는 점이므로 사각형 $O_1P_1B_1Q_1$은 한 변의 길이가 x인 정사각형이다.

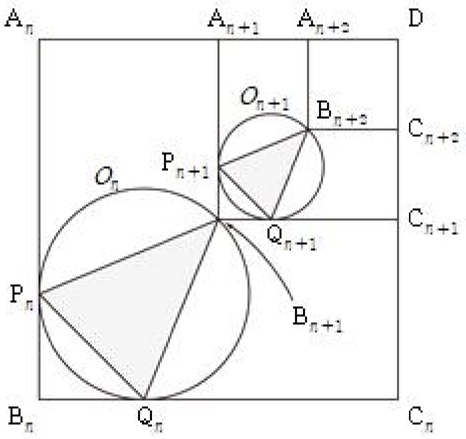
$\overline{B_1O_1}=\sqrt{2}x$이므로 $\overline{B_1O_1}+\overline{O_1B_2}=\sqrt{2}x+x=\sqrt{2}$

따라서 $x=2-\sqrt{2}$

또한 $\overline{P_1Q_1}=\sqrt{2}x=2\sqrt{2}-2$, $\overline{B_2H}=x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=1$이다.

그러므로 $S_1=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times 1=\sqrt{2}-1$

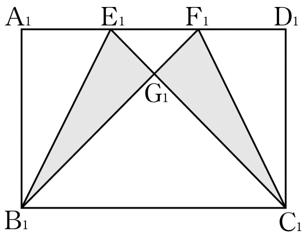
다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD$와 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D$는 서로 닮음이고 점 A_{n+1}과 점 C_{n+1}은 각각 변 A_nD와 변 C_nD의 중점이므로 닮음비는 $2:1$이다.
그러므로 두 삼각형 $B_{n+1}P_nQ_n$, $B_{n+2}P_{n+1}Q_{n+1}$은 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이므로 넓이의 비는 $4:1$이다.
따라서 S_n은 첫째항이 $\sqrt{2}-1$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1) = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$$

68) 답 : ④
[해설]
[출제 의도] 도형의 닮음을 이용하여 등비급수의 합을 구하는 문제를 해결한다.
그림 R_n에서 새로 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



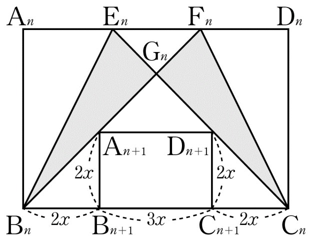
$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1F_1} = 2$이므로 삼각형 $A_1B_1F_1$은 직각이등변삼각형이고
$\angle G_1B_1C_1 = 45°$이다.
$\overline{D_1C_1} = \overline{D_1E_1} = 2$이므로 삼각형 $D_1C_1E_1$은 직각이등변삼각형이고
$\angle G_1C_1B_1 = 45°$이다.
그러므로 $\angle B_1G_1C_1 = 90°$이고, 삼각형 $G_1B_1C_1$은 직각이등변삼각형이다.
또한, $\angle G_1E_1F_1 = 45°$, $\angle G_1F_1E_1 = 45°$이므로 삼각형 $G_1E_1F_1$도 직각이등변삼각형이다.
$\overline{B_1C_1} = 3$이므로

$$\overline{B_1G_1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\overline{E_1F_1} = 1$이므로

$$\overline{E_1G_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그러므로 $a_1 = 2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}$



$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = 2x$라 하면 $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 3x$이고
$\overline{B_nC_n} = 2x+3x+2x = 7x$이므로

$$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 3x = \frac{3}{7}\overline{B_nC_n}$$

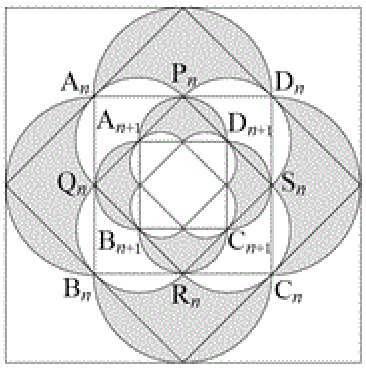
직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 직사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $1:\frac{3}{7}$이므로, 그림 R_{n+1}에서 추가로 색칠되는 도형의 넓이 a_{n+1}은

$$a_{n+1} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 a_n = \frac{9}{49}a_n$$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2}$이고 공비가 $\frac{9}{49}$인 등비수열이다.
따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{49}} = \frac{147}{80}$$

69) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 등비급수를 활용하여 추론하기
$T_1 =$ (도형 E_1의 넓이)-(도형 F_1의 넓이)
$= (2\pi+4)-(\pi+2) = \pi+2$
그림은 G_{n+1}의 일부이다.



정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$$\overline{A_nC_n} = \overline{A_nA_{n+1}} + \overline{A_{n+1}C_{n+1}} + \overline{C_{n+1}C_n}$$

$$\sqrt{2}a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a_n}{2} + \sqrt{2}a_{n+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a_n}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

그림 G_{n+1}의 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_{n+1}이라 하면

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n,\ b_1 = T_1$$

그러므로 T_n은 첫째항이 $\pi+2$이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

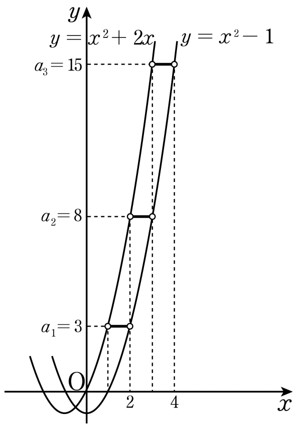
따라서 $\lim_{n\to\infty} T_n = \dfrac{\pi+2}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}(\pi+2)$

70) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 집합으로 정의된 부등식의 성질을 이용하여 급수 문제를 해결한다.

두 함수 $y=x^2+2x$, $y=x^2-1$의 그래프는 그림과 같다.



자연수 1, 2는 $x=1$일 때 $1^2-1=0$과 $1^2+2\times1=3$ 사이의 수이다.

이때 $1\in A$이므로 $A\neq\phi$이다.

그러므로 1, 2는수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 없다.

그런데 $a=3$일 때, 부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로 $A=\phi$이다. 즉, $a_1=3$

자연수 4, 5, 6, 7은 $x=2$일 때 $2^2-1=3$과 $2^2+2\times2=8$ 사이의 수이다.

이때 $2\in A$이므로 $A\neq\phi$이다.

따라서 4, 5, 6, 7은 수열 $\{a_n\}$의 둘째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<8<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로

$a_2=8$이다.

마찬가지로 자연수 9, 10, 11, 12, 13, 14는

$x=3$일 때 $3^2-1=8$과 $3^2+2\times3=15$ 사이의 수이다.

이때 $3\in A$이므로 $A\neq\phi$이다.

따라서 9, 10, 11, 12, 13, 14는수열 $\{a_n\}$의 셋째 항이 될 수 없다.

그런데 위 그림에서 $x^2-1<15<x^2+2x$를 만족시키는 자연수 x가 존재하지 않으므로

$a_3=15$이다.

⋮

위의 과정을 통해 집합 A를 공집합이 되도록 하는

자연수 a는 k^2-1 또는 k^2+2k (k는 자연수)의 값임을 알 수 있다.

그런데 $x=k$(k는 자연수)일 때 k^2+2k의 값은

$x=k+1$(k는 자연수)일 때 $(k+1)^2-1$의 값과

같고, $x=1$일 때, $1^2-1=0$은 자연수가 아니므로

$x=k$(k는 자연수)일 때 k^2+2k인 자연수를 나열하면 된다.

따라서 n번째 나열된수는 n^2+2n이므로

$a_n=n^2+2n$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-0-\right)\right\}=\frac{3}{4}$$

[다른 풀이]

$x^2-1<a<x^2+2x$를 정리하면

$x^2<a+1<x^2+2x+1$

$x^2<a+1<(x+1)^2$

$a+1$이 자연수 x에 대해 x^2 또는 $(x+1)^2$이면

부등식 $x^2-1<a<x^2+2x$의 해 중 자연수는 존재하지 않으므로 A가 공집합이다.

이때, $a+1=k^2$(k는 2 이상의 자연수)를 만족시키는 자연수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것이 수열 $\{a_n\}$이다.

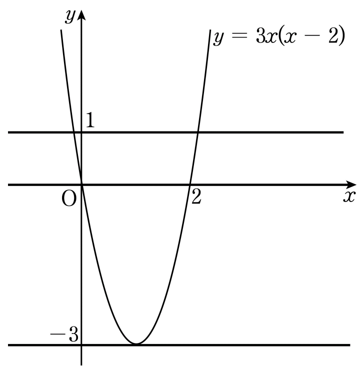
따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{3}{4}$$

71) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 함수의 그래프와 방정식의 관계를 이해하여 실근의 곱을 구하는 문제를 해결한다.



조건 (가)에 의해

이차 함수 $f(x)=ax(x-2)$ (a는 상수)꼴이다.

조건 (나)에 의해 $ax(x-2)-6(x-2)=0$이므로 $(ax-6)(x-2)=0$이다.

이차방정식의 실근의 개수가 1이므로 $ax-6=0$의 근도 $x=2$이다. 즉, $a=3$이다.

$f(x)=3x(x-2)=3(x-1)^2-3$이므로

이차 함수 $f(x)$의 꼭짓점은 $(1,-3)$이다.

$f(f(x))=-3$을 만족하기 위해서는 $f(x)=1$이 되어야 함을 그래프에서 알 수 있다.

그러므로 $3x^2-6x=1$에서 $3x^2-6x-1=0$이다.

따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에서 $-\dfrac{1}{3}$이다.

72) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 무한급수와 일반항의 관계를 이해하고 이를 활용하여 극한값을 구한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=0$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\frac{5n}{n+1}+\frac{5n}{n+1}+3}{a_n-\frac{5n}{n+1}+\frac{5n}{n+1}-1}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}+\lim_{n\to\infty}3}{\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}1}$$

$$=\frac{0+5+3}{0+5-1}=2$$

[다른 풀이]

$b_n=a_n-\frac{5n}{n+1}$이라 하자.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$a_n=b_n+\frac{5n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=5$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{5n}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{n+1}=0+5=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-1}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n+3)}{\lim_{n\to\infty}(a_n-1)}=\frac{5+3}{5-1}=2$$

73) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n+1}{n}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n+1}{n}\right)=0\ \ldots ①$$

$a_n-\frac{3n+1}{n}=b_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고 $a_n=b_n+\frac{3n+1}{n}\ \ldots ②$

[구하는 값] $=\lim_{n\to\infty}a_n$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{3n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$$

74) 답 : 14

[해설]

[출제 의도] 무한급수 이해하기

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{84}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}84\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}42\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=14$$

75) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2}\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2}\right)=0$$

$\frac{a_n}{n+1}-\frac{1}{2}=b_n$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고

$$a_n=(n+1)\left(b_n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(b_n+\frac{1}{2}\right)}{4+\frac{1}{n}}=\frac{1}{8}$$

76) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 무한급수의 수렴과 수열의 극한값 사이의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=5$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-2n}{a_n+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5a_n}{n}-2}{\frac{a_n}{n}+2+\frac{1}{n}}=2$

77) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 무한급수 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(4a_n+\frac{3n^2-1}{n^2+1}\right)=4\times2+3=11$

78) 답 : ④

[해설]

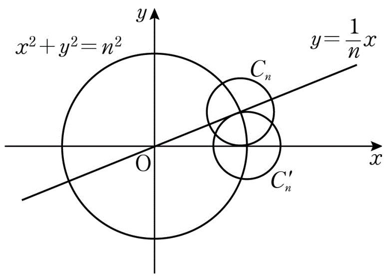
[출제 의도] 원과 직선 사이의 관계를 이용하여 극한값 구하는 문제를 해결한다.

원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$가 제1사분면에서 만나는 점을 중심으로 하고

x축에 접하는 원을 C_n이라 하자.

원 C_n의 넓이 S_n은 그림과 같이 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축의 교점 $(n,\ 0)$을 중심으로

하고 직선 $y=\frac{1}{n}x$에 접하는 원 C_n'의 넓이 S_n'과 같다.



원 C_n'의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

r_n은 점 $(n,\ 0)$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$ 사이의 거리와 같으므로

$$r_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

따라서 $S_n=S_n'=(r_n)^2\pi=\frac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}\pi=\pi$

[다른 풀이 1]

원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n이라 하면 원 C_n 의 중심의 y좌표는

원 C_n 의 반지름의 길이 r_n과 같고, 직선의 기울기가 $\frac{1}{n}$이므로

원 C_n 의 중심의 x좌표는 nr_n이다.

원점에서 원 C_n 의 중심까지의 거리가 n이므로

$$(nr_n)^2+(r_n)^2=n^2$$

$$(n^2+1)(r_n)^2=n^2$$

$$(r_n)^2=\frac{n^2}{n^2+1}$$

따라서 $S_n=\pi(r_n)^2=\frac{n^2}{n^2+1}\pi$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\pi$

[다른 풀이 2]

원 $x^2+y^2=n^2$과 직선 $y=\frac{1}{n}x$의 교점의 y좌표가 원 C_n 의 반지름의 길이이므로

$x^2+y^2=n^2$에 $x=ny$를 대입하면

$$(ny)^2+y^2=n^2$$

$$(n^2+1)y^2=n^2$$

$y^2=\frac{n^2}{n^2+1}$이므로 원의 넓이 S_n은

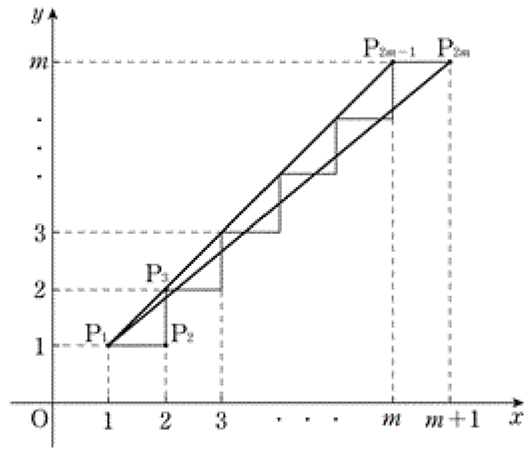
$$S_n=\pi y^2=\frac{n^2}{n^2+1}\pi$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\pi$

79) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 주어진 조건을 이용하여 수열의 극한을 구하는 문제를 해결한다.



$a_3=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_4=\sqrt{2^2+1^2}$, $a_5=\sqrt{2^2+2^2}$,

$\cdots$, $a_{2m-1}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$,

$a_{2m}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$

ⅰ) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\{(a_{n+1}-a_n)\}=\lim_{m\to\infty}(a_{2m}-a_{2m-1})$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2-2m+1}-\sqrt{2(m-1)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ⅱ) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m+1}-a_{2m})$$

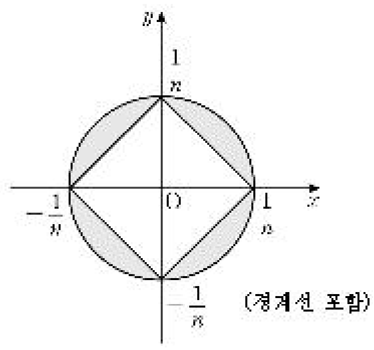
$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2}-\sqrt{2m^2-2m+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

80) 답 : 15

[해설]

[출제 의도] 연립부등식의 영역으로 주어진 도형과 관련된 무한급수의 문제를 해결한다.



$S_n=\pi\left(\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot 2=\frac{\pi-2}{n^2}$이므로

$$S_{n+2}=\frac{\pi-2}{(n+2)^2}$$

$$\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{S_nS_{n+2}}$$

$$=\frac{20}{\pi-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi-2}{n^2}\cdot\frac{\pi-2}{(n+2)^2}}$$

$$=20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$$

$$=20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=10\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=10\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=10\times\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$=15$$

81) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.

점 A_2를 지나고 선분 B_1C_1에 평행한 직선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1의 교점을 각각 P, Q라 하자.

