Ⅳ.공간벡터

2. 도형의 방정식

중단원 기출문제

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

1 좌표 공간에서 평면 $x+8y-4z+k=0$이 구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에 접하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★☆] [2017 학년도 대수능]

2 좌표 공간에서 평면 $2x+2y-z+5=0$과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{12}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{5}{12}$

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

3 좌표 공간에서 직선 $l : \frac{x}{2}=6-y=z-6$과 평면 α가 점 $P(2,\ 5,\ 7)$에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 $A(a,\ b,\ c)$와 평면 α 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=6$일 때, $a+b+c$의 값은?(단, $a>0$)[4점]

① 15　② 16　③ 17
④ 18　⑤ 19

[난이도 : ★★☆] [2014 학년도 대수능]

4 좌표 공간에서 두 점 $A(5,5,a)$, $B(0,0,3)$을 지나는 직선과 직선 $x=4-y=z-1$이 서로 수직일 때, a의 값은? [3점]

① 3　② 5　③ 7
④ 9　⑤ 11

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

5 좌표 공간에서 중심의 x좌표, y좌표, z좌표가 모두 양수인 구 S가 x축과 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 넓이가 64π이고 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8일 때, 구 S의 반지름의 길이는? [4점]

① 11　② 12　③ 13
④ 14　⑤ 15

[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

6 좌표 공간에서 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1$에 수직이고 점 $(1,\ -5,\ 2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

7 좌표 공간에서 x축을 포함하고 xy평면과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 평면을 α라 하자.

평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy평면 위로의 정사영이 영역 $\{(x,\ y,\ 0)|x+3y-2\le 0\}$에 포함되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 최댓값을 M이라 하자. $60M^2$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2008 학년도 대수능]

8 좌표 공간의 점 $A(3,6,0)$에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2007 학년도 대수능]

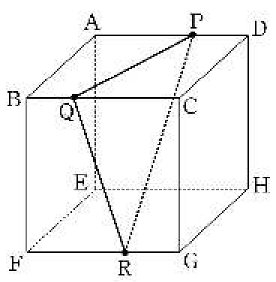
9 [이과]좌표 공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서 구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$가 지나는 부분의 개수는?[4점]

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2006 학년도 대수능]

10 아래 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 $ABCD-EFGH$의 세 모서리 AD, BC, FG위에 $\overline{DP}=\overline{BQ}=\overline{GR}=1$인 세 점 P, Q, R가 있다.

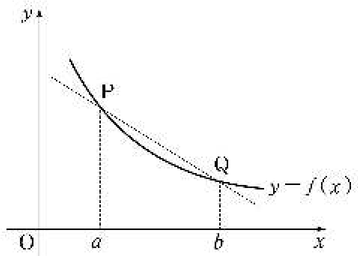
평면 PQR와 평면 $CGHD$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)[3점]



① $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{11}}{11}$
④ $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

11 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프와 이 그래프 위의 서로 다른 두 점 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$를 나타낸 것이다.



함수 $F(x)$가 $F'(x)=f(x)$를 만족시킬 때, 다음 [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ.함수 $F(x)$는 구간 $[a,b]$에서 증가한다.
ㄴ. $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$는 직선 PQ의 기울기와 같다.
ㄷ. $\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx$의 값은 $\frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}$보다 작다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

12 (a,b,c)를 구 $x^2+y^2+z^2=4$위의 한 점의 좌표라고 할 때, 두 평면 $\begin{cases}ax+by+cz=1\\ax+by+cz=3\end{cases}$사이의 최단거리는?[2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{11}{3}$

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

13 좌표평면에서 중심이 $(1,1,1)$이고 평면 $x+2y-2z=31$에 접하는 구의 반지름을 구하시오.

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

14 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$에서 구에 접하는 평면을 α, 점 $\left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$에서 구에 접하는 평면을 β라 한다. 평면 α 위에 있는 넓이가 100인 삼각형을 평면 β위로 정사영시켜 얻은 도형의 넓이를 구하시오.

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

15 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=1$ 위의 점에서 평면 $x+y+z=10$에 이르는 거리의 최솟값은?

① $\frac{3\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{4\sqrt{3}-3}{3}$　③ $\frac{3\sqrt{3}+2}{3}$

④ $\frac{2\sqrt{3}+5}{3}$　⑤ $\frac{3\sqrt{3}+5}{3}$

[난이도 : ★★☆] [1997 학년도 대수능]

16 좌표 공간에서 두 개의 구 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9 \end{cases}$가 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라 하자. 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)[2점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

17 좌표평면에서 두 직선

$$x+\frac{1}{4}=y-\frac{1}{3},\ x+\frac{2}{-1}=y+\frac{1}{3}$$

이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{6}}{10}$　② $\frac{\sqrt{7}}{10}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$

④ $\frac{3}{10}$　⑤ $\frac{\sqrt{10}}{10}$

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

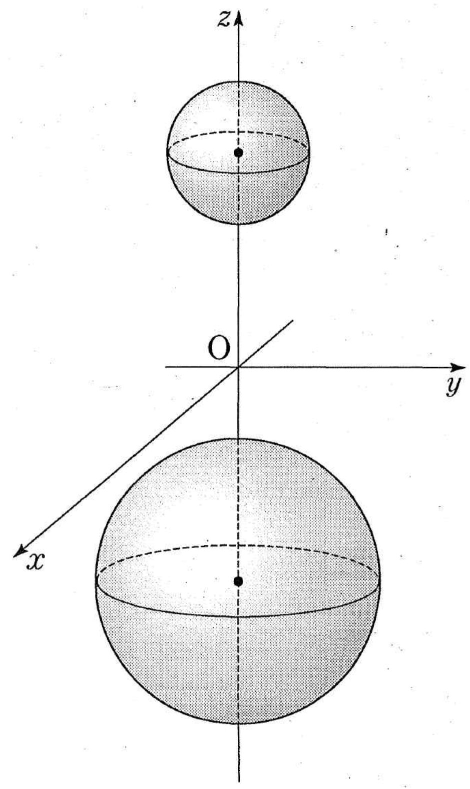
18 좌표 공간에 두개의 구

$S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=1$, $S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2=4$

가 있다.

