I.수열의 극한

1.수열의 극한

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2018 학년도 대수능]

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3}{5^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$
⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

2 $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times9^n-13}{9^n}$ 의 값을 구하시오.[3점][2016(A) /수능 23]

[난이도 : ★☆☆] [2015 학년도 대수능]

3 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2+3n}$ 의 값은?[2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

4 자연수 k에 대하여 $a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}ka_k$ 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2014 학년도 대수능]

5 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n}$ 의 값은? [2점]

① 10　② 9　③ 8
④ 7　⑤ 6

[난이도 : ★☆☆] [2013 학년도 대수능]

6 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2-1}$ 의 값은?[2점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1
④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★☆☆] [2012 학년도 대수능]

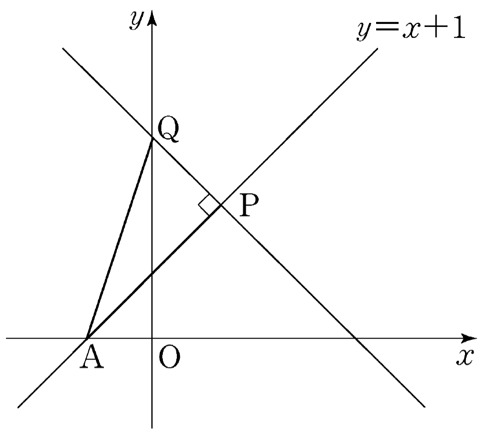
7 $\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+2}{5^n+3^n}$ 의 값은?[2점]

① 2　② 3　③ 4
④ 5　⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

8 그림과 같이 직선 $y=x+1$ 위에 두 점 $A(-1, 0)$과 $P(t, t+1)$이 있다.

점 P를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$의 값은?[3점]



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2011 학년도 대수능]

9 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n^2+1}$의 값은?[2점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

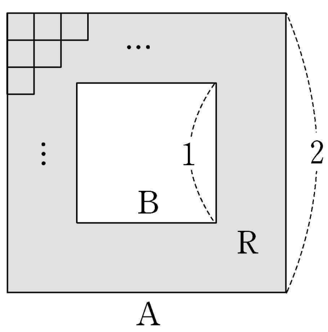
[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

10 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여 있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가)작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나)작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 있는 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=12$, $a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.[4점]



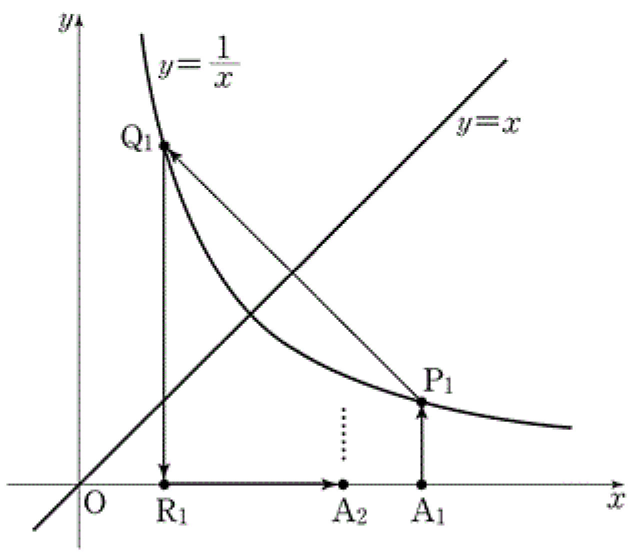
[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

11 [공통]자연수 n에 대하여 점 A_n이 x축 위의 점일 때, 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가)점 A_1의 좌표는 $(2, 0)$이다.
>
> (나)(1)점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 만나는 점을 P_n이라 한다.
> (2)점 P_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q_n이라 한다.
> (3)점 Q_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 R_n이라 한다.
> (4)점 R_n을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 x_n이라 하자. $x_5=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점]



[난이도 : ★☆☆] [2010 학년도 대수능]

12 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2009 학년도 대수능]

13 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

[난이도 : ★★☆] [2009 학년도 대수능]

14 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4^{n+1}-3^{n-1}}{4^{n-1}+3^{n+1}}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★☆☆] [2008 학년도 대수능]

15 $\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$의 값은?[2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

16 수열 $\left\{\left(\frac{2x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 정수 x의 개수를 k라 할 때, $10k$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

17 [문과] $\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

18 [문과]수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2006 학년도 대수능]

19 [문과] $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+4}-n\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2006 학년도 대수능]

20 [문과]수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n+\frac{1}{2^n}$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

21 [문과]등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.
ㄴ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.
ㄷ. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

22 [문과]이차 함수 $f(x)=3x^2$의 그래프 위의 두 점 $P(n, f(n))$과 $Q(n+1, f(n+1))$ 사이의 거리를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?(단, n은 자연수이다.)[4점]

① 9 ② 8 ③ 7
④ 6 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

23 다음 [보기]의 수열 $\{a_n\}$ 중 극한값

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$ 이 존재하는 것을 모두 고르면?

[보기]
Ⅰ. $a_n=n$ Ⅱ. $a_n=\frac{1}{2^n}$ Ⅲ. $a_n=(-1)^n$

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ
④ Ⅱ, Ⅲ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ

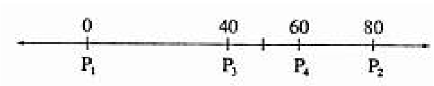
[난이도 : ★★★] [1999 학년도 대수능]

24 수직선 위에 두 점 $P_1(0)$과 $P_2(80)$이 있다.

선분 P_1P_2의 중점을 $P_3(x_3)$,

선분 P_2P_3의 중점을 $P_4(x_4)$, $\cdots$

선분 P_nP_{n+1}의 중점을 $P_{n+2}(x_{n+2})$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}x_n$의 값을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오.



① 53.31　② 53.32　③ 53.33
④ 53.34　⑤ 53.35

[난이도 : ★☆☆] [2018년 6월 모의평가]

25 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2016년 6월 모의평가]

26 $\lim_{x\to\infty}\frac{7n^2-n}{2n^2+3}$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{2}$　② 3　③ $\frac{7}{2}$
④ 4　⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

27 $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=10$ 일 때 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2015년 9월 모의평가]

28 $\lim_{n\to\infty}\frac{3\times2^{n+1}+1}{2^n}$의 값은? [2점]

① 3　② 6　③ 9
④ 12　⑤ 15

[난이도 : ★☆☆] [2015년 6월 모의평가]

29 $\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}$의 값은?[2점]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

30 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{4x-a}{x-1}=b$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

31 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$x^2+2nx-4n=0$

의 양의 실근을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

32 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지 합 S_n이

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=5$

를 만족시킬 때, 첫째항 a_1의 값은?[3점]

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

33 양수 a와 실수 b에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\frac{1}{5}$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★☆☆] [2014년 9월 모의평가]

34 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+1}{n^3+3}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

35 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+2n}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 6월 모의평가]

36 첫째항이 3이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{a_n}$$ 의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

37 자연수 n에 대하여 점 $(3n,\ 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n이 있다. 원 O_n 위를 움직이는 점과 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리의 최댓값을 a_n, 최솟값을 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★☆☆] [2012년 6월 모의평가]

38 [공통] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times 7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? [2점]

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

[난이도 : ★☆☆] [2012년 6월 모의평가]

39 [공통] $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times 7^{n+1}+3}{7^n}$의 값은? [2점]

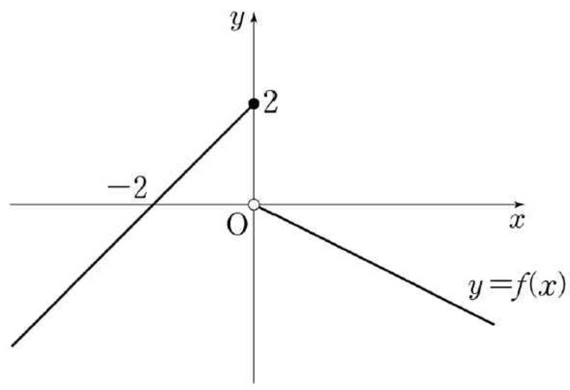
① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

40 두 상수 $a,\ b$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+7}{3n+1}=4$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점][2012년 6월]

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

41 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2, & (x\le 0) \\ -\dfrac{1}{2}x, & (x>0) \end{cases}$의 그래프가 그림과 같다.



수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 $a_{n+1}=f(f(a_n))\,(n\ge 1)$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

42 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5a_n}{n^2+2n}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2011년 6월 모의평가]

43 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{2n+1}$의 값은?[2점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2011년 9월 모의평가]

44 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}$ 의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 09월 모의평가]

45 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$을 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$ 의 값을 구하시오.(단, $a_n\neq 0$)[3점][2011년 9월 평가원]

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

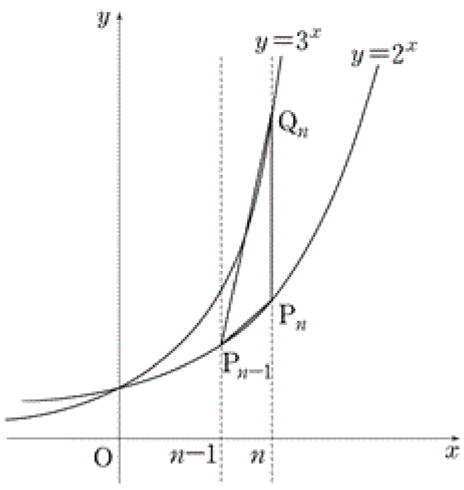
46 첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $b_1=1$
(나) $n\geq 1$일 때, b_{n+1}은 점 $P_n(-b_n, b_n^2)$을 지나고 기울기가 a_n인 직선과 곡선 $y=x^2$의 교점 중에서 P_n이 아닌 점의 x좌표이다.

$\lim_{n\to\infty}b_n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

47 [공통]자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 $P_nQ_nP_{n-1}$의 넓이를 S_n이라 하고, $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}$의 값은?(단, 점 P_0의 좌표는 $(0, 1)$이다.)[4점][2011년 6월 평가원]



① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{11}{16}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{13}{16}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

48 자연수 n에 대하여 두 직선 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$이 만나는 점의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=p$이다. $60p$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2010년 6월 모의평가]

49 $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}$ 의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2010년 9월 모의평가]

50 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+11}-n\right)$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2009년 9월 모의평가]

51 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{7^{n+1}}{2\cdot 7^n+3}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

52 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}b_n$의 값은?[3점]

(가) $20-\dfrac{1}{n}<a_n+b_n<20+\dfrac{1}{n}$

(나) $10-\dfrac{1}{n}<a_n-b_n<10+\dfrac{1}{n}$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2009년 6월 모의평가]

53 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n a_n}{3^n+1}$이 0이 아닌 상수일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$의 값은?[3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{9}{5}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

[난이도 : ★☆☆] [2008년 6월 모의평가]

54 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-7n}{n^2+5}$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2008년 9월 모의평가]

55 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

56 자연수 n에 대하여 이차 함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?[4점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★☆☆] [2007년 6월 모의평가]

57 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^{n+1}+5}{3^n-1}$의 값은?[2점]

① 2 ② 3 ③ 5
④ 6 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2007년 6월 모의평가]

58 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{a_n+1}=\frac{3}{4}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

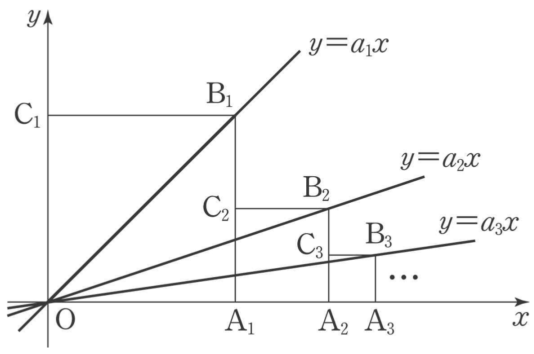
[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

59 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+15n+13}-\sqrt{n^2-13n}\right)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 모의평가]

60 다음 그림과 같이 x축 위에

$\overline{OA_1}=1,\ \overline{A_1A_2}=\frac{1}{2},\ \overline{A_2A_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \cdots,\ \overline{A_nA_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \cdots$을 만족하는 점 $A_1, A_2, A_3, \cdots$에 대하여, 제 1사분면에 선분 $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$을 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3, \cdots$을 계속하여 만든다. 원점과 점 B_n을 지나는 직선의 방정식을 $y=a_nx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^na_n$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★☆☆] [2005년 6월 모의평가]

61 [공통] $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$의 값은?[2점]

① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{2}+1$

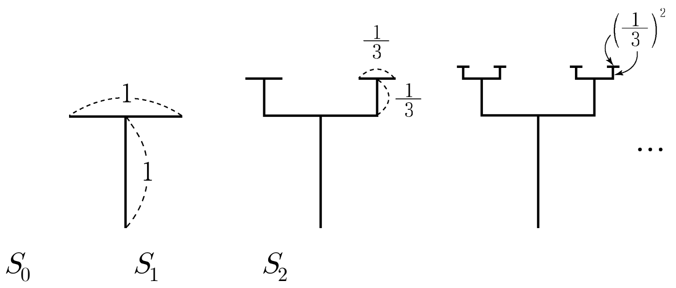
[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 모의평가]

62 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2005년 6월 모의평가]

63 [공통]그림과 같이 길이가 1인 선분 2개로 만든 'ㅜ' 모양의 도형을 S_0이라 하자. 도형 S_0의 위쪽에 있는 선분의 양끝에 길이가 $\frac{1}{3}$인 선분 2개로 만든 'ㅜ' 모양의 도형을 붙여 도형 S_1을 만든다. 이와 같은 방법으로 도형 S_{n-1}의 가장 위쪽에 있는 각 선분의 양끝에 길이가 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$인 선분 2개로 만든 'ㅜ' 모양의 도형을 붙여 도형 S_n을 만든다. 도형 S_n을 이루는 모든 선분의 길이의 합을 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} l_n$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2004년 6월 모의평가]

64 [공통] $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}$의 값은?[2점]

① $\sqrt{2}-1$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{2}+1$

[난이도 : ★★☆] [2004년 09월 모의평가]

65 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항이 $b_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

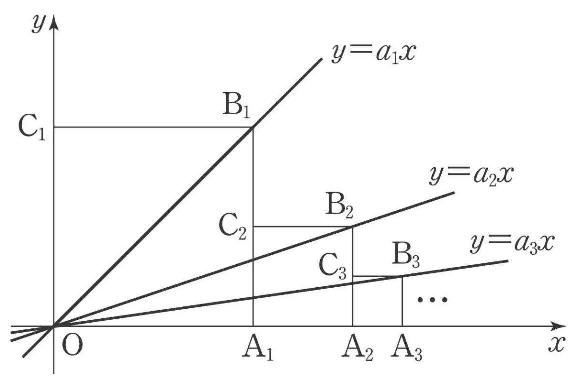
66 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^n}$에 대하여 기울기가 -1이고 제 1사분면을 지나는 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?[4점]

① 2 ② $2+\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4+\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

67 x축 위에

$\overline{OA_1}=1$, $\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}$, $\overline{A_2A_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\cdots$, $\overline{A_nA_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\cdots$ 을 만족하는 점 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 에 대하여, 제 1사분면에 선분 $OA_1, A_1A_2, A_2A_3, \cdots$ 을 한 변으로 하는 정사각형 $OA_1B_1C_1, A_1A_2B_2C_2, A_2A_3B_3C_3, \cdots$ 을 계속하여 만든다. 원점과 점 B_n을 지나는 직선의 방정식을 $y=a_nx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^na_n$의 값은?[4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2004년 6월 모의평가]

68 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+1)=f(x)$를 만족시키고, 0과 1사이에서 다음과 같이 정의된다.

$$f(x)=\begin{cases} x, & (x \geq 0) \\ 1-x, & (x<0) \end{cases}$$

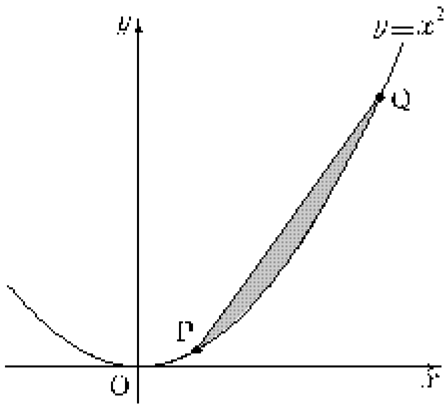
다음 [보기]중 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$
ㄷ. 수열 $\left\{f\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)\right\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 9월 모의평가]

69 포물선 $y=x^2$위에서 두 점 $P(a, a^2)$, $Q(b, b^2)$가 조건 「선분 PQ와 포물선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이는 36」을 만족하면서 움직이고 있다. $\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{a}$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★☆☆] [2018년 3월 학력평가]

70 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\right)$의 값은? [2점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

71 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=2,\ \lim_{n\to\infty} b_n=1$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2018년 3월 학력평가]

72 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+1}{a_n+3}$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

73 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=a$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+2}+1}{a^n-1}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

74 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=4n^2$과 직선 $y=\sqrt{n}$이 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(2n-a_n)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

[난이도 : ★★★] [2018년 3월 학력평가]

75 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n=\frac{(-1)^n+3}{2},\ b_n=p\times(-1)^{n+1}+q$$

일 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 실수이다.) [4점]

보 기
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다. ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다. ㄷ.두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=6$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2016년 3월 학력평가]

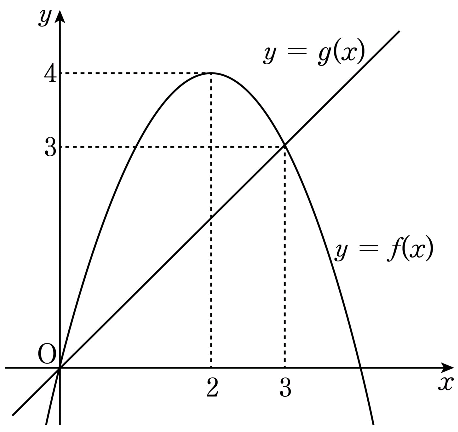
76 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2016년 3월 학력평가]

77 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 원점과 점 $(3,\ 3)$에서 만난다.

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(x)\}^{n+1}+5\{g(x)\}^n}{\{f(x)\}^n+\{g(x)\}^n}$$ 일 때, $h(2)+h(3)$의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★★] [2016년 3월 학력평가]

78 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-\left(4+\frac{1}{n}\right)x+\frac{4}{n}$와 직선 $y=\frac{1}{n}x+1$이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $30\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]

[난이도 : ★☆☆] [2015년 10월 학력평가]

79 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}$의 값은? [2점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

[난이도 : ★☆☆] [2015년 3월 학력평가]

80 $\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}$ 의 값은? [2점]

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

[난이도 : ★☆☆] [2015년 4월 학력평가]

81 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times6^{n+1}+3}{6^n}$ 의 값은? [2점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2015년 4월 학력평가]

82 $\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+6)}{x-4}$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

83 $\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5^n+2^n}{5^n-2^n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

84 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=5$,

$\lim_{n\to\infty}(b_n-4)=0$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은? [3점]

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

[난이도 : ★★☆] [2015년 3월 학력평가]

85 두 양의 실수 a, $b(a>b)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{2a^n}{a^n+b^n}$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2015년 3월 학력평가]

86 (공통)두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\frac{1}{n+1}\ (n\ge1)$
(나) $\lim_{n\to\infty}n^2b_n=2$

$\lim_{n\to\infty}n^2a_n$의 값은? [4점]

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

[난이도 : ★☆☆] [2014년 3월 학력평가]

87 $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-3)}{4n^2+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

88 분수방정식 $3x-\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x-1}=2$의 해를 α라 할 때, 60α의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 4월 학력평가]

89 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1+2\log_3 n<\log_3 a_n<1+2\log_3(n+1)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2014년 7월 학력평가]

90 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3}{2-a_n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

91 실수 a에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n+2a\right)=10$$

일 때, a의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

92 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}<a_n<2^n$$

$$3n-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}b_k<3n+\frac{1}{n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 8 ⑤ 16\

[난이도 : ★★☆] [2014년 3월 학력평가]

93 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{3}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+n}-n}{a_n}$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

94 첫째항이 1이고 공차가 6인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$T_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}T_{2n}}{S_{2n}}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

95 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

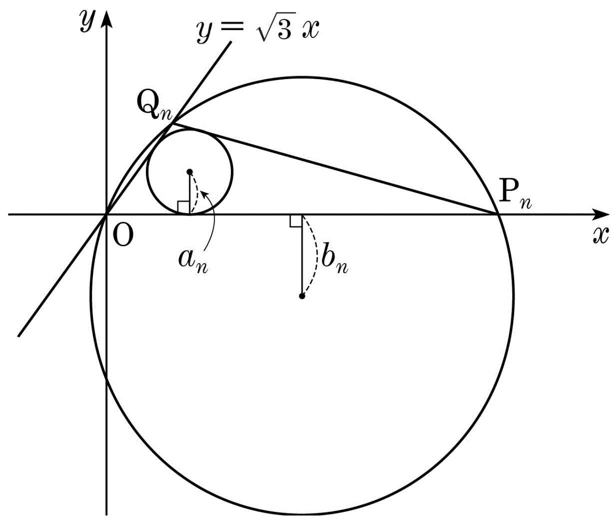
(가) $4^n < a_n < 4^n + 1$
(나) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n < b_n < 2^{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4a_n + b_n}{2a_n + 2^n b_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2014년 3월 학력평가]

96 좌표평면 위에 직선 $y = \sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위의 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 OP_nQ_n의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = L$이다. $100L$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



[난이도 : ★☆☆] [2012년 10월 학력평가]

97 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n^2+1}}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2012년 11월 학력평가]

98 $\lim_{n\to\infty} \frac{(an-1)(an+1)}{n^2+1} = 16$ 일 때, 양수 a 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2012년 3월 학력평가]

99 [공통] $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{(2^n+1)(2^n-1)}$ 의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

[난이도 : ★☆☆] [2012년 3월 학력평가]

100 $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{(2n+1)(2n-1)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

101 등비수열 $\left\{\left(2x-\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ 이 수렴하도록 하는 모든 정수 x 의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 9월 학력평가]

102 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=2$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1}=2a_n$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n+2}+a_8}{a_{3n-2}+a_2}$ 의 값을 구하시오.

