Ⅲ.공간도형과 공간좌표

1.공간도형

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 좌표 공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α에 대하여 각 점 A, B, C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

(가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다. (나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, 에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]
ㄱ. 평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직이다. ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다. ㄷ. 세 점이 $A(2, 3, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(2, -1, 0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2016 학년도 대수능]

2 좌표 공간에 서로 수직인 두 평면 α와 β가 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=3\sqrt{5}$이고 직선 AB는 평면 β에 평행하다. 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고, 평면 β 위의 점 P와 평면 α 사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오.[4점][2016(B) /수능 27]

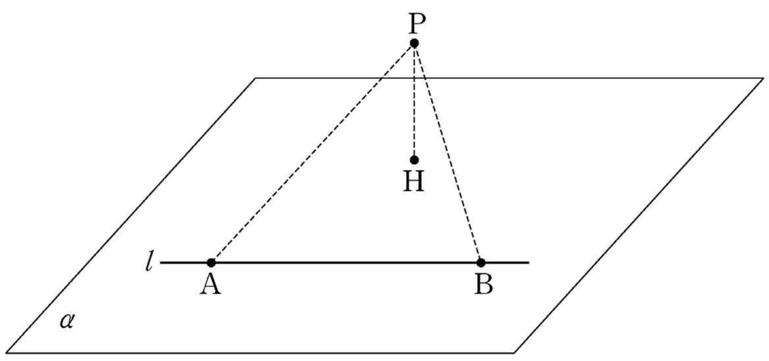
[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

3 좌표 공간에 점 $A(2, 2, 1)$과 평면 $\alpha : x+2y+2z-14=0$이 있다. 평면 α 위의 점 P가 $\overline{AP}\leq 3$을 만족시킬 때, 점 P가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는?[4점][2016(B) /수능 19]

① $\frac{14}{3}\pi$ ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ 4π
④ $\frac{11}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

4 평면 α 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선을 l이라 하고, 평면 α 위에 있지 않은 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB}=\overline{PA}=\overline{PB}=6$, $\overline{PH}=4$일 때, 점 H와 직선 l 사이의 거리는?[3점]

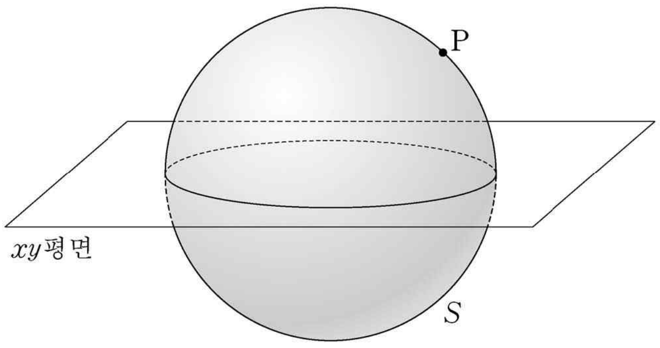


① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

5 좌표 공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $P(0,\ 5,\ 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

(가)원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나)원 C의 반지름의 길이는 1이다.



[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

6 좌표 공간에서 정사면체 $ABCD$의 한 면 ABC는 평면 $2x-y+z=4$ 위에 있고, 꼭짓점 D는 평면 $x+y+z=3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G(1,1,3)$일 때, 정사면체 $ABCD$의 한 모서리의 길이는?[4점][2013학년도 수능]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

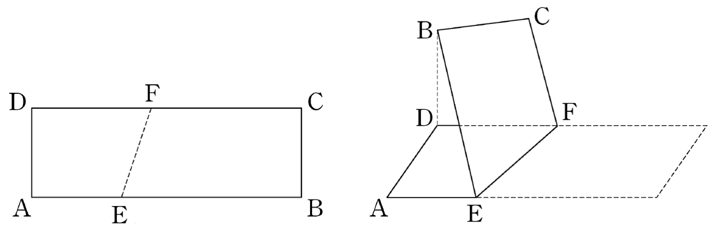
[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

7 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 $ABCD$ 모양의 종이가 있다.

선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 $AEFD$ 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다.

$\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 $AEFD$와 $EFCB$가 이루는 각의크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)[4점][2013학년도 수능]



[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

8 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

㈎삼각형 ABC의 넓이는 6이다. ㈏삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은?[4점]

① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$
③ $3\sqrt{5}-1$ ④ $2\sqrt{5}+1$
⑤ $3\sqrt{6}-2$

[난이도 : ★★★] [2012 학년도 대수능]

9 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다.

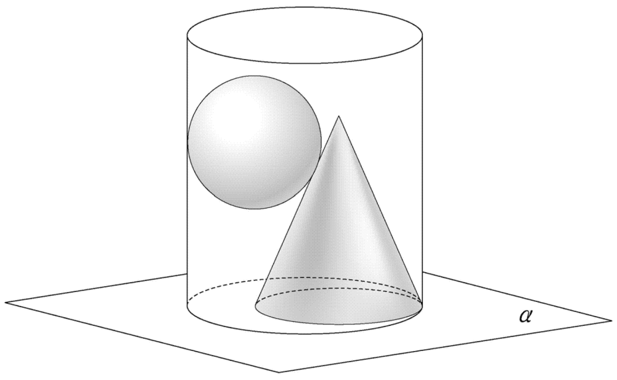
평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자.

중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다. (나)두 점 A, B의 평면 α위로의 정사영이 각각 A', B'일 때, $\angle A'OB' = 180^\circ$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다.

$100p$의 값을 구하시오.(단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A'은 일치한다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2011 학년도 대수능]

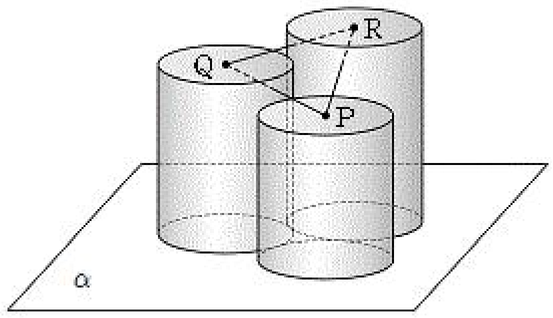
10 평면 α위에 $\angle A = 90^\circ$이고 $\overline{BC} = 6$인 직각이등변삼각형 ABC가 있다.

평면 α밖의 한 점 P에서 이 평면까지의 거리가 4이고, 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발이 점 A일 때, 점 P에서 직선 BC까지의 거리는?[3점]

① $3\sqrt{2}$ ② 5 ③ $3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

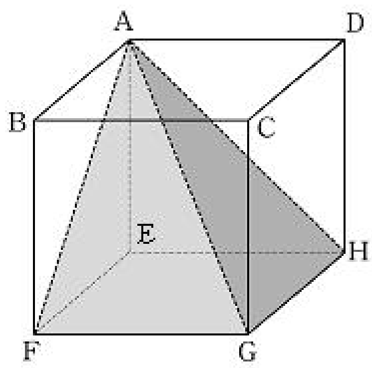
[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

11 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다. 세 원기둥의 높이를 각각 $8, a, b$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.(단, $8 < a < b$)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

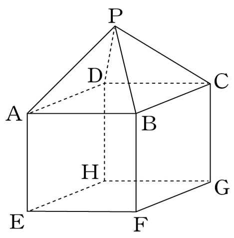
12 정육면체 $ABCD-EFGH$에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$의 값은?[3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

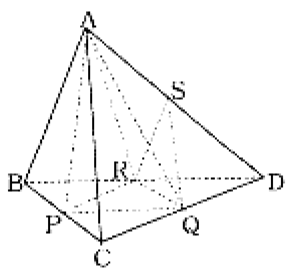
13 아래 그림과 같이 정육면체 위에 정사각뿔을 올려놓은 도형이 있다. 이 도형의 모든 모서리의 길이가 2이고, 면 PAB와 면 $AEFB$가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta$의 값은?(단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)[3점]



① $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$
④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2000 학년도 대수능]

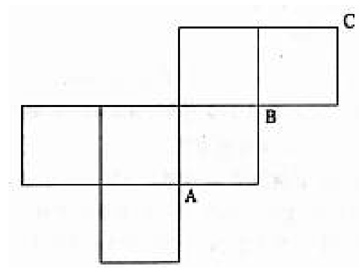
14 사면체 $ABCD$의 네 모서리 BC, CD, DB, AD의 중점을 각각 P, Q, R, S라고 할 때, 두 사면체 $APQR$와 $SQDR$의 부피의 비는?[3점]



① $1:1$ ② $2:1$ ③ $3:1$
④ $3:2$ ⑤ $4:1$

[난이도 : ★★☆] [1999 학년도 대수능]

15 [공통]다음은 어떤 정육면체의 전개도이다.

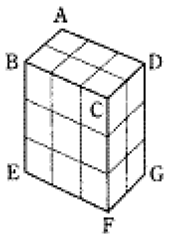


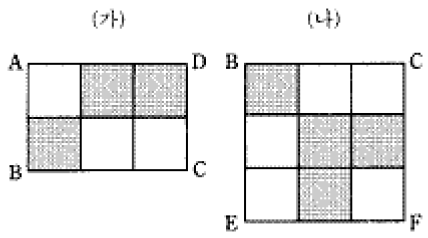
원래의 정육면체에서 $\angle ABC$의 크기는?