점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$을 포함하고 S_1과 S_2에 동시에 접하는 평면을 α라 하자.

점 $Q(k, -\sqrt{3}, 2)$가 평면 α 위의 점일 때 $120k$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

19 좌표 공간에서 직선 $x-\frac{2}{2}=y-\frac{1}{a}=z+\frac{5}{4}$에 수직이고 점 $(1, 1, -2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+5y+bz+c=0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.(단, a, b, c는 상수이다.)[3점]

[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

20 좌표 공간에 두 점 $(a, 0, 0)$과 $(0, 6, 0)$을 지나는 직선 l이 있다.

점 $(0, 0, 4)$와 직선 l사이의 거리가 5일 때, a^2의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

21 좌표 공간에 두 점 $A(0, -1, 1)$, $B(1, 1, 0)$이 있고, xy평면 위에 원 $x^2+y^2=13$이 있다.

이 원 위의 점 $(a, b, 0)(a<0)$을 지나고 z축에 평행한 직선이 직선 AB와 만날 때, $a+b$의 값은?[4점][2011년 9월 평가원]

① $-\frac{47}{10}$ ② $-\frac{23}{5}$ ③ $-\frac{9}{2}$
④ $-\frac{22}{5}$ ⑤ $-\frac{43}{10}$

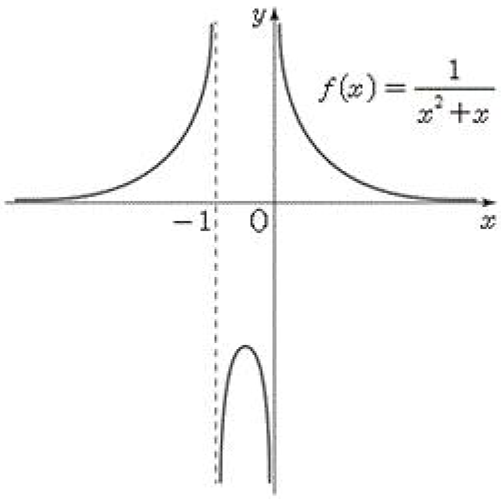
[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

22 평면 α와 구 $C: x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-3=0$이 점 $A(2, 0, -3)$에서 접할 때, 평면 α에 평행하고 구 C와 접하는 평면의 방정식은?[3점]

① $x+y+2z=0$ ② $x+y-2z+4=0$ ③ $x+y-2z=0$
④ $x-y+z+1=0$ ⑤ $x-y-z-1=0$

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

23 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $P(1,\ f(1))$, $Q\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right),\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$을 지나는 직선의 방향벡터 중 크기가 $\sqrt{10}$ 인 벡터를 $\vec{u}=(a,\ b)$라 하자.

$|a-b|$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

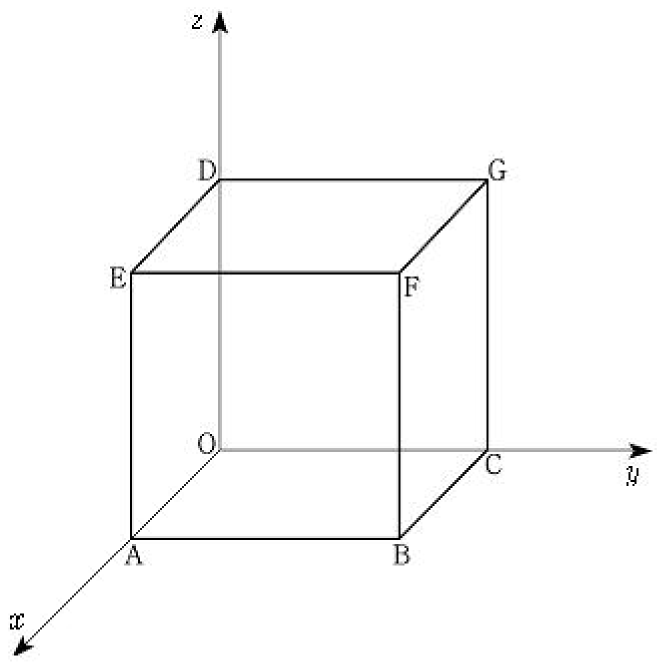
[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

24 구 $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-3=0$을 xy평면으로 자른 단면을 밑면으로 하고, 구에 내접하는 원뿔의 부피의 최댓값은?[3 점][2012년 7 월]

① $\dfrac{31}{3}\pi$ ② $\dfrac{32}{3}\pi$ ③ 11π
④ $\dfrac{34}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{35}{3}\pi$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

25 그림과 같이 좌표 공간에 있는 정육면체 $OABC-DEFG$에서 $x+y+2z=6$으로 잘린 단면의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

26 점 $(1,\ -2,\ 3)$을 지나고 직선 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{4}$에 평행인 직선이 점 $(3,\ a,\ b)$를 지난다. $a+b$의 값은?[3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

