

Ⅲ.공간도형과 공간좌표

2.공간좌표

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2018 학년도 대수능]

1 좌표 공간의 두 점 A(1, 6, 4), B(a, 2, -4)에 대하여 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표가 (2, 5, 2)이다. a의 값은? [2점]

- ① 1 ② 3 ③ 5
- ④ 7 ⑤ 9

[난이도 : ★☆☆] [2017 학년도 대수능]

2 좌표 공간의 두 점 A(1, a, -6), B(-3, 2, b)에 대하여 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이 x축 위에 있을 때, a+b의 값은? [3점]

- ① -1 ② -2 ③ -3
- ④ -4 ⑤ -5

[난이도 : ★☆☆] [2016 학년도 대수능]

3 좌표 공간에서 세 점 A(a, 0, 5), B(1, b, -3), C(1, 1, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 (2, 2, 1)일 때, a+b의 값은?[2점][2016(B) /수능 3]

- ① 6 ② 7 ③ 8
- ④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★☆☆] [2015 학년도 대수능]

4 좌표 공간에서 두 점 A(2, a, -2), B(5, -3, b)에 대하여 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이 x축 위에 있을 때, a+b의 값은?[3점]

- ① 10 ② 9 ③ 8
- ④ 7 ⑤ 6

[난이도 : ★☆☆] [2014 학년도 대수능]

5 좌표 공간에서 두 점 A(a, 5, 2), B(-2, 0, 7)에 대하여 선분 AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표가 (0, b, 5)이다. a+b의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★☆☆] [2013 학년도 대수능]

6 좌표 공간에서 두 점 A(a, 1, 3), B(a+6, 4, 12)에 대하여 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표가 (5, 2, b)이다. a+b의 값은?[2점][2013학년도 수능]

- ① 5 ② 7 ③ 9
- ④ 11 ⑤ 13

[난이도 : ★☆☆] [2012 학년도 대수능]

7 좌표 공간에 점 A(9, 0, 5)가 있고, xy평면 위에 타원 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 이 있다.

타원 위의 점 P에 대하여 \overline{AP} 의 최댓값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆☆] [2009 학년도 대수능]

8 좌표 공간에서 평면 $x=3$ 과 평면 $z=1$ 의 교선을 l 이라 하자.

점 P 가 직선 l 위를 움직일 때, 선분 OP 의 길이의 최솟값은?(단, O 는 원점이다.) [3점]

- ① $2\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}$ ③ $2\sqrt{3}$
- ④ $\sqrt{14}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆☆] [2009 학년도 대수능]

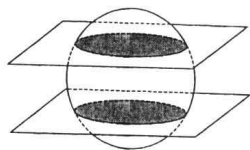
9 좌표 공간에 네 점 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-3, 0, 0)$, $D(0, 0, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 사면체 $ABCD$ 가 있다.

모서리 BD 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (a, b, c) 라고 할 때,

$a+b+c = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆☆] [2002 학년도 대수능]

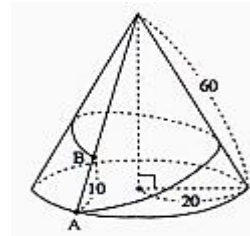
10 거리가 1인 두 평행한 평면으로 반지름의 길이가 1인 구를 잘라서 얻어진 두 단면의 넓이의 합의 최댓값은? [3점]



- ① $\frac{1}{2}\pi$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π
- ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ 2π

[난이도 : ★★☆☆] [1998 학년도 대수능]

11 다음 그림과 같은 직원뿔 모양의 산이 있다. A 지점을 출발하여 산을 한 바퀴 돌아 B 지점으로 가는 관광 열차의 궤도를 최단거리로 놓으면, 이 궤도는 처음에는 오르막길이지만 나중에는 내리막길이 된다. 이 내리막길의 길이는?



- ① $\frac{200}{\sqrt{19}}$ ② $\frac{300}{\sqrt{30}}$ ③ $\frac{300}{\sqrt{91}}$
- ④ $\frac{400}{\sqrt{91}}$ ⑤ $\frac{300}{\sqrt{19}}$

[난이도 : ★★☆☆] [2015년 9월 모의평가]

12 좌표 공간의 점 $P(2, 2, 3)$ 을 yz 평면에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q 라 하자.