[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

103 [공통]모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}\right)=5$ 를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ 의 값을 구하시오. [4점][2012년 7월]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

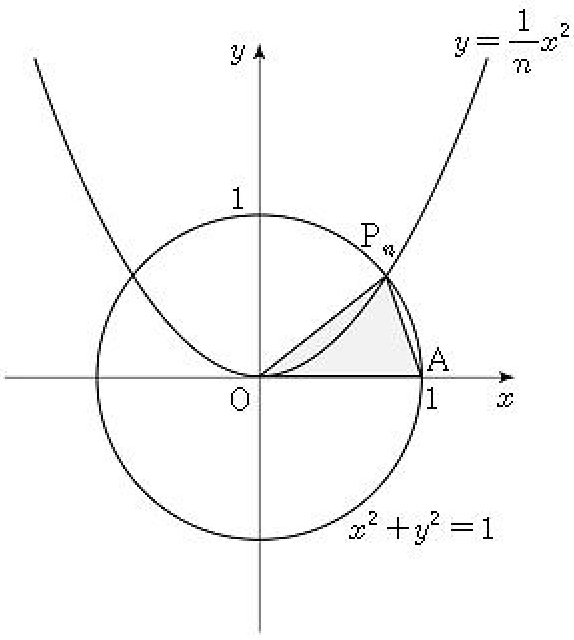
104 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1,\ a_2=4$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 11월 학력평가]

105 그림과 같이 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{n}x^2$과 원 $x^2+y^2=1$이 제 1사분면에서 만나는 점을 P_n이라 하자.

점 $A(1, 0)$에 대하여 삼각형 OAP_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} nS_n=\alpha$이다. 이때, 100α의 값을 구하시오. [3점]



[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

106 [공통]수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $n<a_n<n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2012년 4월 학력평가]

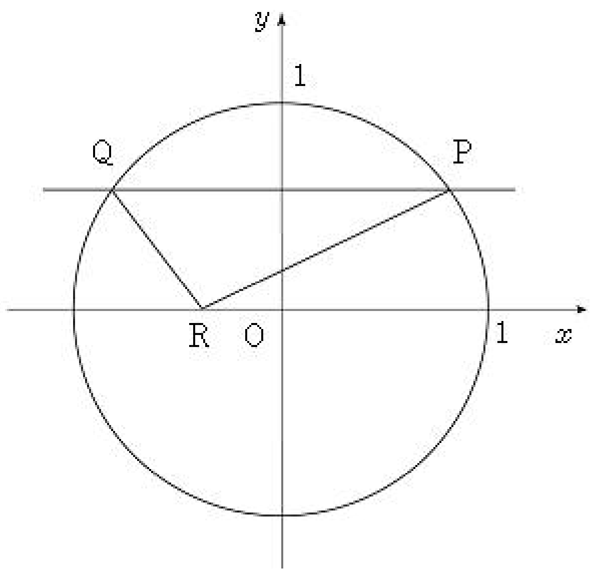
107 [공통]모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

(가) $3n^2+1<(2+4+6+\cdots+2n)a_n$
(나) $b_n<6-2a_n$
(다)급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴한다.

① 3　② $\frac{10}{3}$　③ $\frac{11}{3}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

108 원 $x^2+y^2=1$위를 움직이는 제 1사분면 위의 점 $P(\alpha, \beta)$를 지나고 x축과 평행한 직선을 그어 원과 만나는 다른 점을 Q, x축 위의 한 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\alpha)$라 할 때, $\lim_{\alpha\to 1-}\frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}$의 값은? [4점][2012년 7월]



① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

109 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
(나) $\lim_{n\to\infty} (2a_n - 5b_n) = 3$

이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \frac{q}{p}$ 이면 $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2012년 9월 학력평가]

110 모든 항이 실수이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

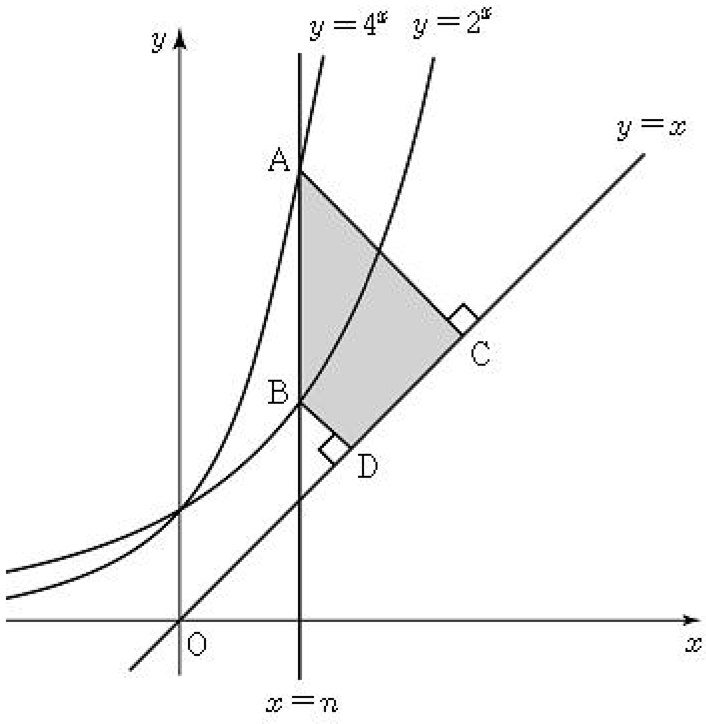
ㄱ. $a_1 < 0$이면 $a_{101} < 0$이다.
ㄴ. $a_1 < a_2 < 1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.
ㄷ. $a_1 < a_2 < 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < a_1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

111 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=4^x$, $y=2^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 직선 $y=x$위에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자.

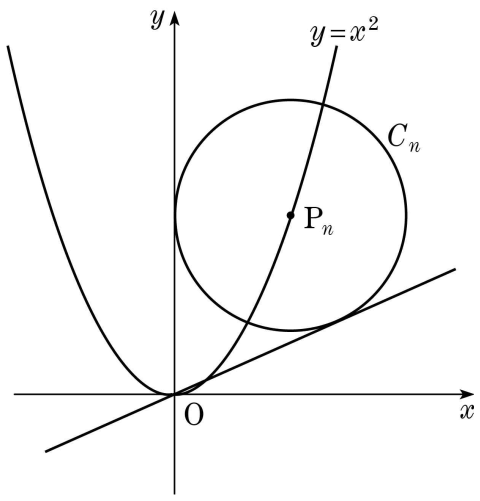
사각형 $ABDC$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}}{S_n}$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2012년 3월 학력평가]

112 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(n, n^2)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원을 C_n이라 하자.

원점을 지나고 원 C_n에 접하는 직선 중에서 y축이 아닌 직선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2011년 3월 학력평가]

113 $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+\cos n\pi)}{n^2+1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2011년 월 학력평가]

114 $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

115 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^{2n-1}}{2^{2n+2}+3^n}$의 값은?[3점]

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

116 자연수 n에 대하여 $a_n=\sqrt{n(n+1)}$이라 하자. a_n에 가장 가까운 자연수를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{|a_n-b_n|}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 4월 학력평가]

117 [공통]자연수 n에 대하여 $f(n)=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

118 공비가 1이 아니고 모든 항이 양수인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 항상 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은 등비수열이다. ㄴ. $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$이고 수열 $\{a_n\}$이 발산하면 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다. ㄷ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$도 수렴한다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2010년 10월 학력평가]

119 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n-3}-n}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2010년 3월 학력평가]

120 [공통] $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$
④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2010년 11월 학력평가]

121 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}$의 값은?[2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2010년 7월 학력평가]

122 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$의 값은?[2점]

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

123 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=-x+n$이 만나서 생기는 두 교점 사이의 거리를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n^2}{n}$의 값은?[3점]

① 5　② 6
③ 7　④ 8
⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

124 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{4n^2+1}}{n-2}$을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 3월 학력평가]

125 [공통]이차 함수

$f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)의 그래프의

꼭짓점의 좌표를 $P_n(x_n,\ y_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$의 값을

구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

126 다음은 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 양의 상수 K에

대하여 $a_1 \ge K,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을

만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하는 과정이다.

<증명>

$a_n>0,\ K>0$이고, $a_1 \geqq K$이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)\geqq$ [(가)]이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \ge$ [(가)] $\cdots$ ㉠

이다.

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{K^2}{a_n}\right)$이므로

2이상의 자연수 n에 대하여

$a_n-K=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{K^2}{a_{n-1}}\right)-K$

$=\frac{1}{2}(\boxed{나})\left(1-\frac{K}{a_{n-1}}\right)\le\frac{1}{2}(\boxed{나})$

이 성립하므로

$a_n-K\leqq\frac{1}{2}(\boxed{나})\leq\cdots\leq\boxed{다}(a_1-K)\cdots\cdots$ ㉡ 이다.

㉠,㉡에 의하여 $0\le a_n-K\le\boxed{다}(a_1-K)$ 이다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\boxed{가}$ 이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점]

① $K,\ a_{n-1}-K,\ \frac{1}{2^{n+1}}$

② $K,\ a_{n-1}-K,\ \frac{1}{2^{n-1}}$

③ $K,\ a_{n-1}+K,\ \frac{1}{2^n}$

④ $2K,\ a_{n-1}-K,\ \frac{1}{2^{n-1}}$

⑤ $2K,\ a_{n-1}+K,\ \frac{1}{2^n}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

127 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-2\cdot 3^{n+1}}{3\cdot 2^{n-1}+3^n}$ 의 값은?[3점]

① -6 ② -2 ③ $-\frac{2}{3}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

128 두 등식 $\lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{n}=2$, $\sum_{n=1}^{5}(an+b)=60$을 만족시키는 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?[3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

129 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-3a_n}{n^2a_n-na_n+3}=6$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4n}{na_n-3}$의 값은?[3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

130 수열 $\{a_n\}$이 $3n-1<na_n<3n+2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2
④ 3 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 학력평가]

131 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=15$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^n}{3^n+5^{n+1}}a_n$의 값은?[3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [2010년 4월 학력평가]

132 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\lvert b_n\rvert=0$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n=6$이면 $\lim_{n\to\infty}na_n=2$이다.
ㄷ. 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010년 7월 학력평가]

133 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^2+4}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

134 자연수 n에 대하여 행렬 $\begin{pmatrix} 2^n, & 3^n \\ 3^n, & 2^n \end{pmatrix}$의 역행렬의 모든 성분의 합을 a_n이라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3}$
ㄷ. $\frac{1}{3^n} < a_n < \frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

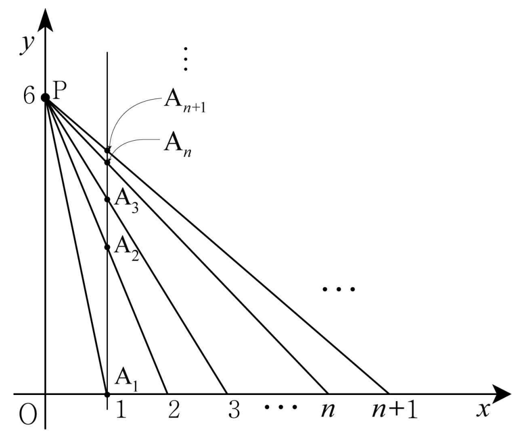
[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

135 첫째항이 1이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차함수 $y=x^2+\left(\sqrt{a_n}+2\right)x+4$의 그래프와 직선 $y=2x-a_{n+1}+5$의 그래프가 항상 한 점에서 만날 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 α라 하자.

이때, 30α의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

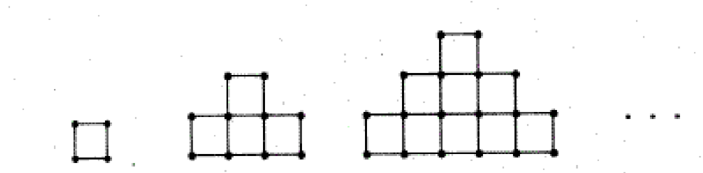
136 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $P(0, 6)$과 점 $C_n(n, 0)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이 있다. $\overline{PC_n}$과 직선 $x=1$과의 교점을 차례로 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, A_{n+1}, \cdots$이라 하자. $\triangle PA_nA_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n^2 S_n$의 값은?[4점]



① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

137 [그림 1]은 길이가 $1m$인 철근 4개를 가지고 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 조형물이다.[그림 2]는 길이가 $1m$인 철근 13개를 가지고 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 조형물이다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

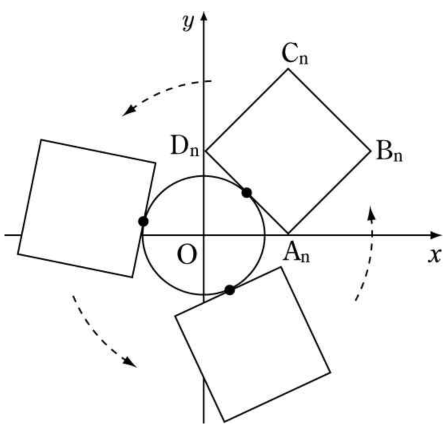
이와 같이 길이가 $1m$인 철근의 끝점과 끝점을 용접하여 만든 n번째 조형물에 사용된 $1m$인 모든 철근의 수를 a_n, 용접한 모든 지점의 수를 b_n이라 하자.

예를 들어, $a_2=13$, $b_2=10$이다. 이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}+b_{2n}}{a_n}$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 학력평가]

138 좌표평면 위의 네 점 $A_n(n,\ 0)$, $B_n(2n,\ n)$, $C_n(n,\ 2n)$, $D_n(0,\ n)$을 연결한 사각형과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}n^2$이 있다. 그림과 같이 사각형 $A_nB_nC_nD_n$이 변 $\overline{A_nD_n}$의 중점에서 원에 접하며 원을 따라 한 바퀴 움직일 때, 사각형 $A_nB_nC_nD_n$이 지나간 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2010년 4월 학력평가]

139 수렴하는 무한수열만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

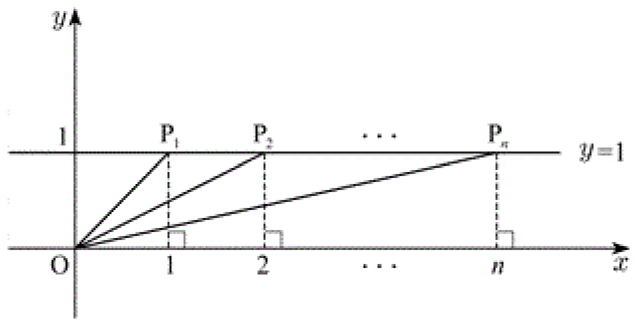
[보기]
ㄱ. $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$
ㄴ. $\left\{\frac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^n}\right\}$
ㄷ. $\left\{\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right\}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 3월 학력평가]

140 좌표평면에서 직선 $y=1$위의 점 $P_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$a_n=$ (선분 OP_n의 길이)($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)



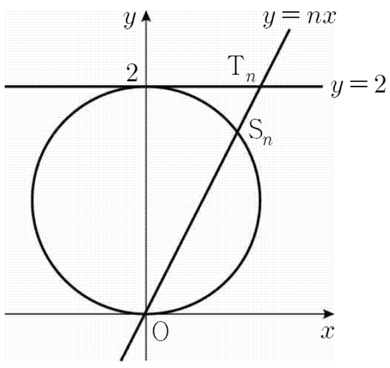
$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$의 값은?

(단, O는 원점이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

141 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx$가 원 $x^2+(y-1)^2=1$, 직선 $y=2$와 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 $S_n(a_n, b_n)$, $T_n(c_n, d_n)$이라 하자.



극한값이 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} b_n=2$
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n-a_n}{d_n-b_n}=1$
ㄷ. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n(d_n-b_n)}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

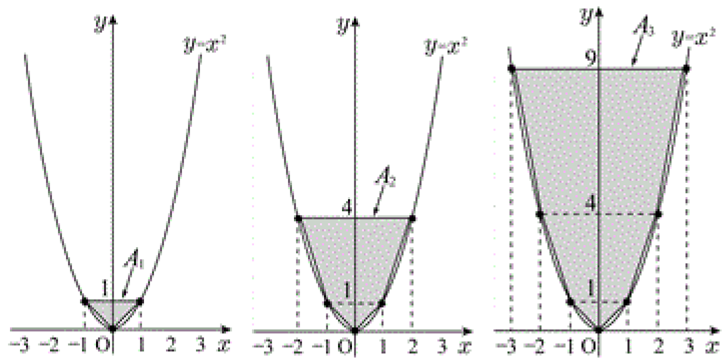
[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

142 [공통]그림과 같이 곡선 $y=x^2$위의 점 $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 A_1이라 하자.

곡선 $y=x^2$위의 점 $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$를 꼭짓점으로 하는 오각형을 A_2라 하자.

곡선 $y=x^2$위의 점 $(-3, 9)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$를 꼭짓점으로 하는 칠각형을 A_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻은 다각형 A_n은 곡선 $y=x^2$위의 점 $(-n, n^2)$, $(-n+1, (n-1)^2)$, $\cdots$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\cdots$, $(n-$ 을 꼭짓점으로 하는 다각형이다. 다각형 A_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은?[4점]



① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

[난이도 : ★☆☆] [2009년 7월 학력평가]

143 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$의 값은?[2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2009년 10월 학력평가]

144 $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+3}{4^{n+1}+2^n}$ 의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2009년 10월 학력평가]

145 $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$의 값은?[2점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2009년 4월 학력평가]

146 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{5n+5}=5$가 성립하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★☆☆] [2009년 11월 학력평가]

147 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$ 의 값은?[2점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★☆☆] [2009년 3월 학력평가]

148 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ 의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★☆☆] [2009년 10월 학력평가]

149 수열 $\left\{\left(\frac{3r-1}{8}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위한 정수 r의 개수는?[2 점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2009년 4월 학력평가]

150 함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x^{2n}}{x^{2n}+2}$ 으로 정의할 때, $f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?[3점]

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 11월 학력평가]

151 다항식 $x^{n+1}+x^n$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $a_n x+b_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$의 값은?(단, n은 자연수이다.)[3점]

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 4월 학력평가]

152 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2+\cdots+(4n)^2}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

153 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{6+2a_n}{3a_n-1}=\frac{3}{2}$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

154 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_n+2<3a_{n+1}<2a_n+1\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2009년 7월 학력평가]

155 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 $b_n=a_{3n-2}+2a_{3n-1}+a_{3n}$이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k=A_n$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=B_n$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 3월 학력평가]

156 [공통]수열 $\left\{\sqrt{16^n+a^n}-4^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 a의 개수는?[3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

157 [공통]수열 $\{(-1)^{n-1}\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음 [보기]의 수열 중 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

ㄱ. $\{S_n\}$

ㄴ. $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$

ㄷ. $\left\{\dfrac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}\right\}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

158 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족한다.

(가) $a_1=p,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{8}a_n+q(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(나) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=16$

이때, 두 실수 $p,\ q$에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

159 그림은 함수 $f(x)=2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|\ (0\le x\le 1)$의 그래프이다.