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, A_1PQ의 닮음비는 $3:2$,

두 삼각형 A_1PQ, $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $2:1$이므로

삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_2B_2C_2$의 닮음비는 $3:1$

그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi$$
$$\therefore\ \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$$

82) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

마름모의 성질에 의하여 마름모 $ADEF$의

두 대각선이 만나는 점과 원의 중심이 일치하므로

$\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{AE}=2\sqrt{3}$

$\angle EOP=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{3}$, $\overline{PE}=3$

사각형 $OPEQ$의 넓이 $S_1=3\sqrt{3}$

그림 R_n에서 새로 그려진 정삼각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

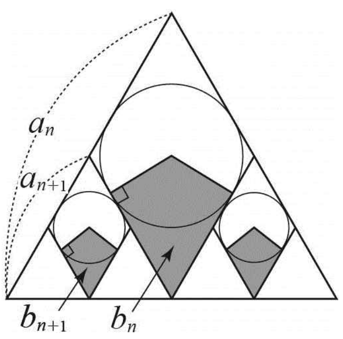


그림 R_n에 색칠한 한 개의 사각형의 넓이를 b_n이라 하면

$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$

그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 사각형의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 사각형의 개수의 2배이다.

그러므로 S_n은 첫째항이 $3\sqrt{3}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

83) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 등비수열을 활용하여 추론하기

종이 $ABCD$를 접는 선은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인정사각형이므로,

S_1을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의길이의 합은$4\sqrt{2}$이다.

S_1을 접는 선은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고종이가 2겹이므로, S_2를 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 8이다.

S_2를 접는 선은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고종이가 4겹이므로, S_3을 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $8\sqrt{2}$이다.그러므로 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

따라서 S_n을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의합 l_n은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열의 제n항까지의 합이다.

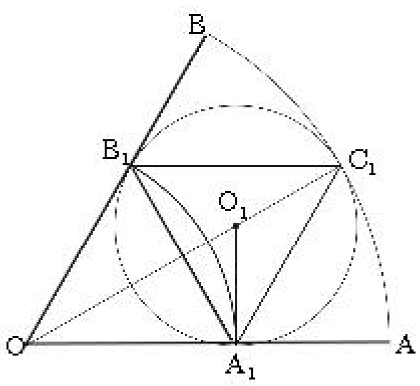
$$\therefore\ l_5=\frac{4\sqrt{2}\times\{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1}=24+28\sqrt{2}$$

84) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 무한급수를 활용하여 추론하기

부채꼴 OAB에서 원 O_1의 중심을 O_1이라 하자.



$\overline{OA_1}=\overline{OB_1}$이고 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 OA_1B_1은 정삼각형이다.

직선 OC_1은 점 O_1을 지나므로

$\angle O_1OA_1=\frac{\pi}{6}$이다.

원 O_1의 반지름의 길이를 a라 하면

$\overline{OA_1}=\sqrt{3}a$, $\overline{OO_1}=2a$, $\overline{O_1C_1}=a$이므로

$\overline{OC_1}=3a=6$, $a=2$이고

$\overline{OA_1}=2\sqrt{3}$, $\overline{A_1C_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{B_1A_1}=2\sqrt{3}$

이다.

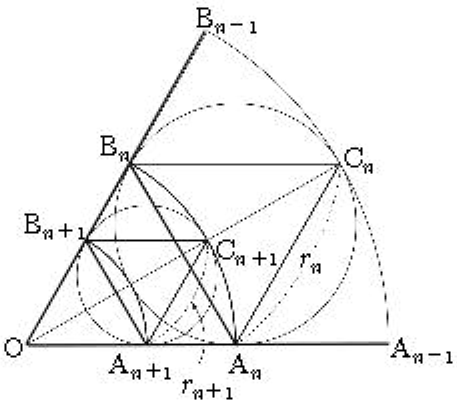
정답 및 해설

▽모양의 도형 $A_1C_1B_1$의 넓이는
두 정삼각형 OA_1B_1, $A_1C_1B_1$의 넓이의 합에서 부채꼴 OA_1B_1의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\therefore\ S_1=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=6\sqrt{3}-2\pi$$

부채꼴 $OA_{n-1}B_{n-1}$에 내접하는 원 O_n이
두 선분 OA_{n-1}, OB_{n-1}, 호 $A_{n-1}B_{n-1}$과 만나는 점을 각각 A_n, B_n, C_n이라 하자.
(단, $A_0=A$, $B_0=B$이다.)



▽모양의 도형 $A_nC_nB_n$과 도형 $A_{n+1}C_{n+1}B_{n+1}$에서
$\overline{A_nC_n}=r_n$, $\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=r_{n+1}$이라 하자.
$\overline{OC_{n+1}}=\overline{OA_n}=r_n$이고 $\overline{OA_{n+1}}=r_{n+1}$이므로
삼각형 $OA_{n+1}C_{n+1}$에서
$\angle OA_{n+1}C_{n+1}=\frac{2}{3}\pi$이므로
코사인법칙에 의하여

$$r_n^2=r_{n+1}^2+r_{n+1}^2-2r_{n+1}^2\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$r_n^2=3r_{n+1}^2$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}r_n$$

두 도형의 닮음비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$이다.

그러므로 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6\sqrt{3}-2\pi$이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{6\sqrt{3}-2\pi}{1-\frac{1}{3}}=9\sqrt{3}-3\pi$

85) 답 : 7
[해설]
[출제 의도] 무한급수의 성질 이해하기
$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-7)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-7)=0$
따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=7$

86) 답 : ④
[해설]
[출제 의도] 등비수열의 일반항을 구하고 무한등비급수의 합을 구한다.

$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n$ $(n\ge1)$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{7}{2}$인 등비수열이므로

$$a_n=\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1}\ (n\ge1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}10\times\left(\frac{2}{7}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{10}{1-\frac{2}{7}}$$

$$=14$$

[MIM 보충 설명]
[1]수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=3,\ a_2=2$, $a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n$ $(n\ge2)$일 때에는

일반항 $\begin{cases}a_n=2\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{n-2} & (n\ge2)\\ a_1=3\end{cases}$으로 구해야 된다.

[2]수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=3$, $a_n=\frac{7}{2}a_{n-1}$ $(n\ge2)$일 때에는

일반항 $\begin{cases}a_n=3\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{n-1} & (n\ge2)\\ a_1=3\end{cases}$으로 구해야 된다.

87) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
C_1은 중심이 $O_1(2-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 1인 원 C_2는 중심이 $O_2\left(2-\frac{1}{2},\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원 C_3은 중심이 $O_3\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$인 원

C_n은 중심이 $O_n\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0\right)$,

반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원
$B(-1,\ 0)$을 지나고, 기울기가 a_n인 직선의 방정식을 $y=a_n(x+1)$이라 하자.
점 O_n부터 직선 $a_nx-y+a_n=0$까지의 거리는
원 C_n의 반지름의 길이 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$과 같다.

$$\frac{\left|a_n\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right|}{\sqrt{a_n^2+1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\quad\sqrt{a_n^2+1}=2^{n-1}a_n\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$a_n^2+1\ =4^{n-1}a_n^2\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$$

$$=a_n^2(9\bullet4^{n-1}-3\bullet2^n+1)$$

$$a_n^2=\frac{1}{9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n}$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{9\cdot4^{n-1}-3\bullet2^n}}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{\sqrt{9\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^n}}=\dfrac{2}{3}$

88) 답 : 5

[해설]

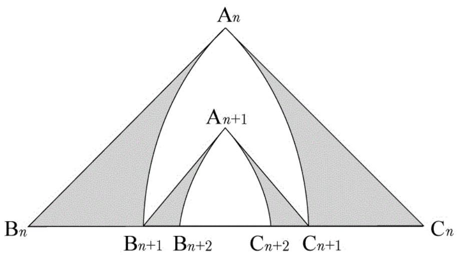
[출제 의도] 도형과 무한등비급수 추론하기

$S_1 = 2\{($삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이$)-($부채꼴 $B_1A_1C_2$의 넓이$)$

$=2\left(4-\dfrac{1}{2}\times 8\times\dfrac{\pi}{4}\right)=2(4-\pi)$

$S_2 = 2\{($삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이$)-($부채꼴 $B_2A_2C_3$의 넓이$)$

$=2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{B_nC_n}=2l_n$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2l_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n}=\overline{B_nC_{n+1}}=\sqrt{2}\,l_n$이고

$\dfrac{1}{2}\overline{B_nC_n}+\dfrac{1}{2}\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{B_nC_{n+1}}$이므로

$l_n+l_{n+1}=\sqrt{2}\,l_n$

$l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

$\dfrac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{1}{4-\pi}\cdot\dfrac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{2}$

$a=1$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=5$

89) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 무한등비급수에 관한 문제를 해결한다.

$\overline{P_1B_1}=\overline{B_1Q_1}=2$, $\angle P_1B_1Q_1=90^\circ$이므로

직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2^2=2$이다.

$\overline{B_1D_1}$이 정사각형 $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$의 두 변 B_2C_2, D_2A_2와 만나는 점을 각각 M_1, N_1이라 하고, 정사각형 $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{B_1M_1}=\sqrt{2}$, $\overline{M_1N_1}=x$, $\overline{N_1D_1}=\overline{A_2N_1}=\dfrac{x}{2}$

이고 $\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$이므로

$\overline{B_1D_1}=\overline{B_1M_1}+\overline{M_1N_1}+\overline{N_1D_1}$

$=\sqrt{2}+x+\dfrac{x}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

따라서 두 정사각형 $A_1\ B_1\ C_1\ D_1$과 $A_2\ B_2\ C_2\ D_2$의 닮음비는

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

이다.

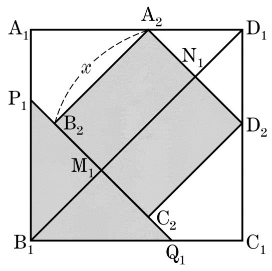
모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로

이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$



그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의

넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2+\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$이고

공비가 $\dfrac{32}{81}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\dfrac{450}{49}$

[다른 풀이]

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이가 3이므로

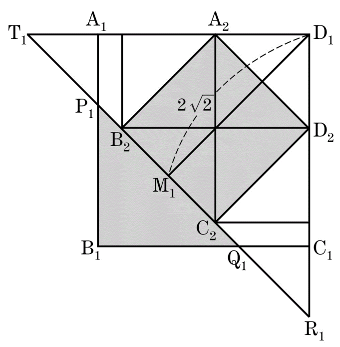
$\overline{B_{1D}1}=3\sqrt{2}$

꼭짓점 D_1에서 선분 P_1Q_1에 내린 수선의 발을 M_1이라 하면

$\overline{D_{1M}1}=2\sqrt{2}$이다.

직선 D_1A_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 T_1, 직선 C_1D_1과 직선 P_1Q_1의 교점을 R_1이라 하자.

이때 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이의 $\dfrac{4}{9}$이다.



직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$은 높이가 $2\sqrt{2}$이고,

밑변의 길이가 $4\sqrt{2}$이므로 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$

이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는

$$8\times\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$$

이다. 따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이는

$$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$$

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n은 정사각형과 직각이등변삼각형으로

이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

그림에서 그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1은

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$이고

공비가 $\frac{32}{81}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$$

90) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수렴하는 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}a_n$의 관계를 이용하여 극한값을 구한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{2\cdot0-3}{0+1}=-3$$

91) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$6^n=2^n3^n$이므로 전체 약수의 개수는 $(n+1)^2$

전체 약수 중 홀수는 3^n의 약수이므로

$g(n)=n+1$

전체 약수 중 짝수의 개수는 2^n3^n의 전체 약수의 개수에서 홀수의 개수를 빼면 되므로

$f(n)=(n+1)^2-(n+1)=n(n+1)$

$a_n=f(n)-g(n)=n(n+1)-(n+1)=n^2-1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{3}{4}$$

92) 답 : 19

[해설]

[출제 의도] 급수와 일반항 사이의 관계를 이용하여 계산하기

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-19)=2012$로 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-19)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=19$

93) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 등비급수를 이해하고, 급수의 합을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

주어진 급수의 합을 S라 하고, 이를 덧셈으로 연결하여 나타내면

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$$

$$=0+\frac{2}{3^2}+0+\frac{2}{3^4}+0+\frac{2}{3^6}+0+\cdots$$

$=\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\frac{2}{3^8}+\cdots$ 이므로

이 급수는 첫째항이 $\frac{2}{9}$이고 공비가 $\frac{1}{9}$인 등비급수의 합과 같다.

$$\therefore\ S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$$

94) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용한 함수의 그래프 이해하기

(i) $x=0$이면 $f(x)=0$이다.

(ii) $x\neq0$이면 $f(x)=\frac{x}{1-\frac{1}{1+|x|}}=\frac{x(1+|x|)}{|x|}$이다.

(i), (ii)에 의해서 $f(x)=\begin{cases}x-1, & (x<0)\\ 0, & (x=0)\\ x+1, & (x>0)\end{cases}$ 이다.

$f(x)$와 직선 $y=2x+\frac{1}{2}$와의 교점의 x좌표는 $x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{3}{2}$이다.

따라서, 모든 교점의 x좌표의 합은 -1이다.

95) 답 : 15

[해설]

[출제 의도] 등비급수의 수렴조건 이해하기

공비가 $\frac{2x-5}{7}$ 이므로

주어진 등비급수가 수렴하기 위해서는 $-1<\frac{2x-5}{7}<1$ 이다.

$-7<2x-5<7$ 이며 $-1<x<6$

$\therefore$ 정수 x는 $0, 1, 2, 3, 4, 5$이므로 합은 15

96) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 급수의 수렴과 일반항의 극한의 관계를 이해하고, 극한값을 구한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-n}{n}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n-n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{5n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{5-\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{5+1}{5-1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

[참고]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

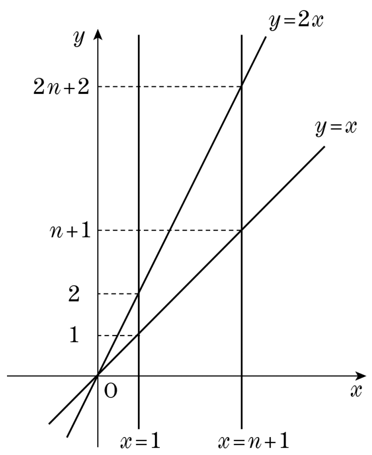
97) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]도형의 넓이를 나타내는 수열을 구한 후 부분분수로 변형하여 급수의 합을 구한다.

네 직선 $x=1, x=n+1, y=x, y=2x$로 둘러싸인 사각형은 그림과 같이 평행한 두 변의 길이가 각각 $1, (n+1)$이고, 높이가 n인 사다리꼴이다.

$$\therefore S_n=n\frac{n+\{2\}}{2}$$



$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

98) 답 : 9

[해설]

[출제 의도]수열의 합 S_n과 일반항 a_n의 관계를 이해하여 급수의 합을 구한다.

$S_n=\frac{6n}{n+1}$ 에서

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=\frac{6n}{n+1}-6\frac{n-\{1\}}{n}$$

$$=\frac{6n^2-6(n^2-1)}{n(n+1)}$$

$$=\frac{6}{n(n+1)}\ (n\geq 2)$$

$a_1=S_1=3$이므로 $a_n=\frac{6}{n(n+1)}\ (n\geq 1)$

$$a_n+a_{n+1}=\frac{6}{n(n+1)}+\frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

$$=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+6\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=6\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=6\left(1+\frac{1}{2}\right)=9$$

[다른 풀이1]

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}=6$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+6}{n+2}=6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{k+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1}-a_1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n+1}-a_1$$

$6+6-3=9\,(\because\ a_1=S_1=3)$

[다른 풀이2]

$$a_n+a_{n+1}=(S_n-S_{n-1})+(S_{n+1}-S_n)$$

$$=S_{n+1}-S_{n-1}$$

$$=6\frac{n+\{1\}}{n+2}-6\frac{n-\{1\}}{n}$$

$$=\frac{6n(n+1)-6(n-1)(n+2)}{n(n+2)}$$
$$=\frac{12}{n(n+2)}$$
$$=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\ (n\geq 2)$$

$a_1+a_2=S_2=4$이므로

$$a_n+a_{n+1}=6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\ (n\geq 1)$$

99) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 극한의 성질을 이용하여 도형에 응용된 극한 문제를 해결한다.