① 30° ② 45° ③ 60°
④ 90° ⑤ 120°

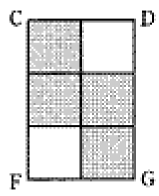
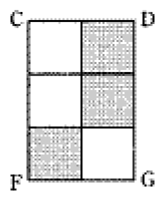
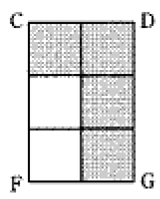
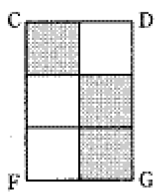
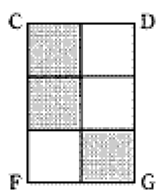
[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

16 크기가 같은 정육면체 모양의 18개의 투명한 유리상자로 다음 그림과 같이 직육면체를 만들었다. 이 중에서 적당히 몇 개의 유리상자를 빼내고 같은 크기의 검은 색 상자로 바꾸어 넣었다. 이 직육면체의 위에서 직사각형 $ABCD$를 내 려다보았을 때의 모양을 ㈎, 이 직육면체를 정사각형 $BEFC$의 정면에서 보았을 때의 모양을 ㈏라 하면 ㈎와 ㈏는 아래와 같다.





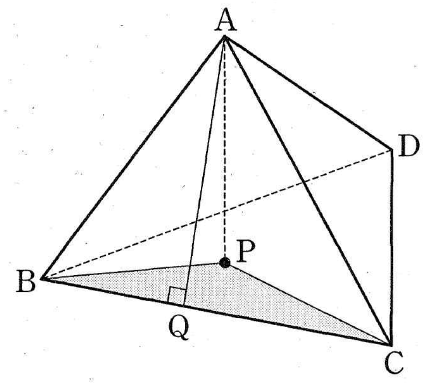
이 직육면체를 직사각형 $CFGD$의 정면에서 보았을 때의 모양은?

① 
② 
③ 
④ 
⑤ 

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

17 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{BC}=12$, $\cos(\angle ABC)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 사면체 $ABCD$에 대하여 점 A의 평면 BCD 위로의 정사영을 P라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

$\cos(\angle AQP)=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 일 때, 삼각형 BCP의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]

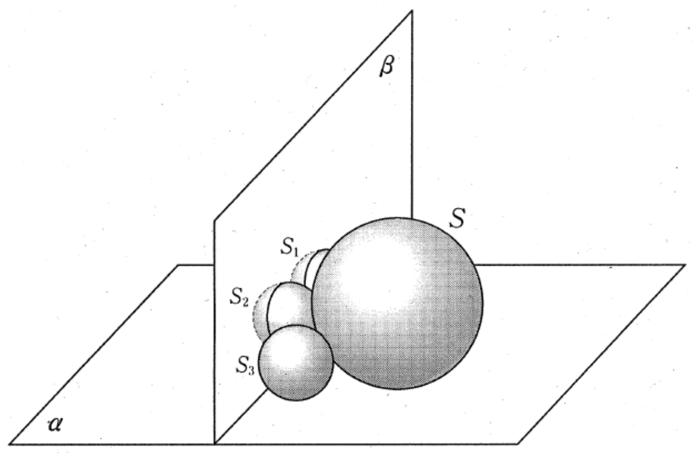


[난이도 : ★★★] [2014년 9월 모의평가]

18 그림과 같이 α위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3이 다음 조건을 만족시킨다.

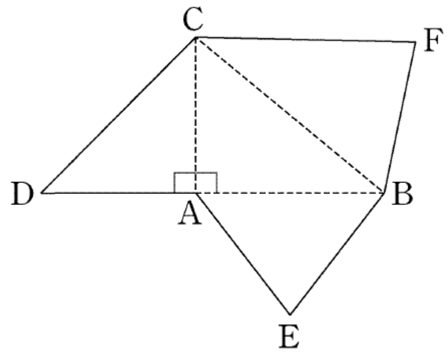
(가) S의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3의 반지름의 길이는 1이다.
(나) S_1, S_2, S_3은 모두 S에 접한다.
(다) S_1은 S_2와 접하고, S_2는 S_3과 접한다.

S_1, S_2, S_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3이라 하자. 두 점 O_1, O_2를 지나고 평면 α에 수직인 평면을 β, 두 점 O_2, O_3을 지나고 평면 α에 수직인 평면이 S_3과 만나서 생기는 단면을 D라 하자. 단면 D의 평면 β위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★★] [2011년 9월 모의평가]

19 그림은 $\overline{AC}=\overline{AE}=\overline{BE}$이고, $\angle DAC=\angle CAB=90^\circ$인 사면체의 전개도이다.



이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자.

사면체 $PABC$에 대하여 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $\overline{CP}=\sqrt{2}\cdot\overline{BP}$
ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.
ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

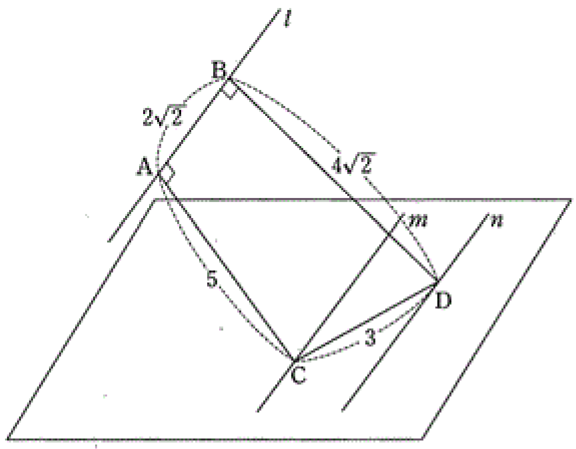
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

20 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다.

직선 l위의 두 점 A, B, 직선 m위의 점 C, 직선 n위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$

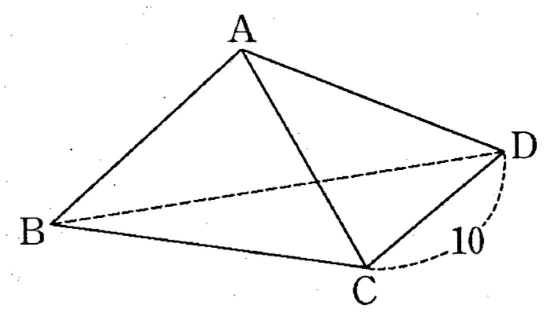


두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

[4점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

21 사면체 $ABCD$에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 $30°$ 이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는?[3점]



① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ 5
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

22 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 구에 내접하는 정사면체 $ABCD$가 있다.

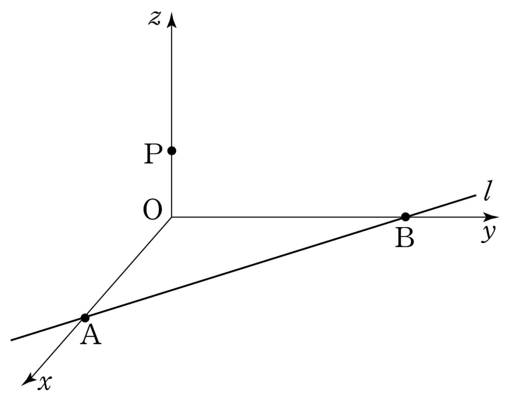
두 삼각형 BCD, ACD의 무게중심을 각각 F, G라 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. 직선 AF와 직선 BG는 꼬인 위치에 있다.
ㄴ. 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다.
ㄷ. $\angle AOG=\theta$일 때, $\cos\theta=\frac{1}{3}$ 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2006년 9월 모의평가]

23 좌표 공간에서 두 점 $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$을 지나는 직선 l이 있다. 점 $P\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$로부터 직선 l에 이르는 거리는?[3점]

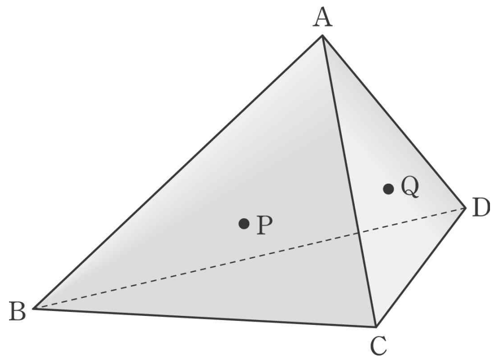


① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

24 사면체 $ABCD$의 면 ABC, ACD의 무게중심을 각각 P, Q라고 하자.

[보기]에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것을 모두 고르면?[3점]



[보기]
ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ
ㄴ. 직선 AD와 직선 BC
ㄷ. 직선 PQ와 직선 BD

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

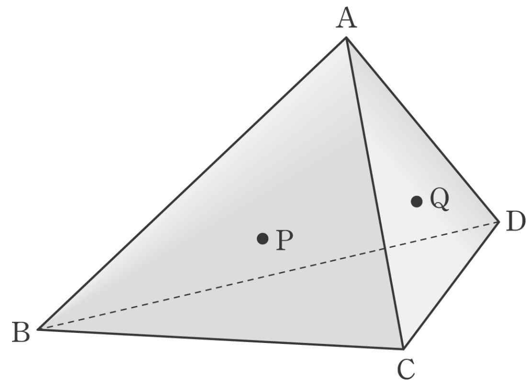
[난이도 : ★★★] [2005년 9월 모의평가]

25 좌표 공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z\geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

26 사면체 $ABCD$의 면 ABC, ACD의 무게중심을 각각 P, Q라고 하자.