두 점 P 와 Q 사이의 거리는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆☆] [2006년 9월 모의평가]

13 좌표 공간의 세 점 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$ 에 대하여 선분 BC 를 2:1로 내분하는 점을 P , 선분 AC 를 1:2로 내분하는 점을 Q 라 하자. 점 P, Q 의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 P', Q' 이라 할 때, 삼각형 $OP'Q'$ 의 넓이는?(단, O 는 원점이다.) [3점]

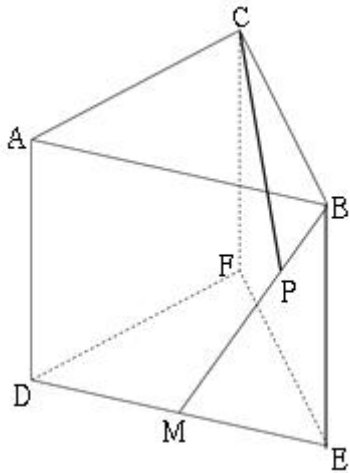
- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆☆] [2015년 7월 학력평가]

14 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 6인 정삼각기둥 $ABCDEF$ 가 있다.

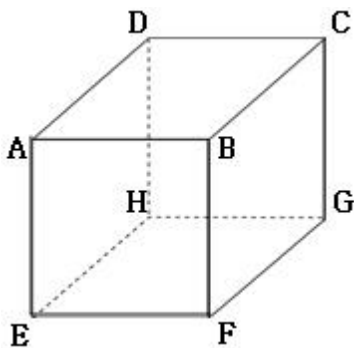
변 DE 의 중점 M 에 대하여 선분 BM 을 1:2로 내분하는 점을 P 라 하자.

$\overline{CP}=l$ 일 때, $10l^2$ 의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆☆] [2014년 7월 학력평가]

15 한 변의 길이가 3인 정육면체 $ABCD-EFGH$ 가 있다.



선분 AG 를 1:2로 내분하는 점을 I 라 할 때, 선분 FI 의 길이는? [3점]

- ① 3 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{15}$
- ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{21}$

[난이도 : ★★☆☆] [2011년 10월 학력평가]

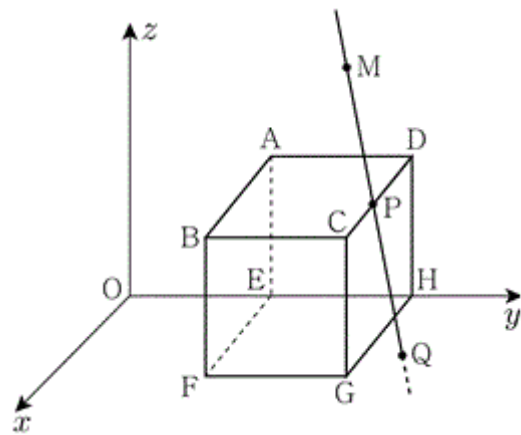
16 좌표 공간에서 점 $A(1, 3, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B 라 하고, 점 A 를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 C 라 하자.

세 점 A, B, C 를 지나는 원의 반지름의 길이는?[3점]

- ① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$
- ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★☆☆] [2009년 10월 학력평가]

17 그림과 같이 좌표 공간에 있는 정육면체 $ABCD-EFGH$ 에서 $A(0, 3, 3), E(0, 3, 0), F(3, 3, 0), H(0, 6, 0)$ 이다.



점 $M(1, 5, 6)$ 과 정육면체의 모서리 위를 움직이는 점 P 에 대하여 직선 MP 가 xy 평면과 만나는 점을 Q 라 하자.

이때, 선분 MQ 의 길이의 최댓값은?[4점]

- ① $2\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $2\sqrt{14}$
- ④ $2\sqrt{15}$ ⑤ $2\sqrt{17}$

정답 및 해설

2.공간좌표

중단원 기출문제

1) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 좌표 공간에서 선분의 내분점을 구할 수 있는가?

두 점 $A(1, 6, 4)$, $B(a, 2, -4)$ 에 대하여

선분 AB 를 1:3으로 내분하는 점의 좌표가 $(2, 5, 2)$ 이므로

$$\frac{1 \times a + 3 \times 1}{1+3} = 2$$

이다. 즉, $a+3=8$ 이므로 $a=5$

2) 답 : ①

[해설]

두 점 $A(1, a, -6)$, $B(-3, 2, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 3:2로 외분하는 점의

좌표는 $\left(\frac{3 \times (-3) - 2 \times 1}{3-2}, \frac{3 \times 2 - 2 \times a}{3-2}, \frac{3 \times b - 2 \times (-6)}{3-2}\right)$ 이며

이 점은 x 축 위에 있으므로 $y=z=0$ 이다.

$6-2a=0$, $3b+12=0$ 에서

$$a=3, b=-4 \text{이다.}$$

$$\therefore a+b=3+(-4)=-1$$

3) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 공간좌표를 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있는가?