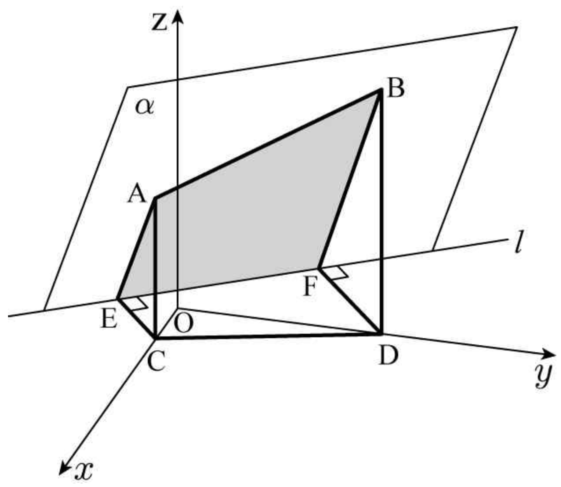
27 좌표 공간에서 평면 $x-2z-7=0$과 평면 $y-3z-14=0$의 교선을 l이라 하자. 원점에서 직선 l에 내린 수선의 발의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$의 값은?[3점]

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

28 좌표 공간에서 평면 $\alpha : 12x+9y-5\sqrt{3}z+3=0$ 위의 두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발은 각각 $C(1, 0, 0)$, $D(0, 3, 0)$이다.

평면 α와 xy평면의 교선을 l이라 하고, 두 점 C, D에서 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. 이때, 사각형 $AEFB$의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

29 좌표 공간에서 중심이 점 A인 구

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=\frac{9}{4}$와 중심이 B인 구

$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{27}{4}$가 만나서 생기는 원을 S라

하자. 원 S위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}$의 최댓값을 M,

최솟값을 m이라고 할 때, $M-m=\frac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을

구하시오.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

30 좌표 공간에 구 $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-2)^2=9$와 구 밖의 한 점 $A(1, 3, 5)$가 있다. 점 A에서 이 구에 그은 접선들의 접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면과 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[3점]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

31 좌표 공간에서 점 $A(1, 4, 2)$가 직선

$\frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-1}{2}$ 위에 있을 때, 점 A와 평면

$ax+by+2z+48=0$ 사이의 거리는?(단, a, b는 상수)[3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

정답 및 해설

2. 도형의 방정식

중단원 기출문제

1) 답 : 16

[해설]

구 $x^2+y^2+z^2+2y-3=0$에서 $x^2+(y+1)^2+z^2=4$이므로

구의 중심은 $(0,\ -1,\ 0)$이고 반지름의 길이는 2이다.

평면 $x+8y-4z+k=0$이 구에 접하므로

구의 중심에서 평면까지의 거리는 구의 반지름과 같다.

구의 중심 $(0,\ -1,\ 0)$에서 평면까지의 거리를 구하면

$\dfrac{|-8+k|}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=2$ 이며 정리하면

$|-8+k|=18$

$k-8=18$ 또는 $k-8=-18$이므로

$k=-10$ 또는 $k=26$

모든 k값의 합은 16

2) 답 : ④

[해설]

평면 $2x+2y-z+5=0$의 법선벡터를 $\overrightarrow{n_1}$라 하면

$\overrightarrow{n_1}=(2,\ 2,\ -1)$

xy평면의 법선 벡터를 $\overrightarrow{n_2}$라 하면 $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 0,\ 1)$이라 할 수 있다.

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|2\times0+2\times0+(-1)\times1|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{3}$$

3) 답 : ②

[해설]

직선 l과 평면 α가 점 $P(2,\ 5,\ 7)$에서 수직으로 만나므로

평면 α의 법선벡터는 직선 l의 방향벡터 $(2,\ -1,\ 1)$과 같다.

그래서 평면 α의 방정식은 $2(x-2)-(y-5)+(x-7)=0$이므로

$2x-y+z=6$

또한 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{PQ}$이므로 $\angle PAQ=\theta$라고 하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AP}|$ ($\because$ $|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta=|\overrightarrow{AP}|$) $=|\overrightarrow{AP}|^2=6$,

$\therefore$ $|\overrightarrow{AP}|=6$

여기서 $\dfrac{x}{2}=6-y=z-6=t$ ($t>0$)라 하면

$a=2t$, $b=6-t$, $c=t+6$에서 $A(2t,\ 6-t,\ t+6)$이고

점 A와 평면 α 사이의 거리가 $\sqrt{6}$이므로

$$\left|\frac{2\cdot2t+(-1)\cdot(6-t)+1\cdot(t+6)-6}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}\right|=\left|\frac{6t-6}{\sqrt{6}}\right|=\sqrt{6}$$

$|t-1|=1$

$\therefore$ $t=2$ ($\because$ $t>0$)

$\therefore$ $a+b+c=2t+6-t+t+6=2t+12=16$

4) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 두 직선이 수직일 조건을 알고 있는가?

직선 $x=4-y=z-1$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ \ -1,\ \ 1)$ 또, $\overrightarrow{AB}=(-5,\ \ -5,\ \ 3-a\ )$이고 $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$이므로

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=-5+5+3-a=0$ $\therefore$ $a=3$

5) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 좌표 공간에서 구의 방정식을 구할 수 있는가?

구 S의 반지름의 길이를 r, 중심의 좌표를 $C(a,\ b,\ c)$라 하자.(단, $a>0,\ \ b>0,\ \ c>0$)

구 S가 x축과 y축에 접하는 점을 각각 $A,\ \ B$라 하면

$A(a,\ \ 0,\ \ 0\ ),\ \ B(0,\ \ b,\ \ 0\ )$이고 $r=\overline{AC}=\overline{BC}$이므로

$r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$ $\therefore$ $a=b$ ($\because a>0,\ \ b>0$)

따라서 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$?㉠

으로 놓을 수 있다.