이미지가 없거나 이미지 크기가 0 임

자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$A_n=\{x|f^n(x)=1,\ 0\le x\le 1\}$이라 할 때, 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어

$A_1=\{0,\ 1\},\ A_2=\left\{0,\ \dfrac{1}{2},\ 1\right\}$이므로 $a_1=2,\ a_2=3$이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$의 값은?(단,

$f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이다.)[4점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2009년 11월 학력평가]

160 수열 $\{a_n\}$을

$\left\{\begin{pmatrix}a_1=p\\ a_2=q\end{pmatrix},\ (3a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n)\right.(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?(단, $p,\ q$는 서로 다른 실수이다.)[4점]

① $\dfrac{p+q}{2}$ ② $\dfrac{2p+q}{3}$ ③ $\dfrac{p+2q}{3}$
④ $\dfrac{3p+q}{4}$ ⑤ $\dfrac{p+3q}{4}$

[난이도 : ★★★] [2009년 3월 학력평가]

161 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$a_n+b_n=2+\frac{1}{n}\,(n=1,2,3,\cdots)$일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=2$
ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2008년 10월 학력평가]

162 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{\sqrt{4n^2+1}}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[난이도 : ★☆☆] [2008년 7월 학력평가]

163 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n}$의 값은?[2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2008년 4월 학력평가]

164 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{-n+1}}{2^{n-1}+3^{-n}}$의 값은?[2점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ 4 ⑤ 6

[난이도 : ★☆☆] [2008년 11월 학력평가]

165 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하면 무한수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. 무한수열 $\{a_n^2\}$, $\{b_n^2\}$이 수렴하면 무한수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴한다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$, $a_n>a_{n+1}$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2008년 12월 학력평가]

166 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$의 값은?[2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

167 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+3}-\sqrt{n^2+bn+2}\right)=5$를 만족하는 두 실수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?[3점]

① 2　② 5　③ 8
④ 10　⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

168 [공통] $\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n+5}{3^{n-1}+2^n}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{5}{3}$　③ 2
④ 4　⑤ 6

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

169 $\lim_{n\to\infty}\frac{2+5+8+\cdots+(3n-1)}{2n^2+3}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

170 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^{n-1}+2^n}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

171 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=\sum_{k=1}^{n}(n+k)$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?[3점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

172 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\frac{a_n}{b_n}$도 수렴한다.
ㄴ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.
ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

173 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

ㄴ. $\sum\limits_{n=1}^{99} a_n=9$

ㄷ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 11월 학력평가]

174 표는 어떤 프로그램을 이용하여 $A_1=25$일 때,

$A_2=\dfrac{2}{3}\times A_1+3$에 의해서 $A_2=19.6666667$을 구하고,

$A_3=\dfrac{2}{3}\times A_2+3$에 의해서 $A_3=16.1111111$을 구하고, 이와 같은 방법으로 $A_4, A_5, A_6, \cdots$을 구한 결과의 일부를 나타낸 것이다. $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$의 값은 어떤 일정한 수 α에 한없이 가까워진다. 이때, α의 값은?(단, 표에 제시된 값은 소수점 이하 8번째 자리에서 반올림한 것이다.)[3점]

A_2 ▾ $f(x)$ $=\frac{2}{3}\times A_1+3$

	A	
1	25	
2	19.6666667	
3	16.1111111	
4	13.7407407	

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

175 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}-3^{n+1}+5}{2^{2n+3}+3^n}$의 값은?[3점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{8}$ ③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

176 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{pn^2+qn-1}{n+2}=3$이 성립하도록 하는 상수 p, q가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근일 때, $a+b$의 값을 구하면?[3점]

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2008년 03월 학력평가]

177 등비수열 $\left\{\left(-\sin\dfrac{k\pi}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 10이하의 자연수 k의 개수는? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

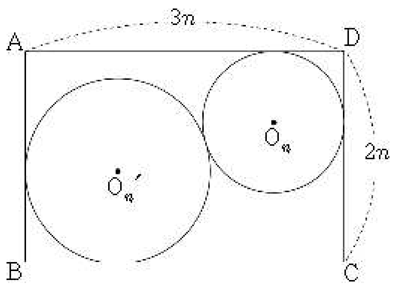
[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

178 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n-1}-n}{3}$의 값은?[3점]

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ 1
④ 3 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

179 그림과 같이 자연수 n에 대하여 가로, 세로의 길이가 각 각 $3n$, $2n$인 직사각형 $ABCD$안에 서로 외접하는 두 개의 원 O_n, O_n'이 있다. 원 O_n은 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$에 접하고, 원 O_n'은 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$에 접한다. $\overline{O_nO_n'}$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n-5n}{n+1}$의 값은?[4점]



① $-2\sqrt{3}$　② -2　③ $-\sqrt{3}$　④ -1　⑤ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 9월 학력평가]

180 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^n+bx+1}{x^n+1}$ (a, b는 유리수)이

$f(\sqrt{2}+1)+f(\sqrt{2}-1)=2+\sqrt{2}$를 만족할 때, $a+b$의 값은?[3점]

① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2008년 3월 학력평가]

181 [공통]자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+1}$의 정수부분을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n\left(\sqrt{n^2+1}-a_n\right)$의 값은?[3점]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　④ 1　⑤ $\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

182 $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^3}{1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 5월 학력평가]

183 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, α, β는 상수이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이다.
ㄴ. $a_n<b_n$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이면 $\alpha<\beta$이다.
ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2008년 4월 학력평가]

184 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$의 값이 존재하는 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $a_n=2^n$
ㄴ. $a_n=(-1)^n$
ㄷ. $S_n=3^n-1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

185 [공통]원 $x^2+y^2=4^n+1\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$위의 점 $P_n(2^n,\ 1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}$의 값은?(단, O는 원점이다.)[4점]

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

[난이도 : ★★★] [2008년 5월 학력평가]

186 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=\cos n\pi,\ b_n=\sin\frac{2n-1}{2}\pi$일 때, 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴한다. ㄴ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴한다. ㄷ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

187 좌표평면에서 직선 $y=2x$위의 점들 중 제 1사분면에 있는 격자점을 원점 O에 가까운 쪽부터 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots$라 하고, $y=\frac{1}{2}x$위의 점들 중 제 1사분면에 있는 격자점을 원점 O에 가까운 쪽부터 $B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots$이라 하자.

삼각형 OA_kB_k의 넓이를 $S_k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 하고, $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n^3}$일 때, 60α의 값을 구하시오.(단 격자점이란 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 뜻한다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

188 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty}(2n-1)a_n=3,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+3n+2)b_n=2$일 때,
$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

189 [공통]수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1,\ a_n+a_{n+1}=3\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킬 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $a_{11}=1$ ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=2$ ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 11월 학력평가]

190 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-5^{n+1}}{5^n-3^n}$의 값은?[2점]

① -5 ② -3 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[난이도 : ★★★] [2008년 4월 학력평가]

191 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_{2n}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n$도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}$이다.

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★☆☆] [2007년 9월 학력평가]

192 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n+1}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★☆☆] [2007년 7월 학력평가]

193 $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$의 값은?[2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2007년 6월 학력평가]

194 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n-1}}{4^n+3^n}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★☆☆] [2007년 5월 학력평가]

195 [공통] $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n}-2n\right)$의 값은?[2점]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 0

[난이도 : ★☆☆] [2007년 10월 학력평가]

196 $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2^{2n-1}}{4^n-3^{n+1}}$의 값은?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2007년 10월 학력평가]

197 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

198 두 무한수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대한 옳은 설명을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n^2\}$은 수렴한다. ㄴ. 수열 $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다. ㄷ. 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 모두 발산하면 수열 $\{a_nb_n\}$은 발산한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

199 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n}{\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

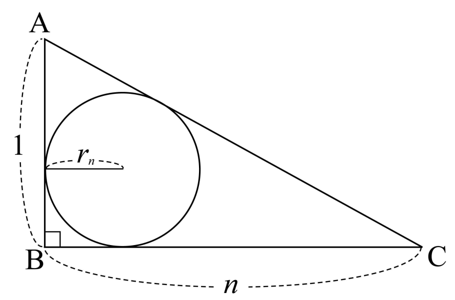
[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

200 [공통] $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

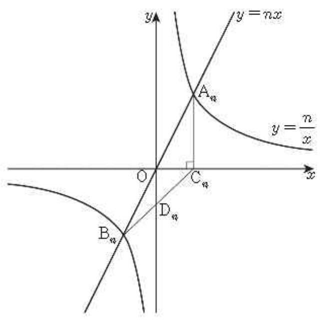
201 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=n$, $\angle ABC=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}r_n$의 값은?(단, n은 자연수이다.)[3점]



① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 11월 학력평가]

202 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $y=nx$, $y=\frac{n}{x}$의 그래프의 두 교점을 각각 A_n, B_n, 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 C_n, 선분 B_nC_n와 y축과의 교점을 D_n이라 하자. 사다리꼴 $OD_nC_nA_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 OB_nD_n의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n+n}{S_n+n+1}$의 값은?[4점]



① $\frac{2}{7}$　② $\frac{3}{7}$　③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{5}{7}$　⑤ $\frac{6}{7}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 9월 학력평가]

203 무한수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\sqrt{9n^2-1}<(n+2)a_n<\sqrt{9n^2+4n}$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n^3$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 4월 학력평가]

204 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $3n^2-5n-1<a_n<3n^2+n+2$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

205 다음 [보기]의 급수 중 수렴하는 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots$
ㄴ. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots$
ㄷ. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\cdots$

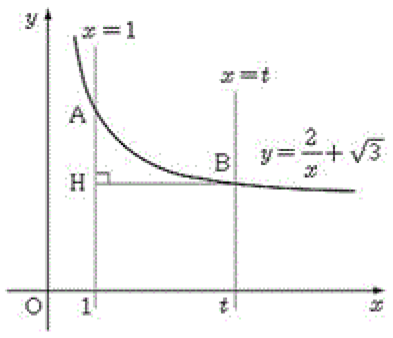
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 11월 학력평가]

206 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-5}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x값의 합을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 4월 학력평가]

207 곡선 $y=\dfrac{2}{x}+\sqrt{3}\,(x>0)$과 두 직선 $x=1,\ x=t$의 교점을 각각 $A,\ B$라 하고, 점 B에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이때, $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$의 값은?(단, $t>1$이다.)[3점]



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

208 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot3^n-3\cdot4^n}{2^{2n}+3^n}$의 값은?[3점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2007년 5월 학력평가]

209 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+4\,(n=1,\ 2,\ 3\cdots) \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007년 3월 학력평가]

210 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+a_k)}$의 값은?[3점]

① 2 ② 1 ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{1}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2007년 11월 학력평가]

211 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\cdot3^{n+1}+2^{n+2}}{3^{n-1}-2^n}$의 값은?[2점]

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

[난이도 : ★★☆] [2007년 4월 학력평가]

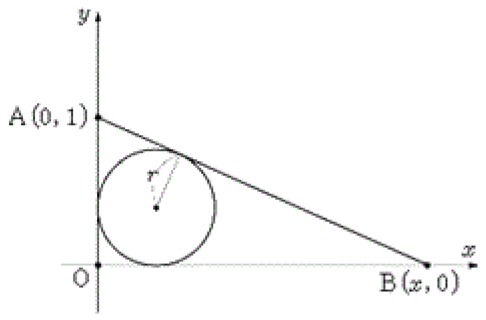
212 다음 [보기]에서 수렴하는 수열을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\left\{\tan\dfrac{2n+1}{4}\pi\right\}$
ㄴ. $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\}$
ㄷ. $\{\log_2 n^2-2\log_2(n+2)\}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 7월 학력평가]

213 그림과 같이 세 점 $A(0,\ 1)$, $O(0,\ 0)$, $B(x,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원이 있다. 점 B가 x축을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, $\triangle AOB$에 내접하는 원의 반지름의 길이 r에 대하여 $\dfrac{r}{x}$의 극한값은?(단, $x>0$)[3점]



① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{5}$　③ $\dfrac{1}{4}$
④ $\dfrac{1}{3}$　⑤ $\dfrac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

214 $0<x<16$일 때, 수열 $\left\{\left(\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}x\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 x의 개수는?[4점]

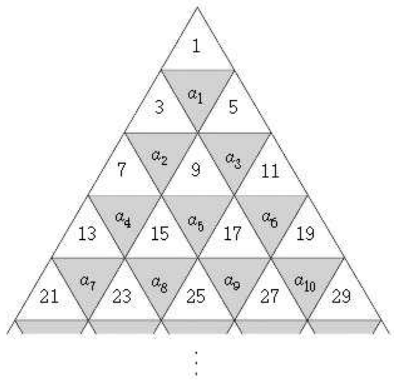
① 5　② 7　③ 9
④ 11　⑤ 13

[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

215 [공통] $2500L$의 물을 저장할 수 있는 물탱크에 현재 $1200L$의 물이 담겨 있다. 이 물탱크에 있는 물의 양의 12%를 사용한 다음 xL의 물을 넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 n번 반복한 후 물탱크에 남아 있는 물의 양을 a_nL라 하자. 부등식 $\lim_{n\to\infty} a_n \le 2000$이 성립하도록 하는 x의 최댓값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 11월 학력평가]

216 수열 $\{a_n\}$의 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$과 홀수들을 그림과 같이 나열하였다. a_1은 a_1을 둘러싸고 있는 세 수의 합 $1+3+5$이고, a_2는 a_2를 둘러싸고 있는 세 수의 합 $3+7+9$이다. 그림과 같이 a_n은 a_n을 둘러싸고 있는 세 수의 합일 때, a_{100}의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

217 $1000mL$의 물이 가득 들어있는 용기가 있다. 이 용기에서 담긴 양의 $\dfrac{1}{2}$을 덜어내고 물 $300mL$와 알콜 $100mL$를 다시 넣는 것을 첫 번째 시행이라 하고, 이 시행 후 용기에 남아 있는 양의 $\dfrac{1}{2}$을 덜어내고 물 $300mL$와 알콜 $100mL$를 다시 넣는 것을 두 번째 시행이라 하자. 이와 같은 과정을 한 없이 반복한다고 할 때, 용기 안에 알콜의 농도($\%$)는?

(단, 자연증발 및 기타 유실량은 무시한다.)[4점]

① 10%　② 15%　③ 20%
④ 25%　⑤ 30%

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

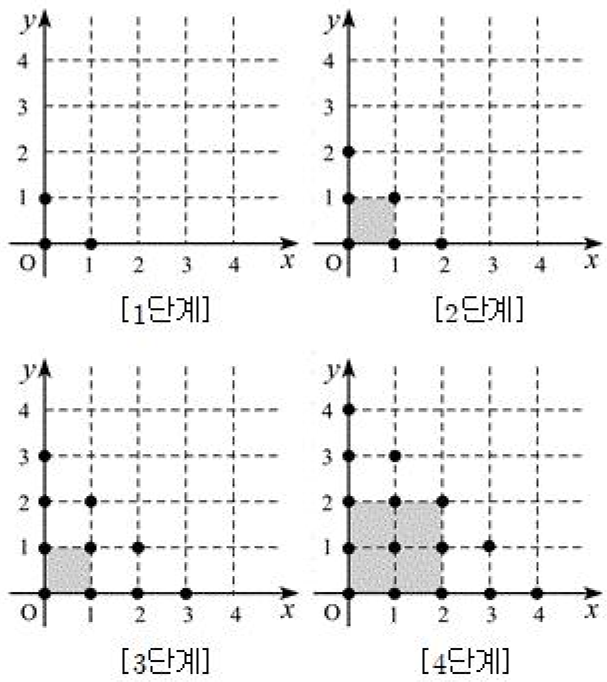
218 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}\,(r\neq-1)$에 대한 설명으로 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lvert r\rvert>1$일 때, 발산한다.
ㄴ. $r=1$일 때, 극한값은 1이다.
ㄷ. $\lvert r\rvert<1$일 때, 극한값은 $2-r$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

219 [공통]다음과 같이 좌표평면 위에 단계별로 x좌표와 y좌표가 음이 아닌 정수인 점을 표시한다.[1단계]에서는 원점과 x좌표와 y좌표의 합이 1인 점들을 표시하고, [2단계]에서는[1단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 2인 점들을 추가로 표시한다. 이와 같은 방법으로[n단계]에서는[$n-1$단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 $n(n=2, 3, 4, \cdots)$인 점들을 추가로 표시한다.



⋮

이때, [n단계]에 있는 모든 점의 개수를 a_n, [n단계]에 있는 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 중에서 원점을 한 꼭짓점으로 하고 넓이가 최대인 정사각형의 내부 및 둘레에 있는 모든 점의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들어 $a_4=15$, $b_4=9$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}$의 값은?[4점]

① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 학력평가]

220 자연수 n에 대하여 원점 O와 점 $(n, 0)$을 이은 선분을 밑변으로 하고, 높이가 h_n인 삼각형의 넓이를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 등비수열일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{1}{2}$이면 $h_n = \frac{1}{n}$이다.
ㄴ. $h_2 = \frac{1}{4}$이면 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$이다.
ㄷ. $h_2 < \frac{1}{2}$이면 $\lim_{n\to\infty} nh_n = 0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 3월 학력평가]

221 [공통]길이가 1인 선분 AB가 있다.

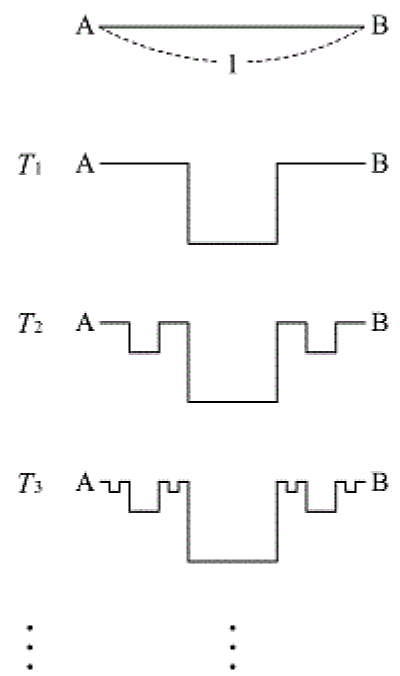
그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자.

T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자.

T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n이라 하자.

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점]



① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 4월 학력평가]

222 [공통] $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$의 값은?[2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2006년 5월 학력평가]

223 [공통]무한수열 $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \cdots, \frac{n}{2n-1}, \cdots$ 의 극한값은?[2점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 10월 학력평가]

224 두 실수 a, b가 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}+a}{x-2}=b$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?[2점]

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★☆☆] [2006년 11월 학력평가]

225 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{\sqrt{4n^2-1}}=7$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2006년 5월 학력평가]

226 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_n-4}{a_n+3}=\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4+1}$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6
④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 6월 학력평가]

227 $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$의 값은?[2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2006년 10월 학력평가]

228 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2n-1<na_n<2n+4$를 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2006년 6월 학력평가]

229 자연수 n에 대하여 다항식 $f(x)=2^n x^2+3^n x+1$을 $x-1$, $x-2$로 나눈 나머지를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$의 값은?[3점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

230 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)-n^2}{(n+1)(n+2)-n^2}$ 값은?[2 점]

① 4 ② 3 ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 학력평가]

231 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=5$이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=5$이다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_nb_n\neq 0$이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 11월 학력평가]

232 수열의 극한에 대하여 항상 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$(일정)이면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$이다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

233 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{10}-\frac{1}{n^{10}}\right\}$이 수렴하기 위한 k의 최솟값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

234 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$이고 $\alpha>\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n>\lim_{n\to\infty}b_n$
ㄷ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 3월 학력평가]

235 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대한 옳은 설명을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3 점]

[보기]
ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 모두 수렴하면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$이면, $\lim_{n\to\infty}a_n=2$이다.
ㄷ. $a_n<b_n<c_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$이면, 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 5월 학력평가]

236 수렴하는 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수에 대하여

$\frac{9n^2+1}{n^2+3}\le\frac{na_n}{2n+4}\le\frac{9n^2+10}{n^3+3}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2006년 10월 학력평가]

237 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?[3점]

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
④ 1 ⑤ 3

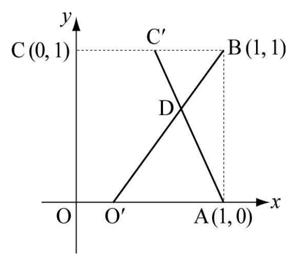
[난이도 : ★★★] [2006년 9월 학력평가]

238 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n+1}}$의 값은?[2점]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2006년 5월 학력평가]

239 그림에서 점 C, O은 각각 선분 CB, OA위에 있고 직선 AC'과 직선 BO'의 기울기를 각각 $\frac{1}{t^2-1}$, $\frac{1}{1-t^3}$, 교점을 D라 하자. 직선 AC'의 기울기는 한없이 작아지고 직선 BO'의 기울기는 한없이 커지도록 t가 변할 때, $\triangle BDC'$의 넓이와 $\triangle ADO'$의 넓이의 비는 ab에 가까워진다. ab의 값을 구하시오.(단, a와 b는 서로 소이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

240 다음 무한수열 중에서 수렴하지 않는 것은?[3점]

① $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right\}$ ② $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ ③ $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$
④ $\left\{\frac{1-3^n}{1+3^n}\right\}$ ⑤ $\left\{\frac{1}{\log_2(n+4)-\log_2 n}\right\}$

[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

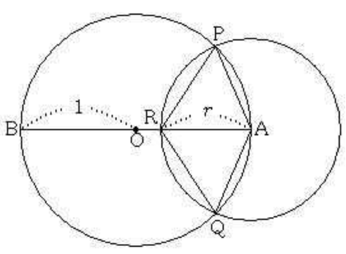
241 [공통] $a_1=1,\ 2a_{n+1}+a_n=2$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?[4점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\left\{a_n-\dfrac{2}{3}\right\}$는 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.   ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$은 수렴한다.   ㄷ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2006년 4월 학력평가]

242 반지름의 길이가 1인 원 O위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 $P,\ Q$라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 $APRQ$의 넓이를 $S(r)$라 할 때, $\lim\limits_{r\to 2-}\dfrac{S(r)}{\sqrt{2-r}}$의 값은?(단, $0<r<2$)[4점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2005년 10월 학력평가]

243 자연수 n에 대하여 $\log n$의 정수부분을 a_n으로 정의할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n+2}{a_n+1}$의 값은?(단, 로그는 상용로그)[3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2005년 9월 학력평가]

244 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+3}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$의 값은?[3점]

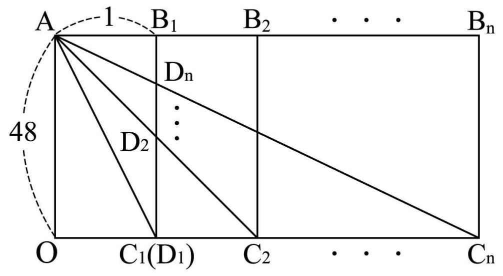
① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ 0

[난이도 : ★☆☆] [2005년 11월 학력평가]

245 두 수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$이 $a_n-b_n=\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n},\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$를 만족할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}100b_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2005년 3월 학력평가]

246 [공통]그림과 같이 자연수 n에 대하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 48인 직사각형 OAB_nC_n이 있다. 대각선 AC_n과 선분 B_1C_1의 교점을 D_n이라 한다.