세 점 $A(a, 0, 5)$, $B(1, b, -3)$, $C(1, 1, 1)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의

무게중심의 좌표는 $\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5+(-3)+1}{3}\right)$

$$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+1}{3}, 1\right)$$

이때, 무게중심의 좌표가 $(2, 2, 1)$ 이므로

$$\frac{a+2}{3} = 2, \quad \frac{b+1}{3} = 2$$

$$\therefore a=4, b=5$$

$$\therefore a+b=9$$

4) 답 : ④

[해설]

선분 AB 를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 2}{2+1}, \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot a}{2+1}, \frac{2 \cdot b + 1 \cdot (-2)}{2+1}\right)$$

즉, $\left(4, \frac{a-6}{3}, \frac{2b-2}{3}\right)$ 이고 이 점이 x 축 위에 있으므로

y 좌표와 z 좌표의 값은 각각 0이어야 한다.

$$\therefore a=6, b=1$$

$$\therefore a+b=7$$

5) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 좌표 공간에서 두 점의 내분점을 구할 수 있는가?

선분 AB 를 3:2로 내분하는 점을 P 라 하면

$$P\left(\frac{-6+2a}{5}, \frac{10}{5}, 5\right) \text{이므로 } \left(\frac{-6+2a}{5}, \frac{10}{5}, 5\right) = (0, b, 5)$$

$$\therefore a=3, b=2, a+b=5$$

6) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 좌표 공간에서 내분점과 외분점

이 문제에는 등식이 하나도 보이지 않지만 두 개의 문자 a, b 가 보이므로

문제속에 숨어 있는 두 개의 등식을 찾아 내면 답을 찾을 수 있다.

1st: 노트 위에대충 두 점 $A(a, 1, 3)$, $B(a+b, 4, 12)$ 라고 찍는다.

2nd: 선분 \overline{AB} 를 만들고 1:2로 내분하는 점을 찍는다.

3rd: 교과서에 있는 내분점 공식을 사용하여 내분점을 찾는다.

4th: 위에서 찾은 내분점과 문제에 주어진 점 $(5, 2, b)$ 과 같다고 한다.

$A(a, 1, 3)$, $B(a+b, 4, 12)$ 이고 \overline{AB} 를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

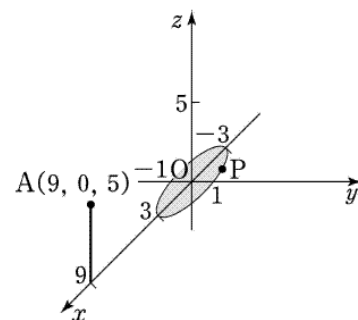
$$\left(\frac{a+6+2a}{1+2}, \frac{4+2}{1+2}, \frac{12+6}{1+2}\right) = (a+2, 2, 6) = (5, 2, b)$$

$$5 = a+2 \text{에서 } a=3, b=6$$

$$\therefore a+b=3+6=9$$

7) 답 : 13

[해설]



점 $A(9, 0, 5)$ 에서 타원 위의 점 P 까지의 거리가 최대가 되려면 $P(-3, 0, 0)$ 일 때이다.

$$\therefore \text{따라서 } \overline{AP} \text{의 최댓값은 } \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

8) 답 : ②

[해설]

교선 l 위의 임의의 점 P 는 $(3, y, 1)$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{3^2 + y^2 + 1^2} = \sqrt{10 + y^2}$$

따라서, \overline{OP} 의 최솟값은 $y=0$ 일 때이다.

$$\therefore \overline{OP} = \sqrt{10}$$

9) 답 : 11

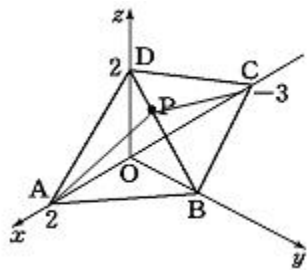
[해설]

실수 t 에 대하여

$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OD} \quad (0 \leq t \leq 1) = (0, t, 2-2t)$$

정답 및 해설

이라 하면



$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= |\overline{AP}|^2 + |\overline{CP}|^2 \\ &= 10t^2 - 16t + 21 \\ &= 10\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{73}{5} \end{aligned}$$

$\therefore t = \frac{4}{5}$ 일 때 최소가 된다.

$$\therefore P\left(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = (a, b, c)$$

$$\therefore a=0, b=\frac{4}{5}, c=\frac{2}{5}$$

$$\therefore a+b+c=0+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}=\frac{q}{p}$$

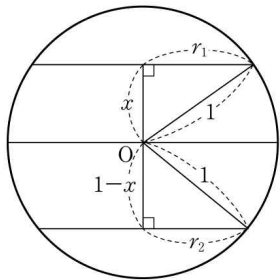
$$\therefore p+q=11$$

10) 답 : ④

[해설]

주어진 그림에서 위, 아래의 단면은 원이다.