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(0-c)^2=a^2+c^2$

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$이고, 원의 넓이가 64π이므로

$a^2\pi=64\pi,\quad a^2=64,\quad a=8(\because a>0)$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=64+c^2$?㉡

구 S가 z축과 만나는 점의 z좌표를 구하기 위해서 ㉡에

$x=0,\quad y=0$을 대입하면

$64+64+(z-c)^2=64+c^2,\qquad (z-c)^2=c^2-64$

$z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$\left(c+\sqrt{c^2-64}\right)-\left(c-\sqrt{c^2-64}\right)=8$ $\quad\therefore$ $c^2=80$

따라서 구 S의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=\sqrt{144}=12$

6) 답 : 15

[해설]

직선에 수직이므로 평면의 법선벡터 $\vec{h}=(2,\ 3,\ 1)$이다.

따라서, 평면의 방정식은 $2(x-1)+3(y+5)+(z-2)=0$

$2x+3y+z+11=0$

$\therefore$ $a=3,\ b=1,\ c=11$

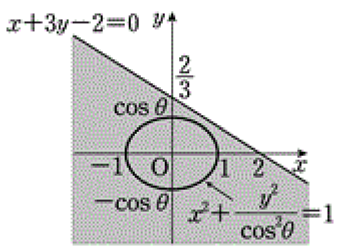
$\therefore$ $a+b+c=15$

7) 답 : 20

[해설]

평면 α가 구의 중심을 지나므로 단면은 반지름의 길이가 1인 원이 된다.

이 원을 xy평면에 정사영하면 장축은 2이고 단축은 $2\cos\theta$인 타원이 된다.



정답 및 해설

그림에서 타원이 어두운 부분에 존재해야 한다.

따라서, 두 도형 $x^2+\dfrac{y^2}{\cos^2\theta}=1,\ x+3y-2=0$이 만나지 않거나 접하면 된다.

타원의 접선 중 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$인 것을 구하면

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$에서 위쪽에 있는 접선은

$$y=-\frac{1}{3}x+\sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}\le\frac{2}{3}$$

$$\cos^2\theta\le\frac{1}{3},\ M^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ 60M^2=60\times\frac{1}{3}=20$$

8) 답 : 18

[해설]

$\overrightarrow{AB}//\vec{h}=(0,\ \sqrt{3},\ -1)$에서 $\overrightarrow{AB}=(0,\ \sqrt{3}t,\ -t)$라 하면

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(3,\ 6+\sqrt{3}t,\ -t)$이고,

B는 평면 위의 점이므로 $\sqrt{3}(6+\sqrt{3}t)-(-t)=0$에서

$t=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore$ $\overrightarrow{OB}=\left(3,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=9+9=18$

9) 답 : ③

[해설]

좌표 공간은 xy평면, yz평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x>0,\ y>0,\ z>0$인 영역,
② $x>0,\ y>0,\ z<0$인 영역,
③ $x>0,\ y<0,\ z>0$인 영역,
④ $x>0,\ y<0,\ z<0$인 영역,
⑤ $x<0,\ y>0,\ z>0$인 영역,
⑥ $x<0,\ y>0,\ z<0$인 영역,
⑦ $x<0,\ y<0,\ z>0$인 영역,
⑧ $x<0,\ y<0,\ z<0$인 영역,

한편, 주어진 구

C: $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

의 중심은 $(-2,\ 3,\ 4)$이므로 구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다.

따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$이고,

$|-2|<r,\ 3<r,\ 4<r$이므로 구 C는 yz평면, zx평면, xy평면에 의하여

두 부분으로 나누어진다.

따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2+3^2}<r$이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2+4^2}<r$이므로 구 C는 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2+4^2}>r$이므로 구 C는 x축과 만나지 않는다.

따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}>r$이므로 원점의 구 C의 외부에 있다.

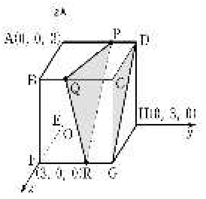
따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

10) 답 : ⑤

[해설]

아래 그림과 같이 E를 원점 O로 하는 좌표 공간에서



세 점 $P,\ Q,\ R$의 좌표는 $P(0,\ 2,\ 3),\ Q(3,\ 1,\ 3),\ R(3,\ 2,\ 0)$

$\therefore\ \overrightarrow{PQ}=(3,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{PR}=(3,\ 0,\ -3)$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 $\overrightarrow{PR}$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\frac{9}{\sqrt{10}\sqrt{18}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\therefore\ \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{10}\ (\because\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2})$$

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\alpha$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{10}\sqrt{18}\times\frac{\sqrt{55}}{10}$$

$$=\frac{3\sqrt{11}}{2}$$

$\triangle PQR$의 평면 $CGHD$위로의 정사영이 $\triangle DCG$이므로

$$\cos\theta=\frac{\triangle DCG}{\triangle PQR}=\frac{\frac{1}{2}\times3\times3}{\frac{3\sqrt{11}}{2}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

11) 답 : ③

[해설]

ㄱ. $F'(x)=f(x)>0$이므로 구간 $[a,\ b]$에서 $y=F(x)$는 증가한다.

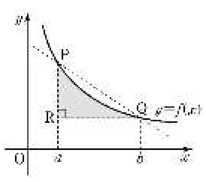
∴ 참

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{F'(b)-F'(a)}{b-a}$

∴ 거짓

ㄷ. $\displaystyle\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx=$ (아래 그림의 어두운 부분의 넓이)

$\dfrac{(b-a)(f(a)-f(b))}{2}=$ ($\triangle PRQ$의 넓이)



12) 답 : ①

[해설]

점 $(a,\ b,\ c)$가 구 $x^2+y^2+x^2=4$위에 있으므로

$a^2+b^2+c^2=4$

한편, 두 평면 $ax+by+cz=1$, $ax+by+cz=3$은 서로 평행하므로 이 두 평면 사이의 최단거리 d는 평면 $ax+by+cz=3$위의 한 점 $\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$로부터 평면 $ax+by+cz-1=0$에 이르는 거리와 같다.