선분 CP_0의 길이를 $a\ (0<a<1)$이라 하면

$$\overline{P_0P_1}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_4P_5}=\cdots=a$$
$$\overline{P_1P_2}=\overline{P_3P_4}=\overline{P_5P_6}=\cdots=1-a$$

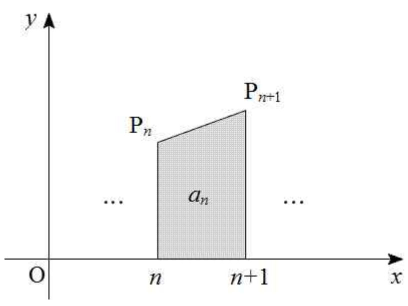
이므로 $l_{2n}=n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l_{2n}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$
$$\therefore\ a+b=3$$

100) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 급수 수렴조건 활용하여 추론하기



P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$$y_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-\frac{1}{2^{n-1}}\text{ 이다.}$$

$a_n=\frac{1}{2}(y_n+y_{n+1})=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{3}{2^{n+1}}$ 이다.

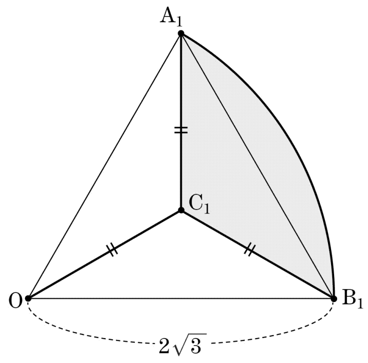
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-\alpha)$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-\alpha)=0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이다.

따라서 $\alpha=2$

101) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]도형의 닮음을 이용하여 급수의 합을 구한다.



점 C_1은 정삼각형 A_1OB_1의 무게중심이므로

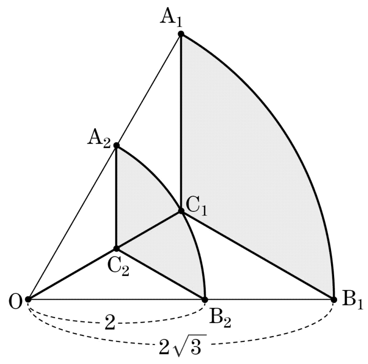
삼각형 A_1OC_1의 넓이와 삼각형 C_1OB_1의 넓이는

각각 삼각형 A_1OB_1의 넓이의 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 삼각형 C_{1OB_1}의 넓이는 $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2=\sqrt{3}$이다.

S_1은 부채꼴 A_1OB_1의 넓이에서 두 삼각형 A_1OC_1, C_1OB_1의 넓이를 뺀 값이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{3}-2\sqrt{3}=2\pi-2\sqrt{3}$$



부채꼴 A_1OB_1과 부채꼴 A_2OB_2의 닮음비는

$2\sqrt{3}:2=\sqrt{3}:1$이므로 넓이의 비는 $3:1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $2\pi-2\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\pi-2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=3\pi-3\sqrt{3}$$

102) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 급수의 성질 추론하기

$y=\log_c|x|$과 $y=n$의 교점의 x좌표를 구하면 $a_n=c^n$이고

$b_n=-c^n$이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$은 공비가 c 인 등비수열이다.

ㄱ. $a_n+b_n=c^n+(-c^n)=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 이면 $0<c<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{c}{1-c}$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$이 발산하면 수열 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$의 공비 $\frac{1}{c}$은 $\frac{1}{c}>1$ 이므로

수열 $\{a_n\}$의 공비 c는 $0<c<1$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다. (거짓)

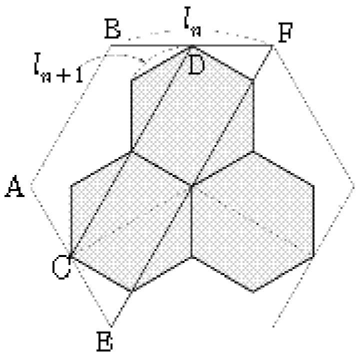
103) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용하여 문제 해결하기

H_n의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_n,

H_{n+1}의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_{n+1}이라 하자.



$2\overline{AB}=\overline{EF}$이므로 $\frac{3}{2}\overline{AB}=\overline{CD}$이다.

$\frac{3}{2}l_n=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}l_{n+1}$이 성립하므로

$l_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}l_n$에서

$S_{n+1}=3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2S_n=\frac{9}{16}S_n$

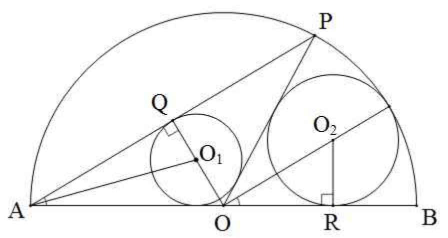
수열 $\{S_n\}$은 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times6\times3=\frac{27}{32}\sqrt{3}$이고, 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{27}{32}\sqrt{3}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{27}{14}\sqrt{3}$

104) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 삼각함수의 극한 이해하기



그림과 같이 원 O_1과 직선 AP와의 접점을 점 Q, 원 O_2와 직선 AB와의 접점을

점 R라 하고, 원 O_1의 반지름을 r_1, 원 O_2의 반지름을 r_2라 하자.

삼각형 QAO에서 $\overline{AQ}=\cos\theta$, $\angle QAO_1=\frac{\theta}{2}$이므로

$r_1=\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}$이다.

$\therefore\ f(\theta)=\pi\cos^2\theta\tan^2\frac{\theta}{2}$

부채꼴 OBP에서 $\angle O_2OR=\theta$이므로

$\overline{OO_2}=\frac{r_2}{\sin\theta}$이다.

$\frac{r_2}{\sin\theta}+r_2=1$이므로

$r_2=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$이다.

$\therefore\ g(\theta)=\frac{\pi\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\sin^2\theta}{\pi\cos^2\theta\tan^2\frac{\theta}{2}(1+\sin\theta)^2}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\frac{\theta^2}{4}}{\tan^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{4}{\cos^2\theta(1+\sin\theta)^2}=4$$

105) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 도형에서 등비급수의 합을 이해한다.

직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

$\triangle OO_1A_1$은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_1A_1=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_1=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle OO_nA_n$은 이등변삼각형이므로 $\angle OO_nA_n=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_n=\frac{2}{3}\pi\cdot l_{n-1}$ $(n\geq2)$

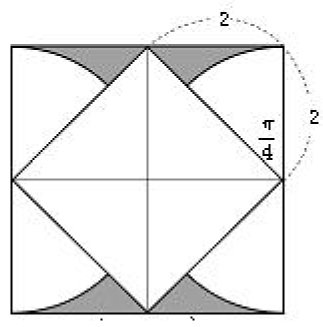
수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2\pi}$이고 공비가 $\frac{3}{2\pi}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\frac{\frac{3}{2\pi}}{1-\frac{3}{2\pi}}=\frac{3}{2\pi-3}$$

106) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 도형의 규칙성을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$S_1=4\left(\frac{1}{2}\cdot2\cdot2-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=8-2\pi$

정사각형 모양 의 닮은 그림들을 크기순으로 나열할 때 인접하는 두 그림의 닮음비는 $4:2\sqrt{2}=2:\sqrt{2}$이고 넓이의 비는 $2:1$이다.

$S_2=S_1+(8-2\pi)\cdot\frac{1}{2}=(8-2\pi)+(8-2\pi)\cdot\frac{1}{2}$

$S_3=S_2+(8-2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=(8-2\pi)+(8-2\pi)\cdot\frac{1}{2}+(8-2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$S_n = (8-2\pi)+(8-2\pi)\cdot\frac{1}{2}+\cdots+(8-2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty}(8-2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \frac{8-2\pi}{1-\frac{1}{2}} = 16-4\pi$

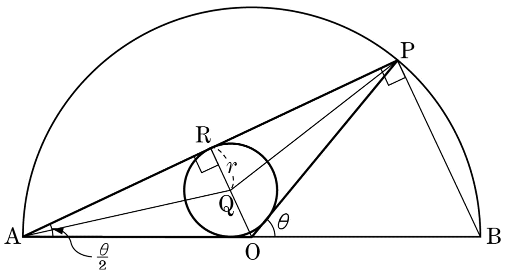
$\therefore\ p+q=16-4=12$

107) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]삼각함수의 극한과 도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q, 반지름의 길이를 r라 하자.



$\triangle AOP = \triangle AOQ + \triangle OPQ + \triangle PAQ$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AO}\cdot\overline{OP}\cdot\sin(\pi-\theta) = \frac{r}{2}\cdot\overline{AO}+\frac{r}{2}\cdot\overline{OP}+\frac{r}{2}\cdot\overline{PA}$

$\therefore\ \sin\theta = r\left(2+\overline{PA}\right)\cdots$①

직각삼각형 ABP에서

$\overline{PA}=\overline{AB}\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\cdots$②이므로

①, ②에 의하여 $r=\frac{\sin\theta}{2+2\cos\frac{\theta}{2}}$ 이다.

따라서 $f(\theta)=\pi r^2=\frac{\pi\sin^2\theta}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$ 이므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\cdot\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi}{\left(2+2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$

$=1^2\cdot\frac{\pi}{16}=\frac{\pi}{16}$

[다른 풀이]

삼각형 PAO에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 원 Q와 변 AP의 접점을 R라 하면

$\overline{OR}\perp\overline{AP},\ \overline{QR}\perp\overline{AP}$이다.

삼각형 AOR에서 $\angle RAO=\frac{\theta}{2}$ 이므로

$\overline{AR}=\overline{OA}\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}$

삼각형 AQR에서 $\angle RAQ=\frac{\theta}{4}$ 이므로

$\overline{QR}=\overline{AR}\tan\frac{\theta}{4}=\cos\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{4}$

따라서 $f(\theta)=\pi\overline{QR}^2=\pi\cos^2\frac{\pi}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}$ 이다.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\pi\cos^2\frac{\theta}{2}\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2\cdot16}$

$=\frac{\pi}{16}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^2\frac{\theta}{4}}{\left(\frac{\theta}{4}\right)^2}\lim_{\theta\to0+}\cos^2\frac{\theta}{2}$

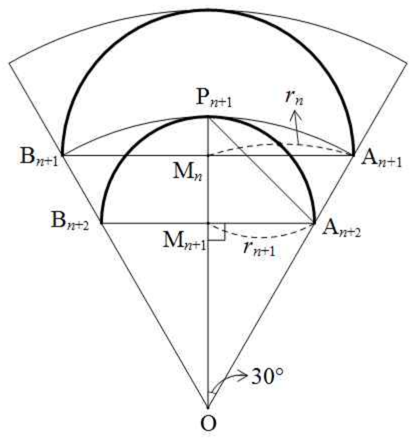
$=\frac{\pi}{16}\cdot1^2\cdot1^2=\frac{\pi}{16}$

108) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 급수를 활용하여 문제 해결하기

그림과 같이 n번째 얻은 반원의 반지름의 길이를 r_n, 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$의 중점을 M_n이라 하자.



$\overline{OP_{n+1}}=\overline{OM_{n+1}}+\overline{M_{n+1}P_{n+1}}$

$=\sqrt{3}r_{n+1}+r_{n+1}=2r_n$

$\therefore\ r_{n+1}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}r_n=\left(\sqrt{3}-1\right)r_n$

$r_1=\sqrt{3}-1$이므로

$r_n=\left(\sqrt{3}-1\right)^n$이고

$l_n=6\pi\left(\sqrt{3}-1\right)^n$이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $6\left(\sqrt{3}-1\right)\pi$이고 공비가 $\left(\sqrt{3}-1\right)$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6\left(\sqrt{3}-1\right)\pi}{1-\left(\sqrt{3}-1\right)}=6\left(1+\sqrt{3}\right)\pi$이다.

109) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]도형에서의 등비급수 이해하기

[해설] $\overline{A_1B}=2\overline{A_1C_2}$이다. 또한 직각삼각형 A_1BC_1과직각삼각형 A_2BC_2는

서로 닮음이고, $\overline{A_1C_1}=\alpha$라 하면직각삼각형 A_1BC_1에서

$\overline{BC_1}=\sqrt{3}\alpha$이고,

직각삼각형 A_2BC_2에서 $\overline{BC_2}=\alpha$이다.

따라서 두 삼각형의 변에 대한 길이에 대한 비는 $\overline{BC_1}:\overline{BC_2}=\sqrt{3}:1$ 이다.
그러므로 원 O_1의 활꼴의 넓이와 원 O_2의 활꼴의 넓이의 비는 $3:1$이다.
$\triangle ABC:\triangle A_1B_1C_1=\sqrt{3}:1$이므로

원 O_1의 반지름이 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$이고, 현 P_1Q_1에 대한 중심각은 $\frac{2\pi}{3}$ 이므로

활꼴의 넓이 S_1은 $S_1=\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

같은 방법으로 닮음비가 $\sqrt{3}:1$이므로 활꼴의 넓이의 비는 $1:\frac{1}{3}$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{8}{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}$$

110) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

수열 $\{L_n\}$은 첫째항이 $3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$이고 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}L_n=\frac{3\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1-\cos\theta}=9\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

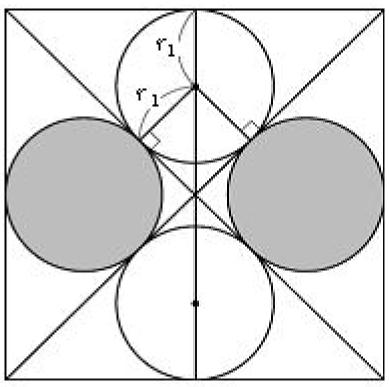
$\cos\theta=\frac{2}{3}$

$\overline{B_1C_1}=3\sin\theta=\sqrt{5}$

111) 답 : 40

[해설]

[출제 의도] 급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

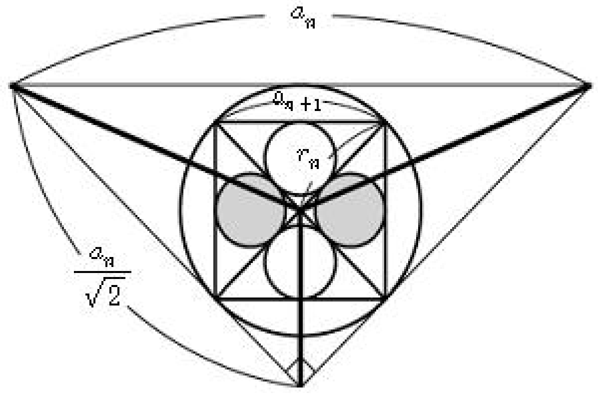


그림으로부터 R_1의 한 원의 반지름의 길이를 r_1이라 하면

$r_1+\sqrt{2}r_1=1$이므로

$r_1=\sqrt{2}-1$이다.

아래 그림은 R_{n+1}의 일부이다.



R_n에서 생긴 사각형의 한 변의 길이를 a_n이라 하고, R_{n+1}에서 생긴 사각형의
한 변의 길이를 a_{n+1}, R_n에서 생긴 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

(빗변의 길이가 a_n인 삼각형의 넓이) =

$$\frac{1}{2}r_n\left(a_n+\frac{a_n}{\sqrt{2}}+\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{2}}$$

$r_n\left(a_n+\sqrt{2}a_n\right)=a_n$이며 정리하면 $r_n=\frac{a_n}{2(1+\sqrt{2})}$

$2r_n^2=a_{n+1}^2$이므로 $2\left(\frac{a_n}{2(1+\sqrt{2})}\right)^2=a_{n+1}^2$

$a_{n+1}=\frac{(2-\sqrt{2})}{2}a_n$이다.

따라서, R_n에서 생긴 사각형과 R_{n+1}에서 생긴 사각형의 닮음비는 $1:\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이므로

R_n에서 생긴 한 개의 원과 R_{n+1}에서 생긴 한 개의 원의 닮음비도 $1:\frac{2-\sqrt{2}}{2}$이고,

넓이의 비는 $1:\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$이다.

한번 시행할 때마다 원의 개수가 2배씩 늘어나므로

S_n은 처음 두 개의 원의 넓이의 합은 $2\pi(\sqrt{2}-1)^2$을 첫째항으로 하고,

$2\times\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$를 공비로 하는 등비수열의 합이다.