다음 [보기]에서 두 직선이 꼬인 위치에 있는 것을 모두 고르면?[3점]



[보기]
ㄱ. 직선 CD와 직선 BQ
ㄴ. 직선 AD와 직선 BC
ㄷ. 직선 PQ와 직선 BD

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2004년 09월 모의평가]

27 좌표 공간에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$ 위에 있는 사각형 $ABCD$의 xy평면으로의 정사영은 사각형 $A'B'C'D'$이다.

$A'\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $B'\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $C'\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $D'\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$일 때, 사각형 $ABCD$의 둘레의 길이는? [4점]

① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}+2$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 6 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

28 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다.

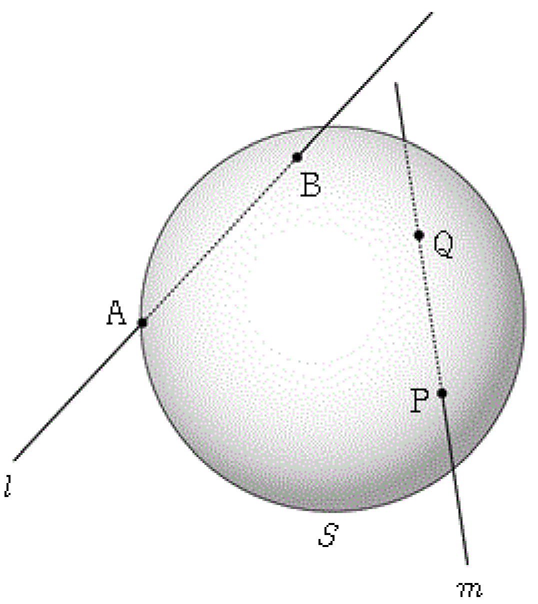
구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B,

구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자.

삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\angle ABQ=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가

이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

29 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 $ABCD$에서 선분 AD를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, $3:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 두 평면 PBC와 QBC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라.

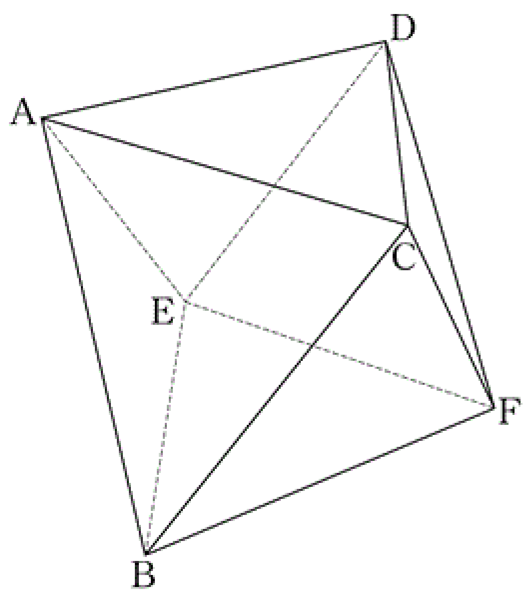
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

이미지가 없거나 이미지 크기가 0 임

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

30 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정팔면체 $ABCDEF$가 있다.

두 삼각형 ABC, CBF의 평면 BEF 위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, S_1+S_2의 값은? [4점]



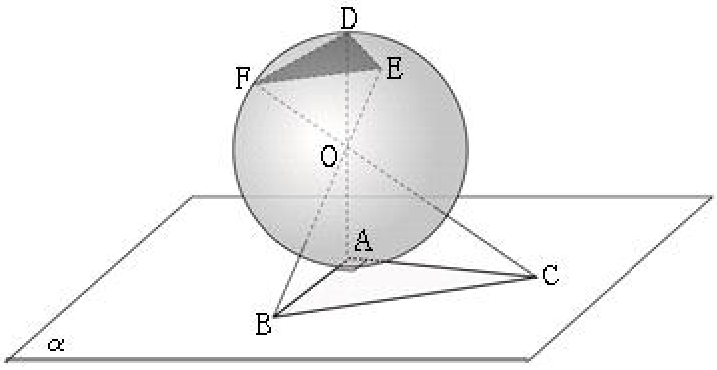
① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

31 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle A=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=\overline{AC}=2\sqrt{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다.

중심이 점 O이고 반지름의 길이가 2인 구가 평면 α와 점 A에서 접한다.

세 직선 OA, OB, OC와 구의 교점 중 평면 α까지 거리가 2보다 큰 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 DEF의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $100S^2$의 값을 구하시오. [4점]

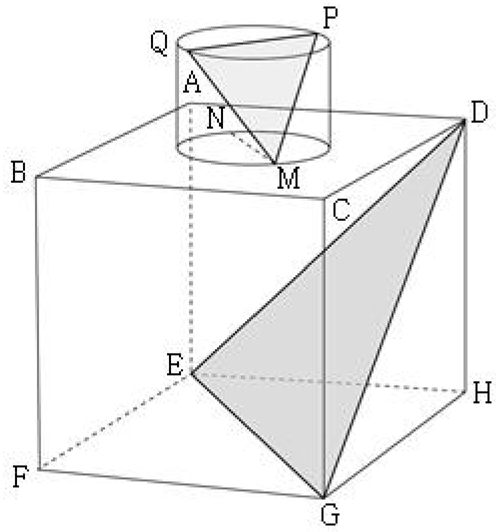


[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

32 한 변의 길이가 4인 정육면체 $ABCD-EFGH$와 밑면의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이고 높이가 2인 원기둥이 있다. 그림과 같이 이 원기둥의 밑면이 평면 $ABCD$에 포함되고 사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점과 원기둥의 밑면의 중심이 일치하도록 하였다. 평면 $ABCD$에 포함되어 있는 원기둥의 밑면을 α, 다른 밑면을 β라 하자.

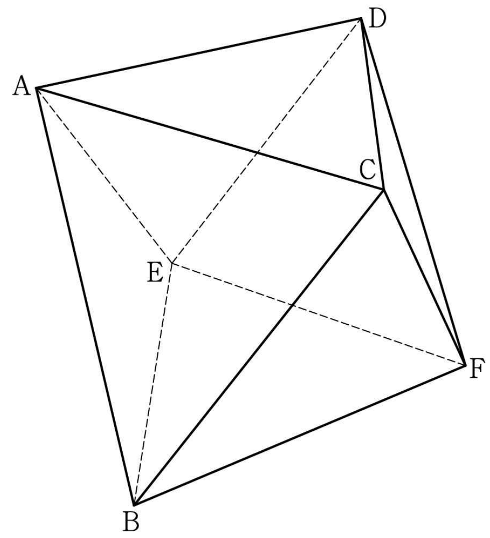
평면 $AEGC$가 밑면 α와 만나서 생기는 선분을 $\overline{MN}$, 평면 $BFHD$가 밑면 β와 만나서 생기는 선분을 $\overline{PQ}$라 할 때, 삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$ 이다.

a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점]



[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

33 정팔면체 $ABCDEF$에서 두 모서리 AC와 DE가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$)[3점]



① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

34 평면 α 위에 거리가 4인 두 점 A, C와 중심이 C이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다.

점 A에서 이 원에 그은 접선의 접점을 B라 하자. 점 B를 지나고 평면 α와 수직인 직선 위에 $\overline{BP}=2$가 되는 점을 P라 할 때, 점 C와 직선 AP 사이의 거리는?[4점]

① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$

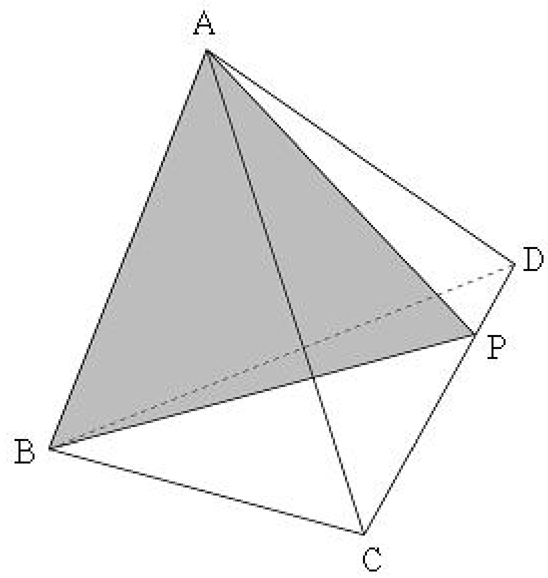
④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

35 그림과 같이 정사면체 $ABCD$의 모서리 CD를 $3:1$로 내분하는 점을 P라 하자.