따라서, $d=\dfrac{\left|a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4}}=1$

13) 답 : 10

[해설]

구의 중심 $(1,1,1)$에서 평면 $x+2y-2z=31$에 이르는 거리가 구의 반지름의 길이와 같으므로

구의 반지름의 길이를 r라 하면 $r=\dfrac{|1+2-2-31|}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{30}{3}=10$

14) 답 : 36

[해설]

구 $x^2+y^2+z^2=1$위의 점 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right)$에서 구에 접하는 평면 α의 방정식은

$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1$

$\therefore\ 4x+3y=5$

점 $\left(0,\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$에서 구에 접하는 평면 의 방정식은 $\frac{3}{5}y+\frac{4}{5}z=1$

$\therefore\ 3y+4z=5$

평면 α,β의 법선벡터를 각각 $\vec{a},\vec{b}$라 하면

$\vec{a}=(4,3,0)$, $\vec{b}=(0,3,4)$

평면 α와 평면 β가 이루는 각을 θ라 하면

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{4\cdot0+3\cdot3+\ \cdot4}{\sqrt{4^2+3^2}\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5\times5}=\frac{9}{25}$$

$S'=S\cdot\cos\theta$에서 $S=100$, $\cos\theta\frac{9}{25}$ 이므로

$S'=100\times\frac{9}{25}=36$

따라서, 구하는 정사영의 넓이는 36이다.

15) 답 : ②

[해설]

주어진 구는 중심이 $(1,2,3)$이고 반지름의 길이가 1인 구이다.

따라서, 중심 $(1,2,3)$으로부터 평면 $x+y+z=10$까지의 거리는

$h=\dfrac{|1+2+3-10|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

그러므로 구의 점에서 평면까지의 거리의 최솟값은

$\dfrac{4}{\sqrt{3}}-1=\dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{3}$

16) 답 : ③

[해설]

$x^2+y^2+z^2=6\ldots$①

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9\ldots$②

① -②: $2x-1+4y-4+4z-4=-3$

$\therefore\ 2x+4y+4z=6$

평면 α의 식은 $x+2y+2z=3$ 이며 평면 α의 법선벡터는 $(1,2,2)$

xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{(1,2,2)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\dfrac{2}{3}$

17) 답 : ⑤

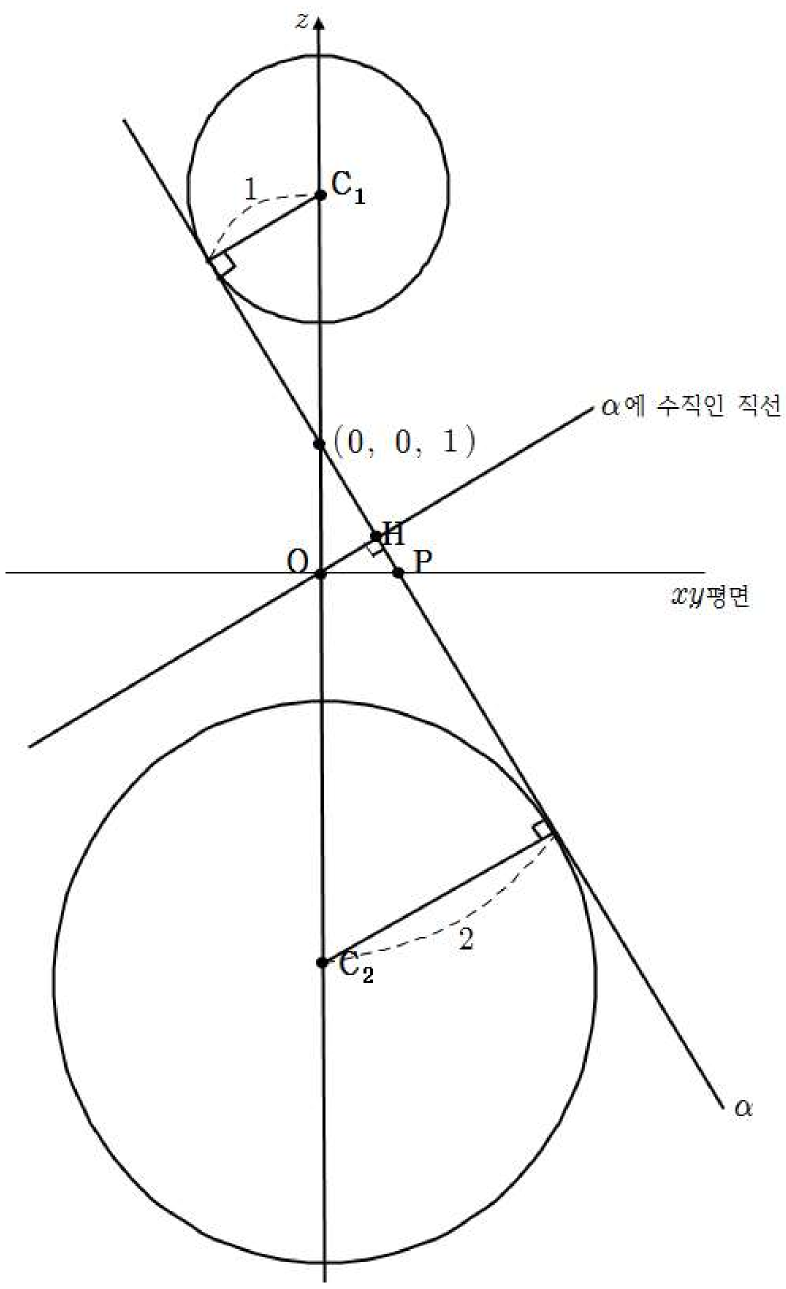
[해설]

두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u_1}=(4,3)$, $\vec{u_2}=(-1,3)$이라 하면,

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\dfrac{5}{5\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

18) 답 : 40

[해설]



두 구 S_1 과 S_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하자.