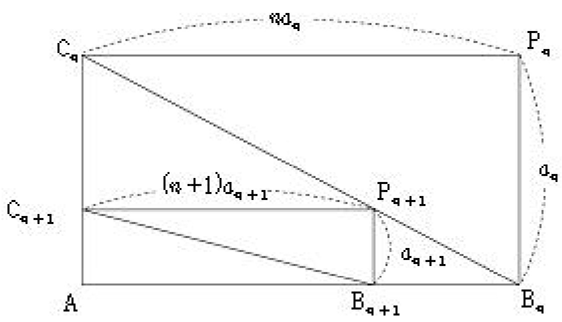
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi(\sqrt{2}-1)^2}{1-(3-2\sqrt{2})}=(-1+\sqrt{2})\pi$$

$\therefore\ 20(q-p)=40$

112) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 극한의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\triangle C_nAB_n$가 $\triangle P_{n+1}B_{n+1}B_n$와 닮았으므로

$\overline{AB_n}:\overline{C_nA}=\overline{B_{n+1}B_n}:\overline{P_{n+1}B_{n+1}}$

$na_n : a_n = \{na_n-(n+1)a_{n+1}\}: a_{n+1}$

$na_n=(2n+1)a_{n+1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$

113) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-r}=3$이므로 $r=\frac{2}{3}$이다.

수열 $\{a_{3n-2}\}$는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{8}{27}$인 등비수열이고

수열 $\{a_{3n-1}\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}$이고 공비가 $\frac{8}{27}$인 등비수열이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{3n-2}-a_{3n-1})=\frac{1}{1-\frac{8}{27}}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{8}{27}}=\frac{9}{19}$$

114) 답 : 400

[해설]

자릿수가 $4n$인 대칭수는 최고자리 숫자와 일의자리 숫자를 제외한 $4n-2$개의 숫자가 서로 대칭이다.

대칭수의 개수 a_{4n}는 연속한 앞 쪽의 $2n$개의 숫자 중 최고자리를 제외한 $2n-1$개의 숫자에서 1의 개수가 0의 개수보다 많은 경우의 수이다.

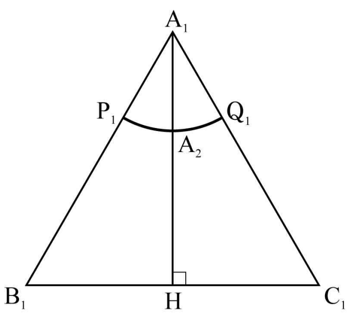
$a_{4n}={}_{2n-1}C_n+{}_{2n-1}C_{n+1}+\cdots+{}_{2n-1}C_{2n-1}$

$\frac{2^{2n-1}}{2}=2^{2n-2}=4^{n-1}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{300}{a_{4n}}=\sum_{n=1}^{\infty}300\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=400$

115) 답 : ①

[해설]



$\overline{A_1P_1}=\overline{A_1A_2}=2$이므로 $l_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H로 놓으면

$\overline{A_1H}=3\sqrt{3}$

$\overline{A_2H}=\overline{A_1H}-\overline{A_1A_2}=3\sqrt{3}-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}=\sqrt{3}\pi$$

116) 답 : ②

[해설]

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1=3,\ a_n=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1},\ r_n-r_{n+1}=a_n$이므로

$r_n-r_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n+1},\ r_{n+1}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=r_n$

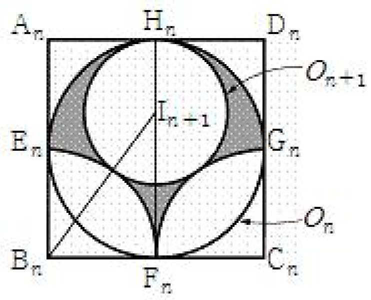
$r_{n+1}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}r_n,\ r_{n+1}=2(2-\sqrt{3})r_n$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6\pi}{1-(4-2\sqrt{3})}=(6+4\sqrt{3})\pi$

117) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기



원 O_{n+1}의 중심을 I_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면

직각삼각형 $I_{n+1}B_nF_n$에서 피타고라스의 정리에 의해

$(r_n+r_{n+1})^2=(2r_n-r_{n+1})^2+r_n^2$

$2r_nr_{n+1}=4r_n^2-4r_nr_{n+1}$

$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{4}{9}$

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{2}{3}$이므로 $S_1=4-\left(2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\pi\right)=2-\frac{4}{9}\pi$

$\therefore \{S_n\}$은 첫째항이 $2-\frac{4}{9}\pi$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2-\frac{4}{9}\pi}{1-\frac{4}{9}}=\frac{18-4\pi}{5}$

118) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]급수의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산(참)

ㄴ.(반례) $a_n=\frac{1}{3^n},\ b_n=2$ (거짓)

ㄷ. $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$ 이므로

$$a_2=\frac{1}{2}a_1,\ a_3=\frac{1}{3}a_2,\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times n}a_1=\frac{1}{n!}\text{ 이므로}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

119) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성을 찾고 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=\overline{OA_n},\ b_n=\overline{OB_n}$ 이라 하면

$$a_n=1+(n-1)a,\ b_n=1+(n-1)b\text{ 이므로}$$

$$S_n=\frac{1}{2}a_nb_n\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(an+1-a)(bn+1-b)$$

이다. 그런데

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a+\frac{1-a}{n}\right)\left(b+\frac{1-b}{n}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ab=5\sqrt{3}$$

이므로 $ab=20$이다. 따라서 양의 정수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6이다.

120) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

원점 O에서 직선 $y=x+\frac{1}{n}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

(삼각형 OP_nQ_n의 높이) $=\overline{OH_n}=\frac{\sqrt{2}}{2n}$,

(삼각형 OP_nQ_n의 밑변의 길이)

$$=2\times\overline{P_nH_n}=2\sqrt{1-\overline{OH_n}^2}=\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}$$

$$\therefore\ A_n=\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}n\cdot A_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$

121) 답 : ④

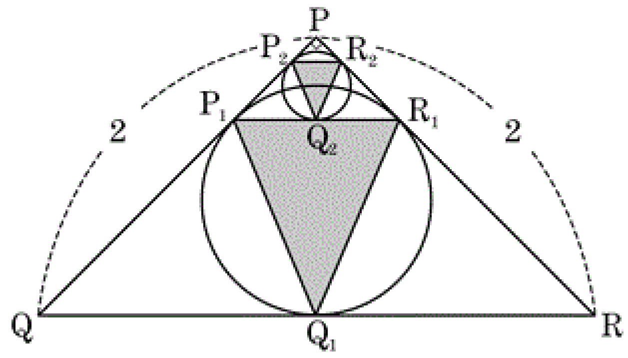
[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용하여 수학 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

삼각형 PQR의 내접원의 반지름을 a_1이라 하면

$\sqrt{2}a_1+a_1=\sqrt{2}$ 에서 $a_1=2-\sqrt{2}$ 이고

$$S_1=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}-2)\times1=\sqrt{2}-1$$



삼각형 $PP_{n-1}R_{n-1}$의 내접원의 반지름을 a_n이라 하면

$$\sqrt{2}a_n+a_n=\frac{\sqrt{2}a_{n-1}}{2}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a_{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 공비가 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ 인 등비수열을 이루므로

수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ 인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\frac{3-2\sqrt{2}}{2}}=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$$

$$\therefore\ p+q=\frac{4}{7}$$

122) 답 : ③

[해설]

$\angle P_{n-1}AP_n=\theta_n$이라 하면 $l_n=\theta_n$이고

㈏에 의하여 $\theta_n=\theta_1r^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n=\frac{\theta_1}{1-r}=\frac{8}{15}\pi\ \cdots\ ①$$

㈐에 의하여 $\theta_1(1+r)=\frac{\pi}{2}\ \cdots\ ②$

따라서 ①, ②에 의하여 $r=\frac{1}{4}$

123) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]함수의 극한 이해하기

$\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}=2\sin\frac{\pi}{2n}$ 이므로

각 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}n\cdot S(n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}n^2\times\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

124) 답 : 11

[해설]

그려지는 삼각형들은 정삼각형이고, $S_1=\frac{\pi}{2}$

$\triangle A_2B_1B_2$에서

$$\overline{A_2B_1}=5,\ \overline{B_1B_2}=1,\ \angle A_2B_1B_2=\frac{\pi}{3}$$

$\overline{A_2B_2}^2 = 25+1-2\cdot5\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=21$ 이므로

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{21}$

$\overline{A_1B_1}:\ \overline{A_2B_2}=6:\sqrt{21}$

$S_2=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{21}}{6}\right)^2=\frac{7}{24}\pi$

$\triangle A_nB_nC_n$과 $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비가 $6:\sqrt{21}$이므로

$S_n:\ S_{n+1}=12:7$

어두운 부분 전체의 넓이는 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{7}{12}}=\frac{6}{5}\pi=\frac{p}{q}\pi$

$\therefore\ p+q=11$

125) 답 : ④

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{5}{1-\frac{3}{4}}=20$

126) 답 : ③

[해설]

D_n에서 새로 만들어진 원의 개수를 a_n이라 하면

$a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+3\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.

$a_n=2^{n+1}-3$이고 D_1에 있는 원의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$, D_1에서 새로 만들어진 D_2에 있는 한 개의 내접원의 넓이는

$\frac{\pi}{4^2}$, …

D_{n-1}에서 새로 만들어진 D_n에 있는 한 개의 내접원의 넓이는 $\frac{\pi}{4^n}$

이므로

D_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$S_n=(2^2-3)\cdot\frac{\pi}{4}+(2^3-3)\cdot\frac{\pi}{4^2}+\cdots+(2^{n+1}-3)\cdot\frac{\pi}{4^n}$

이다.

따라서 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{(2^{k+1}-3)\cdot\frac{\pi}{4^k}\right\}$

$=\pi\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\right\}$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}=1$

127) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴을 이해하기

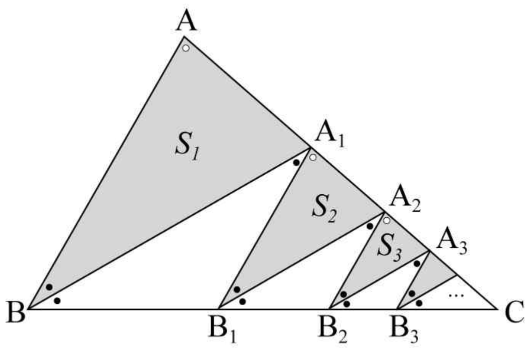
$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2a_n-3)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(n^2a_n-3)=0$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}n^2a_n=3$

(준식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{20n^2a_n+\frac{3}{n}}{n^2a_n+1}=\frac{60}{3+1}=15$

128) 답 : 19

[해설]



$\overline{AB}//\overline{A_nB_n}$이므로

$\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n \backsim \triangle A_nB_nA_{n+1}$이다. ...①

이때, $\triangle BB_1A_1$은 이등변삼각형이므로

$\overline{BB_1}=\overline{A_1B_1}=x$라 하면 $4:6=x:(6-x)$이므로

$x=\frac{12}{5}$이다. ...②

①, ②에 의하여

$\triangle A_{n-1}B_{n-1}A_n$, $\triangle A_nB_nA_{n+1}$의 닮음비는

$4:\frac{12}{5}=1:\frac{3}{5}$이므로 $S_n:S_{n+1}=1:\left(\frac{3}{5}\right)^2$이다.

$\overline{A_1B}=2\times4\times\frac{3}{5}\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$

$S_1=\frac{1}{2}\times4\times\frac{12\sqrt{3}}{5}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ p+q=19$

129) 답 : ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{ar}{1-r^2}=2$에서 $\frac{ar}{1-r}=2(1+r)$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}=\frac{ar^2}{1-r^3}=\frac{ar\times r}{(1-r)(1+r+r^2)}=\frac{6}{7}$

$\frac{2r(1+r)}{1+r+r^2}=\frac{6}{7}$

$\therefore\ r=\frac{1}{2}\ (\because\ -1<r<1)$

130) 답 : ①

[해설]

$a_n=2n+1\ (n\geq1)$이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{3}$

131) 답 : 2

[해설]

무한수열 $\left\{(x+2)(x^2-4x+3)^{n-1}\right\}$이 수렴하기 위해서는

(ⅰ)첫째항이 $x+2=0$일 때, $x=-2$

(ⅱ)공비가 $r=x^2-4x+3$이므로

$-1<x^2-4x+3\le 1$에서 정수 x는 $1, 3$이다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 정수 x는 $-2, 1, 3$이므로 모든 정수 x의 합은 2이다.

132) 답 : 11

[해설]

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^r b^{n-r}$에서

$a_n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r 3^r 2^{n-r}=(3+2)^n=5^n$이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}=\frac{q}{p}$$

$\therefore\ p+q=11$

133) 답 : ①

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\right)=0$이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{1}{4}$$

134) 답 : ④

[해설]

대각선의 길이가 a인 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{a}{\sqrt{2}}$이고 정사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2$이다.

이때, $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{3},\ a_3=\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\cdots$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\left\{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{16}=\frac{q}{p}\text{이다.}$$

따라서, $p=16,\ q=9$이므로 $p+q=25$이다.

135) 답 : ①

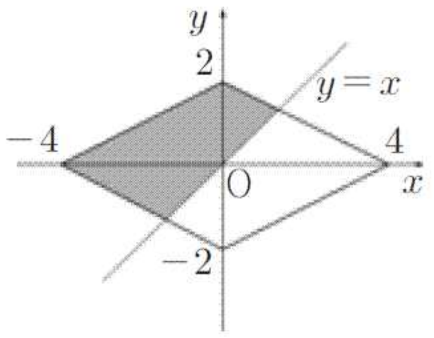
[해설]

$2^n(y-x)+y=1$을 y에 관하여 정리하면,

$y=\frac{2^n}{2^n+1}x+\frac{1}{2^n+1}$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+1}=1$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n+1}=0$이므로

아래 그림과 같이 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 연립부등식 $\begin{cases}|x|+2|y|\le 4\\ y\ge x\end{cases}$의 영역과 같다.



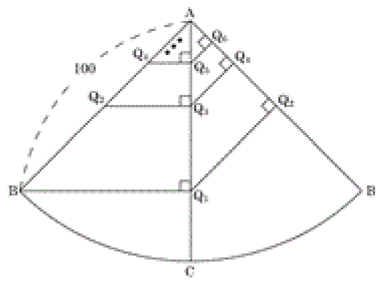
따라서, $\lim_{n\to\infty}S_n=16\times\frac{1}{2}=8$이다.

136) 답 : 200

[해설]

$\angle BAC=45^\circ$ 이므로

$l_1=50\sqrt{2},\ l_2=50,\ l_3=25\sqrt{2}$, $\cdots$



따라서, $l_n=50\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{50\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=100+100\sqrt{2}$$

$\therefore\ a+b=200$

137) 답 : 25

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(2n+1)^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(3n+2)^2M}{(6n+3)^2}\right\}=\frac{7}{18}M$$

$\therefore\ p+q=25$

138) 답 : ⑤

[해설]

$\angle C_1OQ_1=30^\circ$

이때, 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면,

$r_1=1$이고 $\sin 30^\circ=\frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}}=\frac{1}{2}$에서 $r_{n+1}=2r_n$이므로

$S_{n+1}=4S_n$이 된다.

$S_1=2\times\triangle C_2C_1B_1=\frac{\sqrt{15}}{2}$이므로

$S_n=\frac{\sqrt{15}}{24^{n-1}}$이다.

따라서, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{15}}{84^n}}{4^n+3^n}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ 이다.

139) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.(거짓)

ㄴ. 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n),\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}=0$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)-a_n\}=0$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 모두 수렴한다.(참)

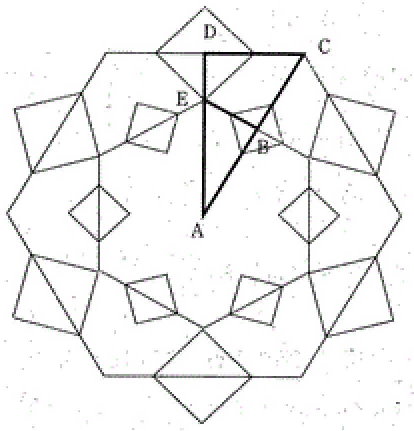
ㄷ.(반례) $a_n=(-1)^n,\ b_n=(-1)^{n+1}$이면

$|a_n+b_n|=0,\ |a_n-b_n|=2$이므로

두 수열 $\{|a_n+b_n|\},\ \{|a_n-b_n|\}$이 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 수렴하지 않는다.(거짓)

140) 답 : ①

[해설]



그림과 같이 $\triangle ACD\backsim$이다.