이때, $\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{AC_n} - \overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}$ 의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

247 수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}(n^2-1)a_n = 2006$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)a_n$의 값은?[2점]

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1003
④ 2006　⑤ 4012

[난이도 : ★★☆] [2005년 10월 학력평가]

248 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} A^{2k} = \begin{pmatrix} a_n, & 0 \\ 0, & d_n \end{pmatrix}$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{2^n + a_n}$ 의 값은?[4점]

① 0　② 1　③ 3
④ 6　⑤ 9

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 학력평가]

249 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=6$, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 2$일 때, $\lim_{n\to\infty} (a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 7월 학력평가]

250 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?(단, α, β는 실수이고, n은 자연수이다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $a_n > b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면 $\alpha > \beta$이다.
ㄴ. $a_n > b_n$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이면 $\alpha > \beta$이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$이고 $\alpha > \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

251 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, α는 상수)[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$이면 $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 3월 학력평가]

252 무한수열 $2+\frac{1}{2}, 2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}, 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \cdots$ 은 수렴하는 것으로 알려져 있다. 다음은 그 극한값을 구하는 과정이다.

주어진 수열을 $\{a_n\}$이라 하면
$a_1 = 2+\frac{1}{2}$이고 $a_{n+1} = $ [(가)] $+\frac{1}{a_n}$이다.
이 수열의 극한값을 x라고 하면
$\lim_{n\to\infty} a_n = x$, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = x$이므로
$x = $ [(나)] $+\frac{1}{x}$이다.
따라서, 구하는 극한값은 [(가)]이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?[3점]

① 2, $1+\sqrt{2}$ ② 2, $2+\sqrt{2}$ ③ 2, $3+\sqrt{2}$
④ 1, $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ⑤ 1, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 학력평가]

253 수열의 극한에 대한 옳은 내용을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 수열 $\{a_n+2\}$가 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.
ㄴ. 수열 $\{\lvert a_n\rvert\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.
ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n\rvert$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

254 수렴하는 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$으로 정의할 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$의 값은?(단, $a_1 = 4$, $b_1 = 6$)[4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

255 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = 2n-1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$일 때,

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}} - \sqrt{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}\right)$의 값은?[3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

256 [공통]수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}+20}{a_{n+1}-14}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 4월 학력평가]

257 [공통]함수 $f(x)$를 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+3}{x^n+1}$으로 정의할 때,

$f(-3)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2005년 5월 학력평가]

258 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2005}{n^2+2005}$의 극한값은?[3점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

259 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n-1}+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n}}$의 값은?[2점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

260 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}na_n=3$을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2005년 7월 학력평가]

261 수렴하는 무한수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$이다. 30α의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 11월 학력평가]

262 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르면?[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다.
ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.
ㄹ. $\lim_{n\to\infty}b_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n$도 수렴한다.(단, $b_n\neq 0$)

① ㄱ, ㄴ　② ㄱ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄷ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

[난이도 : ★★★] [2005년 10월 학력평가]

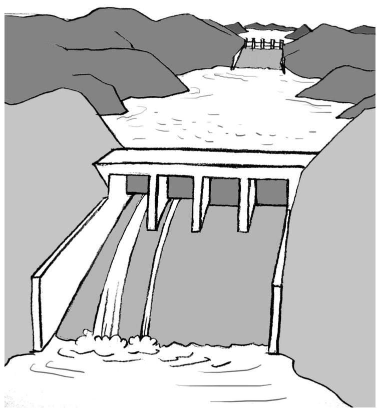
263 극한값의 성질에 대한 옳은 것을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 이다.
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ 이다.
ㄷ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 발산하면 $\{a_n + b_n\}$ 도 발산한다.
ㄹ. $\{a_n\}$ 이 양의 무한대로 발산하고 $\{a_n - b_n\}$ 이 수렴하면 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 은 수렴한다.

① ㄱ, ㄷ　② ㄱ, ㄹ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

[난이도 : ★★★] [2005년 3월 학력평가]

264 [공통]어느 강 상류와 하류에 각각 위치한 1호 댐과 2호 댐이 있다. 강 상류의 1호 댐으로부터 2호 댐으로 매일 100만톤의 물이 유입되고, 정오에 2호 댐의 저수량을 측정한다. 정오부터는 측정된 저수량의 2%를 농업용수와 생활용수 등을 위하여 강 하류로 방류한다고 한다. 매일 이와 같은 과정이 한없이 반복된다고 할 때, 정오에 측정되는 2호 댐의 저수량은 어떤 값에 한없이 가까워지는가?(단, 방류는 그날 중으로 이루어지고 자연 증발 및 기타 유실량은 무시한다.)[4점]



① 4400만톤　② 4600만톤　③ 4800만톤
④ 5000만톤　⑤ 5200만톤

[난이도 : ★☆☆] [2004년 3월 학력평가]

265 [공통]수열 $\{a_n\}$ 이 $\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{9}$ 을 만족할 때,

$\lim_{n\to\infty} \frac{6n+1}{n^2 a_n}$ 의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★☆☆] [2004년 9월 학력평가]

266 [공통]등비수열 $\{(x-2)^n\}$ 이 수렴하는 x 의 값의 범위는?[2점]

① $1 < x \le 3$　② $1 < x < 3$　③ $1 \le x < 3$
④ $1 < x \le 2$　⑤ $1 < x < 2$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

267 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n} - n\right)$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{9}{2}$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 0월 학력평가]

268 극한 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2-2005} - n}{n - \sqrt{n^2-2004}}$ 의 값은?[3점]

① $-\frac{2005}{2004}$　② $-\frac{2004}{2005}$　③ $-\frac{1002}{2005}$
④ $\frac{2005}{2004}$　⑤ $\frac{2004}{2005}$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 5월 학력평가]

269 등비수열 $\{(2x+1)^{n-1}\}$이 수렴하기 위한 실수 x의 값의 범위는?[3점]

① $-2<x<-1$ ② $-1<x\le 0$ ③ $0<x\le 1$
④ $1<x\le 2$ ⑤ $2<x\le 3$

[난이도 : ★☆☆] [2004년 4월 학력평가]

270 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=-2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-b_n}{a_nb_n+1}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

271 양의 정수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+3n+1}$의 소수부분을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} 100a_n$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

272 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 중 옳은 것은?[3점]

① $\lim_{n\to\infty} a_n^2=9$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=3$이다.
② $a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$이다.
③ $\lim_{n\to\infty} |a_n|$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.
④ $\lim_{n\to\infty} (3n+1)a_n=6$이면 $\lim_{n\to\infty} na_n=2$이다.
⑤ $\lim_{n\to\infty} a_n=1$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

273 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4n^2-1}\ (n\ge 1)$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 5월 학력평가]

274 다음 무한수열 중 수렴하는 것은?[3점]

① $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ ② $\{(-2)^n\}$ ③ $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$
④ $\{100n-n^2\}$ ⑤ $\{1+(-1)^n\}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 11월 학력평가]

275 $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^2$의 값은?[3점]

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2004년 4월 학력평가]

276 $a_1=1,\ a_2=9,\ 3a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?[4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 학력평가]

277 [공통] $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$의 값은?[3점]

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

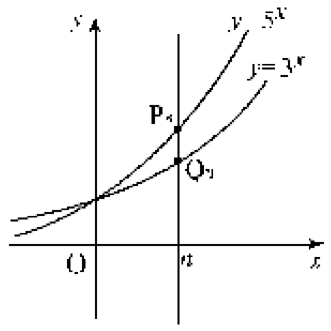
[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

278 $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^3}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2004년 10월 학력평가]

279 자연수 n에 대하여 두 지수함수 $y=5^x$, $y=3^x$의 그래프와 직선 $x=n$과의 교점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 이때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}}{\overline{P_nQ_n}}$의 값은?[3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

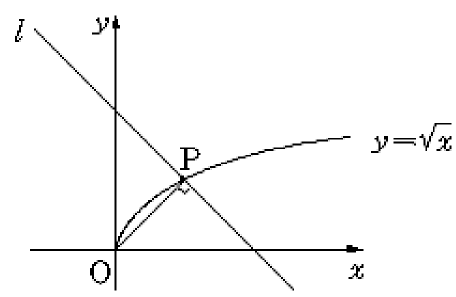
[난이도 : ★★★] [2004년 9월 학력평가]

280 [공통]어떤 공장의 기름 탱크에 $1000l$의 기름이 들어있다. 매일 기계를 가동하여 작업하는 동안 기름 탱크에 들어있는 기름의 양의 $\frac{1}{2}$을 사용하고, 작업이 끝나면 $100l$의 기름을 보충한 후 기름 탱크에 들어있는 기름의 양을 기록한다고 한다. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 기록되는 기름의 양의 극한값은?(단, 단위는 l이다.)[4점]

① 150 ② 180 ③ 200
④ 220 ⑤ 250

[난이도 : ★★★] [2004년 4월 학력평가]

281 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $P(t,\ \sqrt{t})$를 지나고 선분 OP에 수직인 직선 l의 x절편과 y절편을 각각 $f(t)$, $g(t)$라고 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)-f(t)}{g(t)+f(t)}$의 값을 구하시오.(단, O는 원점, $t\neq 0$)[4점]



[난이도 : ★★★] [2004년 4월 학력평가]

282 [공통]다음은 무한수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \cdots, \frac{n}{2^n}, \cdots$ 이 수렴함을 증명하는 과정이다.

> 먼저 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여,
> $2^n > n^2 \cdots$ ① 이 성립함을 증명하자.
> (i) $n=5$일 때, (좌변) $=2^5=32$, (우변) $=5^2=25$이므로 ①이 성립한다.
> (ii) $n=k(k \geq 5)$일 때, $2^k > k^2$이 성립한다고 가정하면
> $2^{k+1}-(k+1)^2 = 2 \cdot 2^k - (k+1)^2$
> $> 2 \cdot$ [(가)] $-(k^2+2k+1)$
> $k^2-2k-1>0$
> $\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2$
> 그러므로 ①은 $n=k+1$일 때도 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여
> $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $2^n > n^2$이 성립한다.
> 위에서 $2^n > n^2$이므로 $0 < \frac{n}{2^n} <$ [(나)] 이다.
> $\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} =$ [(다)] 이다.
> 따라서 무한수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \cdots, \frac{n}{2^n}, \cdots$ 은 수렴한다.

위의 빈칸(가), (나), (다)에 들어가기에 알맞은 것은?[4점]

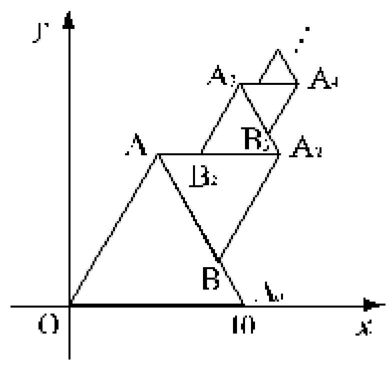
① k, $\frac{1}{n}$, 0　　② k, $\frac{1}{n^2}$, 1

③ k^2, $\frac{1}{n}$, 0　　④ k^2, $\frac{1}{n}$, 1

⑤ k^2, $\frac{1}{n^2}$, 0

[난이도 : ★★★] [2004년 3월 학력평가]

283 아래 그림과 같이 원점 O와 점 $A_0(10, 0)$에 대하여 제1사분면 위에 $\overline{OA_0}$를 한 변으로 하는 정삼각형 OA_0A_1을 만들고, $\overline{A_0A_1}$을 $1:2$로 내분하는 점을 B_1이라 한다. 또 $\triangle OA_0A_1$ 밖에 $\overline{A_1B_1}$을 한 변으로 하는 정삼각형 $A_1B_1A_2$를 만들고 $\overline{A_1B_1}$를 $1:2$로 내분하는 점을 B_2라 한다. 이와 같은 과정을 한없이 반복하면 점 A_n은 점 (a, b)에 한없이 가까워진다. 이때 a의 값을 구하시오.[4점]



정답 및 해설

1.수열의 극한

중단원 기출문제

1) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3}{5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5^{n+1}}\right)=\frac{1}{5}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5^{n+1}}=\frac{1}{5}$$

2) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[구하는 값] $=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times 9^n-13}{9^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{3-13\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

$=3$

3) 답 : ④

[해설]

[해설] $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6}{n^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{6}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{4+}{1+}=4$

4) 답 : 33

[해설]

$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}$ 에서

공비 $\frac{6}{k}$ 를 다음의 각 경우로 나누어 생각하면

(i) $\frac{6}{k}<1$ 일 때,

즉 $k>6$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=0$ 이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

(ii) $\frac{6}{k}=1$ 일 때,

즉 $k=6$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=1$ 이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}}{1^n+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iii) $\frac{6}{k}>1$ 일 때,

즉 $k<6$ 일 때 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^n=\infty$ 이므로

$$a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{k}\right)^{n+1}}{\left(\frac{6}{k}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{k}}{1+\left(\frac{k}{6}\right)^n}=\frac{\frac{6}{k}}{1+0}=\frac{6}{k}$$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}$

$=\frac{6}{1}+2\cdot\frac{6}{2}+3\cdot\frac{6}{3}+4\cdot\frac{6}{4}+5\cdot\frac{6}{5}+6\cdot\frac{1}{2}+7\cdot 0+8\cdot 0$

$+9\cdot 0+10\cdot 0=6+6+6+6+6+3=33$

5) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n+1}+5}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3+\frac{5}{3^n}}{1}=6$$

6) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+1}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n^2}}=\frac{5}{3}$$

7) 답 : ④

[해설]

(주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{5^n}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{5+0}{1+0}=5$

8) 답 : ③

[해설]

기울기 -1, 지나는 점 $P(t,\ t+1)$ 인 직선 PQ의 방정식은

$y-(t+1)=-1(x-t),\ y=-x+2t+1$

$\therefore\ Q(0,\ 2t+1)$

$\overline{AQ}^2=(-1)^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

$\overline{AP}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$ 이므로

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=\frac{4}{2}=2$$

9) 답 : ①

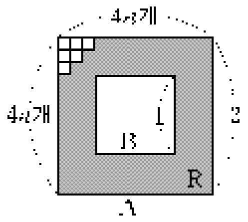
[해설]

(주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$

10) 답 : 50

[해설]

i)한 변의 길이가 $\frac{1}{2n}$ 인 정사각형을 그리는 경우



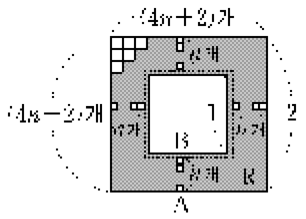
$\frac{1}{2n}\times 4n=2$ 이고 $\frac{1}{2n}\times 2n=1$ 이므로

A 에 채울 수 있는 개수는 $(4n)^2=16n^2$

B에 채울 수 있는 개수는 $(2n)^2=4n^2$

$\therefore$ R에 채울 수 있는 개수는 $16n^2-4n^2=12n^2$

ⅱ)한 변의 길이가 $\frac{1}{2n+1}$ 인 정사각형을 그리는 경우



$\frac{1}{2n+1}\times(4n+2)=2$ 이고 $\frac{1}{2n+1}\times\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ 이므로 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 경우는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2n+1}$ 인 정사각형을 n개 채울 수 있다.

A 에 채울 수 있는 개수는 $(4n+2)^2=16n^2+16n+4$

점선으로 이루어진 부분에 채울 수 있는 개수는

$(2n+2)^2=4n^2+8n+4$

$\therefore$ R에 채울 수 있는 개수는

$16n^2+16n+4-4n^2-8n-4=12n^2+8n$

ⅰ), ⅱ)에서 $a_{2n}=12n^2$

$a_{2n-1}=12(n-1)^2+8(n-1)=12n^2-16n+4$

$a_{2n+1}=12n^2+8n$

[중간 계산]$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n^2+8n-12n^2}{12n^2-(12n^2-16n+4)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{16n-4}=\frac{1}{2}$

따라서, $100c=100\times\frac{1}{2}=50$ 이다.

11) 답 : 21

[해설]

$A_n(x_n,\,0)$ 이므로

$P_n\left(x_n,\,\frac{1}{x_n}\right)$, $Q_n\left(\frac{1}{x_n},\,x_n\right)$, $R_n\left(\frac{1}{x_n},\,0\right)$, $A_n\left(\frac{1}{x_{n+1}}+1,\,0\right)$

$\therefore$ $x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+1$

$x_1=2$

$x_2=\frac{1}{x_1}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$x_3=\frac{1}{x_2}+1=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

$x_4=\frac{1}{x_3}+1=\frac{3}{5}+1=\frac{8}{5}$

$x_5=\frac{1}{x_4}+1=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}$

$\therefore$ $p+q=8+13=21$

12) 답 : ②

[해설]

[구하는값] $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{2n-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}{2-\frac{1}{n}}=2$

13) 답 : ③

[해설]

[구하는 값] $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}$

$=\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{1}}$

$=\frac{1}{3}$

14) 답 : 16

[해설]

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=2$ 에서 급수의 합이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=0$

$\therefore$ [구하는 값] $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+4-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{4}{\frac{1}{4}}=16$

15) 답 : ②

[해설]

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ 이므로

준식 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+0}{2+0}=\frac{3}{2}$

16) 답 : 40

[해설]

$-1<r=\frac{2x-1}{4}\le 1$ 이므로

$-4<2x-1\le 4$ 이며 이항하여 정리하면

$-3<2x\le 5$

$-\frac{3}{2}<x\le\frac{5}{2}$

$x=-1,\,0,\,1,\,2$

$\therefore\ k=4$

$\therefore\ 10k=40$

17) 답 : 15

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot\frac{3^{n+1}}{3^n}-\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$
$$=\frac{5\cdot3-0}{1+0}=15$$

18) 답 : ②

[해설]

$b_n=n,\ c_n=n+1$이라 하면

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{n(n+1)}{2}\ ,$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n^2+3n+1}{2}$$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}c_k}=2$$

그런데 $\sum_{k=1}^{n}b_k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}c_k$이므로

$$\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}b_k}>\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}a_k}>\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}c_k}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}a_k}=2$$

19) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+4}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+4-n^2}{\sqrt{n^2+6n+4}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{4}{n^2}}+1}=\frac{6}{2}=3$$

20) 답 : ①

[해설]

$S_n=2n+\frac{1}{2^n}$ 에서

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(2n+\frac{1}{2^n}\right)-\left\{2(n-1)+\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$
$$=2+\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2^{n-1}}$$
$$=2-\frac{1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right)=2$$

21) 답 : ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $-1<r<1$이다.

이때, 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비는 r^2이므로 $0\le r^2<1$

따라서, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.(참)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 $|r|\ge1$이다.

이때, 수열 $\{a_{2n}\}$의 공비 r^2은 $r^2\ge1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.(참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\neq0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$은 발산한다.(거짓)

22) 답 : ④

[해설]

두 점 $P(n,\ 3n^2)$, $Q(n+1,\ 3(n+1)^2)$의 사이의 거리 a_n은

$$a_n=\sqrt{(n+1-n)^2+\{3(n+1)^2-3n^2\}^2}$$
$$=\sqrt{(6n+3)^2+1}$$
$$=\sqrt{36n^2+36n+10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{36n^2+36n+10}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{36+\frac{36}{n}+\frac{10}{n^2}}=6$$

23) 답 : ④

[해설]

Ⅰ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2}=\infty$이므로

발산한다.

Ⅱ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}=0$$

이므로

수렴한다.

Ⅲ. $a_1+a_2+\cdots+a_n=\begin{cases}0, & (n\text{이 짝수})\\-1, & (n\text{이 홀수})\end{cases}$

ⅰ) n이 짝수인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{n}=0$

ⅱ) n이 홀수인 경우 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$

ⅰ), ⅱ)에 의하여 0으로 수렴한다.

따라서, 극한값이 존재하는 것은 Ⅱ, Ⅲ이다.