두 구의 중심 C_1, C_2와 점 P 를 지나는 평면으로 자른 단면을 그려보면

평면 α 는 반드시 점 $(0,0,1)$을 지남을 알 수 있다.

원점 O 에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면

H 는 점 $(0,0,1)$와 점 P를 $3:1$ 로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)=\frac{1}{8}(3,\ \sqrt{3},\ 2)\ //\ (3,\ \sqrt{3},\ 2)$ 이다.

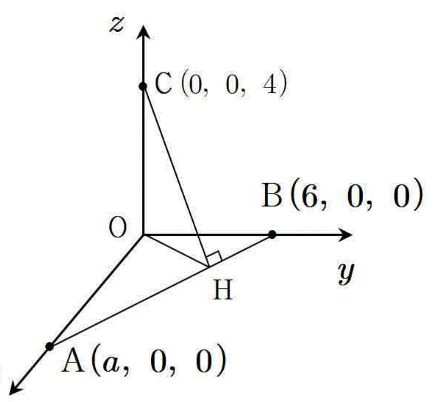
따라서 평면 α의 법선벡터 $(\vec{n})$를

$\vec{n}=(3,\ \sqrt{3},2)$ 로 잡을 수있고
평면 α의 방정식을 $3x+\sqrt{3}y+2z+d=0$로 설정할 수 있다.
여기에 평면 α 위의 점 $(0,0,1)$을 대입하면
$d=-2$ 임을 알 수 있다.
평면 α의 방정식은 $3x+\sqrt{3}y+2z-2=0$ 이다.

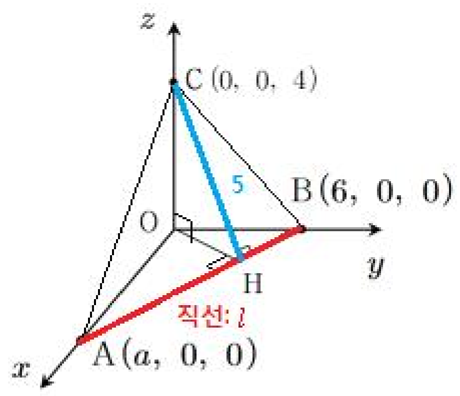
한편 $Q(k,\ -\sqrt{3},2)$가 평면 α위의 점이므로 대입하면
$k=\dfrac{1}{3}$이고 $120k=40$이다.

19) 답 : 10
[해설]
법선벡터가 $(2,a,4)$이고 점 $(1,1,-2)$를 지나는 평면이므로
$2(x-1)+a(y-1)+4(z+2)=0$이며 정리하면
$2x+ay+4z+6-a=0$과 $2x+5y+bz+c=0$이 같은 평면이므로
$a=5$, $b=4$, $c=1$
$\therefore\ a+b+c=10$

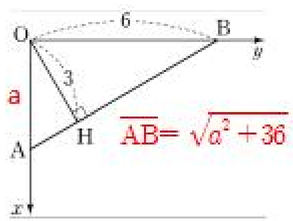
20) 답 : ⑤
[해설]



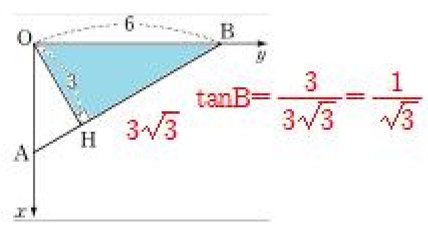
$A(a,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,4)$, C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=5$
삼수선 정리에 의하여 선분 OH와 선분 AB는 수직이고
$\triangle COH$에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OH}=3$이다.
$\triangle OAB$의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}$이므로
$\dfrac{1}{2}\times a\times 6=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{a^2+6^2}$
$\Rightarrow 2a=\sqrt{a^2+6^2}$
$\Rightarrow 4a^2=a^2+36$
$\Rightarrow a^2=12$
$\therefore\ a^2=12$
[MIM edu:자세한 풀이]



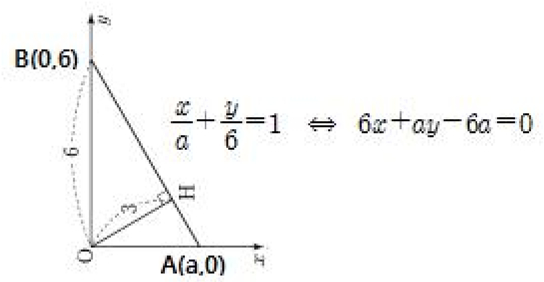
$A(a,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,4)$라 하고
C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼수선 정리에 의하여 $\overline{OH}\perp l$ ...㉮
$\triangle COH$에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OH}=3$이다.
[1] $\triangle OAB$에서 넓이를 이용한 방법
$\triangle OAB$의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{AB}$이므로
$\dfrac{1}{2}\times a\times 6=\dfrac{1}{2}\times 3\times\sqrt{a^2+6^2}$
$\Rightarrow 2a=\sqrt{a^2+6^2}$
$\Rightarrow 4a^2=a^2+36$
$\Rightarrow a^2=12$
$\therefore\ a^2=12$
[2] $\triangle OAB$에서 닮음관계를 이용하는 방법