삼각형 ABP와 삼각형 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)[4점][2012년 7월]



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$

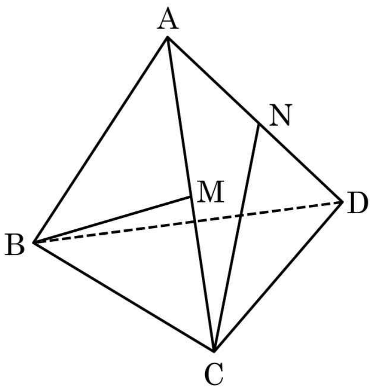
④ $\frac{\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{18}$

[난이도 : ★★★] [2011년 10월 학력평가]

36 정사면체 $ABCD$에서 두 모서리 AC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하자.

직선 BM과 직선 CN이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



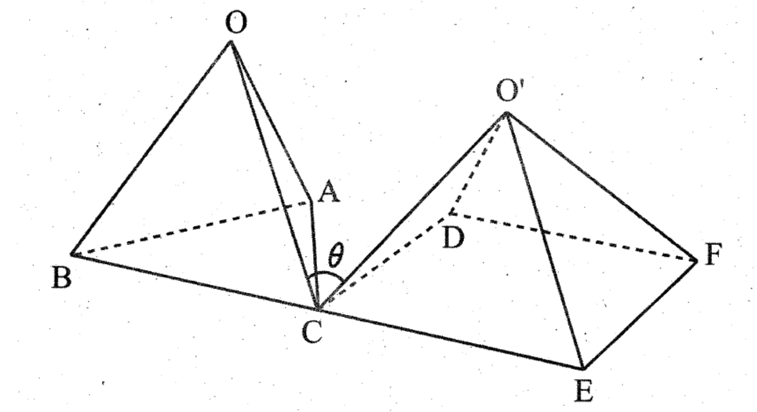
[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

37 반지름의 길이가 각각 2, 4, 8이고 서로 외접하는 세 개의 구가 평면 α위에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 A, B, C라 하고, 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하자.

$\cos\theta = \frac{b}{a}\sqrt{2}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하시오.(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

38 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체 $OABC$와 정사각뿔 $O'-DCEF$를 아래 그림과 같이 두 모서리 BC와 CE가 한 직선 위에 오도록 나란히 붙여 놓았다고 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{CO}$와 $\overrightarrow{CO'}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, 삼각형 ABC와 사각형 $DCEF$는 한 평면 위에 있다.)[3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$

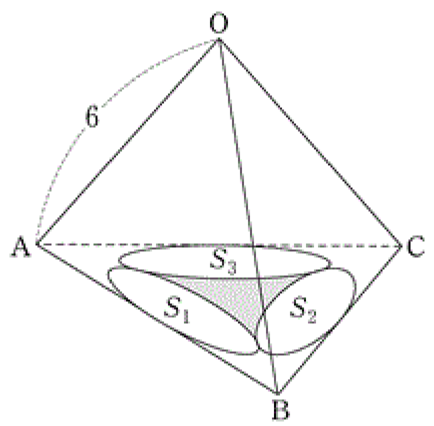
③ $\frac{5}{12}\sqrt{3}-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{7}{12}\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{4}$

[난이도 : ★★★] [2008년 04월 학력평가]

39 한 변의 길이가 6인 정사면체 $OABC$가 있다. 세 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$에 각각 내접하는 세 원의 평면 ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자.

그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오. [4점]



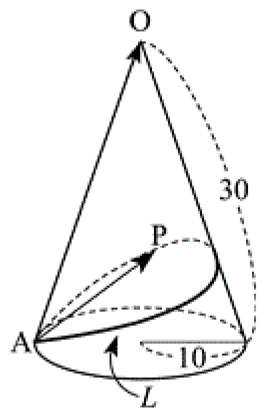
[난이도 : ★★★] [2008년 10월 학력평가]

40 점 O를 원점으로 하는 좌표 공간에 사면체 $OABC$가 있다.

삼각형 OAB, OBC, OCA, ABC는 각각 네 평면 $x=0$, $z=0$, $x-y=0$, $x+y+z=4$위에 있을 때, 사면체 $OABC$의 부피는 V이다. $30V$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

41 밑면의 반지름의 길이가 10, 모선의 길이가 30이고 꼭짓점이 O인 직원뿔이 있다. 밑면의 둘레 위의 한 점 A에서 출발하여 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 A로 되돌아오는 최단경로를 L이라 하자.



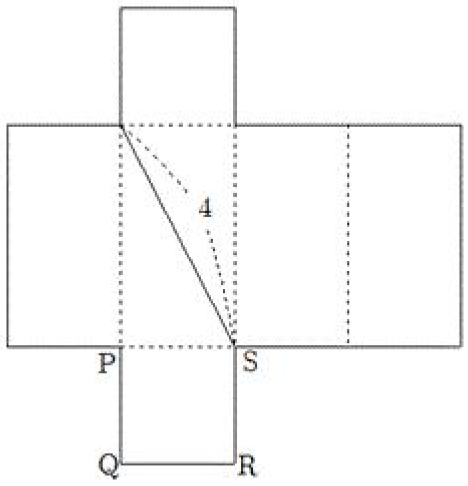
L위를 움직이는 점 P에 대하여 점 B가 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$를 만족시킬 때, 점 B의 자취의 길이는?[4점]

① $10\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ $20\sqrt{2}$
④ $20\sqrt{3}$ ⑤ $20\sqrt{6}$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

42 아래 그림은 밑면 $PQRS$가 정사각형인 사각기둥에 대한 전개도이다.

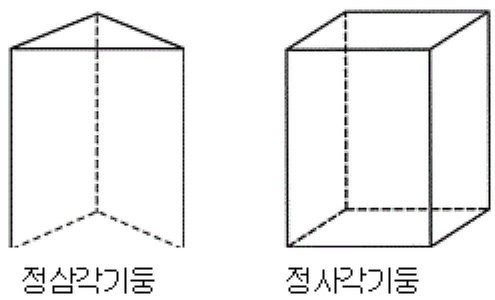
옆면의 대각선의 길이가 4일 때, 사각기둥의 부피가 최대가 되게 하는 밑면의 한 변의 길이는?[4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

43 정 n각기둥에서 밑면의 한 모서리와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(3)=3$, $f(4)=4$이다.



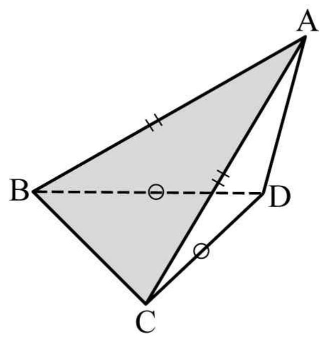
정삼각기둥 정사각기둥 이때, $\sum_{n=3}^{30} f(n)$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

44 공간에서 평면 α 위에 세 변의 길이가 $\overline{AB}=\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=12$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 지나고 평면 α에 수직인 직선 l 위의 점 D에 대하여 $\overline{AD}=6$ 이 되도록 점 D를 잡을 때 $\triangle DBC$의 넓이를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 0월 학력평가]

45 그림과 같이 사면체 $ABCD$의 각 모서리의 길이는 $\overline{AB}=\overline{AC}=7$, $\overline{BD}=\overline{CD}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AD}=4$ 이다.



평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 이면각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?(단, θ는 예각)[4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

정답 및 해설

1.공간도형

중단원 기출문제

1) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 공간에서 점, 직선, 평면의 위치 관계를 활용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

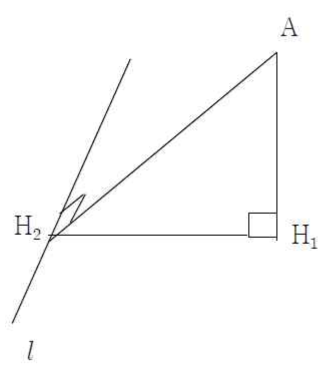
ㄱ. 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 교선을 l이라 하자.

점 A에서 평면 α와 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\overline{AH_1} \leq \overline{AH_2}$

즉, 점 A에서 평면 α에 이르는 거리는 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는

평면이 수직일 때 최대이다.



마찬가지로 두 점 B와 C에서 평면 α에 이르는 거리는 평면 α와 세 점 A, B, C를 지나는 평면이 수직일 때 최대이다.

따라서 평면 α 중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 하면

평면 β는 세 점 A, B, C를 지나는 평면과 수직일 때 최대이다. (참)

ㄴ. $\overline{BC} \leq \overline{AC}$라 하자. 선분 BC의 중점을 M이라 하면

평면 α가 점 M을 지날 때 $d(\alpha)$는 최대이다.

즉, 평면 β는 선분 BC의 중점을 지난다.