$\overline{CD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle ACD=60^\circ$, $\overline{AD}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\overline{DE}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \overline{AE}=\dfrac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

주어진 정육각형과 첫 번째 만들어진 정육각형의 닮음비는 $1:\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}$이므로

$\lim_{n\to\infty}l_n=6\times\dfrac{2}{1-\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}}=\dfrac{48(5+2\sqrt{3})}{13}$

141) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 규칙성을 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

호의 길이를 수열로 나타내면

수열 $\{l_n\}$: $\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \cdots$

수열 $\{l_n\}$은 공차가 $\dfrac{\pi}{2}$, 첫째항이 $\dfrac{\pi}{2}$인 등차수열을 이룬다.

$\sum_{k=1}^{n}l_k=\dfrac{n\left\{\pi+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right\}}{2}=189\pi$

$\therefore\ n=27$이므로 A_{27}의 좌표는 $(14,0)$이다.

$\therefore\ a+50=64$

142) 답 : ④

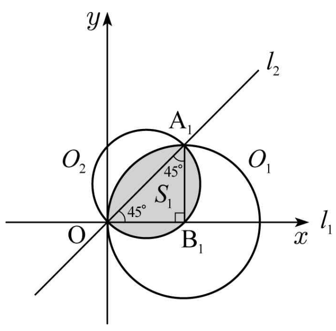
[해설]

[출제 의도]도형의 넓이에 관한 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원 O_1과 직선 l_2의 한 교점을 A_1, 원 O_1의 중심을 $B_1(3,0)$이라 하면

삼각형 A_1OB_1은 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_1}=3\sqrt{2}$

$S_1=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\pi-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}(\pi-1)$



같은 방법으로 원 O_2와 직선 l_3의 한 교점을 A_2, 원 O_2의 중심을 B_2라 하면

삼각형 A_2OB_2는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA_2}=3$

$S_2=\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}(\pi-1)$

$\cdots$

$S_n=\dfrac{9}{2^n}(\pi-1)$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{9}{2}(\pi-1)$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{9}{2}(\pi-1)}{1-\dfrac{1}{2}}=9(\pi-1)$

143) 답 : 12

[해설]

점 Q_1의 좌표는 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4},0\right)$이므로 $x_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

점 Q_n의 좌표는 $(x_n,0)$이므로 점 Q_n을 지나고 $\overline{AB}$에 평행한 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n$

따라서 점 R_n의 좌표는 $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n\right)$이므로 점 R_n을 지나고 $\overline{AB}$에 수직인 직선의 방정식은 $y=\sqrt{3}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x_n$이고, 이 직선과 $\overline{AB}$의

교점 P_{n+1}의 x좌표가 x_{n+1}이므로

$$x_{n+1}=-\frac{1}{4}x_n+\frac{\sqrt{3}}{4},\ x_n=\frac{\sqrt{3}}{5}+\frac{\sqrt{3}}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$ 이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{\sqrt{3}}{5}$ 이므로 $100a^2=100\times\frac{3}{25}=12$

144) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$$

145) 답 : ⑤

[해설]

$$S_1=\frac{1}{2}\times\left\{\triangle A_1OB_1-\frac{(C_1\text{의 넓이})}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{r^2}{2}-\frac{\pi r^2}{8}\right)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\left\{\triangle A_2OB_2-\frac{(C_2\text{의 넓이})}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{r^2}{4}-\frac{\pi r^2}{16}\right)$$

$\vdots$

$$S_n=\frac{1}{2}\times\left\{\triangle A_nOB_n-\frac{(C_n\text{의 넓이})}{4}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{r^2}{2}-\frac{\pi r^2}{8}\right)$$

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{r^2}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=25\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ 이므로

$r^2=50$

$\therefore\ r=5\sqrt{2}$

146) 답 : 12

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3),\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 이 존재하므로

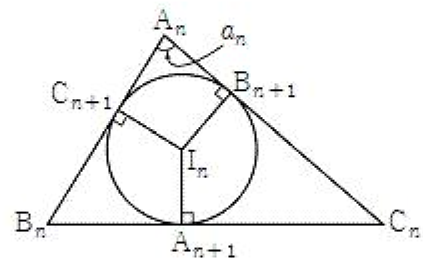
$\lim_{n\to\infty}a_n=-3,\ \lim_{n\to\infty}b_n=0$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{24a_n+2b_n^2}{2a_n-b_n^2}=\frac{24}{2}=12$ 이다.

147) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 극한 증명하기



$\angle A_nB_nC_n=b_n,\ \angle B_nC_nA_n=c_n$,

삼각형 $A_nB_nC_n$의 내심을 I_n이라 하자.

$\overline{I_nA_{n+1}}\perp\overline{B_nC_n},\ \overline{I_nC_{n+1}}\perp\overline{A_nB_n}$ 이므로

사각형 $I_nC_{n+1}B_nA_{n+1}$이 원에 내접한다.

$\angle I_nA_{n+1}C_{n+1}=\angle I_nB_nC_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$ 이고

$\angle I_nA_{n+1}B_{n+1}=\frac{1}{2}c_n$ 이다.

$a_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(\pi-a_n)$ 이므로

$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{\pi}{2}$ 이다. $\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{3}$

148) 답 : 27

[해설]

$r=-\frac{1}{3},\ a_1=36$ 이므로

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{36}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{36}{\frac{4}{3}}=27$$

149) 답 : ①

[해설]

겹쳐지는 부분의 넓이는 항상 정사각형 B의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이므로 1이다.

겹쳐진 부분의 넓이가 A의 넓이 a_n의 $\frac{1}{n+1}$ 일 때,

수열 $\{a_n\}$은 2, 3, 4, $\cdots$, $n+1$, $\cdots$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n^2+3n}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2}=\frac{1}{2}$

150) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]도형을 이용한 등비급수 추론하기

$$S_1=\frac{\pi-2}{8}$$

$$S_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi-2}{8}$$

$$S_3=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{\pi-2}{8}$$

$\vdots$

$S_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi-2}{8}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{n-1}\cdot S_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{\pi-2}{8}$$
$$=\frac{\frac{\pi-2}{8}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\pi-2}{2}$$

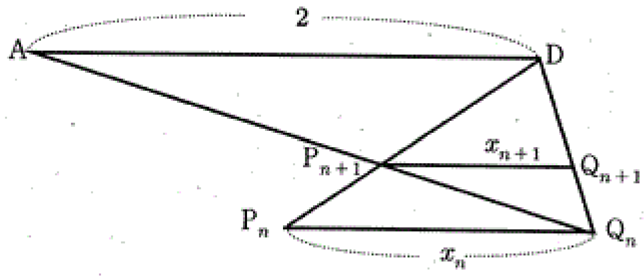
151) 답 : ①

[해설]

$\triangle P_1AD \backsim \triangle P_1CB$이고 닮음비가 $2:3$이므로

$\overline{DP_1}:\overline{P_1B}=2:3$이고 $\overline{P_1Q_1}\parallel\overline{BC}$이므로

$\overline{P_1Q_1}:\overline{BC}=\overline{DP_1}:\overline{DB}\rightarrow x_1:3=2:5$ ∴ $x_1=\frac{6}{5}$



$x_{n+1}:x_n=\overline{DP_{n+1}}:\overline{DP_n}=2:(2+x_n)$

$2x_n=x_{n+1}(2+x_n)\rightarrow x_{n+1}\cdot x_n=2(x_n-x_{n+1})$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_kx_{k+1}=2\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k+1})=2(x_1-x_{n+1})$

$\sum_{n=1}^{\infty}x_nx_{n+1}=\lim_{n\to\infty}S_n=2x_1=2\times\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$

152) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴조건 이해하기

ㄱ. 공비가 $-\frac{1}{2}$이므로 수렴한다.

ㄴ.(준식) $=\lim_{n\to\infty}..\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ ∴ 수렴

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1\neq0$ ∴ 발산

153) 답 : 75

[해설]

[출제 의도]급수의 합 구하기

$\sqrt{x^2+y^2}:\sqrt{(x-5)^2+y^2}=1:n$이므로

$\left(x+\frac{5}{n^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{5n}{n^2-1}\right)^2$이다.

T_n의 임의의 두 원소 $P,\ Q$에 대하여 $\overline{PQ}$의 최댓값

$M(n)=\frac{10n}{n^2-1}$이다.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{10M(n)}{n}=50\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)=75$$

154) 답 : 59

[해설]

[출제 의도]도형의 규칙성을 파악하여 등비급수의 합 구하기

지름이 6인 원의 넓이를 A_0, $(A_0=9\pi)$

C_1에서 그려진 2개 원의 넓이의 합을 A_1,

C_2에서 그려진 4개의 원의 넓이의 합을 A_2, …

C_n에서 그려진 2^n개의 원의 넓이의 합을 A_n이라 하자.

C_1에서 바깥 원을 O_1, O_1의 내부에 내접하는 두 원을 크기 순서대로 $O_2,\ O_3$라 하면

넓이의 비는 $9:4:1$이므로 $A_1=\frac{5}{9}A_0$이다.

C_n에서 한 원과 그 원에 내접하는 두 원의 넓이의 비가 $O_1,\ O_2,\ O_3$의 넓이의 비와 같으므로

$A_n=\frac{5}{9}A_{n-1}$이다.

따라서 C_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 하면

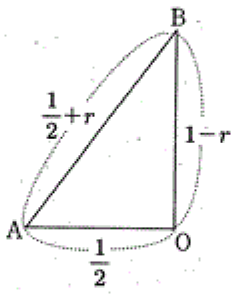
$$\lim_{n\to\infty}S_n=A_0\left\{\left(\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^4+\cdots\right)\right\}=\frac{45}{14}\pi\text{이다.}$$

∴ $p+q=59$

155) 답 : ③

[해설]

원 $O_1,\ A_1,\ B_1$의 중심을 각각 $O,\ A,\ B$라 하면 R_1의 내부의 큰 원의 반지름은 $\frac{1}{2}$이고, 작은 원의 반지름을 r이라 하면



$\left(\frac{1}{2}+r\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-r)^2$

이므로 $r=\frac{1}{3}$이다. 작은 원의 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 R_1의 어두운 부분의 넓이는 $\frac{13}{18}\pi$이다.

넓이의 합 S_n은 공비가 $\frac{13}{18}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{13}{18}\pi}{1-\frac{13}{18}}=\frac{13}{5}\pi\text{이다.}$$

156) 답 : ①

[해설]

정육각형 H_n의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

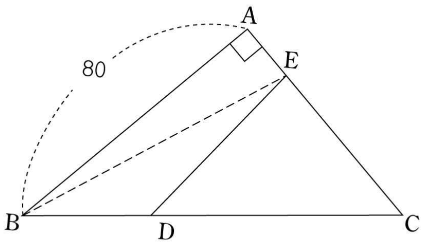
$$a_{n+1}^2=\frac{a_n^2}{2}+\frac{a_n^2}{2}-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a_n\right)\cos30^\circ$$

$$a_{n+1}^2=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a_n^2$$

[구하는 값]$=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}S_1$

157) 답 : ③

[해설]



$\triangle ABC = 3200$

$\square ABDE : \triangle DCE = (n+1) : n$ 이므로

$$\square ABDE = \frac{3200(n+1)}{2n+1},\ \triangle DCE = \frac{3200n}{2n+1}$$

$$\triangle BDE = \frac{1}{2}\triangle DCE = \frac{1600n}{2n+1}$$

$\triangle ABE = \square ABDE - \triangle BDE$ 이므로

$$\triangle ABE = \frac{1600(n+2)}{2n+1} = 40a_n$$

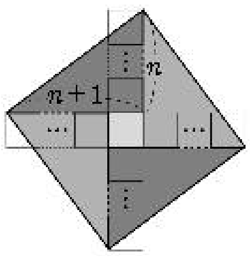
따라서 $a_n = \dfrac{40(n+2)}{2n+1}$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 20$

158) 답 : 20

[해설]

[출제 의도]도형의 규칙성을 파악하여 극한값 구하기

[해설]



$$S_n = 2n(n+1)+1 = 2n^2+2n+1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10S_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{10(2n^2+2n+1)}{n^2} = 20$$

159) 답 : 11

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용한 수학 내적 문제 해결하기

$\triangle OA_1A_2 = \triangle OO_1A_1 + \triangle OO_1A_2 + \triangle O_1A_1A_2$

$\frac{1}{2}\times 2\times 4 = \frac{1}{2}\times r_1 \times (6+2\sqrt{5})$ $\therefore\ r_1 = 3-\sqrt{5}$

$\triangle OA_2A_3 = \triangle OO_2A_2 + \triangle OO_2A_3 + \triangle O_2A_2A_3$

$\frac{1}{2}\times 2\times 1 = \frac{1}{2}\times r_2 \times (3+\sqrt{5})$

$$\therefore\ r_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$$

따라서 $r_n = (3-\sqrt{5})\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n = 6-2\sqrt{5}$ 이므로 $a+b=11$

160) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수의 규칙성 추론하기

한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이와 넓이는 각각 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이므로,

한 변의 길이가 2인 정삼각형의 높이는 $\sqrt{3}$ 이고 넓이는 $\sqrt{3}$ 이다.

삼각형 A_1의 높이는 내접원의 지름과 같으므로

내접원의 반지름을 r라 하면

$\frac{1}{2}(2+2+2)r = \sqrt{3}$ 이므로 $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이고

내접원의 지름은 $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ 이다.

삼각형의 한 변의 높이가 $\dfrac{2}{3}$ 배만큼 축소되므로 넓이는 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ 배만큼 축소된다.

삼각형 A_1의 한 변의 길이는 $\dfrac{4}{3}$ 이므로

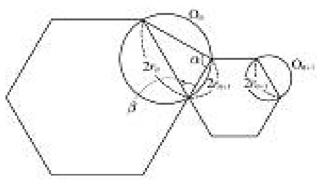
$S_1 = \dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ 이고 공비가 $\dfrac{4}{9}$ 인 등비급수이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{4}{9}\sqrt{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}\sqrt{3}$$

161) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형과 관련된 등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.



그림과 같이 n번째 원 O_n의 지름을 $2r_n$, $n+1$번째 원 O_{n+1}의 지름을 $2r_{n+1}$이라 할 때,

α는 지름에 대한 원주각이므로 90° 이고 β는 정육각형의 외각이므로 60° 이다.

따라서 $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{1}{2}$, $r_1 = 4$ 이다.

$$r_n = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

그런데 $l_n = 2\pi r_n = 8\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{8\pi}{1-\frac{1}{2}} = 16\pi$$

162) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 극한 추론하기

삼각형 $A_nA_{n-1}B_n$과 삼각형 $A_{n+1}A_nB_{n+1}$이 닮은 도형이므로 대응하는 변의 길이의 비는 $2:1$이다.

점 A_n의 x좌표는

$$4+4\times\frac{1}{2}+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

점 A_{n-1}의 x좌표는 $8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

점 B_n의 x좌표는 $8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

y좌표는 $8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

따라서 삼각형 $A_nA_{n-1}B_n$의 무게중심의 x좌표는

$\frac{1}{3}\left[8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

이고 y좌표는

$\frac{1}{3}\left[8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}+16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right]$이다.

x좌표의 극한값 $\alpha=8$이고 y좌표의 극한값 $\beta=8$이므로

$\alpha+\beta=16$

(별해)

삼각형 $A_nA_{n-1}B_n$과 삼각형 $A_{n+1}A_nB_{n+1}$이 닮음이므로 각 삼각형의 무게중심은 한 직선위에 있다. $\triangle A_1OB_1$과 $\triangle A_2A_1B_2$의 무게중심좌표는 각 각 $\left(2,\ \frac{4}{3}\right)$, $\left(5,\ \frac{14}{3}\right)$이므로 두 점을 지나는 직선의 방정식은 $y=\frac{10}{9}x-\frac{8}{9}$

따라서 $y=x$와 $y=\frac{10}{9}x-\frac{8}{9}$의 교점은 $(8,\ 8)$

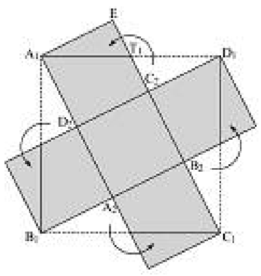
163) 답 : 125

[해설]

[출제 의도]도형과 관련된 등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 직각삼각형 A_1ET_1과 직각삼각형 $D_1C_2T_1$이 합동이므로

직각삼각형 $A_1D_2D_1$의 넓이와 정사각형 $A_1D_2C_2E$의 넓이는 같다.