세 삼각형 $\triangle OAH$, $\triangle OBH$, $\triangle OAB$이 닮았으므로
소관계인 $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OH}\times\overline{AB}$을 이용하면
$6a=3\sqrt{a^2+36}\Rightarrow a^2=12$
[3] $\triangle OAB$에서 삼각비를 이용하는 방법
직각삼각형 $\triangle OAH$에서 $2:1:\sqrt{3}$이며 $\overline{BH}=3\sqrt{3}$



직각삼각형 $\triangle OAH$에서
$a^2=\overline{OA}^2=(6\tan B)^2=36\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=12$
[4]평면에서 원점과 직선까지 거리 이용
두 절편이 각각 a, 6인 직선의 방정식은 아래 그림처럼
$6x+ay-6a=0$ ...㉮



원점 $O(0,0)$에서 직선까지 거리가 3이므로

$$\frac{|-6a|}{\sqrt{6^2+a^2}}=3 \Rightarrow a^2=12$$

[5]공간 직선과 거리의 최소값을 이용하는 방법

두 점 $A(a,0,0)$, $B(0,6,0)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{6},\ z=0 \ldots ㉮$$

㉮위의 점 H는 매개변수로 $H(-at+a,6t,0)$으로 놓을 수 있다.

점 $C(0,0,4)$에 대해 $\overline{CH}$의 최솟값이 5이어야 하므로

$$\overline{CH}^2=(-at+a)^2+(6t)^2+16$$
$$=(a^2+36)t^2-2a^2t+(a^2+16)$$
$$=(a^2+36)\left(t-\frac{a^2}{a^2+36}\right)^2+a^2+16-\frac{a^4}{a^2+36}$$

$\therefore\ a^2+16-\dfrac{a^4}{a^2+36}=25$이며 공통부분인 $a^2=k$라 놓으면

$k+16-\dfrac{k^2}{k+36}=25$이며 정리하면

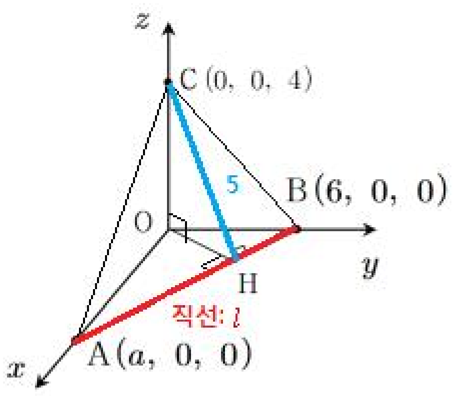
$(k+16)(k+36)-k^2=25(k+36)$이항하면

$52k+576=25k+900$이며 정리하면

$27k=324$

$\therefore\ k=a^2=12$ [정답] ⑤

[6]공간 직선과 벡터를 이용하는 방법



두 점 $A(a,0,0)$, $B(0,6,0)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$$\frac{x-a}{a}=\frac{y}{6},\ z=0 \ldots ㉮$$

㉮위의 점 H는 매개변수로 $H(-at+a,6t,0)$으로 놓을 수 있다.

위의 그림에서 빨간 직선과 파란 직선이 수직이므로

두 직선의 방향벡터의 내적=0

$\overline{CH}=5$

위의 두 식을 풀면 된다.

21) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]좌표 공간에서 두 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있는가?

직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$

즉, $x=\dfrac{y+1}{2}=1-z$

점 $(a,b,0)$을 지나고 z축에 평행한 직선 l의 방정식은

$x=a,\ y=b$이므로

직선 AB와 직선 l의 교점의 좌표를 $C(a,b,c)$로 놓을 수 있다.

점 C는 직선 AB위의 점이므로

$$a=\frac{b+1}{2}=1-c$$

따라서, $a=\dfrac{b+1}{2}$에서 $b=2a-1$이고

점 $(a,b,0)$이 원 $x^2+y^2=13$위의 점이므로

$a^2+b^2=13$

$\therefore\ a^2+(2a-1)^2=13$

$5a^2-4a-12=0,\ (a-2)(5a+6)=0$

$a<0$이므로 $a=-\dfrac{6}{5}$

$\therefore\ b=2a-1=2\cdot\left(-\dfrac{6}{5}\right)-1=-\dfrac{17}{5}$

$\therefore\ a+b=-\dfrac{6}{5}+\left(-\dfrac{17}{5}\right)=-\dfrac{23}{5}$

22) 답 : ②

[해설]

주어진 구 C의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=6$

이므로 구의 중심은 $P(1,-1,-1)$이다.

$\overrightarrow{PA}=(1,1,-2)$

는 평면 α에 평행하고 구에 접하는 평면의 법선벡터이다.