마찬가지로 $\overline{AC} \leq \overline{BC}$일 때에는 평면 β는 선분 AC의 중점을 지난다. (참)

ㄷ. $\overline{AC} = \sqrt{(2-2)^2+(-1-3)^2+(0-0)^2} = 4$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2+(0-0)^2} = 2\sqrt{2}$

이때, $\overline{BC} \leq \overline{AC}$이므로 $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2) 답 : 15

[해설]

[출제 의도] 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

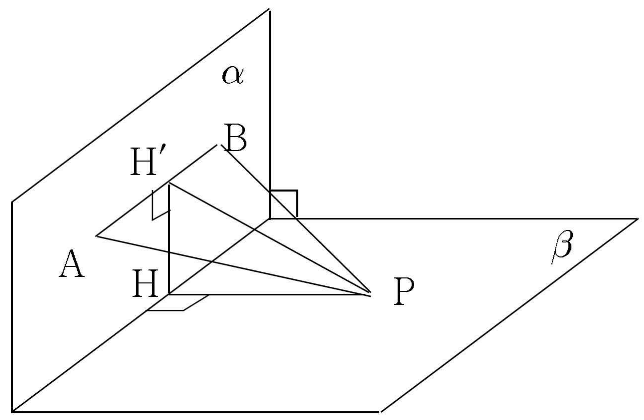
그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H,

점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{HH'} \perp$ (직선 AB)

그러므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PH'} \perp$ (직선 AB)



한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'} = 2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$\overline{PH} = 4$

그러므로 직각삼각형 OHH'에서

$\overline{PH'} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HH'}^2} = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH'}$

$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}$

$= 15$

3) 답 : ⑤

[해설]

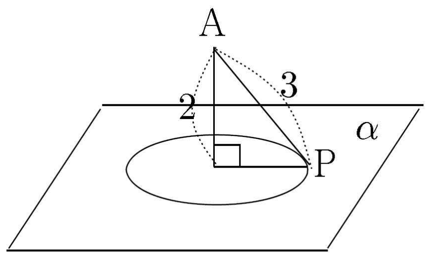
[출제 의도] 점과 평면 사이의 거리를 활용할 수 있고 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

점 $A(2, 2, 1)$과 평면 α : $x+2y+2z-14=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|2+2\cdot2+2\cdot1-14|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 2$$

그러므로 $\overline{AP} \leq 3$인 점 P가 나타내는 도형은 그림에서

반지름의 길이가 $\sqrt{3^2-2^2} = \sqrt{5}$ 인 원의 경계 및 내부이다.



한편, xy평면의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$이고 평면 α의 법선벡터는 $(1, 2, 2)$이므로

xy평면과 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{|0\cdot1+\ \cdot2+1\cdot2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$(\sqrt{5})^2\pi \times \cos\theta = 5\pi \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}\pi$

4) 답 : ①

[해설]

$\triangle PAB$는 $\overline{AB} = \overline{PA} = \overline{PB} = 6$인 정삼각형이므로

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

$\overline{PM}\perp\overline{AB}$이다.($\because$ $\triangle PAB$는 정삼각형)

한편, $\overline{PM}$의 길이는 한 변의 길이가 6인 정삼각형의 높이와 같으므로

$$\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=3\sqrt{3}$$

조건에서 $\overline{PH}\perp\alpha$이므로 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{HM}\perp\overline{AB}$$

$\therefore$ $\triangle PHM$는 $\overline{HM}\perp\overline{PH}$인 직각삼각형

또한 점 P는 평면 α와의 거리가 4이므로

$$\overline{PH}=4$$

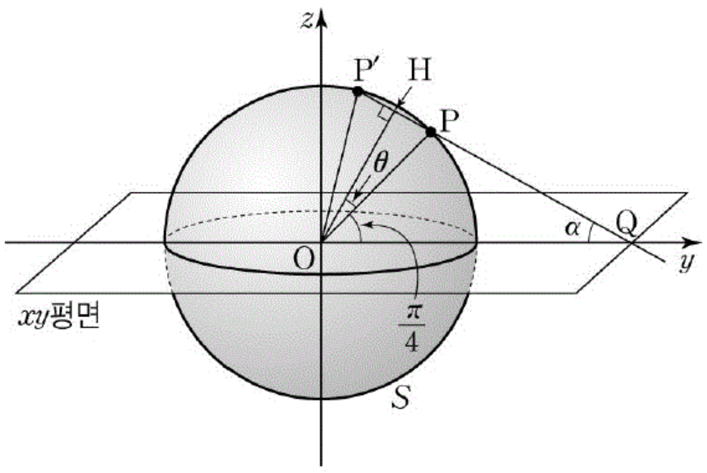
$$\therefore\ \overline{HM}=\sqrt{\overline{PM}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-4^2}=\sqrt{11}$$

5) 답 : 9

[해설]

그림과 같이 원점을 O, 원 C가 yz평면과 만나는 다른 한 점을 P'이라 하자.

또한, 원 C의 중심을 H라 하고, $\angle POH=\theta$라고 하자.



원 C의 반지름이 1이므로 $\overline{PH}=1$, 주어진 구의 반지름이 $2\sqrt{5}$이므로

$\overline{OP}=2\sqrt{5}$이다.

$\triangle OPH$는 $\overline{OH}\perp\overline{PP'}$인 직각삼각형이므로

$\overline{OH}=\sqrt{50-1}=7$이고 $\therefore$ $\sin\theta=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{PH}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$,

$$\cos\theta=\frac{\overline{OH}}{\overline{PH}}=\frac{7}{2\sqrt{5}}$$

`한편, 선분 PP'의 연장선이 y축과 만나는 점을 Q라 하면 $P(0, 5, 5)$이므로

$\angle POQ=\dfrac{\pi}{4}$이다.

이제 $\angle OQP=\alpha$라 하면 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 최대넓이는

$$\pi\cos\alpha=\pi\cos\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\}$$

$$=\pi\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

$$=\pi\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$

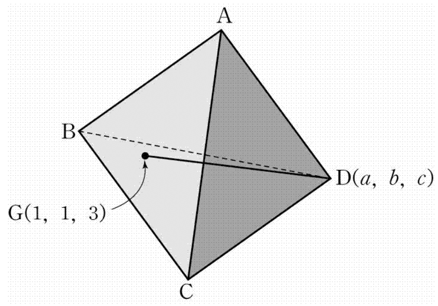
$$=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{4}{5}\pi$$

`$\therefore$ $p+q=5+4=9$

6) 답 : ②

[해설]



점 D의 좌표를 (a, b, c)라 할 때, $\overrightarrow{DG}$가 평면 $2x-y+z=4$의 법선벡터가 되므로

$$(a-1, b-1, c-3)=k(2, -1, 1)$$

$$\therefore\ a=2k+1,\ b=-k+1,\ c=k+3$$

이때, 점 $D(a, b, c)$는 평면 $x+y+z=3$위의 점이므로

$$(2k+1)+(-k+1)+(k+3)=3$$

$$2k+5=3$$

$$\therefore\ k=-1$$

즉, $a=-1, b=2, c=2$

따라서 $\overline{DG}=\sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6}$

한 변의 길이가 x인 정사면체의 높이가 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$이므로

구하는 정사면체의 한 변의 길이는 $\dfrac{3}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}=3$

[다른 풀이]

삼각형 ABC의 무게중심 $(1, 1, 3)$을 G라 하자.

D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 삼각형 ABC의 무게중심 $G(1, 1, 3)$이므로

$\overrightarrow{DG}\perp$(평면 ABC)이므로 $\overrightarrow{DG}//(2, -1, 1)$

$\therefore$ $D(1+2t, 1-t, 3+t)$

D가 평면 $x+y+z=3$위에 있으므로 $1+2t+1-t+3+t=3$

$\therefore$ $t=-1$

$\therefore$ $D(-1, 2, 2)$

D에서 평면 ABC까지의 거리는

$$\overline{DG}=\frac{|-2-2+2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

정사면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

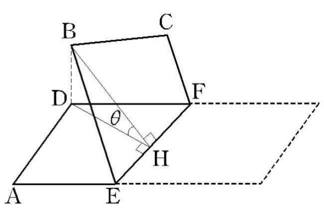
$$\overline{DG}=\frac{\sqrt{6}}{3}x=\sqrt{6}$$

$$\therefore\ x=3$$

7) 답 : 40

[해설]

B에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



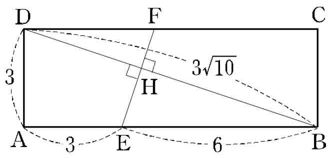
정답 및 해설

삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH}\perp\overline{EF}$

두 평면 $AEFD$와 $EFCB$가 이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{EF}$에 수직인 $\overline{BH}$와 $\overline{DH}$가 이루는 각의 크기와 같다.