마찬가지로 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이는 합동인 5개의 정사각형의 넓이의 합과 같음을 알 수 있다.

따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이의 $\frac{1}{5}$이므로

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 넓이 S_n은 첫째항이 100이고 공비가 $\frac{1}{5}$인

등비수열을 이룬다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}100\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{100}{1-\frac{1}{5}}=125$$

164) 답 : ①

[해설]

수열의 일반항을 a_n, n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$a_n=\frac{n}{(n^2-n+1)(n^2+n+1)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{13}\right)+\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

165) 답 : 27

[해설]

주어진 등비급수가 수렴하기 위한 조건은

(ⅰ) $-1<1-\frac{x}{4}<1$일 때, $0<x<8$

(ⅱ)첫째항이 0일 때, $x=-1$

$\therefore$ $x=-1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$합은 27

166) 답 : 42

[해설]

[출제 의도]등비급수의 수렴범위 구하기

공비가 $\frac{x-5}{5}$이므로 $-1<\frac{x-5}{5}<1$

$0<x<10$이며, $x=-3$일 때도 수렴하므로

수렴하는 모든 정수 x의 합은 42

167) 답 : 4

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴조건 이해하기

급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{3n}-\frac{3n+2}{2n-1}\right)=0$이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n}=\frac{3}{2}$이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{6a_n+21n-7}{2a_n+3n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6a_n}{3n}+\frac{21n-7}{3n}}{\frac{2a_n}{3n}+\frac{3n+5}{3n}}=4$$

168) 답 : 50

[해설]

[출제 의도]급수의 정의를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{100}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}50\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}50\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=50$$

169) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]급수의 합이 수렴을 묻는 문제로 급수의 합의 수렴성을 이해를 측정하는 문제이다.

ㄱ. $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$ 이라고 하면, $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}\neq 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{2n+1}$ 은 발산한다.

ㄴ. 등비급수의 등비 $r=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 로 $-1<r<1$ 이므로

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1})-\sqrt{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=$ 발산

170) 답 : ③

[해설]

정사각형의 넓이를 a^2 이라 하면 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이므로

$a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})$

$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{4-\sqrt{3}}{8}(3^n-1)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}\quad=\lim_{n\to\infty}(4-\sqrt{3})\cdot\frac{3^n-1}{3^n}$

171) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]급수의 합 구하기

$(n+1)|x|+n|y|=1$ 의

x 절편은 $\pm\frac{1}{n+1}$, y 절편은 $\pm\frac{1}{n}$

그러므로 $S_n=\frac{2}{n(n+1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2$

172) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴 조건 이해하기

ㄱ. $-1<\log_2 x<1\ \therefore\ \frac{1}{2}<x<2$ (참)

ㄴ. $\frac{(x-1)\log_2 x}{1-\log_2 x}=1,\ x\log_2 x=1$

$\log_2 x=\frac{1}{x}$ 이고 $y=\log_2 x$ 와 $y=\frac{1}{x}$ 의 그래프는 $\frac{1}{2}<x<2$ 인 범위 내에서 반드시 한 개의 교점이 생긴다.(참)

ㄷ. $-1<\log_2 x<1,\ -2<\log_2 x-1<0$

$-1<\frac{\log_2 x-1}{2}<0\ \therefore$ 수렴(참)

173) 답 : ①

[해설]

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{16}+\cdots$

은의 좌표평면 위의 그림의 넓이를 세로로 분할하여 위에서부터 생기는 직사각형의 넓이의 합으로 표현한 것이다. 그런데 같은 넓이를처럼 가로로 분할하여 오른쪽부터 생기는 직사각형의 넓이의 합으로 표현하면

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\ \therefore$ ㈎ $=2$

에서

(세로로 분할한 직사각형의 넓이의 합)

$=(r-r^2)\cdot1+2(r^2-r^3)\cdot1+3(r^3-r^4)\cdot1+\cdots$

$=(1-r)(r+2r^2+3r^3+\cdots)$

$=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty}kr^k=r+r^2+r^3+\cdots=\frac{r}{1-r}$

$\therefore$ ㈏ $=1-r$, ㈐ $=\frac{r}{(1-r)^2}$

174) 답 : ①

[해설]

ⅰ)올라가면서 움직인 거리의 합은 공차가 $\frac{5\pi}{18}$ 이고 항의 개수가 17인 등차수열의 합이다.

$5\frac{\pi}{18}+5\frac{2\pi}{18}+5\frac{3\pi}{18}+\cdots+5\frac{17\pi}{18}=\frac{85\pi}{2}$

ⅱ)내려오면서 움직인 거리의 합은 첫째항이 $\frac{9}{2}\pi$ 이고 공비가 $\frac{9}{10}$ 인 등비급수이다. $\frac{5\pi\times\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}}=45\pi$

$\therefore\ \frac{85}{2}\pi+45\pi=87.5\pi$

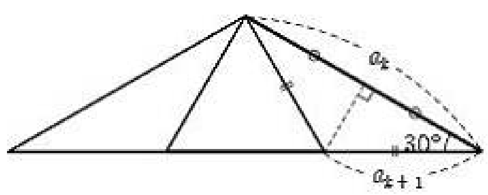
175) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기

k 번째 만들어진 정육각형 H_k 와 $k+1$ 번째 만들어진 정육각형 H_{k+1} 의

한 변의 길이를 각각 a_k, a_{k+1} 이라 하면



$a_{k+1}\cos 30^\circ=\frac{1}{2}a_k$

$\therefore\ a_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}a_k$

길이의 비가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{1}{3}$ 이고

첫 번째 과정에서 생기는 6개의 정삼각형의 넓이의 합은

$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2=\frac{9}{2}\sqrt{3}$ 이다.

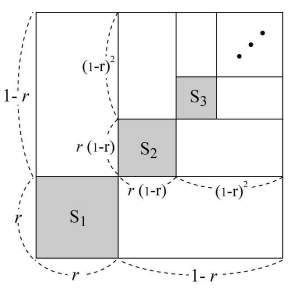
모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ 이고, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\therefore \frac{\frac{9}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{4}\sqrt{3}$$

176) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 계산하기



$S_1=r^2,\ S_2=r^2(1-r)^2,\ S_3=r^2(1-r)^4\cdots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{r^2}{1-(1-r)^2}=\frac{r}{2-r}=\frac{1}{7}$$

$\therefore\ r=\frac{1}{4}$ 이므로 $m:n=r:1-r=1:3$

따라서 $m^2+n^2=10$

177) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$S_1=\pi-\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\pi+1}{2}$$

원 C_n의 지름의 길이를 l_n이라 하면

$l_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}l_n$ 이므로

$$S_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2S_n=\frac{1}{2}S_n$$

[구하는 값]$=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi+1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\pi+1$

178) 답 : 27

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선분 A_nH_n의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로 $S_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$a=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{9}$ 이므로 $\frac{1}{a^2}=27$ 이다.

179) 답 : ⑤

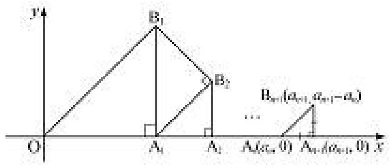
[해설]

[출제 의도]좌표를 이용하여 계차수열의 일반항을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 $A_n(a_n,0)$이라 하면,

$A_{n+1}(a_{n+1},0)$이고 $\overline{A_nA_{n+1}}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}$ 이므로

$B_{n+1}(a_{n+1},a_{n+1}-a_n)$이다.



$A_{10}(a_{10},0),\ A_{11}(a_{11},0),\ B_{11}(a_{11},a_{11}-a_{10})$이고 삼각형 $A_{10}A_{11}B_{11}$의 무게중심 $G(a,b)$의 좌표는 각각 다음과 같다.

$a=\frac{a_{10}+a_{11}+a_{11}}{3},\ b=\frac{a_{11}-a_{10}}{3}$ 이므로

$a+b=a_{11}$ 이다.

한편, $\overline{A_1A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{A_1B_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}$ 이고

$\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_{n-1}A_n}$ (단, $A_0=O$)이므로

$$a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$a+b=a_{11}=1+\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{2^{11}-1}{2^{10}}$$

180) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]지수함수 이해하기

$S_k=\frac{1}{2}\{\log_2(k+1)-\log_2k\}$

$$\sum_{k=1}^{7}S_k$$
$$=\frac{1}{2}(\log_22+\log_23-\log_22+\cdots+\log_28-\log_27)$$
$$=\frac{1}{2}\log_28=\frac{3}{2}$$

181) 답 : ⑤

[해설]

직각삼각형 $P_1O_1C_1$에서 $\angle O_1=\frac{\pi}{6}$ 이고

$\overline{O_1C_1}=1$ 이므로 $\overline{O_1P_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{16}$$

$\overline{A_1O_1}=\sqrt{3}$, $\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\overline{A_1O_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 즉, 삼각형 $A_1O_2C_2$와 $A_1O_1C_1$는 닮음비가

$1:2$인 닮음삼각형, 따라서 $S_2=\frac{1}{4}S_1$

$\{S_n\}$은 $S_1=\frac{\pi}{16}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

182) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형의 넓이에 관한 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{DP_1}=2$, $\triangle DP_1D_1 \backsim \triangle BCD_1$이므로 $\overline{DD_1}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore S_1 = \frac{8}{3}$$

한편, 정사각형 $BC_1D_1A_1$의 한 변의 길이는 $\frac{8}{3}$이므로

각 정사각형의 넓이는 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{24}{5}$$

183) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 적용한 문제 해결하기

n번째 그린 정사각형을 A_n, A_n의 외접원을 O_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 R_n, O_n의 내부와 A_n의 외부에서 접하는 최대원의 넓이를 T_n, 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$R_1 = 1,\ R_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}R_n,$$

$$\therefore R_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$r_n = \frac{R_n - \frac{1}{\sqrt{2}}R_n}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}R_n$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$T_n = \pi\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2 = \pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4T_n = 4\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= 4\pi\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{8} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = (3-2\sqrt{2})\pi$$

184) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]등비급수 계산하기

점 P_n의 x좌표의 극한값 α는

$$\alpha = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= 2 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\right)$$

$$= 2 + 2 \times \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{10}{3}$$

185) 답 : 10

[해설]

[출제 의도]계차수열과 등비급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_2 - a_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = -a_1 + 2a_2 + (a_1 - a_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20 \therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(-a_1 + 2a_2 + (a_1 - a_2))\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right. = 0$$

$$\therefore a_2 = \frac{1}{2}a_1$$

$$a_n = (a_1 - a_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20 = \sum_{n=1}^{\infty} a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$20 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a_1 = 10$$

186) 답 : 93

[해설]

[출제 의도]급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+2}-4^{n+2}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{5^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - 4^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^n\right\}$$

$$= 25 \cdot \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} - 16 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 93$$

187) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수렴하는 급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right) = 0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n - 3n + 2}{2a_n + n - 4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n} - 3 + \frac{2}{n}}{2 \cdot \frac{a_n}{n} + 1 - \frac{4}{n}}$$

$$= \frac{2-3}{2 \cdot 2 + 1} = -\frac{1}{5}$$

188) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

α, β가 이차방정식 $2x^2+x-4=0$의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-2$$

한편, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

189) 답 : 10
[해설]
[출제 의도] S_n과 a_n사이의 관계를 이용하여 급수의 합 구하기
$b_n=2^{n-1}a_n$라 하고,
$S_n=a_1+2a_2+2^2a_3+\cdots+2^{n-1}a_n=5n$이라 할 때,
$b_n=S_n-S_{n-1}=5\,(n\geq 2)$, $b_1=S_1=a_1=5$

즉, $a_n=\frac{5}{2^{n-1}}\,(n\geq 1)$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{5}{1-\frac{1}{2}}=10$

190) 답 : 50
[해설]
[출제 의도]삼각함수의 여러 가지 공식을 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$$

$$S=\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$$

$\therefore\ 20S=50$

191) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]등비급수에 관한 성질을 이해하고 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\{a_n\}$의 공비를 r, $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면(단, $r\leq s$)

$$\frac{1}{1-r}+\frac{1}{1-s}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{1-rs}=\frac{4}{5}$$

$\therefore\ 3(2-r-s)=8(1-r-s+rs)\cdots$ ①
$4(1-rs)=5\cdots$ ②

① , ②을 연립하면, $rs=-\frac{1}{4}$, $r+s=0$

$\therefore\ r=-\frac{1}{2}$, $s=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

$\therefore$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2+2a_nb_n)=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+2\times\frac{4}{5}=\frac{64}{15}$$

192) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=1$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(b_n+1)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=-1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산한다.(참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$이 모두 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n-1)+(b_n+1)\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.(참)

193) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]등비급수를 이용하여 문제 해결하기
점 A_1, A_2, $\cdots$에서 x축에 내린 수선의 발을 C_1, C_2, $\cdots$라 하면
n이 한없이 커질 때,
A_n의 x좌표는 $\overline{OC_1}+\overline{C_1C_2}+\cdots$

$$x=\frac{4}{3}+1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$$

194) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]도형의 넓이에 관한 급수의 합을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

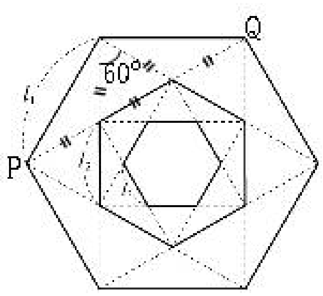
곡선 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$와 직선 $y=\frac{1}{2}$, $y=1$, $y=\frac{3}{2}$, $\cdots$이

만나는 점의 x좌표는 각각 $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\cdots$이다.

$y=\log_{\frac{1}{4}}x$와 $y=\log_{\frac{1}{4}}(-x)$는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$$

195) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]등비급수 계산하기



$\overline{PQ}=\sqrt{l_1^2+l_1^2-2l_1\cdot l_1\cos 120^\circ}=\sqrt{3}\,l_1$

$\therefore\ l_2=\frac{\sqrt{3}}{3}l_1$

따라서, $l_1=6$이므로 $l_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 6=2\sqrt{3}$,

$l_3=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2\sqrt{3}=2$, ⋯으로 수열 $\{l_n\}$은 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이므로,

$$\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{6}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{18}{3-\sqrt{3}}$$

$$=9+3\sqrt{3}$$

196) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]급수의 성질을 이용한 극한값 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3n-1}{2a_n+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}-3-\frac{1}{n}}{2\frac{a_n}{n}+2+\frac{1}{n}}=-\frac{3}{2}$$

197) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용한 도형의 부피의 합 구하기

입체의 부피를 V_n이라하면

$V_1=1$,

$V_2=1+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$V_3=1+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$, ⋯이므로

$$\lim_{n\to\infty}V_n=1+\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{12}{7}$$

198) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]급수의 합 구하기

(ⅰ) S_n의 넓이는 한 변의 길이가 1이고 높이가 4인 삼각형의 넓이이므로

$S_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$

(ⅱ)점 B_n의 x좌표는 직선 $y=-\frac{n}{4}x$과 $y=-1$과의 교점의 x좌표이므로

$\frac{4}{n}$이다.

점 B_{n+1}의 x좌표는 직선 $y=-\frac{n+1}{4}x$과 $y=-1$과의 교점의 x좌표이므로

$\frac{4}{n+1}$이다.