24) 답 : ③

[해설]

$x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n+1}}{2}$을 정리하면 $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n$

$x_{n+2}-\alpha x_n=\beta(x_{n+1}-\alpha x_n)$에서

$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$

[중간 계산] $=x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n}80\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$=0+80\frac{\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\frac{160}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{160}{3}\fallingdotseq 53.33$

25) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0+0}{2+0}=\frac{3}{2}$$

26) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7n^2-n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{7-0}{2+0}$$

$$=\frac{7}{2}$$

27) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2a+\frac{2}{2^n}+\frac{a}{3^n}+\frac{1}{6^n}\right)=2a=10$$

따라서 $a=5$

[다른 풀이]

(주어진 식) $=(2+0)(a+0)=2a=10,\ a=5$

28) 답 : ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6\times2^n+1}{2^n}=6$$

29) 답 : ①

[해설]

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}=\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^n$$

$$=6+0$$

$$=6$$

30) 답 : ①

[해설]

[해설]

$x\to1$일 때 $4x-a=0$

$\therefore\ 4-a=0\ \therefore\ a=4$

$\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{x-1}=4=b$

$\therefore\ b=4$

$\therefore\ a+b=8$

31) 답 : 2

[해설]

주어진 이차방정식의 양의 실근 a_n을 구하면

$a_n=-n+\sqrt{n^2+4n}$ 이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-n+\sqrt{n^2+4n})=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+\sqrt{n^2+4n}}=2$$

32) 답 : ②

[해설]

[해설]

$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\frac{a_1\cdot3^n}{2}-\frac{a_1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1\cdot3^n}{2\cdot3^n}-\frac{a_1}{2\cdot3^n}\right)$$

$$=\frac{a_1}{2}-0=5$$

$\therefore\ a_1=10$

33) 답 : 110

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right)=\frac{1}{5}$$

$$\to\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\times\frac{\sqrt{an^2+4n}+bn}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right)=\frac{1}{5}$$

$$\to\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right)=\frac{1}{5}$$

위 식의 극한값이 존재하므로 $a-b^2=0$, $\frac{4}{\sqrt{a}+b}=\frac{1}{5}$

따라서 $a=100$, $b=10$ $\therefore\ a+b=110$

34) 답 : ⑤

[해설]

(준식) $= \lim_{n\to\infty}\dfrac{5+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{5}{1}=5$

35) 답 : 3

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

36) 답 : ③

[해설]

$a_n=3\times3^{n-1}=3^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-7}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{7}{3^n}}{1}=\frac{3-0}{1}=3$$

37) 답 : 4

[해설]

자연수 n 대하여 점 $(3n, 4n)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원 O_n의 방정식은 $(x-3n)^2+(y-4n)^2=(3n)^2$이다.

점 $(3n, 4n)$과 점 $(0, -1)$사이의 거리는

$\sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}=\sqrt{25n^2+8n+1}$

이므로

$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$

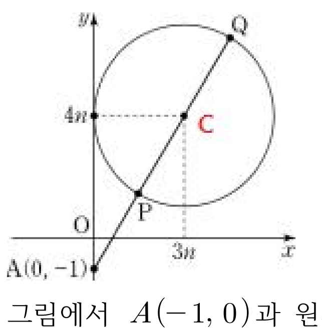
$b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b}n=\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

$$=\frac{\sqrt{25+\dfrac{8}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\dfrac{8}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-3}=5+\frac{3}{5-3}=4$$

[MIM EDU 다른 풀이]

문제의 내용대로 그려보면



그림에서 $A(-1, 0)$과 원의 중심을 지나는 직선이

원과 만나는 점을 P, Q라 하면 $\begin{cases}a_n=\overline{AQ}=\overline{CA}+r\\ b_n=\overline{AP}=\overline{CA}-r\end{cases}$이다.

$a_n=\sqrt{25n^2+8n+1}+3n$

$b_n=\sqrt{25n^2+8n+1}-3n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b}n=\frac{\sqrt{25n^2+8n+1}+3n}{\sqrt{25n^2+8n+1}-3n}$$

$$=\frac{\sqrt{25+\dfrac{8}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+3}{\sqrt{25+\dfrac{8}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-3}=5+\frac{3}{5-3}=4$$

38) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{35+\dfrac{3}{7^n}}{1}=35$$

39) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\times7^{n+1}+3}{7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{35+\dfrac{3}{7^n}}{1}=35$$

40) 답 : 12

[해설]

분자가 일차식이어야 하므로 $a=0$

극한에서 일차항 계수의 비가 $\dfrac{b}{3}=4$이므로 $b=12$

$\therefore\ a+b=12$

41) 답 : ④

[해설]

먼저, 모든 a_n은 양수임을 알 수 있다.

따라서

$a_{n+1}=f(f(a_n))$

$=f\left(-\dfrac{1}{2}a_n\right)$

$=-\dfrac{1}{2}a_n+2$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라고 하면, $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$이므로 $\alpha=-\dfrac{1}{2}\alpha+2$이다.

곧, $\alpha=\dfrac{4}{3}$이다.

42) 답 : 15

[해설]

$3n^2+2n<a_n<3n^2+3n$의 양변에 $\dfrac{5}{n^2+2n}$를 곱하면

$\dfrac{5(3n^2+2n)}{n^2+2n}<\dfrac{5a_n}{n^2+2n}<\dfrac{5(3n^2+3n)}{n^2+2n}$이다.

양변에 n을 한없이 크게 하는 극한을 취하면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5(3n^2+2n)}{n^2+2n}=15$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5(3n^2+3n)}{n^2+2n}=15$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{5a_n}{n^2+2n}=15$이다.

43) 답 : ③

[해설]

해설

식의 분모, 분자를 n으로 나누면,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n}{n}}{\frac{2n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

44) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{2n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$$

45) 답 : 35

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}(10n+1)\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}$$

$$=\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{7}{2}\times 10=35$$

46) 답 : 19

[해설]

[출제 의도]계차수열을 이용하여 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$a_n=12\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

점 P_n을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은

$y-b_n^2=a_n(x+b_n)$ 즉, $y=a_nx+a_nb_n+b_n^2$

이 직선과 곡선 $y=x^2$의 교점의 x좌표는 방정식

$a_nx+a_nb_n+b_n^2=x^2$ 즉,

$(x+b_n)(x-a_n-b_n)=0$의 실근이다.

$\therefore\ b_{n+1}=a_n+b_n$ ($\because\ b_{n+1}\neq -b_n$)

이때, $b_{n+1}-b_n=a_n$이므로 수열 $\{b_n\}$의 계차수열이 $\{a_n\}$이다.

$$\therefore\ b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}12\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=1+\frac{12}{1-\frac{1}{3}}=1+18=19$$

47) 답 : ③

[해설]

$P_n(n,\ 2^n)$, $Q_n(n,3^n)$, $P_{n-1}(n-1,\ 2^{n-1})$

$$S_n=P_nQ_nP_{n-1}=\frac{1}{2}(3^n-2^n)$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(3^k-2^k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\frac{1}{2}\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$

$$=\frac{3^{n+1}}{4}-2^n+\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{4}-2^n+\frac{1}{4}}{3^n}$$

$$=\frac{3}{4}$$

48) 답 : 30

[해설]

해설

$2x+y=4^n\cdots$①

$x-2y=2^n\cdots$②

① -② ×2에서

$$y=b_n=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

① ×2-② 에서

$$x=a_n=\frac{2\cdot 4^n+2^n}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n-2^{n+1}}{5}}{\frac{2\cdot 4^n+2^n}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

49) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 4^n-3^n}{4^n+3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{3-0}{1+0+0}=3$$

50) 답 : ②

[해설]

[구하는 값] $=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+11}-n\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+4n+11}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n+11}+n\right)}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{\sqrt{n^2+4n+11}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{11}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{11}{n^2}}+1}=2$$

51) 답 : ④

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}}{2\cdot 7^n+3}$ 에서 분자, 분모를 7^n 으로 나누면

준식 $=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{2+\frac{3}{7^n}}=\frac{7}{2}$

52) 답 : ③

[해설]

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=20$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=10$

$c_n=a_n+b_n \cdots$ ①

∴ $\lim_{n\to\infty}c_n=20$

$d_n=a_n-b_n \cdots$ ②

∴ $\lim_{n\to\infty}d_n=10$

① -②를 하면 $c_n-d_n=2b_n$

∴ $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(c_n-d_n)=\frac{1}{2}(20-10)=5$

53) 답 : ③

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n a_n}{3^n+1}=\alpha(\alpha\neq 0)$ $\frac{5^n a_n}{3^n+1}=b_n$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha(\alpha\neq 0)$ 이다.

$a_n=\frac{3^{n+1}}{5^n}b_n$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n+1}{5^n}b_n}{\frac{3^{n+1}+1}{5^{n+1}}b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(3^n+1)b_n}{5^n(3^{n+1}+1)b_{n+1}}=\frac{5}{3}$$

54) 답 : ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-7n}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{7}{n}}{1+\frac{5}{n^2}}=2$$

55) 답 : ②

[해설]

준식의 분모, 분자를 5^n 으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-2^n}{5^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{5+3\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{5}$$

56) 답 : ①

[해설]

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2x}{n}k+\frac{1}{n^2}k^2\right)$$

$$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$=n\left(x-\frac{n+1}{2n}\right)^2-\frac{(n+1)^2}{4n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$ 이므로

최솟값 $a_n=-\frac{(n+1)^2}{4n}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{(n+1)^2}{4n^2}+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right\}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

57) 답 : ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{3^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=6$$

58) 답 : ③

[해설]

$\frac{2a_n-3}{a_n+1}=b_n$ 으로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{4}$, $a_n=\frac{b_n+3}{2-b_n}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+3}{2-b_n}=\frac{\frac{3}{4}+3}{2-\frac{3}{4}}=3$$

59) 답 : 14

[해설]

(주어진 식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{28n+13}{\sqrt{n^2+15n+13}+\sqrt{n^2-13n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{28+\frac{13}{n}}{\sqrt{1+\frac{15}{n}+\frac{13}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{13}{n}}}$$

$$=\frac{28}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=14$$

[정답]14

60) 답 : ③

[해설]

수열의 극한[정답]③

원점을 지나는 직선 $y=a_nx$의 기울기를 나타내는 a_n

($n=1, 2, 3, \cdots$)을 차례로 구해 보면

$a_1=1$

$$a_2=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$a_3=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$a_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}2^n a_n=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$=1$$

61) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

62) 답 : ②

[해설]

수열의 극한[정답]②

첫째항이 1, 공차가 6이므로

$$a_n=1+(n-1)\times6$$

$$=1+6n-6$$

$$=6n-5$$

$$b_n=\frac{(6n-5)+\{6(n+1)-5\}}{3}$$

$$=\frac{6n-5+6n+6-5}{3}$$

$$=\frac{12n-4}{3}$$

구하는 값 $=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12n-4}{3}}{6n-5}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-4}{18n-15}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{4}{n}}{18-\frac{15}{n}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

63) 답 : 6

[해설]

$$l_0=2\times1$$

$$l_1=2\times1+4\times\frac{1}{3}$$

$$l_2=2\times1+2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)+2^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$l_3=2\times1+2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)+2^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$l_n=2\times1+2^2\times\left(\frac{1}{3}\right)+2^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+2^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+2^{n+1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=2\times1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=2\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$=2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=6\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}l_n=6\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}=6$$

64) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2n^2-n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

65) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한

첫째항이 1, 공차가 6이므로

$$a_n=1+(n-1)\times6$$

$$=1+6n-6$$

$$=6n-5$$

$$b_n=\frac{(6n-5)+\{6(n+1)-5\}}{3}$$

$$=\frac{6n-5+6n+6-5}{3}$$

$$=12n-\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}12n-\frac{4}{3}/6n-5$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ 12n-\frac{4}{18n-15}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{4}{n}}{18-\frac{15}{n}}$$

$$=\frac{2}{3}$$

66) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한

기울기가 -1이고, 점 $(a_n, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-a_n)\cdots$①

원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^n}$이 직선 ①과 접하므로

원의 중심 $(0, 0)$에서 직선 ①과의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다.

$$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{1}{2^n}}$$

$$\therefore a_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2^n}}=\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2^2}}+\sqrt{\frac{1}{2^3}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=2+\sqrt{2}$$

67) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한

원점을 지나는 직선 $y=a_nx$의 기울기를 나타내는 a_n $(n=1, 2, 3, \dots)$을 차례로 구해 보면

$a_1=1$

$$a_2=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$a_3=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\therefore a_n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}2^na_n=\lim_{n\to\infty}2^n\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$=1$$

68) 답 : ⑤

[해설]

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x+1)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 주기가 1인 주기함수이다.

ㄱ. $f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$

$\because \frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}<1$

ㄷ. ⅰ) $n=2k-1$(k는 자연수)일 때,

$f\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{2k-1}{2}\right)$

$=f\left(k-\frac{1}{4}\right)$

$=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

ⅱ) $n=2k$(k는 자연수)일 때,

$f\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{2k}{2}\right)$

$=f\left(k+\frac{1}{4}\right)$

$=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

69) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]함수의 극한과 연속성

직선 PQ의 방정식을 구하면

$$y=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)+a^2$$

$$=(b+a)x-ab$$

이때, 직선과 곡선 사이의 넓이를 구하면

$$\int_a^b\{(b+a)x-ab-x^2\}dx$$

$$=\int_a^b\{-x^2+(a+b)x-ab\}dx$$

$$=\int_a^b-(x-a)(x-b)dx$$

$$=--\frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$=36$$

$\therefore (b-a)^3=6^3$

$\therefore b-a=6\ ...$①

이때, $\overline{PQ}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}$

$=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}$

$=6\sqrt{1+(2a+6)^2}$ ($\because$ ①)

$=6\sqrt{4a^2+24a+37}$

이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PQ}}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{6\sqrt{4a^2+24a+37}}{a}$$
$=6\times2$
$=12$

70) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

71) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=2+2\times1=4$$

72) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a}n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2a_n+1}{a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2+\frac{1}{a_n}}{1+\frac{3}{a_n}}=\frac{-2+}{1+3\times0}=-2$$

73) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=3 \text{이므로 } a=3$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+2}+1}{a^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+1}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2+\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3^n}}=9$$

74) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 활용하여 문제 해결하기

점 $(a_n, \sqrt{n})$이 원 $x^2+y^2=4n^2$ 위의 점이므로

$(a_n)^2+(\sqrt{n})^2=4n^2$이다.

$a_n>0$이므로 $a_n=\sqrt{4n^2-n}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}(2n-a_n)=\lim_{n\to\infty}(2n-\sqrt{4n^2-n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{4n^2-n}}=\frac{1}{4}$$

75) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열이 수렴할 조건과 극한값을 추론한다.

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 $1, 2, 1, 2, \cdots$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (참)

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은 $p+q, -p+q, p+q, -p+q, \cdots$ 이므로 $p=0$인 경우 수열 $\{b_n\}$은 $q, q, q, \cdots$ 가 되어 수렴한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은 $1+p+q, 2-p+q, 1+p+q, 2-p+q, \cdots$ 이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하기 위해서는 $1+p+q=2-p+q$

$p=\frac{1}{2}$ 수열 $\{a_nb_n\}$은 $1\times(p+q), 2\times(-p+q), 1\times(p+q), 2\times(-p+q), \cdots$ 이므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1\times(p+q)=2\times(-p+q)$ $q=3p$ 그러므로 $q=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 그러면

$1+p+q=2-p+q=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$ 또한,

$1\times(p+q)=2\times(-p+q)=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$ 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n=3^2-2\times2=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[다른 풀이]

ㄷ. $a_n+b_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}+\{p\times(-1)^{n+1}+q\}$

$=\left(\frac{1}{2}-p\right)(-1)^n+\frac{3}{2}+q$이므로

수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면 $\frac{1}{2}-p=0$, 즉 $p=\frac{1}{2}$이어야 한다.

$p=\frac{1}{2}$일 때,

$a_nb_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q\right\}$

$=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\times(-1)^n+q\right\}$

$=-\frac{1}{4}\times(-1)^{2n}+\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n+\frac{3}{2}q$

$=\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면 $\frac{q}{2}-\frac{3}{4}=0$, 즉 $q=\frac{3}{2}$이어야 한다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{2}+q=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$
$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=2$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n=3^2-2\times2=5$

76) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 계산한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}$ 의 분모와 분자를 n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{4n^2+4n+3}}{n}}{\frac{n}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^2+4n+3}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\sqrt{4+0+0}=2$$

77) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한값을 구하는 방법을 이해하여 그 값을 구한다.

직선 $y=g(x)$ 는 원점과 점 $(3,3)$을 지나므로 직선의 방정식은 $y=x$이다.

문제에서 $f(2)=4$, $g(2)=2$이므로

$$h(2)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(2)\}^{n+1}+5\{g(2)\}^n}{\{f(2)\}^n+\{g(2)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+5\times2^n}{4^n+2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+5\times\left(\frac{2}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}=4$$

마찬가지로 문제에서 $f(3)=3$, $g(3)=3$이므로

$$h(3)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(3)\}^{n+1}+5\{g(3)\}^n}{\{f(3)\}^n+\{g(3)\}^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5\times3^n}{3^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\times3^n}{2\times3^n}=4$$

따라서 $h(2)+h(3)=8$

78) 답 : 20

[해설]

[출제 의도] 꼭짓점의 위치가 변함에 따라 무게중심이 수렴할 좌표를 추론한다.

두 실수 α,β에 대해 $P_n\left(\alpha,\frac{\alpha}{n}+1\right)$,

$Q_n\left(\beta,\frac{\beta}{n}+1\right)$이라 하면 α, β는

방정식 $x^2-\left(4+\frac{1}{n}\right)x+\frac{4}{n}=\frac{1}{n}x+1$의 두 근이다.

$x^2-\left(4+\frac{2}{n}\right)x+\frac{4}{n}-1=0$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=4+\frac{2}{n}$이다.

한편 삼각형 OP_nQ_n의 무게중심의 y좌표

$$a_n=\frac{1}{3}\left(0+\frac{\alpha}{n}+1+\frac{\beta}{n}+1\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{n}+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4+\frac{2}{n}}{n}+2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

따라서

$$30\lim_{n\to\infty}a_n=30\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$=10(0+0+2)=20$이다.

79) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=0$$

80) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{8-0}{\sqrt{1+0}}=8$$

81) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times6^{n+1}+3}{6^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2\times6+\frac{3}{6^n}\right)=12$$

82) 답 : 10

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(x+6)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x+6)=10$$

83) 답 : 3

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5^n+2^n}{5^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}=3$$

84) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한 이해하기

$\lim_{n\to\infty}a_n=5$, $\lim_{n\to\infty}b_n=4$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 20$

85) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 무한등비수열의 성질을 이해하고 극한값을 구한다.

$a>b>0$ 이므로 $0<\frac{b}{a}<1$ 에서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a^n}{a^n+b^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n} = \frac{2}{1+0} = 2$$

86) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = S_n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n+b_n &= S_n - S_{n-1}\ (n\geq 2) \\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n^2(a_n+b_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(n^2a_n+n^2b_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{n^2}{n(n+1)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

또, 조건에 의해 $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 2$

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n^2a_n+n^2b_n-n^2b_n\right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n\to\infty}\left(n^2a_n+n^2b_n\right)-\lim_{n\to\infty} n^2b_n \\ &= -3 \end{aligned}$$

87) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산한다.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n-3)}{4n^2+5} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n-3}{4n^2+5} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

88) 답 : 90

[해설]

[출제 의도] 분수방정식의 해를 구한다.

양변에 $x^2-1=(x-1)(x+1)$ 을 곱하면

$3x-7+2(x+1)=2(x^2-1)$

$2x^2-5x+3=0$

$(x-1)(2x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

$x=1$ 은 무연근이고 $x=\frac{3}{2}$ 은 실근이다.

$\therefore\ 60\alpha = 60\times\frac{3}{2} = 90$

89) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한 이해하기

$\log_3 3n^2 < \log_3 a_n < \log_3 3(n+1)^2$

$3n^2 < a_n < 3(n+1)^2$

$$\frac{3n^2}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} < \frac{3(n+1)^2}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{n^2} = 3$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 3$

90) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 극한의 성질 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+3}{2-a_n} = 2$ 에서 $\frac{4a_n+3}{2-a_n} = b_n$ 라고 치환하면

$\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ 이고 $a_n = \frac{2b_n-3}{b_n+4}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-3}{b_n+4} = \frac{2\times2-3}{2+4} = \frac{1}{6}$$

91) 답 : 4

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-n+2a\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+an-(n-2a)^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5an-4a^2}{\sqrt{n^2+an}+n-2a} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5a-\frac{4a^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+1-\frac{2a}{n}} \\ &= \frac{5a}{2} = 10 \end{aligned}$$

$\therefore\ a=4$

92) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}<a_n<2^n$ 에서

$$\frac{1\times(2^n-1)}{2-1}<a_n<2^n$$

$$2^n-1<a_n<2^n$$

$$1-\frac{1}{2^n}<\frac{a_n}{2^n}<1$$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$, $\lim_{n\to\infty}1=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=1$$

$3n-\frac{1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}b_k<3n+\frac{1}{n}$ 에서

$\lim_{n\to\infty}3n-\frac{1}{n+1}=3$, $\lim_{n\to\infty}3n+\frac{1}{n}=3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=3$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{\frac{1}{4}\times\frac{a_n}{2^n}+8\times b_n}$$

$$=\frac{1-0}{\frac{1}{4}\times1+8\times0}=4$$

93) 답 : 6

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$\frac{\sqrt{9n^2+n}-n}{a_n}$ 의 분모, 분자를 각각 n으로 나누면

$$\frac{\frac{\sqrt{9n^2+n}-n}{n}}{\frac{a_n}{n}}=\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}}-1}{\frac{a_n}{n}}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{3}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}-1\right)=2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+n}-n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n}}-1}{\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9+\frac{1}{n}}-1\right)}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}}$$

$$=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

94) 답 : 6

[해설]

[출제 의도] 등차수열의 성질과 합을 이용하여 극한값을 구한다.

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=1+(n-1)\times6=6n-5$ 이다.