$\cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



$\triangle BDA \backsim \triangle BEH$이므로

$\overline{EB}:\overline{HB}=\overline{DB}:\overline{AB}$

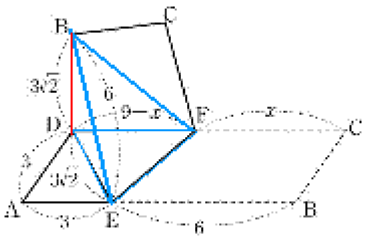
$\overline{HB}=\dfrac{9\cdot6}{3\sqrt{10}}=\dfrac{18}{\sqrt{10}}$

$\overline{DH}=\overline{DB}-\overline{BH}=3\sqrt{10}-\dfrac{18}{\sqrt{10}}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta=60\times\dfrac{2}{2}=40$

[다른 풀이]



$\overline{AE}=3$이므로 $\overline{BE}=9-3=6$

$\overline{DE}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{BD}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{FC}=x$라 하면 $\overline{DF}=9-x$

한편, $\triangle BDF, \triangle BCF$는 모두 직각삼각형이므로

$\overline{BF}^2=(3\sqrt{2})^2+(9-x)^2=x^2+3^2$

$18+81-18x+x^2=x^2+9$

$18x=90 \Leftrightarrow x=5$

$\triangle DEF=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6,\ \triangle BEF=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$

이때, $\triangle BEF$의 평면 $ABCD$ 위로의 정사영이 $\triangle DEF$이므로

$\cos\theta=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta=60\cdot\dfrac{2}{3}=40$

8) 답 : ①

[해설]

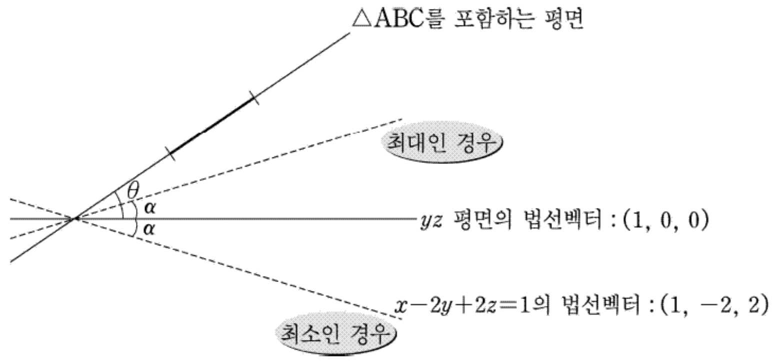
삼각형 ABC와 yz평면과 이루는 각을 θ라고 하면

$\cos\theta=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$이다.

또, yz평면과 평면 $x-2y+2z=1$가 이루는 각을 α라고 하면, yz평면의 법선벡터 $\vec{h}=(1,0,0)$과 평면 $x-2y+2z=1$의 법선벡터 $\vec{n}=(1,-2,2)$를 이용하여 내적공식을 사용하면

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$이다. $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

한편, 그림에서 삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$위로의 정사영이 최대가 되려면 이루는 각이 $\theta-\alpha$일 때이다.



따라서 구하려는 넓이의 최댓값은

$$6\cdot\cos(\theta-\alpha)=6\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=6\left\{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right\}$$

$$=6\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=1+2\sqrt{6}$$

9) 답 : 32

[해설]

주어진 입체 도형을 단면화해서 생각해보자.

원뿔과 원기둥의 접점을 D라 하고,

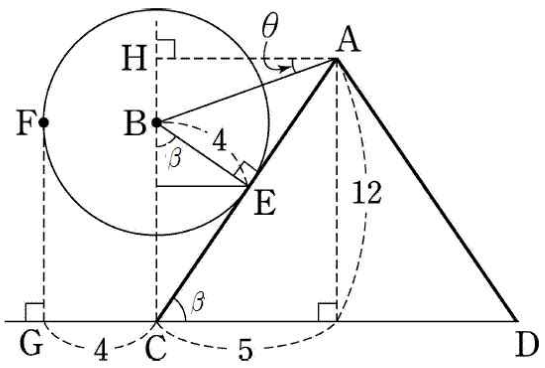
구와 원기둥의 접점을 F라고 하자.

접점 F에서 평면 α에 내린 수선의 발을 G라고 하자.

구의 반지름이 4이고 원뿔의 밑면의 지름이 10이고 원기둥의 밑면의 지름이 14이므로 구의 중심 B에서 평면 α에 내린 정사영 B'은 원뿔의 밑면과 만나는 점 C가 된다.

원뿔의 꼭짓점 A에서 직선 BB'(혹은 직선 BC)에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기 θ는 $\angle BAH$이다.



$\angle ACD=\angle CBE=\beta$라고 하면 $\overline{AC}=13$이므로 $\cos\beta=\dfrac{5}{13}$

$\overline{BC}=\dfrac{4}{\cos\beta}=\dfrac{52}{5}$이고, $\overline{BH}=12-\overline{BC}=12-\dfrac{52}{5}=\dfrac{8}{5}$

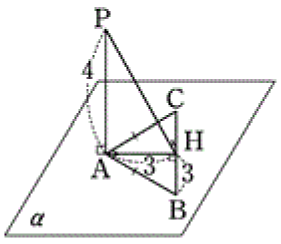
$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\dfrac{\frac{8}{5}}{5}=\dfrac{8}{25}$

10) 답 : ②

[해설]

점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{PA}\perp\alpha,\ \overline{PH}\perp\overline{BC}$이므로



삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH} \perp \overline{BC}$

$\therefore$ $\overline{PA}=4$, $\overline{AH}=3$이므로 $\overline{PH}=5$

[참고]보충설명

평면 밖의 한 점에서 평면에 내린 수선과 관계된 문제는 삼수선의 정리가 사용되는 경우가 많다.

11) 답 : 25

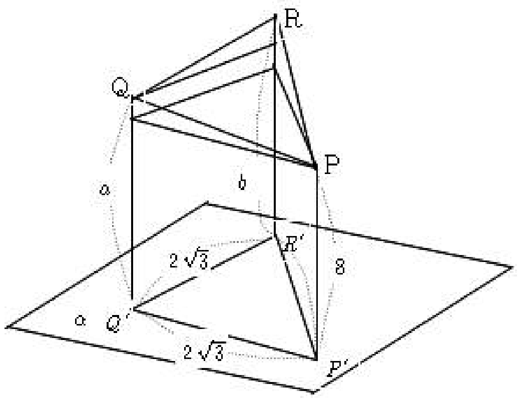
[해설]

$\overline{PR}$이 최대이므로 $\triangle PQR$이 이등변삼각형이 되려면

$\overline{PQ}=\overline{QR}$

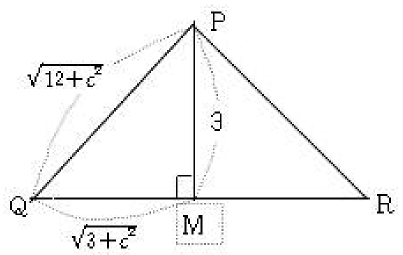
$a-8=c$라 놓으면 $\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{12+c^2}$

그리고 $b-8=2c$이므로 $\overline{PR}=\sqrt{12+4c^2}=2\sqrt{3+c^2}$



$\triangle P'Q'R' = \triangle PQR\cos 60^\circ$ 이므로

$$\triangle PQR=\frac{\triangle P'Q'R'}{\cos 60^\circ}=2\triangle P'Q'R'=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=6\sqrt{3}$$



그림에서 $\triangle PQR=3\sqrt{3+c^2}=6\sqrt{3}$

$\therefore$ $c^2=9 \Leftrightarrow c=3$

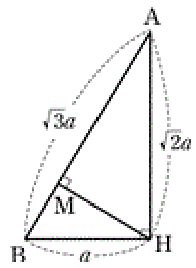
$\therefore$ $a-8=3,\ b-8=6 \Leftrightarrow a=11,\ b=14$

$\therefore$ $a+b=25$

12) 답 : ③

[해설]

한 모서리의 길이를 a라 하고 H, F에서 $\overline{AG}$에 그은 수선의 발을 M이라 하면



위 그림에서 $\triangle AGH=\frac{1}{2}\overline{GH}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AG}\cdot\overline{HM}$이고

$\overline{AH}=\sqrt{2}a$, $\overline{BH}=a$, $\overline{AG}=\sqrt{3}a$ 이므로

$$\overline{HM}=\frac{\sqrt{6}}{3}a=\overline{FM}$$

또, $\overline{FH}=\sqrt{2}a$ 에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{HM}^2+\overline{FM}^2-\overline{FH}^2}{2\cdot\overline{HM}\cdot\overline{FM}}$$

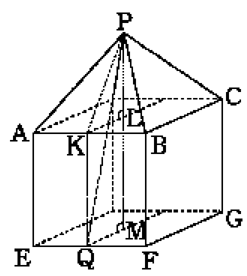
$$=\frac{\frac{6}{9}a^2+\frac{6}{9}a^2-2a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a}=\frac{-\frac{6}{9}a^2}{\frac{12}{9}a^2}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

13) 답 : ①

[해설]

아래 그림과 같이 꼭짓점 P에서 두 평면 $ABCD, EFGH$에 내린 수선의 발을 각각 L, M이라 하고, 두 모서리 AB, EF의 중점을 각각 K, Q라 하면, 두 선분 PK, QK는 각각 모서리 AB에 수직이므로



$\angle$ $PKQ=\theta$이다.

$\triangle PAK$ 에서 $\overline{PA}=2$, $\overline{AK}=1$이므로

$\overline{PK}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\triangle PKL$ 에서 $\overline{KL}=1$이므로

$\overline{PL}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

$\triangle PQM$ 에서 $\overline{PM}=\sqrt{2}+2$, $\overline{QM}=1$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{(\sqrt{2}+2)^2+1^2}=\sqrt{7+4\sqrt{2}}$

그러므로 $\triangle PKQ$ 에 제이코사인법칙을 적용하면

$$\cos\theta=\frac{4+3-(7+4\sqrt{2})}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}$$

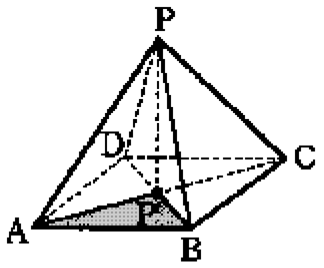
$$=-\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

[별해]

$\triangle PAB$ 의 평면 $ABCD$위로의 정사영을 $\triangle P'AB$ 라 하자.