따라서 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}-\frac{4}{n+1}\right)$

구하는 값$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_kT_k$

$=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=4\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$

199) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]도형의 규칙성을 파악하여 극한값 구하기

[해설] n단계에서 색칠하는 부분의 넓이를 a_n이라 하면

$a_1=\frac{1}{4}\pi(1^2-0^2)+\frac{3}{4}\pi(2^2-1^2)$

$a_2=\frac{1}{4}\pi(3^2-2^2)+\frac{3}{4}\pi(4^2-3^2)$

⋮

$a_n=\frac{1}{4}\pi\{(2n-1)^2-(2n-2)^2\}$

$+\frac{3}{4}\pi\{(2n)^2-(2n-1)^2\}$

$S_n=\frac{1}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-3)\right\}+\frac{3}{4}\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(4k-1)\right\}$

$=\frac{1}{4}\pi(2n^2-n)+\frac{3}{4}\pi(2n^2+n)$

$=\frac{\pi}{2}(4n^2+n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}(4n^2+n)}{n^2}=2\pi$$

200) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형과 관련된 등비급수의 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림과 같이 직각삼각형 $\triangle OA_1B_1$에서 C_1의 반지름을 r_1이라 하고, 내접원이 $\triangle OA_1B_1$와 만나는 접점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{A_1P}=\overline{A_1R}=r_1,\ \overline{B_1P}=\overline{B_1Q}=6-r_1,\ \overline{OP}=\overline{OQ}=8-r_1$

$\therefore\ \overline{OB_1}=\overline{OQ}+\overline{QB_1}=8-r_1+6-r_1=10$

$\therefore\ r_1=2$

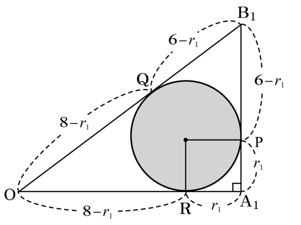
원 C_2의 반지름을 r_2라 하면

$\triangle OA_1B_1\backsim\triangle OA_2B_2$이고 $\overline{OA_1}:\overline{OA_2}=8:4$이므로

$r_1:r_2=2:1$즉, $r_2=\frac{1}{2}r_1$

마찬가지 방법으로 원 C_n의 반지름을 r_n이라 하면,

$r_n = \frac{1}{2} r_{n-1}$이 성립한다.



$\therefore\ r_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\therefore\ S_n = \pi \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{4\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{16\pi}{3}$$

201) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]무한수열과 급수의 성질 이해하기

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이고, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$(상수)이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \times \beta = 0$ (참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \alpha,\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \beta$라 하면

$a_n = \frac{2c_n + d_n}{5},\ b_n = \frac{c_n - 2d_n}{5}$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2c_n + d_n}{5} = \frac{2}{5}\alpha + \frac{1}{5}\beta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - 2d_n}{5} = \frac{1}{5}\alpha - \frac{2}{5}\beta \text{(참)}$$

ㄷ.(반례) $a_n = (-1)^n,\ b_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} b_n$은 모두 수렴하지 않는다.(거짓)

202) 답 : ③

[해설]

$l_1 = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} a$

$l_{n+1} = \frac{l_n}{\cos 30^\circ}$

$$\therefore\ \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{\sqrt{3}}a$이고 공비가 $\frac{2}{\sqrt{3}}$인 등비수열이므로

$$l_n = \frac{2}{\sqrt{3}} a \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} = a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} + 3}{a} = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ a = 2 + \sqrt{3}$$

203) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 활용하여 도형과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \times \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{9}$$

$$r = \frac{(\text{정사각형 } OA_2B_2C_2 \text{대각선})^2}{(\text{정사각형 } OA_1B_1C_1 \text{대각선})^2} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{9}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

204) 답 : ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r_1,

등비수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r_2라 하면

$a_n = ar_1^{n-1},\ b_n = br_2^{n-1}$

ㄱ. 극한의 성질

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로

$-1 < r_1 < 1,\ -1 < r_2 < 1$

$a_n b_n = ar_1^{n-1} br_2^{n-1} = ab(r_1 r_2)^{n-1}$에서

$-1 < r_1 r_2 < 1$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{ab}{1 - r_1 r_2} \text{(수렴)(참)}$$

ㄴ. 대우를 생각하면

$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 수렴한다.

(반례) $a_n = 3^n,\ b_n = -3^n$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$이 수렴하므로

$-1 < r_1^3 < 1,\ -1 < r_2^3 < 1$

$\therefore\ -1 < r_1 < 1,\ -1 < r_2 < 1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고,

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$은 수렴한다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

205) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]도형의 규칙성을 파악하여 극한값 구하기

원 C와 C_1의 반지름의 길이를 각각 r과 r_1이라 하면

$r=1$,

$\sqrt{2}r_1+r_1=1$이므로 $r_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$,

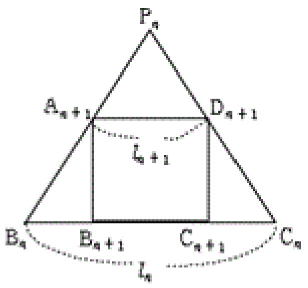
$r:r_1=r_n:r_{n+1}=1:\sqrt{2}-1$

구하는 값 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}r_k=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

206) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용하여 도형의 넓이의 합 구하기



$\triangle P_nB_nC_n$의 높이는

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}l_n=l_{n+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}l_{n+1}$이므로

$\dfrac{l_{n+1}}{l_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$

따라서 첫째항은 16이고, 공비는 $(2\sqrt{3}-3)^2$인 등비급수의 합이다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{16}{1-(2\sqrt{3}-3)^2}=6\sqrt{3}+10$

207) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]도형의 규칙성을 파악하여 등비급수 의 값 구하기

부채꼴의 반지름을 R_n, 원뿔의 밑면의 반지름을 r_n이라 하면

$\dfrac{3}{4}\cdot 2\pi R_n=2\pi r_n$, $r_n=\dfrac{3}{4}R_n$

원뿔의 모선이 R_n이므로

(높이) $=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}R_n=\dfrac{\sqrt{7}}{4}R_n$

$\therefore\ V_n=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{3}{4}R_n\right)^2\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}R_n$

$=\dfrac{3\sqrt{7}}{64}R_n^3\pi$

한편, $\{R_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열

$\{V_n\}$은 첫째항이 $3\sqrt{7}\pi$, 공비가 $\dfrac{1}{8}$인 등비수열

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n=\dfrac{3\sqrt{7}\pi}{1-\dfrac{1}{8}}=\dfrac{24\sqrt{7}}{7}\pi$

208) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 등비수열의 관계식과 무한등비급수의 합을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

(가)에서 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

(나)에서 $\dfrac{a}{1-r}=2(a+ar)$이고 $a\neq 0$이므로

$\dfrac{1}{1-r}=2(1+r)$, $1-r^2=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $r^2=\dfrac{1}{2}$

(다)에서 $\dfrac{a^2}{1-r^2}=2(a+ar^2)$이고 $r^2=\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{a^2}{1-\dfrac{1}{2}}=2\left(a+\dfrac{1}{2}a\right)$, $2a^2=3a$ $\therefore$ $a=\dfrac{3}{2}$

따라서 $a_5=ar^4=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$

209) 답 : ①

[해설]

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{1}{3}$

210) 답 : ②

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다

ㄴ. 등비급수 이고, 공비 r이 $-1<r<1$이므로 수렴한다.

ㄷ. $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\sqrt{n+1}-1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

211) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{OA_n}=a_n$이라 하면

$a_n=\dfrac{\pi}{2}\cdot a_{n+1}$에서

$a_{n+1}=\dfrac{2}{\pi}a_n$이므로

$a_n=a_1\cdot\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(6\pi-12)\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

$\therefore$ 호$OA_n=\pi\cdot\dfrac{a_n}{2}=\dfrac{\pi}{2}(6\pi-12)\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n-1}$

따라서 구하는 값은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}(6\pi-12)$, 공비가 $\frac{2}{\pi}$인 등비급수이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\text{호}OA_n=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{6\pi-12}{1-\frac{2}{\pi}}=3\pi^2$$

212) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]주어진 규칙을 이해하여 극한값을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S_1=20\pi,\ S_n=\frac{1}{4}S_{n-1}+12\pi\,(n\geq 2)$

$S_n-16\pi=\frac{1}{4}(S_{n-1}-16\pi)$이므로

$$S_n-16\pi=(20\pi-16\pi)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi$$

$$S_n=16\pi+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\pi$$

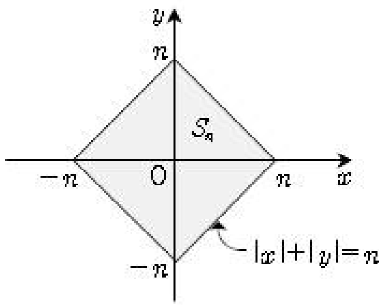
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=16\pi$$

213) 답 : 3

[해설]

[출제 의도]급수의 합을 구하기

[해설]좌표평면에서 $|x|+|y|=n$의 그래프는 아래 그림과 같으므로



$S_n=\left\{\frac{1}{2}\times(2n)\times n\right\}\times 2=2n^2$이다.

따라서 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$2n^2-2(n-1)^2=4n-2\,(n\ 2)$이고

$S_1=a_1=2$이므로 $a_n=4n-2\,(n\ 1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{(4n-2)(4n+2)}$$

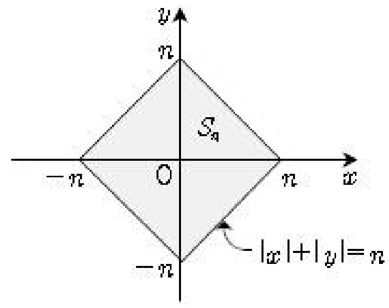
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}6\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right)=3$$

[출제 의도]급수의 합을 구하기

[해설]좌표평면에서 $|x|+|y|=n$의 그래프는 아래 그림과 같으므로



$S_n=\left\{\frac{1}{2}\times(2n)\times n\right\}\times 2=2n^2$이다.

따라서 $a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2n^2-2(n-1)^2=4n-2\,(n\geq 2)$고

$S_1=a_1=2$이므로 $a_n=4n-2\,(n\ 1)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{(4n-2)(4n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k+2}\right)$$

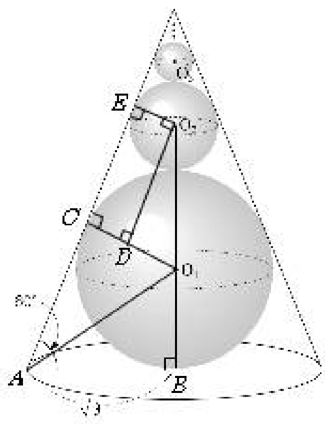
$$=\lim_{n\to\infty}6\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}\right)=3$$

214) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용하여 부피의 합 구하기



구 O_1의 반지름을 r_1이라하면

$\triangle ABO_1$에서 $\angle BAO_1=30^\circ$이므로

$$\tan 30=\frac{r_1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 $r_1=1$

구 O_2의 반지름을 r_2이라하면 $\triangle O_2O_1D$에서

$\angle O_1O_2D=30^\circ$이므로 $\sin 30=\frac{1-r_2}{1+r_2}=\frac{1}{2}$

따라서 $r_2=\frac{1}{3}$

구 V_1의 반지름 1이므로 부피는 $\frac{4}{3}\pi$

구 V_2의 반지름 $\frac{1}{3}$이므로 부피는 $\frac{4}{81}\pi$

…

따라서 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고 공비가 $\frac{1}{27}$인 등비급수이므로

합은 $\dfrac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{27}}=\dfrac{18}{13}\pi$

215) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]도형에 관한 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

R_1의 짧은 변의 길이를 x라 하면 R_2의 긴 변과 짧은 변의 길이는 각각 $x,\ 1-x$이고

R_1과 R_2가 닮음이므로 $x:1=(1-x):x$

$x^2+x-1=0$에서 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because\ x>0$)

또 R_n과 R_{n+1}사이에 $1:\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$의 닮음비가 성립하므로

$l_{n+1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}l_n$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{l_1}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}l_1$이므로

$k=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$이다.

216) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]도형에서 규칙을 발견하여 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원 $O_n,\ O_{n+1}$의 반지름을 각각 $r_n,\ r_{n+1}$이라 하면

그림에서 사각형 PO_nQO_{n+1}은 정사각형이므로

$\overline{O_nO_{n+1}}=r_n-r_{n+1}=\sqrt{2}r_{n+1}$에서

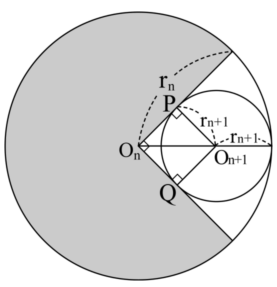
$r_{n+1}=(\sqrt{2}-1)r_n$이다.

따라서 부채꼴 A_n과 부채꼴 A_{n+1}은 닮은 도형이고 그 닮음비가 $1:(\sqrt{2}-1)$이므로

$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$이다.

또 $S_1=\dfrac{3}{4}\pi$이므로

$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots$는 첫째항이 $\dfrac{3}{4}\pi$, 공비가 $3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.



$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\frac{3}{4}\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=\dfrac{(3\sqrt{2}+3)\pi}{8}$

217) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용하여 수의 합 구하기

나열된 모든 수의 합은

$(9+0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)+(0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots)$
$+(0.09+0.009+0.0009+\cdots+(0.009+0.0009+\cdots)+\cdots$

$=10+1+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{100}+\cdots$

$=\dfrac{10}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{100}{9}$

(별해)

$S=9+2\times0.9+3\times0.09+4\times0.009+\cdots$ ①

$0.1S=0.9+2\times0.09+3\times0.009+\cdots$ ②

① − ② 에서 $0.9S=9+0.9+0.09+0.009+\cdots$

$\dfrac{9}{1-0.1}=10$

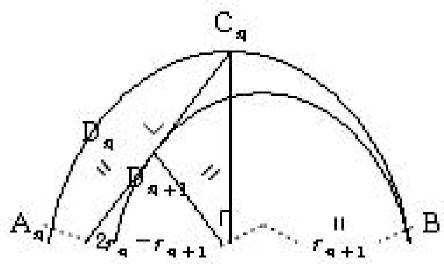
$\therefore\ S=\dfrac{100}{9}$

218) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]도형의 성질을 활용하여 급수의 합 구하기

그림과 같이 반원 $D_n,\ D_{n+1}$의 반지름을 각각 $r_n,\ r_{n+1}$라 하면,



$r_{n+1}(2r_n-r_{n+1})=1\sqrt{2},\ r_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}r_n$

따라서, $l_1=2\pi,\ l_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}l_n$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\dfrac{2\pi}{1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}}=2(3+2\sqrt{2})\pi$

219) 답 : 25

[해설]

[출제 의도]주어진 도형에서 수열의 극한값 구하기

$a_n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{n}\times\dfrac{10}{n}=\dfrac{50}{n^2}$

$\{b_n\}:0,\ 3,\ 7,\ 12,\ 18,\ \cdots$에서

$b_n=0+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=\dfrac{n(n-1)}{2}+2(n-1)$

$=\dfrac{n^2+3n-4}{2}$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=25$

220) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴 조건 이해하기

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t_n$이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}t_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-\frac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-1)^2}\right\}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2+n}{4n^2-4n+1}\right)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{4}$$

221) 답 : ②

[해설]

수열의 극한

$\overline{OB_1}=\overline{A_1B_1}=6$ 이므로

$$S_1=6^2-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot6^2=6^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\overline{B_1B_2}=\overline{A_2B_2}=\dfrac{6}{2}$ 이므로

$$S_2=\left(\frac{6}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{6}{2}\right)^2=\left(\frac{6}{2}\right)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\overline{B_2B_3}=\overline{A_3B_3}=\dfrac{6}{4}$ 이므로

$$S_3=\left(\frac{6}{4}\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{6}{4}\right)^2=\left(\frac{6}{4}\right)^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $6^2\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$이고, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{6^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}}=12(4-\pi)$$

222) 답 : 11

[해설]

[출제 의도]급수가 수렴할 때 성립하는 성질을 이해하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)$가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{5}{2}\right)=0$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{a_n-2}=\frac{\frac{5}{2}+3}{\frac{5}{2}-2}=11$$

223) 답 : ⑤

[해설]

s_n은 공비가 $\dfrac{2}{3}$이고 첫째항이 $\dfrac{\pi}{3}$인 등비수열,

t_n은 공비가 $\dfrac{1}{3}$이고 첫째항이 $\dfrac{\pi}{6}$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-t_n)=\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{\pi}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\pi$$

224) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결하기

$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$ 이므로 $\overline{AC}=\sqrt{5}$ 이고,

$\triangle ACB\backsim\triangle ABP_1$ 이므로 $\overline{AB}:\overline{AP_1}=\overline{AC}:\overline{AB}$

$2:\overline{AP_1}=\sqrt{5}:2$

$$\therefore\ \overline{AP_1}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

따라서 $\triangle ACB$와 $\triangle ABP_1$의 닮음비는 $1:\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로

넓이의 비는 $1:\dfrac{4}{5}$ 이다.