$\therefore\ a_{2n}=12n-5$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(6k-5)$$

$$=6\sum_{k=1}^{n}k-5n$$

$$=6\times\frac{n(n+1)}{2}-5n$$

$$=3n^2-2n$$

$\therefore\ S_{2n}=3\times(2n)^2-2\times(2n)=12n^2-4n$

$a_{n+1}-a_n=6$ ($n\geq1$)이므로

$$T_{2n}=-a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^{2n}a_{2n}$$

$$=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{2n-1}+a_{2n})$$

$$=6+6+\cdots+6$$

$$=6n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}T_{2n}}{S_{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(12n-5)\times6n}{12n^2-4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{36n-15}{6n-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{36-\frac{15}{n}}{6-\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{36}{6}=6$$

95) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

조건 (가)에서 양변을 4^n으로 나누면

$$1<\frac{a_n}{4^n}<1+\frac{1}{4^n}$$

$\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=1\ \cdots\ ㉠$$

조건 (나)에서

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^n=\frac{2(2^n-1)}{2-1}$$

$$=2^{n+1}-2$$

$2^{n+1}-2<b_n<2^{n+1}$ 에서 양변을 2^n으로 나누면

$$2-\frac{2}{2^n}<\frac{b_n}{2^n}<2$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{2}{2^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2=2$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^n}=2 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+b_n}{2a_n+2^n b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4a_n+b_n}{4^n}}{\dfrac{2a_n+2^n b_n}{4^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{b_n}{2^n}\times\dfrac{1}{2^n}}{2\times\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{b^n}{2^n}}$$

$$=\frac{4}{2+2}=1$$

96) 답 : 25

[해설]

[출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 극한에 관한 문제를 해결한다.

점 Q_n은 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $Q_n\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)$이다.

$\overline{OP_n}=p_n$, $\overline{OQ_n}=q_n$, $\overline{P_nQ_n}=r_n$이라 하면

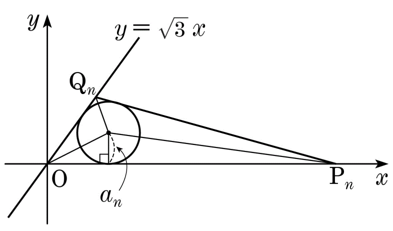
$p_n=n$

$$q_n=\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{2}{n}$$

$$r_n=\sqrt{\left(n-\frac{1}{n}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{n^4-2n^2+4}}{n}$$

삼각형 OP_nQ_n의 넓이를 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{2}\times n\times\frac{\sqrt{3}}{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



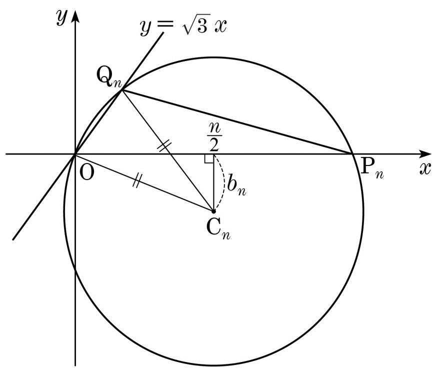
삼각형 OP_nQ_n의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리 a_n은 내접원의 반지름의 길이와 같다.

$S_n=\dfrac{1}{2}(p_n+q_n+r_n)\times a_n$에서

$$a_n=\frac{2S_n}{p_n+q_n+r_n}$$

$$=\frac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{n+\dfrac{2}{n}+\dfrac{\sqrt{n^4-2n^2+4}}{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}n}{n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}} \quad \cdots \text{㉠}$$



삼각형 OP_nQ_n의 외접원의 중심을 $C_n(x_n,\ y_n)$이라 하면

점 C_n은 선분 OP_n의 수직이등분선 위에 있으므로 $x_n=\dfrac{n}{2}$이다.

$\overline{OC_n}=\overline{Q_nC_n}$에서 $\overline{OC_n}^2=\overline{Q_nC_n}^2$이므로

$$\left(\frac{n}{2}\right)^2+y_n^2=\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y_n-\frac{\sqrt{3}}{n}\right)^2$$

$$\frac{n^2}{4}+y_n^2=\frac{n^2}{4}-1+\frac{1}{n^2}+y_n^2-\frac{2\sqrt{3}}{n}y_n+\frac{3}{n^2}$$

$$\therefore\ y_n=\frac{4-n^2}{2\sqrt{3}n}$$

$b_n=|y_n|$이므로 $n\geq 2$일 때

$$b_n=\frac{n^2-4}{2\sqrt{3}n} \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$L=\lim_{n\to\infty}a_nb_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}n}{n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}}\times\frac{n^2-4}{2\sqrt{3}n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{2\left(n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{4}{n^2}}{2\left(1+\dfrac{2}{n^2}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^4}}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ 100L=100\times\frac{1}{4}=25$$

97) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이해한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=3$$

98) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 계산하기

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an-1)(an+1)}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^2-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=a^2$$

$a^2=16$

$\therefore\ a=4$ ($\because$ a는 양수)

99) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{(2^n+1)(2^n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-1}{4^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}}=4$$

100) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 수렴하는 수열의 극한에 관한 성질을 알고, 이를 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{(2n+1)(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n}{4n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{4-\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{5}{4}\ \left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\right)$$

101) 답 : 10

[해설]

[출제 의도] 등비수열의 수렴조건을 이해한다.

등비수열 $\left\{\left(\frac{2x-3}{5}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

공비가 -1보다 크고 1보다 작거나 같아야 하므로

$$-1<\frac{2x-3}{5}\le 1,\ -5<2x-3\le 5,\ -2<2x\le 8$$

$\therefore\ -1<x\le 4$

따라서 구하는 정수 x는

$x=0,\,1,\,2,\,3,\,4$이고 그 합은 10이다.

[참고]

주어진 등비수열은 $-1<x<4$일 때 0으로 수렴하고, $x=4$일 때 1로 수렴한다.

102) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한 이해하기

$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고 일반항

$a_n=2^n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n+2}+a_8}{a_{3n-2}+a_2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{3n+2}+2^8}{2^{3n-2}+2^2}=2^4=16$$

103) 답 : 10

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n=\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}$이라 하면

$$\lim_{n\to\infty}b_n=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n+\sqrt{n})^2-n}{\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{\sqrt{n}}+2\lim_{n\to\infty}b_n=10$$

104) 답 : 18

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한 이해하기

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=3n-2$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(3n+1)}{n\frac{n+\{1)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(3n-2)(3n+1)}{n(n+1)}$$

$$=18$$

105) 답 : 50

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

$y=\frac{1}{n}x^2$과 $x^2+y^2=1$에서 $y^2+ny-1=0$이고,

$y>0$이므로 $y=\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}$이다.

삼각형 OAP_n의 넓이 $S_n=\dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{4}$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}nS_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(-n+\sqrt{n^2+4}\right)}{4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2+4}}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\alpha=\frac{1}{2}$

따라서 $100\alpha=50$

106) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] $\sum$의 성질과 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구한다.

$n<a_n<n+1$에서

$\sum\limits_{k=1}^{n}k<\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)$이므로

$$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+3)}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{\{2n\}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+3)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}$$

107) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

(가)에서 $\frac{3n^2+1}{n(n+1)} < a_n$ 이고

(나)에서 $a_n < 3-\frac{1}{2}b_n$ 이므로 $\frac{3n^2+1}{n(n+1)} < a_n < 3-\frac{b_n}{2}$ 이다.

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n(n+1)} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{b_n}{2}\right)$ 이고

(다)에서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이므로 $3 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 3$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

108) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S(\alpha)=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ 이므로

$$\lim_{\alpha\to1-}\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}} = \lim_{\alpha\to1-}\frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$$
$$= \lim_{\alpha\to1-}\alpha\sqrt{1+\alpha} = \sqrt{2}$$

109) 답 : 23

[해설]

[출제 의도]수렴하는 수열에 대한 극한의 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$c_n = 2a_n - 5b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{5}(2a_n - c_n)$

$\lim_{n\to\infty} c_n = 3$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3\cdot\frac{1}{5}(2a_n-c_n)}{a_n+\frac{1}{5}(2a_n-c_n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{16a_n-3c_n}{7a_n-c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\cdot\frac{c_n}{a_n}}{7-\frac{c_n}{a_n}}$$

$$\frac{16}{7}$$

$\therefore\ p+q=7+16=23$

[다른 풀이]

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n\left(2-5\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=3$ 에서

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(2-5\cdot\frac{b_n}{a_n}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{2}{5}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+3\cdot\frac{b_n}{a_n}}{1+\frac{b_n}{a_n}}$$

$$\frac{2+3\cdot\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{16}{7}$$

$\therefore\ p+q=7+16=23$

110) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 등비급수의 성질 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r\neq0)$라 하면

ㄱ. $a_{101}=a_1r^{100}<0\left(\because a_1<0,\ r^{100}>0\right)$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n=2^{n-3}$이면 $a_1<a_2<1$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이다.

(거짓)

ㄷ. $a_1 < a_1r < 0$이다.

$a_1<0$이고 $0<r<1$이므로 $\frac{1}{1-r}>1$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-r}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<a_1$이다. (참)

111) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 지수함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{AB}=4^n-2^n$

직선 $y=x$가 x축과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{CD}=\frac{4^n-2^n}{\sqrt{2}}$,

점과 직선사이의 거리 공식에 의해 $\overline{BD}=\frac{2^n-n}{\sqrt{2}}$, $\overline{AC}=\frac{4^n-n}{\sqrt{2}}$

$$S_n=\frac{1}{2}\frac{4^n-2^n}{\sqrt{2}}\left(\frac{2^n-n}{\sqrt{2}}+\frac{4^n-n}{\sqrt{2}}\right)$$

$S_n=\frac{(4^n-2^n)(4^n+2^n-2n)}{4}$ 이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=16$

112) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 이차 함수와 원의 접선을 이용하여 수열의 극한값을 구한다.

원 C_n의 중심이 $P_n(n,\ n^2)$이고 y축에 접하므로, 반지름의 길이는 n이다.

또 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은 $y=a_nx$

즉, $a_nx-y=0$이다.

원 C_n과 직선 $a_nx-y=0$이 접하므로

원의 중심 $P_n(n,\ n^2)$에서 직선 $a_nx-y=0$에 이르는 거리가 n이다.

$\therefore\ \frac{|na_n-n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n$

$$\frac{|a_n-n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$$

$$\therefore\ a_n=\frac{n^2-1}{2n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}$$

[다른 풀이]

원의 방정식은 $(x-n)^2+(y-n^2)^2=n^2$

$y=a_nx$를 대입하면

$$(x-n)^2+(a_nx-n^2)^2=n^2$$

$$x^2-2nx+n^2+a_n^2x^2-2n^2a_nx+n^4=n^2$$

$$(1+a_n^2)x^2-2(n+n^2a_n)x+n^4=0$$

직선과 원이 접하므로 판별식

$\frac{D}{4}=(n+n^2a_n)^2-n^4(1+a_n^2)=0$이다.

$$2n^3a_n=n^4-n^2$$

$$\therefore\ a_n=\frac{n^2-1}{2n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$$

113) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

모든 자연수 n 에 대하여 $\cos n\pi=(-1)^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n\cos n\pi}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}\cos n\pi}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

[다른 풀이]

모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\cos n\pi\le1$ 이므로

$$-\frac{n}{n^2+1}\le\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi\le\frac{n}{n^2+1}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi=0$$

또, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+\cos n\pi)}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cos n\pi$$

$$=1$$

114) 답 : 2

[해설]

[구하는 값] $=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{n^2+3n+2}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n+2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+2}+n\right)}$$

$$=2$$

115) 답 : ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^{2n-1}}{2^{2n+2}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{1}{2}}{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=-\frac{1}{8}$$

116) 답 : 10

[해설]

$$\sqrt{n^2}<\sqrt{n(n+1)}<\sqrt{(n+1)^2}$$

$(n+1)^2-n(n+1)=n+1\cdots$①

$n(n+1)-n^2=n\cdots$②

① 과 ②에 의해 $b_n=n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{|a_n-b_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{n(n+1)}-n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{n(n+1)}+n\right)}{n}=10$$

117) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한 이해하기

$$f(n)=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2+2n}=\frac{2n^2+3n+1}{6n+12}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2+12n}=\frac{1}{3}$

118) 답 : ④

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비가 r_1,

수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비가 r_2라 하면

$a_n=ar_1^{n-1}$, $b_n=br_2^{n-1}$이고 주어진 조건에 의하여

$a\neq0$, $b\neq0$, r_1, r_2는 1이 아닌 양수

ㄱ.(반례) $a_n=2^{n-1}$, $b_n=3^{n-1}$

$a_n+b_n=2^{n-1}+3^{n-1}$은 등비수열이 아니다.(거짓)

ㄴ. $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$ 이므로

$ar_1^n \cdot br_2^n = ar_1^{n-1} \cdot br_2^{n-1}$

$\therefore\ r_1 \cdot r_2 = 1$

수열 $\{a_n\}$이 발산하면 $r_1>1$이므로 $0<r_2<1$

$\therefore$ 수열 $\{b_n\}$은 수렴한다.(참)

ㄷ. 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 모두 수렴하므로

$0<r_1<1,\ 0<r_2<1$

수열 $\{a_nb_n\}$의 공비는 r_1r_2이고, $0<r_1r_2<1$이므로

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$도 수렴한다.(참)

119) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n-3}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4n-3}+n}{4n-3}=\frac{1}{2}$$

120) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

121) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=1$$

122) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}\right)}{2n}=1$$

123) 답 : ④

[해설]

$y=x^2$과 $y=-x+n$의 교점의 x좌표를 α_n, β_n (단, $\alpha_n<\beta_n$)라 하면

교점의 좌표는 $(\alpha_n,\ -\alpha_n+n),\ (\beta_n,\ -\beta_n+n)$이다. .... ①

또한 α_n, β_n는 $x^2+x-n=0$의 두 근이므로

$\alpha_n+\beta_n=-1,\ \alpha_n\beta_n=-n$이다. ... ②

①, ② 에 의하여

$l_n^2=2(\alpha_n-\beta_n)^2=2\left\{(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n\right\}=8n+2$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{n}=8$$

124) 답 : 2

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{4n^2+1}}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}{1-\frac{2}{n}}=2$$

125) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=2x^2-2nx+\frac{1}{2}n^2+6n+1=2\left(x-\frac{n}{2}\right)^2+6n+1$

$\therefore\ P_n\left(\frac{n}{2},\ 6n+1\right)$

따라서 $x_n=\frac{n}{2},\ y_n=6n+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\frac{n}{2}}=12$$

126) 답 : ②

[해설]

㈎ K ㈏ $a_{n-1}-K$ ㈐ $\frac{1}{2^{n-1}}$

127) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비수열의 극한값 이해하기

준식의 분모, 분자를 3^n으로 나누면

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-6}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}=\frac{0-6}{0+1}=-6$$

128) 답 : ④

[해설]

$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right)=a=2,\ \sum_{n=1}^{5}(2n+b)=30+5b=60$

$\therefore\ a+b=2+6=8$

129) 답 : ⑤

[해설]

$b_n=\frac{3n^2+2n-3a_n}{n^2a_n-na_n+3}$ 이라 하면,

$a_n=\frac{3n^2+2n-3b_n}{n^2b_n-nb_n+3}$

$\lim_{n\to\infty}b_n=6$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+4n}{na_n-3}=8$$

130) 답 : ④

[해설]

$3n-1<na_n<3n+2$의 양변을 n으로 나누면

$\frac{3n-1}{n}<a_n<\frac{3n+2}{n}$ 이다.

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n}=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n}=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$이다.

131) 답 : ①

[해설]

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=15$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^n}{3^n+5^{n+1}}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+5^n}{3^n+5^{n+1}}\times\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{5}\times15=3$$

132) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $-|b_n|\le b_n\le|b_n|$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}(-|b_n|)=\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이다.(참)

ㄴ. $(3n+1)a_n=c_n$라 하면, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=6$이고

$a_n=\dfrac{c_n}{3n+1}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nc_n}{3n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}c_n=\dfrac{1}{3}\times6=2$이다.(참)

ㄷ.(반례) $a_n=(-1)^n$, $b_n=2(-1)^n$에 대하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=2$(수렴)이지만 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각 발산한다.(거짓)

133) 답 : 36

[해설]

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2n+3}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{3n+1}=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}\times\frac{b_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}\times\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{3n+1}=2\times3=6$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_{\{n\}}}{n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{(2n+3)(3n+1)}\times\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(3n+1)}{n^2+4}$$

$=6\times6=36$

134) 답 : ④

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2^n+3^n}=0$(참)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$(거짓)

ㄷ. $\dfrac{2}{3^n+3^n}<a_n<\dfrac{2}{2^n+2^n}$(참)

135) 답 : 40

[해설]

$x^2+\sqrt{a_n}x+a_{n+1}-1=0$의 판별식 $D=a_n+4-4a_{n+1}$에서

$D=0$이므로 $a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+1$이다.

따라서, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{4}{3}$이므로 $30\alpha=40$이다.

136) 답 : ①

[해설]

$A_n=\left(1,\ \dfrac{6(n-1)}{n}\right)$, $A_{n+1}=\left(1,\ \dfrac{6n}{n+1}\right)$

$S_n=\dfrac{1}{2}\times1\times\left(\dfrac{6n}{n+1}-\dfrac{6(n-1)}{n}\right)=\dfrac{3}{n(n+1)}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}n^2S_n=3$

137) 답 : 6

[해설]

$\{a_n\}$: 4, 13, 26, 43, $\cdots$

$\{b_n\}$: 4, 10, 18, 28, $\cdots$이므로

$a_n=2n^2+3n-1$, $b_n=n^2+3n$이다.

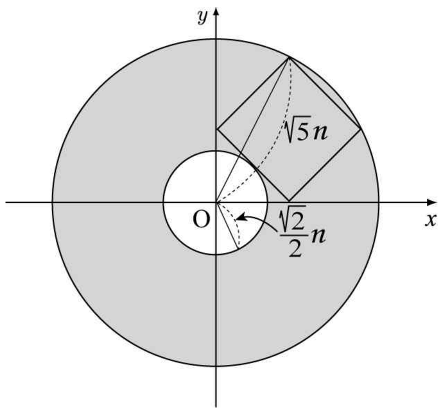
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}+b_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+12n-1}{2n^2+3n-1}=6$$

138) 답 : 15

[해설]

원점에서 점 $(n, 2n)$까지의 거리는 $\sqrt{5}n$이므로

사각형이 지나간 부분은 그림과 같다.



$a_n=5n^2\pi-\dfrac{1}{2}n^2\pi=\dfrac{9}{2}n^2\pi$

$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\dfrac{9}{2}\pi\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\,\frac{9\pi n(n+1)(2n+1)}{12}=15$$

139) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=0$(참)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}-3^n}{5^n+4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}=5$(참)

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}=0$(참)

140) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 조건에서 $a_n=\sqrt{n^2+1}$이다.

$n < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{n^2+2n+1} = n+1$ 이므로 $[a_n] = n$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

141) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한 이해하기

두 점 S_n, T_n의 좌표를 자연수 n에 대하여 나타내면

$$S_n(a_n, b_n)=S_n\left(\frac{2n}{n^2+1}, \frac{2n^2}{n^2+1}\right)$$

$T_n(c_n, d_n)=T_n\left(\frac{2}{n}, 2\right)$ 이다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}=2$ (참)

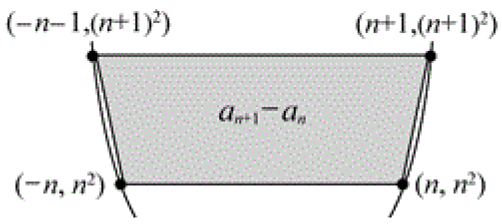
ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-a_n}{d_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{2n}{n^2+1}}{2-\frac{2n^2}{n^2+1}}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n(d_n-b_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{n\left(2-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)}=1$ (참)

142) 답 : ③

[해설]



$a_{n+1}-a_n = (2n+1)^2$

$a_n = 1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)^2$

$=\frac{4n^3-n}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{4}{3}$

143) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}=1$$

144) 답 : ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 4^n+3}{4^{n+1}+2^n}=\frac{1}{2}$$

145) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$$

146) 답 : 25

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 미지수의 값 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{5n+5}=5$ 에서 극한값이 존재하므로 $a=0$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{bn+5}{5n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{5}{n}}{5+\frac{5}{n}}=\frac{b}{5}=5$ 이므로

$b=25$ 이다.

따라서 $a+b=25$ 이다.

147) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한 이해하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2-1}$ 의 분모, 분자를 n^2 으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

148) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{(n+2)-n\}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\{(n+1)-n\}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=2$$

149) 답 : ①

[해설]

공비가 $\frac{3r-1}{8}$ 인 등비수열이 수렴하기 위해서는

$-1<\frac{3r-1}{8}\le 1$

따라서 정수 $r=-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 6개

150) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 구하기

$f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

151) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 이해하기

$f(x)=x^{n+1}+x^n$ 을 x^2-5x+6 으로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$f(x)=x^{n+1}+x^n=(x-2)(x-3)Q(x)+a_nx+b_n$

$f(2)=2^{n+1}+2^n=2a_n+b_n$

$f(3)=3^{n+1}+3^n=3a_n+b_n$ 에서

$a_n=4\cdot 3^n-3\cdot 2^n$, $b_n=-8\cdot 3^n+9\cdot 2^n$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8\cdot 3^n+9\cdot 2^n}{4\cdot 3^n-3\cdot 2^n}=-2$$

152) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{\sum_{k=1}^{2n}(2k)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)}{\sum_{k=1}^{2n}4k^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{4n(n+1)}{2}+n}{\frac{4\cdot 2n(2n+1)(4n+1)}{6}}$$

$$=\frac{1}{8}$$

153) 답 : ③

[해설]

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 로 놓으면

$12+4\alpha=9\alpha-3$

$\therefore\ \alpha=3$

154) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 대소 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 상수)로 놓으면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$a_n+2<3a_{n+1}<2a_n+1$ 에서

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2)\le\lim_{n\to\infty}(3a_{n+1})\le\lim_{n\to\infty}(2a_n+1)$,

$\lim_{n\to\infty}a_n+2\le 3\lim_{n\to\infty}a_{n+1}\le 2\lim_{n\to\infty}a_n+1$

$\therefore\ \alpha+2\le 3\alpha\le 2\alpha+1$

$\alpha+2\le 3\alpha$ 에서 $\alpha\ge 1\cdots$ ①

$3\alpha\le 2\alpha+1$ 에서 $\alpha\le 1\cdots$ ②

① , ②에서 $\alpha=1$

155) 답 : 12

[해설]

[출제 의도]등차중항의 성질 이해하기

$a_n=an+b$ 라 하면,

$b_n=a_{3n-2}+2a_{3n-1}+a_{3n}$

$4a_{3n-1}=12an-4a+4b$

$A_n=\frac{an(n+1)}{2}+bn$

$B_n=\frac{12an(n+1)}{2}-(4a-4b)n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{B_n}{A_n}=12$

156) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열이 포함된 수열의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{16^n+a^n}-4^n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{\sqrt{16^n+a^n}+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{4}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{16}\right)^n}+1}$$

(i) $0<a<4$ 일 때 0으로 수렴한다.

(ii) $a=4$ 일 때 $\frac{1}{2}$ 로 수렴한다.

(iii) $a>4$ 일 때 발산한다.

따라서 구하는 자연수 a는 1, 2, 3, 4의 4개다.

157) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 수렴, 발산을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$n=2m$ 일 때 $S_n=S_{2m}=0$

$n=2m-1$ 일 때 $S_n=S_{2m-1}=1$

ㄱ. $\lim_{m\to\infty}S_{2m}\ne\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}$ 이므로 수열 $\{S_n\}$은 발산한다.

ㄴ. $\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m}}{2m}=0$, $\lim_{m\to\infty}\frac{S_{2m-1}}{2m-1}=0$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=0$ (수렴)

ㄷ. $\lim_{m\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{2m}}{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$ 이고,

$\lim_{m\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{2m-1}}{2m-1}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2m-1}=\frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+S_3+\cdots+S_n}{n}=\frac{1}{2}$ (수렴)

이상에서 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

158) 답 : 14

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용하여 급수 문제 해결하기

$a_{n+1}=\frac{1}{8}a_n+q$ 를 변형하면

$a_{n+1}-\frac{8q}{7}=\frac{1}{8}\left(a_n-\frac{8q}{7}\right)$

$a_n=\left(a_1-\frac{8q}{7}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{8q}{7}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 16$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 이다.

$\therefore\ q=0$

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = p$이고 공비 $r = \frac{1}{8}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{p}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}p = 16$$

$\therefore\ p = 14$

159) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]합성함수를 이용하여 방정식의 해의 규칙성을 발견할 수 있는가를 묻는 문제이다.

방정식 $f(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와

직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore\ A_1 = \{0, 1\} \ldots$①

① 에서 $f(f(x))=1 \Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$

따라서 방정식 $f^2(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와

두 직선 $y=0, y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore\ A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \ldots$②

② 에서 $f(f(f(x)))=1$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=1$

따라서 방정식 $f^3(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와

세 직선 $y=0, y=\frac{1}{2}, y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore\ A_3 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$

이와 같은 방법으로

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n=1, 2, 3, \ldots)$

이 성립함을 알 수 있다.

이때, $(a_{n+1}-1) = 2(a_n - 1)$이므로

$a_n - 1 = (a_1 - 1) \times 2^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2^{n-1}+1\ (n=1, 2, 3, \ldots)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^n+1} = \frac{1}{2}$$

160) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 귀납적 정의를 이용한 극한 문제 해결하기

$3a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

$3a_{n+2} - 3a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n$

$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n)$

$$a_n = p + \sum_{k=1}^{n-1} (q-p)\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n = p + \frac{q-p}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{p+3q}{4}$$

161) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열과 급수의 수렴, 발산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$이다.(참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라고 하면 $b_n = 2 + \frac{1}{n} - a_n$에서

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n} - a_n\right) = 2 - \alpha$이다.(참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로 ㄴ에 의해

$\lim_{n\to\infty} b_n = 2$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$은 발산한다.(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

162) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

$$(\text{준식}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

163) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{4n^2+1}-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-1} = 3$$

164) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

2^{n-1}으로 분모와 분자를 나누어 정리하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}} = 4$$

165) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]무한수열의 성질 이해하기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$이다.(참)

ㄴ.[반례] $\{a_n\} : 1, -1, 1, -1, \cdots$

$\{b_n\} : 1, 1, 1, 1, \cdots$(거짓)

ㄷ.[반례] $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ (거짓)

166) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무리식이 포함된 수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

167) 답 : ④

[해설]

준식 $=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b)n+1}{\sqrt{n^2+an+3}+\sqrt{n^2+bn+2}}=\frac{a-b}{2}=5$

$\therefore\ a-b=10$

168) 답 : ⑤

[해설]

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3+5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=6$$

169) 답 : ④

[해설]

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(3k-1)}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{2n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}}{2+\frac{3}{n^2}}=\frac{3}{4}$$

170) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{4^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=16$$

171) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등차수열의 합을 구하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(n+k)=n^2+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{3}{2}$$

172) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한과 급수의 성질 이해하기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이고, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ (\alpha\neq 0)$이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$은 발산한다.(거짓)

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$가 수렴하면

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n a_n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.(참)

ㄷ.(반례)수열 $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, …일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산하지만

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=0$이다.(거짓)

173) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴과 발산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ ∴ 참

ㄴ. $\sum_{n=1}^{99}a_n=\sum_{n=1}^{99}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=\sqrt{100}-1=9$ ∴ 참

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{1})=\infty$ ∴ 거짓

174) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]극한값 구하기

계산하는 식을 수열의 귀납적 정의로 표현하면

$A_1=25,\ A_{n+1}=\frac{2}{3}A_n+3\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이고

$A_{n+1}-9=\frac{2}{3}(A_n-9)$

그러므로 일반항은 $A_n=16\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+9$이다.

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}A_n=9$

175) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^{n+1}+5}{2^{2n+3}+3^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3^{n+1}}{4^n}+\frac{5}{4^n}}{8+\frac{3^n}{4^n}}=\frac{1}{2}$$

176) 답 : ①

[해설]

$p=0,\ q=3$이므로

p, q를 두 근으로 하는 이차방정식은

$(x-0)(x-3)=0$이다.

$x^2-3x=0$ ∴ $a+b=-3$

177) 답 : ④

[해설]

주어진 수열이 수렴할 조건은

$$-1<-\sin\frac{k\pi}{4}\le 1 \Leftrightarrow -1\le \sin\frac{k\pi}{4}<1$$

따라서 $\sin\frac{k\pi}{4}=1$ 인 10 이하의 자연수 k 는 $2,\ 10$ 이므로 구하는 자연수의 개수는 8 (개)이다.

178) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]근호가 있는 수열의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n-1}-n}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n-1}+n\right)}{3\left(\sqrt{n^2+2n-1}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3\left(\sqrt{n^2+2n-1}+n\right)}=\frac{1}{3}$$

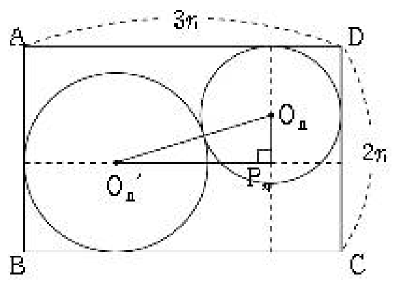
179) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한을 이용한 수학 내적문제 해결하기

직각삼각형 $O_nO_n{'}P_n$ 에 대하여 l_n 은 두 원의 반지름의 합과 같으므로

$$\overline{O_nP_n}=2n-l_n,\ \overline{O_n{'}P_n}=3n-l_n$$



$$(2n-l_n)^2+(3n-l_n)^2=(l_n)^2$$

$$(l_n)^2-10n\cdot l_n+13n^2=0$$

$$\therefore\ l_n=5n-2\sqrt{3}n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{l_n-5n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2\sqrt{3}n}{n+1}=-2\sqrt{3}$$

180) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열의 극한을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=\begin{cases}a,\ (x>1)\\ \frac{a+b+1}{2},\ (x=1)\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{ax^n+bx+1}{x^n+1}=bx+1,\ (0<x<1)\end{cases}$$

$$f\left(\sqrt{2}+1\right)+f\left(\sqrt{2}-1\right)=a+b\left(\sqrt{2}-1\right)+1=2+\sqrt{2}$$

$a,\ b$ 가 유리수이므로

$a-b+1=2,\ b=1$ 이다.

따라서 $a=2,\ b=1$ 이다.

$\therefore\ a+b=3$

181) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{(n+1)^2}$$

$$n<\sqrt{n^2+1}<n+1$$

$$\therefore\ a_n=n$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n\left(\sqrt{n^2+1}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

182) 답 : 81

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 극한값 구하기

(분자) $=(3n+1)^3=27n^3+27n^2+9n+1$

(분모) $=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로

(준식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{27n^3+27n^2+9n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}=81$

183) 답 : ③

[해설]

ㄱ.(반례) $a_n=3n+2,\ b_n=3n$

ㄴ.(반례) $a_n=\frac{1}{3n},\ b_n=\frac{1}{2n}$

ㄷ. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

184) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $a_n=2^n$ 이므로 $S_n=2^{n+1}-2$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2$$

ㄴ. $a_n=(-1)^n$ 이면

$S_n=\begin{cases}0,\ (n\text{이 짝수})\\ -1,\ (n\text{이 홀수})\end{cases}$ 이므로

수열 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 은 1 또는 0 으로 진동한다.

ㄷ. $S_n=3^n-1$ 이므로 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^{n-1}}\right)=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ ㄱ, ㄷ의 경우에 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 가 존재한다.

185) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

[해설]원 $x^2+y^2=4^n+1$ 위의 점 $P_n\left(2^n,\ 1\right)$ 에서의 접선의 방정식은 $y=-2^nx+4^n+1$ 이므로

점 Q_n 의 좌표는 $\left(2^n+2^{-n},\ 0\right)$ 이다.

삼각형 OP_nQ_n의 넓이 $S_n=2^{n-1}+2^{-n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+2^{-n-2}}{2^{n-1}+2^{-n-1}}=2$$

186) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 성질 이해하기

$\{a_n\}$:$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

$\{b_n\}$: $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots$이므로

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-1$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

ㄷ. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 모두 발산하므로 성립하지 않는다.

187) 답 : 30

[해설]

[출제 의도]좌표평면상에서 삼각형의 넓이를 활용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A_k(k,\ 2k)$, $B_k(2k,\ k)$ (단, k는 정수)라 하면

$\overline{OB_k}=\sqrt{4k^2+k^2}=\sqrt{5}k$

$A_k(k,\ 2k)$에서 직선 $y=\frac{1}{2}x$까지의 거리는

$h=\frac{|k-4k|}{\sqrt{5}}=\frac{|3k|}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 삼각형의 넓이 $S_k=\frac{3}{2}k^2$이다.

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}S_k}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 60\alpha=30$

188) 답 : 24

[해설]

$(2n-1)a_n=c_n$이라 하면 $a_n=\frac{c_n}{2n-1}$,

$(n^2+3n+2)b_n=d_n$라 하면 $b_n=\frac{d_n}{n^2+3n+2}$, $\lim_{n\to\infty}c_n=3$,

$\lim_{n\to\infty}d_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)^3a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3}{(2n-1)(n^2+3n+2)}\lim_{n\to\infty}c_n\lim_{n\to\infty}d_n$$

$=4\times3\times2=24$

189) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 식을 이용하여 각 항을 차례로 나열하면

$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots$

ㄱ. n이 홀수이면 $a_n=1$이므로 $a_{11}=1$이다.(참)

ㄴ. $a_{2n}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=2$이다.(참)

ㄷ. $n=2m$ (m은 자연수)일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}a_k=\lim_{m\to\infty}\frac{3m}{2m}=\frac{3}{2}$$

$n=2m-1$ (m은 자연수)일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{2m-1}\sum_{k=1}^{2m-1}a_k=\lim_{m\to\infty}\frac{3m-2}{2m-1}=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{2}$ (참)

190) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-5^{n+1}}{5^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-5}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}=-5$$

191) 답 : ②

[해설]

ㄱ.(반례)수열 $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ ...$에서

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$으로 수렴하지만 $\lim_{n\to\infty}a_n$은 발산한다.(거짓)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}$ (참)

ㄷ.(반례)수열 $-1,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ ...$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=0$

으로 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\infty$이므로 발산한다.(거짓)

192) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(2^{n+1}+1)}{4^{n+1}+2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}+2^n}{2^{2n+2}+2^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot2^{2n}+2^n}{4\cdot2^{2n}+2^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2^n}}{4+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}}=\frac{1}{2}$$

193) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]무리식의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{(n^2-n+1)-(n^2-n-1)\}}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-n+1}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

$=1$

194) 답 : ①

[해설]

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{\frac{1}{4}}{1+0}=\frac{1}{4}$$

195) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

[해설]

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+2n}-2n)(\sqrt{4n^2+2n}+2n)}{\sqrt{4n^2+2n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{4n^2+2n}+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{n}}+2}=\frac{1}{2}$$

196) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}+2^{2n-1}}{4^n-3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{9\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}{1-3\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{1}{2}$$

197) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)}$$

$=2$

198) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n^2=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha^2$ ∴ 참

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$라 하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)+\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}2a_n=\alpha+\beta$

∴ $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ∴ 참

ㄷ.(반례) $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산하지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}=-1$ ∴ 거짓

199) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

$$(\text{분모})=\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}^2$$

$$=\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\frac{n+1}{n}\right)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=4$$

200) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무리식이 포함된 수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}-n\right)\left(\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n\right)}{\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{n}{2}-n^2}{\sqrt{n^2+\frac{n}{2}}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1}=\frac{1}{4}$$

201) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]도형에 관련된 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AC}=\sqrt{1+n^2}$

직각삼각형 ABC의 넓이를 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot n=\frac{1}{2}n$$

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot r_n+\frac{1}{2}\cdot n\cdot r_n+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+n^2}\cdot r_n$$

$$\frac{1}{2}r_n\left(1+n+\sqrt{1+n^2}\right)=\frac{1}{2}n$$

$$\therefore\ r_n=\frac{n}{1+n+\sqrt{1+n^2}}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}r_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n+\sqrt{1+n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+1+\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}=\frac{1}{2}$$

202) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]로그함수의 그래프의 성질 이해하기

[해설] $nx=\frac{n}{x}$ 에서 $x=\pm 1$ 이므로

두 그래프의 교점 $A_n(1,\ n),\ B_n(-1,\ -n)$ 이고 $C_n(1,\ 0)$ 이다.

직선 B_nC_n 의 방정식은 $y=\frac{n}{2}(x-1)$ 이므로

$D_n\left(0,\ -\frac{n}{2}\right)$ 이다.

따라서 $S_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(\frac{n}{2}+n\right)=\frac{3}{4}n$

$T_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{n}{2}=\frac{n}{4}$

$\therefore$ (준식) $=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{4}+n}{\frac{3}{4}n+n+1}=\frac{5}{7}$

203) 답 : 27

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{9n^2-1}<(n+2)a_n<\sqrt{9n^2+4n}$ 에서

$\frac{\sqrt{9n^2-1}}{n+2}<a_n<\frac{\sqrt{9n^2+4n}}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-1}}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4n}}{n+2}=3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n^3=3^3=27$

204) 답 : 3

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한 성질 이용하여 극한값 구하기

$3n^2-5n-1<a_n<3n^2+n+2$ 의 양변을 n^2+2n+2 로 나누면

$\frac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}<\frac{a_n}{n^2+2n+2}<\frac{3n^2+n+2}{n}\cdots$①

극한에서 부등식의 성질에 의해

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+2}\le\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+2}{n}\cdots$②

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n-1}{n^2+2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+2}{n^2+2n+2}=3$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2n+2}=3$

205) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]급수의 수렴, 발산 판정하기

[해설]ㄱ. $a_n=\frac{n}{2n-1}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\neq 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 은 발산한다.

ㄴ. $a_n=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$ 이고

$S_n=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=2$ 로 수렴한다.

ㄷ. $a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$ 이고

$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n$ 은 발산하다.

206) 답 : 44

[해설]

[출제 의도]등비수열의 수렴 조건 이해하기

[해설]주어진 등비수열의 공비는 $\frac{x-5}{4}$ 이다.

등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x-5}{4}\le 1$

$\therefore\ 1<x\le 9$

$\therefore$ 모든 정수 x 값의 합은 44 이다.

207) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]함수의 극한값 구하기

[해설] $\lim_{t\to 1}\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\lim_{t\to 1}\frac{2-\frac{2}{t}}{t-1}=2$

208) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n-3}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\frac{0-3}{1+0}=-3$$

209) 답 : 16

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열의 극한값 구하기

[해설] $a_n-16=(a_1-16)\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이므로

$a_n=-14\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+16$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$ 이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 16$

210) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 합을 계산하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)=2n+S_n$,

$\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)=n(n+1)+\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+n+S_n$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}(2+a_k)}{\sum_{k=1}^{n}(2k+a_k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+S_n}{n^2+n+S_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{S_n}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{S_n}{n^2}}=\frac{0+\frac{1}{2}}{1+0+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

211) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한 계산하기

분모, 분자를 3^{n-1} 으로 나누면

$$(\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 3^2+2^3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}=18$$

212) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]무한수열의 수렴, 발산 추론하기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\tan\frac{2n+1}{4}\pi$ (발산)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$ (수렴)

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\{\log_2 n^2-2\log_2(n+2)\}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2}{(n+2)^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n^2}{n^2+4n+4}=\log_2 1=0\ (\text{수렴})$$

213) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]도형에서 극한값 계산하기

삼각형 OAB에서 내접원의 반지름의 길이를 r이라할 때

삼각형의 넓이: $\frac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{2}r=\frac{1}{2}x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{r}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$$

214) 답 : ②

[해설]

>[출제 의도]등비수열이 수렴할 조건을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 무한수열이 수렴할 조건은

$$-1<\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\le 1 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{\pi}{8}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0<x<16$일 때, $0<\frac{\pi}{8}x<2\pi$이므로 위의 부등식의 해는

$$0<\frac{\pi}{8}x\le\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi\le\frac{\pi}{8}x<\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi<\frac{\pi}{8}x<2\pi$$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15의 7개이다.

215) 답 : 240

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_{n+1}=a_n\times 0.88+x$ 이므로

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}\times 0.88+x\\&=a_{n-2}\times 0.88^2+(1+0.88)x\\&\cdots\\&=1200\times 0.88^n+(1+0.88+0.88^2+\cdots+0.88^{n-1})x\\&=1200\times 0.88^n+\frac{1-0.88^n}{1-0.88}x\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1200\times 0.88^n+\frac{1-0.88^n}{0.12}x\right)=\frac{x}{0.12}$$

$\lim_{n\to\infty}a_n\le 2000$ 에서 $\frac{x}{0.12}\le 2000$

$\therefore x\le 240$

따라서 구하는 x의 최댓값은 240이다.

216) 답 : 655

[해설]

[출제 의도]도형으로 정의된 수열의 규칙성을 파악하여 항의 수 추론하기

[해설]수열 $\{a_n\}$은 제 2행부터 시작되므로 제 k행에 있는 항의 개수는 $(k-1)$개이다.

따라서, 제 k행까지의 항의 개수는

$1+2+3+\cdots+(k-1)=\frac{(k-1)k}{2}$ 이고,

$\frac{(k-1)k}{2}<100$인 최대의 k는 14이므로 제 14행까지의 항의 개수는 91개이다.

그러므로 a_{100}은 15행 9번째 항이다.

$\therefore a_{100}=$ (14행의 9번째 수) + (15행의 9번째 수) + (15행의 10번째 수)이다.

각 행의 첫 번째 수를 수열 $\{b_n\}$이라 하면 $\{b_n\}$의 계차수열은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이다.

$$\therefore b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2k=n^2-n+1$$

(14행의 9번째 수) $=14^2-14+1+8\cdot 2$

$=199$

(15행의 9번째 수) $=15^2-15+1+8\cdot 2$

$=227$

(15행의 10번째 수) $=227+2=229$

$\therefore a_{100}=199+227+229=655$

217) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 이를 실생활문제에 적용시킬 수 있는가를 묻는 문제이다.

