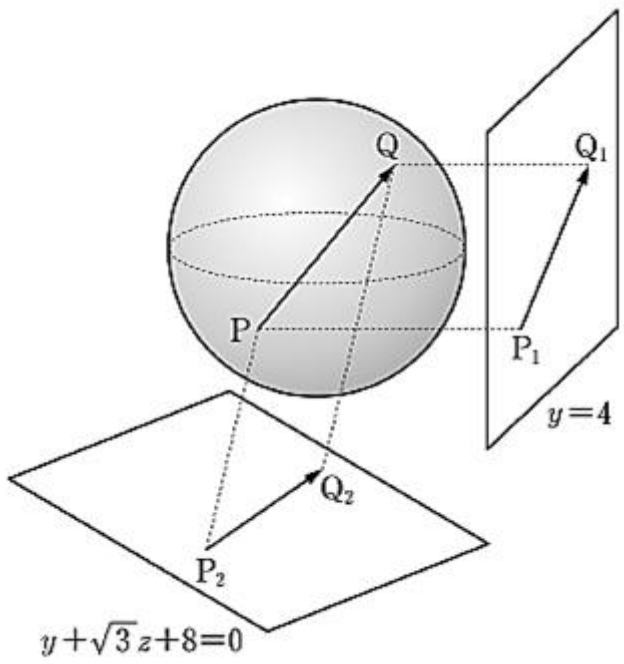
Ⅳ.공간벡터

1.공간벡터

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

1 좌표 공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오.
[4점]



[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

2 세 점 O, A, B에 대하여 두 벡터 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$
(나) $\|\vec{a}\|=2$, $\|\vec{b}\|=3$

이때, 두 선분 OA, OB를 두 변으로 하는 평행사변형의 넓이는?[3점]

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

www.mimedu.co.kr
구글 플레이 스토어에서 【밈에듀】를 검색하면 "수학 개념 및 기출문제 학습 앱"을 설치할 수 있습니다

정답 및 해설

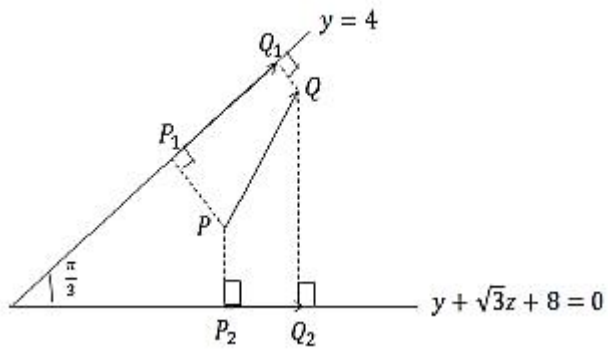
1.공간벡터

중단원 기출문제

1) 답 : 24

[해설]

[출제 의도] 정사영을 이해하고 최댓값을 구할 수 있는가?



두 평면 $y=4$와 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$라 하면 두 평면이 이루는 예각의 크기 γ는

$\cos\gamma=\dfrac{|\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}|}{|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

따라서 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 벡터 $\overrightarrow{P_1Q_1}$이 이루는 예각의 크기를 α, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 벡터 $\overrightarrow{P_2Q_2}$이 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 이다. 그러므로

$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2=\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\right)$

$=|\overrightarrow{PQ}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)=|\overrightarrow{PQ}|^2 1-\dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta)$

주어진 식은 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최대이고 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖는다.

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ 인 경우에

$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\cos 2\alpha+\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-2\alpha\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha=\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$

이므로 주어진 식은 $|\overrightarrow{PQ}|=4$이고 $\cos 2\alpha+\cos 2\beta=-1$일 때 최댓값 24를 갖는다.

$\alpha+\beta=\dfrac{2\pi}{3}$ 인 경우도 마찬가지이다.

그러므로 최댓값은 24이다.

2) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]벡터의 연산과 내적을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

두 변 OA, OB가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=6\cos\theta=2$ 에서 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ (넓이) $=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=4\sqrt{2}$