같은 방법으로 $\triangle AP_{n-1}P_n\backsim\triangle AP_nP_{n+1}$ 이므로

$\triangle AP_{n-1}P_n$과 $\triangle AP_nP_{n+1}$의 넓이의 비는 $1:\dfrac{4}{5}$ 이다.

$\therefore\ S_1=\dfrac{4}{5}\times(\triangle ABC$의 넓이)

$$S_2=\frac{4}{5}S_1=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$S_3=\frac{4}{5}S_2=\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}=4$$

225) 답 : 2

[해설]

[출제 의도]이차방정식의 근과 계수의 관계와 극한값의 계산을 관련지어 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$\alpha_n+\beta_n=-\sqrt{n}-1$, $\alpha_n\beta_n=-\dfrac{\sqrt{n}}{2}-\dfrac{3}{4}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}-1}{-\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{3}{4}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{4\sqrt{n}}}=\frac{1+0}{\frac{1}{2}+0}=2$$

226) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]등비급수를 이용하여 호의 길이 구하기

$l_1=2\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$, $l_2=2\cdot\dfrac{\pi}{9}=\dfrac{2}{9}\pi$,

$l_3=2\cdot\dfrac{\pi}{27}=\dfrac{2}{27}\pi$, $\cdots$

따라서 $l_n=\dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=\pi$$

227) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 계산할 수 있는지를 묻는 문제이다.

구하려는 값 $=\log_2 2+\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[4]{2}+\log_2\sqrt[8]{2}+\cdots$

$$=\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{1}{4}\log_2 2+\frac{1}{8}\log_2 2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

228) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구하기

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{0}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{0}{4^4}+\frac{1}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^8}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{4^3}+\frac{2}{4^6}+\frac{2}{4^9}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4^3}}+\frac{\frac{2}{4^3}}{1-\frac{1}{4^3}}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{63}{64}}+\frac{\frac{2}{64}}{\frac{63}{64}}=\frac{2}{21}$$

[정답]②

229) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등비급수의 수렴조건을 알고 이를 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}=-1$에서 $a=r-1$

$-1<r<1$이므로 $-2<a<0$

230) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 뜻과 성질을 이해하고 이를 활용하기

$x^2+4x-(2n-1)(2n+1)=0$의 두 근 α_n, β_n이므로 근과계수 관계에서

$$\begin{cases}\alpha_n+\beta_n=-4\\ \alpha_n\beta_n=-(2n-1)(2n+1)\end{cases}$$

구하는 값 $=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\cdot\beta_n}=\sum_{n=1}^{10}-\frac{4}{-(2n-1)(2n+1)}$$

$$=4\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{40}{21}$$

[정답]④

231) 답 : 13

[해설]

[출제 의도]급수가 수렴할 조건과 급수의 합을 이용하여 극한값 구하기

$S_n=(a_1-1)+(a_2-1)+(a_3-1)+\cdots+(a_n-1)$

급수 $\lim_{n\to\infty}S_n=10$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$,

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+S_n+2)$

$=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}S_n+2=13$

232) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

2015년 초 원리합계는 $10^8\times(1+0.05)^{10}$(원)

매년 A원 씩 연금을 받는다고 할 때,

2015년을 기준으로 했을 때의 가치는 각각

$A, \frac{A}{1+0.05}, \frac{A}{(1+0.05)^2}, \cdots$ 이다.

따라서 $\frac{A}{1-\frac{1}{1.05}}=10^8\times1.05^{10}$에서

$A=10^8\times1.05^{10}\times\frac{0.05}{1.05}=10^8\times1.05^9\times0.05$

$=7,750,000$

233) 답 : 1

[해설]

[출제 의도]급수에서 수렴의 뜻을 알고 문제 해결하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n-1}{n}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n-1}{n}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

[정답] 1

234) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기

$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

[정답]①

235) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]부분분수의 합을 이용하여 급수의 합을 계산할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{n(n+2)}=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=6$$

236) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]급수의 합 구하기

부분합 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2}{n+1}-\frac{n+3}{n+2}\right)=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$ 이다.

[정답]③

237) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]삼각형과 그에 내접하는 원들 사이에 성립하는 관계식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

한 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$$2(n-1)r_n+2\sqrt{3}r_n=2$$

$$\therefore\ r_n=\frac{1}{(n-1)+\sqrt{3}}$$

또, 원의 총 개수는

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\text{ 이므로}$$

원의 총 넓이는 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\pi r_n^2\right)=\frac{n(n+1)\pi}{2\left((n-1)+\sqrt{3}\right)^2}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{2}$$

238) 답 : 3

[해설]

[출제 의도]이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 등비급수의 합 구하기

이차방정식 $3x^2-7x+2=0$에서

(두 근의 곱) $=\alpha\beta=\frac{2}{3}$

수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 이고, 공비가 인 등비수열이다.

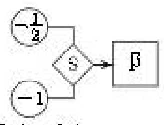
따라서 등비급수의 합은 $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$

239) 답 : ①

[해설]

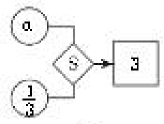
[출제 의도] 급수의 수렴과 발산을 이해하기

[해설]

(i)  에서

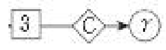
$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)(-1)^{k-1}$은 발산하므로

[그림2]에 의하여 $\beta=\frac{1}{4}$

(ii)  에서

$\sum_{k=1}^{\infty}a\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$은 수렴하므로

[그림1]에 의하여 $\frac{a}{1-\frac{1}{3}}=3\quad\therefore a=2$

(iii)  에서

$|3|>1$이므로 [그림4]에 의하여 $\gamma=-\frac{1}{3}$

따라서, $\alpha+\beta+\gamma=\frac{23}{12}$

[정답]①

240) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구하기

A_1의 한 변의 길이를 x라고 하면

피타고라스 정리에 의해 $x=\frac{2}{\sqrt{5}}a$이므로

A_1의 넓이 $=\frac{4}{5}a^2$이다.

마찬가지 방법으로

A_2의 넓이 $=\frac{16}{25}a^2$

$\vdots$

A_n의 넓이 $=\left(\frac{4}{5}\right)^n a^2$

따라서, 넓이의 합은 $\frac{\frac{4}{5}a^2}{1-\frac{4}{5}}=4a^2$이다.

[정답]④

241) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이의 합 구하기

$\triangle PQR$의 넓이는 $\square ABCD$의 넓이의 $\frac{1}{8}$이므로

$\triangle PQR$의 넓이는 2이다.

$\triangle P_1Q_1R_1$의 넓이는 $\square QB_1C_1R$의 넓이의 $\frac{1}{8}$이므로

$\triangle P_1Q_1R_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.

$\triangle PQR+\triangle P_1Q_1R_1+\triangle P_2Q_2R_2+\cdots$은 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이다.

따라서 $\triangle PQR+\triangle P_1Q_1R_1+\triangle P_2Q_2R_2+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$

242) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 알고 이를 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정삼각형 B_1BA_1을 S_1, 정삼각형 $B_2B_1A_3$을 S_2라 하면

정삼각형 S_1의 한 변의 길이는 $\frac{1}{3}$이므로

S_1의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{36}$이다.

또, 정삼각형 S_1의 한 변의 길이의 2배가 정삼각형 S_2의 한 변의 길이의 3배와

일치하므로

S_1, S_2의 닮음비는 $3:2$이고, S_1, S_2의 넓이의 비는 $9:4$이다.

따라서 구하는 넓이는 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비급수의 합이므로

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{36}\times 3}{1-\frac{4}{9}}=\frac{3\sqrt{3}}{20}$$

243) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

(ⅰ)삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{M_1M_2}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$

$\overline{M_3M_4}=\frac{1}{2}\overline{M_1M_2}=1$

$\overline{M_5M_6}=\frac{1}{2}\overline{M_3M_4}=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$\overline{M_1M_2}+\overline{M_3M_4}+\overline{M_5M_6}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

(ⅱ)삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{M_2M_3}=\frac{1}{2}\overline{CM_1}=2$

$\overline{M_4M_5}=\frac{1}{2}\overline{M_2M_3}=1$

$\overline{M_6M_7}=\frac{1}{2}\overline{M_4M_5}=\frac{1}{2}$

$\vdots$

$\overline{M_2M_3}+\overline{M_4M_5}+\overline{M_6M_7}+\cdots=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4$

(ⅲ) $\triangle ABC$에서 $\cos B=\frac{4^2+8^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 8}=\frac{11}{16}$이므로

$\overline{AM_1}^2=16+16-32\cos B=10$

$\therefore\ \overline{AM_1}=\sqrt{10}$

따라서, (ⅰ).(ⅱ), (ⅲ)으로부터

$\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3}+\cdots=8+\sqrt{10}$

[정답]⑤

244) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]규칙을 발견하여 급수의 합을 구할수 있는가를 묻는 문항이다.

$S_n=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\angle AOP_n$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=2\lim_{n\to\infty}\angle AOP_n$

한편, $\angle AOP_1=\frac{\pi}{2}$,

$\angle AOP_2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$,

$\angle AOP_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}$,

$\angle AOP_4=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}$,

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\angle AOP_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}-\cdots=\frac{\pi}{2}+\frac{\frac{\pi}{4}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}S_n=2\lim_{n\to\infty}\angle AOP_n=\frac{4\pi}{3}$

245) 답 : 125

[해설]

[출제 의도]그래프에서 극한을 이용하여 선분의 길이의 합을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$S=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}$이고, $x_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$이므로

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x_n^2-x_{n+1}^2\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{3}{4^{n+2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x_{n-1}-x_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로 $100S=125$

$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$이므로

점 P_n과 점 Q_n은 점 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$에 한없이 가까워진다.

$A_n(x_n, 0), B_n\left(0, x_n^2\right)$이라 하면

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overline{P_nQ_{n+1}}$$

$$=\left(1-\overline{Q_1A_0}\right)+\left(\overline{Q_1A_0}-\overline{Q_2A_1}\right)+\cdots$$

$$=1-\lim_{n\to\infty}\overline{Q_nA_{n-1}}=1-\lim_{n\to\infty}x_n^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q_n P_n}$

$= \left(1-\overline{B_1P_1}\right)+\left(\overline{B_1P_1}-\overline{B_2P_2}\right)+\cdots$

$= 1-\lim_{n\to\infty}\overline{B_nP_n} = 1-\lim_{n\to\infty}x_n = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

따라서, $S=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$ 이므로 $100S=125$

246) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴의 뜻을 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)$ 이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=0$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2n^2}{2n^2+1}\right)=0$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n^2+1}=1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ 이다.

[정답]⑤

247) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 삼각형과 그에 내접하는 원들 사이에 성립하는 관계식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

한 원의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면

$2(n-1)r_n+2\sqrt{3}r_n=2 \quad \therefore \quad r_n=\frac{1}{(n-1)+\sqrt{3}}$

또, 원의 총 개수는

$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로 원의 총 넓이는

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\pi r_n^2\right)=\frac{n(n+1)\pi}{2\left((n-1)+\sqrt{3}\right)^2}$

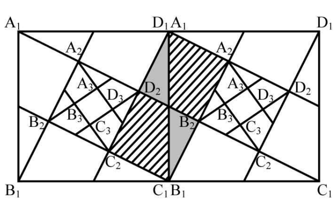
$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{2}$

248) 답 : 125

[해설]

[출제 의도]규칙성의 이해와 급수에 관한 문제 해결 능력을 측정한다.

아래 그림과 같이 생각하면 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 빗금친 부분과 어두운 부분의 넓이의 합은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이와 같다.



따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이는

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 넓이의 $\frac{1}{5}$ 이다.

이와 같이 생각하면

$S_{n+1}=\frac{1}{5}S_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$,

$S_1=1$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$

$\therefore\ 100\sum_{n=1}^{\infty}S_n=100\times\frac{5}{4}=125$

249) 답 : 34

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 구할 수 있다.

$P\left(\frac{1}{2}\right)-P_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\cdots$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{10^{10}}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$-n\log2<-10,\ n>\frac{10}{\log2}=33.2$ times times times

따라서, 자연수 n 의 최솟값은 34 이다.

250) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기

급수가 수렴하므로

$-1<x+1<1$ 에서 $-2<x<0$ 이고,

$f(x)=\frac{1}{1-(x+1)}=-\frac{1}{x}$ 이므로 그래프는 ③이다.

[정답]③

251) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용하기

$=0.3+0.02+0.002+\cdots$

(준식) $=0.3+\frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{29}{90}$

[정답]⑤

252) 답 : 40

[해설]

$S_1=(10+5)\times5\times\frac{1}{2}$

$S_2=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{4}\right)\times\frac{5}{4}\times\frac{1}{2}$

$\vdots$

첫째항이 $\frac{75}{2}$, 공비가 $\frac{1}{16}$ 인 등비급수

$\therefore\ \frac{\frac{75}{2}}{1-\frac{1}{16}}=40$

[정답] 40

253) 답 : ①

[해설]

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$가 α에 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n + 3S_n + 6)$

$= 2\lim_{n\to\infty} a_n + 3\lim_{n\to\infty} S_n + 6$

$= 0 + 3\alpha + 6$

$3\alpha + 6 = 3$

$\therefore\ \alpha = -1$

[정답]①

254) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기

$A_n = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3n-3}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{8}{27}} = \frac{9}{19}$

[정답]⑤

255) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수를 활용하여 외적 문제 해결하기

$\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$,

$\overline{A_1B_1} = 2\sqrt{2} - 2$, $\overline{B_1C} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)$,

$\overline{A_2B_2} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}-2) - (2\sqrt{2}-2) = 2(\sqrt{2}-1)^2$

구하는 값은 첫째 항이 2, 공비가 $\sqrt{2}-1$인 등비급수이므로

(준식) $= \frac{2}{1-(\sqrt{2}-1)} = 2 + \sqrt{2}$

[정답]④

256) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]급수의 성질을 이해할 수 있다.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \beta$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+b_n) - a_n\}$

$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$= \beta - \alpha$ (수렴) ∴ 참

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ ∴ 참

ㄷ. 반례:수열 $\{a_n\}$이 1, 0, 1, 0, 1, ⋯

수열 $\{b_n\}$이 0, 1, 0, 1, 0, ⋯이면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$ (수렴)이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$이다. ∴ 거짓

257) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]급수의 값을 구할 수 있다.

(주어진 식)

$= \frac{2004}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \frac{2004}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$

$= 1002$

258) 답 : 8

[해설]

[출제 의도]급수의 합을 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8$

[정답]8

259) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]규칙성을 찾아 급수의 합을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

지급되는 장학금의 총액의 극한값은

첫째항이 $14 \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{5}$, 공비가 $\frac{6}{5} \times \frac{3}{5}$인 등비급수이므로

$\frac{14 \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{5}}{1 - \frac{6}{5} \times \frac{3}{5}} = \frac{\frac{14 \times 12}{25}}{1 - \frac{18}{25}} = 24$ (억 원)

260) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합 구하기

$27^n x^2 - (9^n + 2 \cdot 3^n)x + 2 = 0$

$(3^n x - 1)(9^n x - 2) = 0$

$\therefore\ x = \frac{1}{3^n}, \frac{2}{9^n}$

$l_n = \frac{1}{3^n} - \frac{2}{9^n}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n} - \frac{2}{9^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9^n}$

$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$

[정답]④

261) 답 : ①

[해설]
[출제 의도]순환소수를 구하여 급수의 합을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^3}+2\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

262) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]급수의 합 구하는 과정 이해하기

$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$ 이므로

$\left[\frac{3^4}{2^n}\right]+\left[\frac{3^4}{2^n}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{3^4}{2^n}\right]=\left[\frac{3^4}{2^{n-1}}\right]$ 이다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{3^4}{2^k}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{3^4}{2^{k-1}}\right]-\left[\frac{3^4}{2^k}\right]\right\}$$
$$=\left([3^4]-\left[\frac{3^4}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{3^4}{2}\right]-\left[\frac{3^4}{2^2}\right]\right)+\cdots+\left(\left[\frac{3^4}{2^{n-1}}\right]-\left[\frac{3^4}{2^n}\right]\right)$$
$$=[3^4]-\left[\frac{3^4}{2^n}\right]$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=3^4=81$

[정답]⑤