한없이 반복하여 남은 물과 알콜의 양에 대한 합은

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+400$ 이고

극한을 취하면 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}a_n+400\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=800$.

b_n 을 n번 시행으로 남은 알콜의 양으로 정할 때

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+100$ 이다.

따라서 극한값을 취하면 $\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}b_n+100\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=200$, 농도 $=\frac{200}{800}\times100=25\%$ 이다.

218) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]등비수열의 공비에 따른 극한값 구하기

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}-r+2}{r^n+1}=\begin{cases}\frac{1}{r},\ (|r|>1)\\ 1,\ (r=1)\\ 2-r,\ (|r|<1)\end{cases}$$ 이다.

따라서 ㄴ, ㄷ이 참이다.

219) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 일반항을 구하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_n=1+2+3+4+\cdots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$a_{2n}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(2n+1)(n+1)$

$b_{2n}=b_{2n+1}=(n+1)^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2}=2$

220) 답 : ⑤

[해설]

$a_n=\frac{1}{2}nh_n\cdots$①

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 공비를 r라 하면

$a_n=\frac{1}{2}r^{n-1}\cdots$②

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{1}{2}$ 이면 ①에서

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}nh_n$

$\therefore h_n=\frac{1}{n}$ (참)

ㄴ. $h_2=\frac{1}{4}$ 이면 ①과 ②에서

$a_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot r \therefore\ r=\frac{1}{2}$

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (참)

ㄷ. $h_2<\frac{1}{2}$ 이면

$a_2=\frac{1}{2}\cdot2\cdot h_2=\frac{1}{2}\cdot r$ 에서

$0<r=2h_2<1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}nh_n=\lim_{n\to\infty}r^{n-1}=0$ (참)

$\because$ ①, ②에서 $nh_n=r^{n-1}$)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

221) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비급수의 합을 이용하여 도형 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1=1+\frac{1}{3}\times2=1+\frac{2}{3}$,

$a_2=a_1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2^2=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$,

$a_3=a_2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\times2^3=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3$,

...

[구하는 값]= $\lim_{n\to\infty}a_n=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$

222) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

223) 답 : ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

224) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x\to2$ 이면(분모) $\to0$ 이므로(분자) $\to0$ 이어야 한다.

따라서 $1+a=0$ 에서 $a=-1$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{1}{2}=b$$

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{2}$

225) 답 : 14

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한의 뜻을 이해하여 문제 해결하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+5}{\sqrt{4n^2-1}}$ 가 수렴하므로 $a=0$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{5}{n}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}=\frac{b}{2}=7$ 이므로 $b=14$

$\therefore\ a+b=14$

226) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 극한 구하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4}{a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4+1}$ 이므로

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{21}}{n^4+1}=\frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 라 하면 $\frac{\alpha-4}{\alpha+3}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \alpha=\frac{19}{3}$

227) 답 : ①

[해설]

수열의 극한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}\right)}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{2n}{n^2}}\right)}{\frac{4n}{n}}$$

$$=\frac{4}{4}=1$$

228) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

각 항을 자연수 n으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n}<a_n<\frac{2n+4}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n}\le\lim_{n\to\infty}a_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n}$$

$2\le\lim_{n\to\infty}a_n\le 2$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$ 이다.

229) 답 : ④

[해설]

$f(x)$를 $(x-1)$로 나눈 나머지는

$f(1)=2^n+3^n+1=a_n$

$f(x)$를 $(x-2)$로 나눈 나머지는

$f(2)=4\cdot 2^n+2\cdot 3^n+1=b_n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+1}{4\cdot 2^n+2\cdot 3^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1+1\left(\frac{1}{3}\right)^n}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\cdot 1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{2}$$

230) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

구하는 값 $=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)-n^2}{(n+1)(n+2)-n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+7n+12)-n^2}{(n^2+3n+2)-n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7n+12}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\frac{12}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{7}{3}$$

231) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.(거짓)(반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n^2$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이지만 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$

ㄴ.(참) $a_n-b_n=c_n$ 이라 하면 $b_n=a_n-c_n$

그러므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n-c_n)=5$

ㄷ.(거짓)(반례) $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$ 이라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 이지만 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$

232) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질을 이해하기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha$ (일정)이면

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$ (참)

ㄷ. 반례) $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$ 이면,

$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$ 이지만 $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$ (거짓)

233) 답 : 10

[해설]
[출제 의도]수렴하는 수열의 극한에 대한 성질 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}\left\{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{10}-\frac{1}{n^{10}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{(n^2+1)^{10}-1\right\}}{n^{k+10}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{(n^2+1)^{10}-1\right\}}{n^{k+10}}$ 가 수렴하기 위해서는 $k\ge 10$

∴ 최솟값은 10

234) 답 : ①
[해설]
[출제 의도]수열의 극한에 대한 성질 이해하기
ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (참)

ㄴ. 수렴하는 급수의 일반항 a_n, b_n에 대하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$ (거짓)

ㄷ.(반례) $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n$이라하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n=1$이지만 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$이 수렴하는 것은 아니다.(거짓)

옳은 것은 ㄱ

235) 답 : ②
[해설]
[출제 의도]수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.
ㄱ.(반례) $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n+1$이라 하면

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다.(거짓)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-2b_n)+2b_n\}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)+2\lim_{n\to\infty}b_n=0+2=2$ (참)

ㄷ.(반례) $a_n=n-\dfrac{1}{n}$, $b_n=n$, $c_n=n+\dfrac{1}{n}$이라 하면

$a_n<b_n<c_n$이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(c_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$이지만

수열 $\{b_n\}$은 발산한다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

236) 답 : 18
[해설]

$$\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}\le a_n\le\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+1)}{n(n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)(9n^2+10)}{n(n^2+3)}=18$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=18$

237) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]극한의 성질을 이해하여 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_{n+1}=a_n^{\frac{1}{2}}$에서 $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ 이므로

극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$이다.

238) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]등비수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-2^n}{4^n+3^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 4^n-2^n}{4^n+3\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=\frac{4-0}{1+3\cdot 0}=4$$

239) 답 : 36
[해설]
[출제 의도]기울기의 변화를 이해하고 극한값 계산하기
직선 AC'의 기울기가 $\dfrac{1}{t^2-1}$이므로 점 $C'(t^2,1)$

직선 BO'의 기울기가 $\dfrac{1}{1-t^3}$이므로 점 $O'(t^3,0)$

$\overline{BC'}=1-t^2$, $\overline{AO'}=1-t^3$

기울기의 변화는 t가 1에 가까워지므로

$$\lim_{t\to1}\frac{1-t^3}{1-t^2}=\lim_{t\to1}\frac{1+t+t^2}{1+t}=\frac{3}{2}\cdots ①$$

$C'BD$와 $AO'D$이 닮음삼각형이고

$\overline{BC'}$의 대응변이 $\overline{AO'}$이므로

① 에 의하여 닮음비가 $2:3$

따라서 넓이의 비는 $4:9$

∴ $ab=36$

240) 답 : ⑤
[해설]
[출제 의도]무한수열의 수렴, 발산 판정하기
① 0에 수렴한다.
② $\dfrac{1}{2}$에 수렴한다.
③ 0에 수렴한다.
④ -1에 수렴한다.
⑤ 수렴하지 않는다.

241) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]수열의 귀납적 정의와 무한수열 이해하기
ㄱ. $2a_{n+1}+a_n=2$는

$2\left(a_{n+1}-\dfrac{2}{3}\right)=-\left(a_n-\dfrac{2}{3}\right)$이므로

수열 $\left\{a_n-\dfrac{2}{3}\right\}$는 첫째항이 $\dfrac{1}{3}$, 공비는 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.(참)

ㄴ. $a_n-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$ (참)

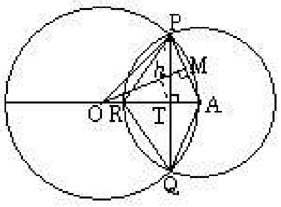
ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.(거짓)

242) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]도형의 성질을 이용하여 함수의 극한값 구하기

[해설] $\overline{OA}$ 와 $\overline{PQ}$ 의 교점을 T, $\overline{PT}=h$, $\overline{AP}$ 의 중점을 M이라고 하면, $S(r)=hr$



$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PT}=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OM}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\times 1\times h=\frac{1}{2}\times r\times\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}\Rightarrow h=r\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \lim_{r\to 2-0}\frac{S(r)}{\sqrt{2-r}}=\lim_{r\to 2-0}\frac{r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}}{\sqrt{2-r}}$$

$$\lim_{r\to 2-0}\frac{r^2\sqrt{(2-r)(2+r)}}{2\sqrt{2-r}}=4$$

243) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]극한값 계산하기

$\log n = a_n + \alpha \,(0 \le \alpha < 1)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\alpha+2}{a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{\alpha}{a_n}+\frac{2}{a_n}}{1+\frac{1}{a_n}}=1$$

244) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무리식의 극한에 관한 계산 능력을 측정한다.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+3}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

245) 답 : 300

[해설]

[출제 의도] 무한수열의 극한값 구하기

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ 에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=-1$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}b_n=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}100b_n=300$

[정답] 300

246) 답 : 24

[해설]

[출제 의도]도형에서 선분의 길이의 비의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$\overline{AC_n}-\overline{OC_n}=\sqrt{n^2+48^2}-n$,

$\overline{B_1D_n}=\frac{48}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\frac{48}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+48^2}-n\right)\left(\sqrt{n^2+48^2}+n\right)}{\frac{48}{n}\left(\sqrt{n^2+48^2}+n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48^2}{48\left(\sqrt{1+\frac{48^2}{n^2}}+1\right)}=\frac{48}{2}=24$$

247) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한의 성질을 이해하고 극한값을 구하기

문제의 조건인 $\lim_{n\to\infty}(n^2-1)a_n=2006$ 에서

$(n^2-1)a_n=b_n$라 하면

$a_n=\frac{1}{n^2-1}b_n$ 이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=2006$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2+1\right)\cdot\frac{b_n}{n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2+1}{n^2-1}\cdot b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2+1}{n^2-1}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\frac{1}{2}\times 2006=1003$$

[정답]③

248) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]행렬의 거듭제곱을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A=\begin{pmatrix}2, & 1\\ -1, & -2\end{pmatrix}$ 에서 $A^2=\begin{pmatrix}2, & 1\\ -1, & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2, & 1\\ -1, & -2\end{pmatrix}=3E$

$\therefore A^4=3^2E,\ A^6=3^3E,\ \cdots,\ A^{2n}=3^nE$

$$\sum_{k=1}^{n}A^{2k}=3E+3^2E+3^3E+\cdots+3^nE=\frac{3(3^n-1)}{2}E$$

$\therefore\ a_n=\dfrac{3(3^n-1)}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{3(3^{n+1}-1)}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{2^n+a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+2}-3}{2^{n+1}+3^{n+1}-3}=3$

249) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]무한수열의 수렴에 대한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문항이다.

두 무한수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n$

$=\left\{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)\right\}^2-2\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$

$=6^2-2\cdot 2$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_n$

250) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한 수열의 극한과 급수의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.(반례) $a_n=\dfrac{1}{n},\ b_n=-\dfrac{1}{n}$이면

임의의 자연수 n에 대하여 $a_n>b_n$이지만

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

ㄴ. $\alpha-\beta=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-b_k)>0$

$\because$ 임의의 자연수 k에 대하여 $a_k>b_k$)

$\therefore\ \alpha>\beta$(참)

ㄷ. 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$의 합이 각각 존재하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$(거짓)

251) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한의 성질을 이해하기

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\cdot 0=0$

ㄴ. $a_n-b_n=c_n$이라 놓으면

$b_n=a_n-c_n$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-c_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha-0=\alpha$

ㄷ. $a_n-b_n=c_n$이라 놓으면

$b_n=a_n-c_n$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-c_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{c_n}{a_n}\right)=1$

[정답]⑤

252) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를

묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$라 하면 $a_{n+1}=$ [2] $+\dfrac{1}{a_n}$에서

$x=$ [2] $+\dfrac{1}{x},\ x^2-2x-1=0$

근의 공식에 의하여 $x=1\pm\sqrt{2}$

$x>2$이므로, $x=[1+\sqrt{2}]$

253) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 관한 성질을 이해하고,

여러 가지 상황에 따른 문제 해결능력을 측정한다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+2)=\alpha$라고 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\{(a_n+2)-2\}=\alpha-2\ \therefore$ 참

ㄴ.[반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=1$이지만

$\{a_n\}$은 진동하므로 발산한다. ∴ 거짓

ㄷ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}(-|a_n|)=0$이므로

$-|a_n|\le a_n\le|a_n|$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\ \therefore$ 참

254) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한의 성질을 이해하여 이를 활용하기

문제 조건인 $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.9, & 0.2\\ 0.1, & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$에서

$a_{n+1}=0.9a_n+0.2b_n\cdots$ ①

$b_{n+1}=0.1a_n+0.8b_n\cdots$ ②

① +②: $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n=\cdots=a_1+b_1=10\cdots$ ③

① , ③에서 $a_{n+1}=0.7a_n+2\cdots$ ④

② , ③에서 $b_{n+1}=0.7b_n+1\cdots$ ⑤

④ 에서 $a_n=\dfrac{20}{3}-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{7}{10}\right)^{n-1}$이므로

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{20}{3}$

마찬가지로 ⑤에서 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{10}{3}$이다.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\dfrac{\frac{10}{3}}{\frac{20}{3}}=\dfrac{1}{2}$

[정답]②

255) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 합과 극한값 구하기

(준식) $=\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-1)}-\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-3)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

[정답]②

256) 답 : 48

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n-1}=x$라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}+20}{a_{n+1}-14}=2$에서 $\frac{x+20}{x-14}=2$

$\therefore\ x=48$

257) 답 : 6

[해설]

[출제 의도]등비수열의 극한값을 구하기

$$f(-3)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3}{(-3)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}=1$$

마찬가지 방법으로 구하면 $f\left(\frac{1}{4}\right)=3,\ f(1)=2$

$\therefore\ f(-3)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)=6$

[정답] 6

258) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 무한수열의 극한값 구하기

분모와 분자를 n^2로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2005}{n^2+2005}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2005}{n^2}}{1+\frac{2005}{n^2}}=1$$

[정답]①

259) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$(\text{주어진 식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{1}=4$$

260) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^3a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{n^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}$$

$$=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

261) 답 : 15

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-2a_n\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)}-\lim_{n\to\infty}2a_n$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n$이므로

$\alpha=\frac{3}{2}-2\alpha$에서 $\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 30\alpha=15$

<다른 풀이>

$a_1=2,\ a_2=1=\frac{3}{3},\ a_3=\frac{4}{5},\ a_4=\frac{5}{7}$, ⋯

이므로 $a_n=\frac{n+1}{2n-1}$임을 알 수 있다.

따라서 $\alpha=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}$에서

$30\alpha=15$이다.

262) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 무한수열과 급수의 극한 이해하기

ㄱ.(반례)수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이지만 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$로 수렴하지 않는다.(거짓)

ㄴ.(참)

ㄷ.(반례) $a_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n,\ b_n=2^n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$이 되어 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이다.(거짓)

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}b_n=p,\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=q$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n\times\frac{a_n}{b_n}\right)=\lim_{n\to\infty}b_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=pq$이므로 수렴한다.(참)

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

[정답]③

263) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]수열의 극한값에 대한 성질 이해하기

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=\alpha-\alpha=0$(참)

ㄴ. $a_n=n^2,\ b_n=\frac{1}{n}$이라 하면

수열 $\{a_n\}$은 발산하고,

수열 $\{b_n\}$은 수렴하지만 $a_nb_n=n$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$은 발산한다.(거짓)

ㄷ. $a_n=n,\ b_n=-n$이라 하면

수열 $\{a_n\},\ \{b_n\}$은 발산하지만

$a_n+b_n=0$이므로

수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴한다.(거짓)

ㄹ. $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하고,

$\{a_n-b_n\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n-b_n}{a_n}\right\}=0$$

$\therefore$ $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$은 수렴한다.(참)

264) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 이용하여 실생활에서의 문제를 해결할 수 있는지를 묻는 문제이다.

n일 후 정오에 측정한 2호 댐의 저수량을 x_n(만톤)이라 하면

$$x_n\times0.98+100=x_{n+1}$$

$$(x_{n+1}-5000)=0.98(x_n-5000)$$

$$\therefore\ x_n-5000=(x_1-5000)0.98^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=5000+\lim_{n\to\infty}(x_1-5000)0.98^{n-1}=5000$$

따라서, 측정되는 저수량은 5000만톤에 한없이 가까워진다.

265) 답 : 54

[해설]

[출제 의도]수열의 극한의 성질을 이해할 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n^2\cdot a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot a_n}$$

$$=6\cdot9=54$$

266) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]등비수열의 수렴 조건을 알 수 있다.

수열 $\{(x-2)^n\}$의 공비는 $x-2$이므로

$$-1<x-2\le1$$

$$\therefore\ 1<x\le3$$

267) 답 : ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5n}-n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n-n^2}{\sqrt{n^2+5n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+5n}+n}$$

$$=\frac{5}{2}$$

[정답]③

268) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]극한값을 구할 수 있다.

(주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2005\left(n+\sqrt{n^2-2004}\right)}{2004\left(\sqrt{n^2-2005}+n\right)}$$

$$=-\frac{2005}{2004}$$

269) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 수렴조건 알기

$-1<2x+1\le1\Leftrightarrow-1<x\le0$

[정답]②

270) 답 : 2

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한에 관한 기본 성질을 이해하고 이를 이용하여 극한값 구하기

$$k=\frac{2\cdot(-2)-2}{-4+1}=\frac{6}{3}=2$$

[정답]2

271) 답 : 50

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 구하기

$\sqrt{(n+1)^2}<\sqrt{n^2+3n+1}<\sqrt{(n+2)^2}$ 이므로

$$a_n=\sqrt{n^2+3n+1}-(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}100a_n=\lim_{n\to\infty}100\left\{\sqrt{n^2+3n+1}-(n+1)\right\}$$

$$=100\times\frac{1}{2}=50$$

[정답]50

272) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]수열의 극한에 관한 성질 이해하기

① $a_n=\frac{-3n}{n+1}$이라 하면, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n}{n+1}\right)^2=9$

그러나, $\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+1}=-3$이다. $\therefore$ 거짓

② $a_n=1-\frac{1}{n}$, $b_n=1+\frac{1}{n}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$이므로 성립하지 않는다. $\therefore$ 거짓

③ $a_n=\frac{-n}{n+1}$이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{n+1}\right|=1$

그러나, $\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}=-1$ $\therefore$ 거짓

④ $\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}(3n+1)a_n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}\lim_{n\to\infty}(3n+1)a_n=\frac{1}{3}\times6=2$ $\therefore$ 참

⑤ $\lim_{n\to\infty}a_n=1\ne0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$는 발산한다. $\therefore$ 거짓

[정답]④

273) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]귀납적 정의를 이해하고 극한값 계산하기

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$
$$=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}\ \left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right\}$$
$$=1+\frac{n-1}{2n-1}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$$

[정답]⑤

274) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]무한수열의 수렴, 발산을 판별하기

① $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=0$

② $\lim_{n\to\infty}(-2)^n\Rightarrow -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ \cdots$이므로 발산

③ 발산

④ $\lim_{n\to\infty}(100n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n(100-n)=-\infty$

⑤ $0,\ 2,\ 0,\ 2,\ \cdots$이므로 발산

[정답]①

275) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]무한수열의 기본성질을 이용하여 극한값 구하기

$$\lim_{n\to\infty}97n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^2=\lim_{n\to\infty}n\left(2n-2\sqrt{n^2-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+\sqrt{n^2-1}}$$

n으로 나누면, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=1$

[정답]②

276) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]여러 가지 수열의 극한값 구하기

$$a_{n+2}-\frac{2}{3}a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n=0$$
$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$$
$$\therefore\ a_n=a_1+(a_2-a_1)\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{3}{4}\cdot 8\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\right]=7$$

[정답]②

277) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]무리식의 극한값을 계산할 수 있다.

$$(\text{주어진식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$$

278) 답 : 81

[해설]

[출제 의도]수열의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^3}{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=81$$

279) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]지수함수의 그래프를 이해하고 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}}{\overline{P_nQ_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{5^n-3^n}=5$$

280) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]수열의 관계식을 구하고 수열의 극한값을 구할 수 있다.

n번 시행 후 남아 있는 기름의 양을 $a_n(l)$라 하면

$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+100$ ($a_0=1000$)에서

$$a_n-200=\frac{1}{2}(a_{n-1}-200)$$
$$a_n-200=(a_0-200)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\therefore\ a_n=200+800\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서, $\lim_{n\to\infty}a_n=200$

281) 답 : 1

[해설]

[출제 의도]함수의 극한에 관한 성질을 알고 극한값 구하기

직선 $l:y-\sqrt{t}=-\sqrt{t}(x-t)$

$f(t)=t+1,\ g(t)=t\sqrt{t}+\sqrt{t}$ 이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)-f(t)}{g(t)+f(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}(t+1)-(t+1)}{\sqrt{t}(t+1)+(t+1)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}=1$$

[정답] 1

282) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]무한수열의 극한값 추론하기

생략[정답]③

283) 답 : 13

[해설]
[출제 의도]등비급수를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

$$10\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=10\left(1-\frac{1}{2}\right)+10\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right\}$$

$$=5+10\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right)=13$$