구하는 평면의 방정식을 $x+y-2z+d=0$으로 놓으면

구의 중심과 평면사이의 거리는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|1-1+2+d|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\sqrt{6}$$

$|2+d|=6$

$\therefore\ d=4$또는 $d=-8$

이때, 점 A를 지나는 평면 α의 방정식은 $x+y-2z-8=0$이고,

구하는 평면의 방정식은 $x+y-2z+4=0$

[정답]②

23) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 좌표평면에서 직선의 방향벡터 이해하기

$P\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\dfrac{1}{2},-4\right)$이므로

$\overrightarrow{PQ}=-\dfrac{3}{2}(1,3)$

$\vec{u}$와 $\overrightarrow{PQ}$는 평행하므로 $\vec{u}=k(1,3)$ (k는 실수)

$|\vec{u}|=\sqrt{10}$이므로 $10k^2=10$, $k=\pm1$

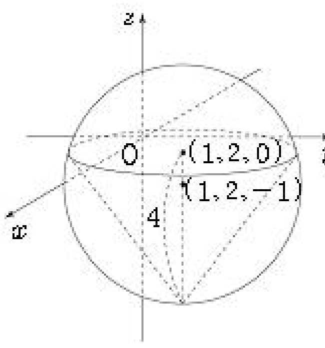
그러므로 $a=1$, $b=3$ 또는 $a=-1$, $b=-3$

따라서 $|a-b|=2$

24) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 공간좌표 이해하기



구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ 를 xy평면으로 자른 단면은 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$이 되므로, 밑면의 넓이는 8π가 되고, 부피가 최대가 되는 원뿔의 높이는 4이다.

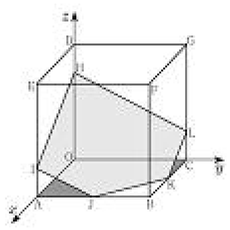
$\therefore$ 원뿔의 부피의 최댓값은 $\frac{32}{3}\pi$

25) 답 : 294

[해설]

[출제 의도] 평면과 평면의 위치관계와 정사영을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.

평면 $x+y+2z=6$에 의하여 정육면체가 잘린 단면은 그림과 같다.



두 평면 $x+y+2z=6$, $z=0$의 법선벡터가 각각 $(1, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$이므로

두 평면이 이루는 각 θ에 대하여

$\sqrt{6}\cdot 1\cdot\cos\theta=2$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}$

오각형 $HIJKL$의 정사영이 오각형 $OAJKC$이므로

$S\cos\theta=14$

따라서 $S=7\sqrt{6}$ 이므로

$S^2=294$

26) 답 : ①

[해설]

점 $(1, -2, 3)$을 지나고 방향벡터가 $(2, 3, 4)$인 직선의 매개변수방정식은 $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=4t+3$이다.

$x=2t+1=3$일 때 $t=1$이므로

조건에 맞는 직선은 점 $(3, 1, 7)$을 지난다.

따라서 $a+b=8$이다.

27) 답 : ①

[해설]

$l: \frac{x-7}{2}=\frac{y-14}{3}=z$이고 방향벡터는 $\vec{d}=(2, 3, 1)$이므로

수선의 발 H를 $H(2t+7, 3t+14, t)$라 하면

$\overrightarrow{OH}\cdot\vec{d}=0$에서 $2(2t+7)+3(3t+14)+t=0$

$\therefore$ $t=-4$

따라서 $H(-1, 2, -4)$이므로 $a+b+c=-3$이다.

28) 답 : 9

[해설]

$A(1, 0, \sqrt{3})$, $B(0, 3, 2\sqrt{3})$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{3}$

$l: 4x+3y+1=0$, $z=0$에서 $\overline{CE}=1$, $\overline{DF}=2$

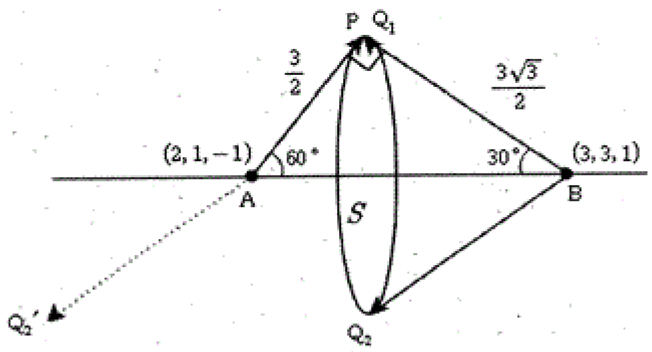
$\therefore$ $\overline{EF}=3$

$\overline{AE}=2$, $\overline{BF}=4$이므로

$\square AEFB=\frac{1}{2}\times\{(2+4)\times 3=9)$

29) 답 : 35

[해설]



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BQ}|\cos\theta$이고 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}$, $|\overrightarrow{BQ}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

이므로 두 벡터가 이루는 각 θ에 의하여 최댓값과 최솟값이 결정된다.

최댓값은 원 S에서 P와 Q가 서로 만날 때, 최솟값은 원 S에의 지름의 양끝 점에서

두 벡터의 종점이 위치할 때의 값이다.

두 구의 중심 A와 B사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2+(3-1)^2+(1+1)^2}=3$이고 $|\overrightarrow{AP}|=\frac{3}{2}$, $|\overrightarrow{BQ}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

이므로 내적의 최댓값은 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$일 때로 0이고,

내적의 최솟값은 두 벡터가 이루는 각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$일 때로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BQ}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BQ}|\cos\theta$

$=\frac{3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{27}{8}$

이므로 $M-m=0-\left(-\frac{27}{8}\right)=\frac{27}{8}$이다.

$\therefore$ $a+b=35$

30) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]두 평면이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

접점으로 이루어진 도형을 포함하는 평면의 법선벡터는

$(1, 3, 5)-(1, 7, 2)=(0, -4, 3)$이고,

xy평면의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|0, -4, 3)\cdot(0, 0, 1||0, -4, 3|\times|0, 0, 1|}{=\frac{3}{5}}$$

31) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]점과 평면 사이의 거리를 구할 수 있는가를 묻는 문제이

다.

점 $A(1,\ 4,\ 2)$는 직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-1}{2}$ 위에 있으므로 $a=4,\ b=4$

따라서 점 $A(1,\ 4,\ 2)$와 평면 $4x+4y+2z+48=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4\times1+4\times4+2\times2+48|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{72}{6}=12$$