$\triangle PAB$ 는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 그 넓이는

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$



$\triangle P'AB$ 의 넓이 S' 은 정사각형 $ABCD$의 $\frac{1}{4}$이므로

$S'=\frac{1}{4}\cdot 2^2=1$

평면PAB와 평면 $ABCD$가 이루는 각의 크기를 α라 하면

$S'=S\cos\alpha$에서 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$

평면 PAB와 평면 $AEFB$가 이루는 각의 크기 θ는 $\alpha+\frac{\pi}{2}$와 같으므로

$\cos\theta=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$

$-\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ ($\because$ α는 예각)

$=-\sqrt{1-\frac{1}{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

14) 답 : ②

[해설]

$\overline{PQ}=\overline{RD}$이고 $\overline{PR}=\overline{QD}$이므로

□$PQDR$은 평행사변형이다.

$\triangle PQR=\triangle DRQ$

점 S에서 밑면에 내린 수선의 길이를 h라 하면

점 A에서 밑면에 내린 수선의 길이는 $2h$이므로

사면체 $SQDR$의 부피 V_1은

$V_1=\frac{1}{3}\times\triangle DRQ\times h$

사면체 $APQR$의 부피는

$V_2=\frac{1}{3}\times\triangle PQR\times 2h=2V_1$

따라서, 구하는 부피의 비는 $2:1$이다.

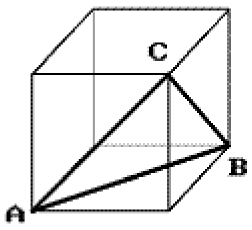
15) 답 : ③

[해설]

두 점 A, B를 포함하는 면을 밑면으로하여 정육면체를 만들면

점 C는 그림과 같은 꼭짓점이 된다.

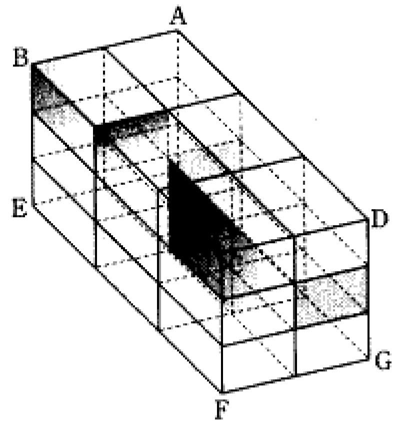
$\triangle ABC$는 정삼각형이므로 $\angle ABC=60^\circ$

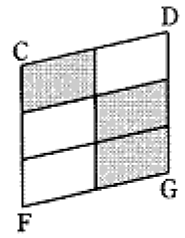


16) 답 : ④

[해설]

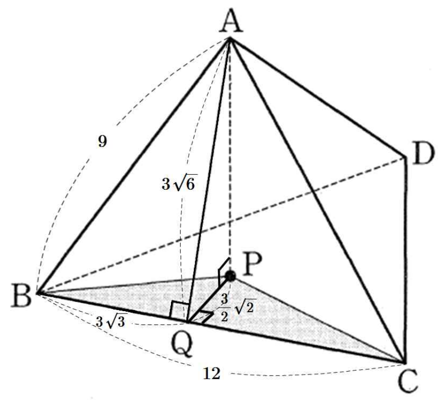
입체를 조건에 맞게 그려보면





17) 답 : 162

[해설]



삼수선의 정리에 의하여 선분 PQ 와 선분 BC 는 수직이고,

주어진 조건에 의하여

$\overline{BQ}=3\sqrt{3}$, $\overline{AQ}=3\sqrt{6}$, $\overline{PQ}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 이다.

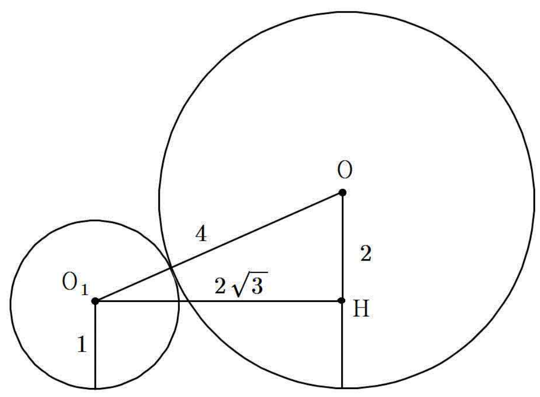
삼각형 BCP 의 넓이($=k$)는

$k=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ 이고 $k^2=162$ 이다.

18) 답 : 11

[해설]

평면과 평면이 이루는 각을 단면화 시켜서 관찰하기 위하여 우선 도형을 옆에서 관찰하면 다음과 같다.

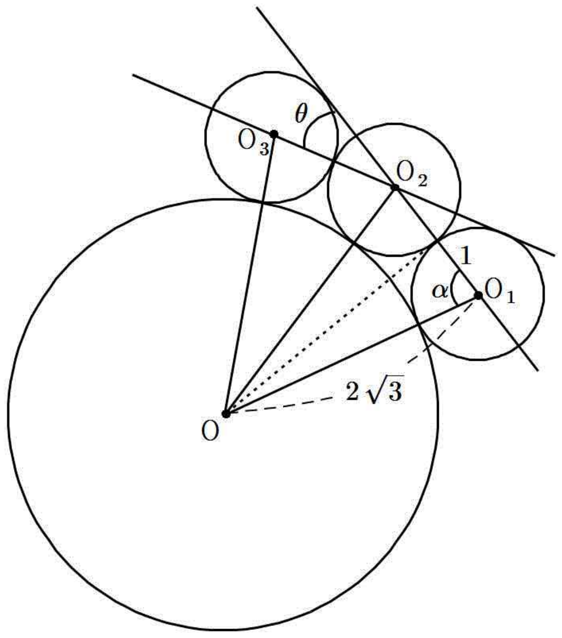


S의 중심을 O라 하면

$\overline{OO_1}=4$, $\overline{OH}=2$ 이고 $\therefore$ $\overline{O_1H}=2\sqrt{3}$

위에서 이 도형의 이면각 θ를 표현하기 위해 단면화 시키면

다음과 같다.



이때, $\angle OO_1O_2$를 α라 하면 $\angle O_1OO_2=\pi-2\alpha$

두 평면이 이루는 각도 $\pi-2\alpha=\theta$이고

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

도형 D의 단면의 넓이는 π이므로

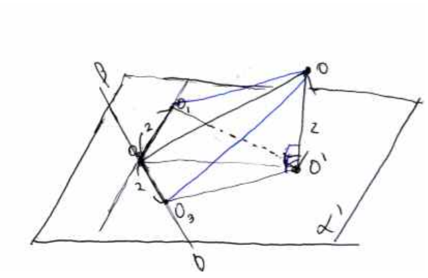
따라서 정사영의 넓이는 $\pi\times\frac{5}{6}$이다

$\therefore p+q=11$

[MIM edu:자세한 풀이]

단면 D의 넓이를 구하면, D를 포함하는 평면은 S_3의 지름을 지나므로 $D=\pi$

이제 공간적인 상황을 그림으로 표현해 보자.



구의 중심인 O_1, O_2가 이루는 평면은 평면 α와 평행하다.

이 평면을 α'이라 하자.

그리고 구 S의 중심을 O라 하고,

이것을 평면 α'에 정사영시킨 점을 O'이라 하자.

$\overline{OO'}=2$, $\overline{OO_1}=\overline{OO_2}=\overline{OO_3}=4$

$\overline{OO'}$는 α'에 수직이므로 $\overline{O_1O'}$, $\overline{O_2O'}$, $\overline{O_3O'}$와 모두 수직이다.

따라서, $\overline{O_1O'}$, $\overline{O_2O'}$, $\overline{O_3O'}$의 길이는 모두 $2\sqrt{3}$으로 일정함을 알 수 있다.

β와 D를 포함하는 평면의 이면각 θ를 구하면,

$\cos\theta=|\cos2\theta'|$ (단, $\theta'=\angle O'O_2O_3$)

*절댓값 기호를 씌우는 이유는 $2\theta'$이 예각인지 모르기 때문이다. 평면과 평면이 이루는 각은 언제나 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$이다.

$\cos\theta'=\frac{1}{2\sqrt{3}}$이므로, $\cos2\theta'=-\frac{5}{6}$

따라서 $\cos\theta=\frac{5}{6}$

단면 D의 평면 β위로의 정사영의 넓이를 D'라 하고 이를 구하면,

$D'=D\cos\theta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore\ p+q=11$

19) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]직선과 평면의 위치관계, 직선과 직선의 위치 관계를 파악할 수 있는가?

ㄱ. $\overline{AC}\perp\overline{AD}$, $\overline{AC}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{AC}\perp$(평면 ABP)

따라서 삼각형 ACP는 $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle\cap=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{CP}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{AP}^2}=\sqrt{2\overline{AP}^2}=\sqrt{2\overline{BP}^2}=\sqrt{2}\,\overline{BP}$(참)

ㄴ. 세 점 A, B, C는 한 평면 위에 있으면서 일직선 위에 있지 않고,

점 P는 그 평면 위의 점이 아니므로

직선 AB와 직선 CP는 만나지 않는다.