즉, 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 로 놓고 오른쪽의 그림을 얻을 수 있다.



구의 중심에서 위의 단면까지의 거리를 x 로 놓으면

$$r_1^2 = 1 - x^2, r_2^2 = 1 - (1-x)^2 = -x^2 + 2x$$

따라서, 두 단면의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} \pi r_1^2 + \pi r_2^2 &= \pi(1 - x^2 - x^2 + 2x) \\ &= \pi(-2x^2 + 2x + 1) \\ &= \pi\left\{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때, 넓이의 합은 최댓값 $\frac{3}{2}\pi$ 를 갖는다.

11) 답 : ④

[해설]

$$l = r\theta \text{ 에서 } 40\pi = 60\theta \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

위의 그림과 같은 원뿔의 전개도에서 A와 B의 최단 거리는 \overline{AB} 이다.

C에서 \overline{AB} 에 가장 가까운 지점을 D라 하면 A에서 D까지는 오르막길,

D에서 B까지는 내리막길이 된다.

$\triangle ACB$ 에서 제 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 60^2 + 50^2 - 2 \cdot 60 \cdot 50 \cdot \cos 120^\circ = 9100$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{9100} = 10\sqrt{91} \quad \triangle ACB \text{의 넓이를 } S \text{라 하면}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 60 \times 50 \times \sin 120^\circ = 750\sqrt{3}$$

$$\text{한편, } S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{91} \cdot \overline{CD} = 750\sqrt{3} \therefore$$

$$\overline{CD} = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$$

$$\triangle CBD \text{에서 } \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 = 50^2 - \left(\frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2 = \frac{400^2}{91}$$

$$\therefore \overline{BD} = \frac{400}{\sqrt{91}}$$

12) 답 : ④

[해설]

$P(2, 2, 3)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동시킨 점은 $Q(-2, 2, 3)$ 이다.

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = \sqrt{(2 - (-2))^2 + 0 + 0} = 4$$

13) 답 : ①

[해설]

$\triangle AOC \sim \triangle AQ'Q$ 이므로 점 Q' 의 좌표는 $Q'(2, 0, 0)$

$\triangle BOC \sim \triangle AP'P$ 이므로 점 P' 의 좌표는 $P'(0, 1, 0)$

삼각형 $OP'Q'$ 은 직각삼각형이므로 구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ [정

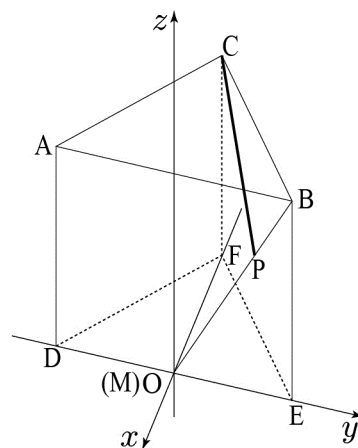
답] ①

14) 답 : 350

[해설]

[출제 의도] 공간좌표 이해하기

그림과 같이 점 M 을 좌표 공간의 원점으로 하면



점 $B(0, 3, 6)$, 점 $C(-3\sqrt{3}, 0, 6)$ 에서

점 P 는 \overline{BM} 를 1:2로 내분하므로 $P(0, 2, 4)$

$$\overline{CP} = l = \sqrt{35}$$

$$\text{따라서 } 10l^2 = 350$$

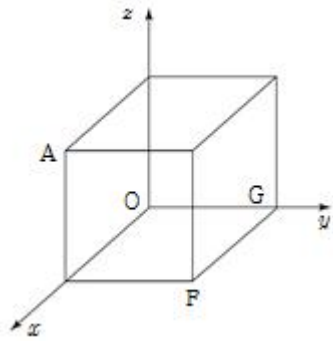
15) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 좌표 공간의 선분의 내분점 이해하기

점 H 를 좌표 공간의 원점으로 하면

정답 및 해설



점 $A(3, 0, 3)$, 점 $G(0, 3, 0)$ 에서
 내분점 I 의 좌표는 $(2, 1, 2)$
 점 $F(3, 3, 0)$ 이므로 $\overline{FI} = 3$

16) 답 : ②

[해설]

$A(1, 3, 2)$, $B(1, -3, -2)$, $C(1, 3, -2)$ 이므로

삼각형 ABC 는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{13}$

17) 답 : ⑤

[해설]

\overline{MQ} 가 최대가 되려면 점 B 를 지나야 하므로

(최대값) $= 2\overline{MB} = 2\sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17}$