즉, 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.(참)

ㄷ. ㄱ에서 $\overline{AC}\perp$(평면 ABP)이므로 $\overline{AC}\perp\overline{PM}$

또한, $\overline{PM}\perp\overline{AB}$이므로 $\overline{PM}\perp$(평면 ABC)

따라서 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.(참)

20) 답 : 30

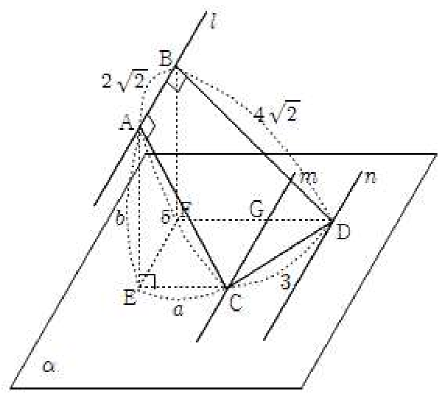
[해설]

두 직선 m, n을 포함하는 평면을 α라 하자.

$l//m$, $l//n$이므로 $l//\alpha$이다.

직선 l위의 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고,

선분 FD와 직선 m의 교점을 G라 하자.



$\overline{AB}//\overline{EF}$, $\overline{EF}//\overline{CG}$이고, $\overline{EF}=\overline{CG}=2\sqrt{2}$이므로

직각삼각형 DGC에서

$\overline{GD}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{10}$

삼각형 ACD에서

$\cos(\angle ACD)=\frac{5^2+3^2-(2\sqrt{10})^2}{2\cdot5\cdot3}=-\frac{1}{5}$이므로

$$\sin(\angle ACD) = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2\sqrt{6}}{5} = 3\sqrt{6}$ 이다.

$\overline{EC}=a$, $\overline{AE}=\overline{BF}=b$라 하면

$\overline{FD}=a+1$이고,

삼각형 AEC에서 $a^2+b^2=25\cdots$①

삼각형 BFD에서 $(a+1)^2+b^2=32\cdots$②

② -①에서 $2a+1=7$, $a=3$

삼각형 ACD의 평면 α위로의 정사영은 삼각형 ECD이고,

삼각형 ECD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CG}=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서, $3\sqrt{6}\times\cos\theta=3\sqrt{2}$ 에서

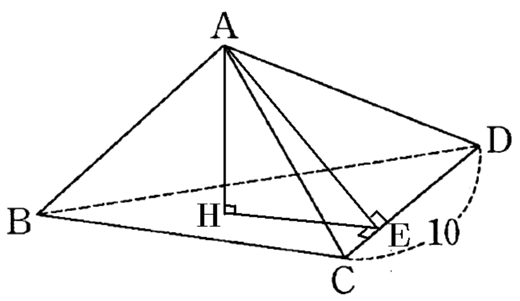
$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=3-1=2$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$

21) 답 : ②

[해설]



점 A에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 E라 하면

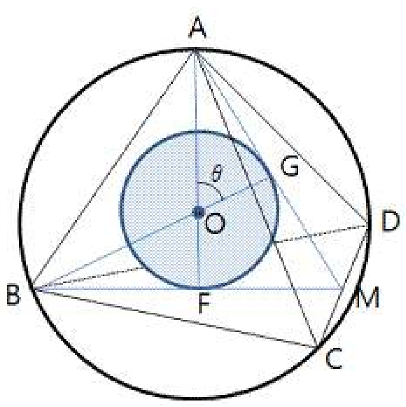
삼수선의 정리에 의하여 $AE\perp HE$

따라서 $\triangle AEH$는 직각삼각형이고 $\angle AEH=30^\circ$ 이므로

$AE=8$이때 $AH=4$

22) 답 : ④

[해설]



위 그림에서

ㄱ. 점 A와 점 B로부터 모서리 CD에 수선의 발을 내리면

두 수선은 두 삼각형 BCD, ACD의 무게중심을 지난다.

따라서, 점 A, B, F, G는 한 평면위에 있다. ∴ 거짓

ㄴ. 구 O에 내접하는 사면체 $ABCD$와 사면체에 내접하는 구를 생각하면,

$\overline{AO}:\overline{OF}=\overline{AO}:\overline{OG}$이며 $\overline{AO}:\overline{OG}=\overline{AM}:\overline{MF}=3:1$

$\overline{AO}=1$, $\overline{OF}=\frac{1}{3}$ 이므로 $\overline{AF}=\frac{4}{3}$ 이며,

사면체의 높이 $\frac{\sqrt{6}}{3}\overline{AB}$와 같다.

$\frac{4}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}\overline{AB}$, $\overline{AB}=\frac{4}{\sqrt{6}}$

따라서, 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 로써

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다. ∴ 참

ㄷ. $\cos\theta=\frac{\overline{OG}}{\overline{AO}}=\frac{\overline{FM}}{\overline{AM}}=\frac{1}{3}$ ∴ 참

23) 답 : ①

[해설]

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을

H라고 하면

$\overline{PO}\perp(xy$평면$)$, $\overline{PH}\perp\overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{OH}\perp\overline{AB}$

따라서 직각삼각형 OAB에서

$\overline{OA}=1$, $\overline{OB}=\sqrt{3}$, $\overline{AB}=2$이고

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}$

$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OH}$이므로

$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times2\times\overline{OH}$

$\therefore\ \overline{OH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

한편 $\triangle POH$도 직각삼각형이므로

$\overline{PH}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$

따라서 점 P에서 직선 l에 이르는 거리는 1이다.

[정답]①

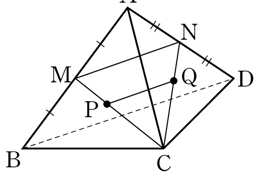
24) 답 : ③

[해설]

공간도형과 공간좌표[정답]③

ㄱ, ㄴ. 직선 CD와 직선 BQ, 직선 AD와 직선 BC는 서로 만나지도 평행하지도 않으므로

꼬인 위치에 있다.



ㄷ.직선 CP와 CQ가 선분 AB, AD와 만나는 점을 각각 M, N이라 하면

M, N은 각각 선분 AB, AD의 중점이므로 중점연결정리에 의해

$\overline{MN}//\overline{BD}$이다.

또한, $\overline{CP}:\overline{CM}=\overline{CQ}:\overline{CN}=2:3$이므로

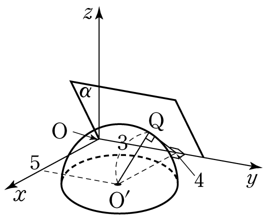
$\triangle CPQ$와 $\triangle CMN$은 닮음이 되어 $\overline{PQ}//\overline{MN}$이다.

따라서, $\overline{PQ} // \overline{MN}$이고, $\overline{MN} // \overline{BD}$이므로

$\overline{PQ} // \overline{BD}$

25) 답 : 24

[해설]



반구의 중심을 O'이라 하고, O'에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(0, 4, 0)$이므로

$\overline{O'H} = 5$ ... ①

이때, y축을 포함하는 평면 α와 반구의 접점을 Q라 하면

$\overline{O'Q} = 3$ ... ②

또한, $\overline{O'Q} \perp \alpha$, $\overline{O'H} \perp \overline{OH}$이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{OH} \perp \overline{QH}$이다.

$\therefore\ \overline{QH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ... ③

①, ②, ③에서 α와 xy평면이 이루는 각이 $\theta = \angle QHO'$이므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{QH}}{\overline{O'H}} = \frac{4}{5}$$

$\therefore\ 30\cos\theta = 24$

26) 답 : ③

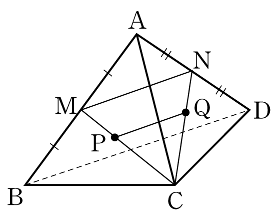
[해설]

[출제 의도]공간도형과 공간좌표

ㄱ, ㄴ. 직선 CD와 직선 BQ, 직선 AD와 직선 BC는 서로 만나지도

평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

ㄷ.



직선 CP와 CQ가 선분 AB, AD와 만나는 점을 각각 M, N이라 하면

M, N은 각각 선분 AB, AD의 중점이므로 중점연결정리에 의해

$\overline{MN} // \overline{BD}$이다.

또한, $\overline{CP} : \overline{CM} = \overline{CQ} : \overline{CN} = 2 : 3$이므로

$\triangle CPQ$와 $\triangle CMN$은 닮음이 되어 $\overline{PQ} // \overline{MN}$이다.

따라서, $\overline{PQ} // \overline{MN}$이고, $\overline{MN} // \overline{BD}$이므로

$\overline{PQ} // \overline{BD}$

27) 답 : ④

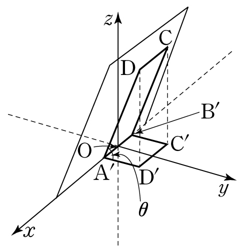
[해설]

[출제 의도]벡터

평면 $\sqrt{3}y - z = 0$과 평면 $z = 0$의 법선벡터는 각각 $\vec{u} = (0,\ \sqrt{3},\ -1)$, $\vec{v} = (0,\ 0,\ 1)$이므로

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \left| -\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2}} \right| = \frac{1}{2}$$



위의 그림에서 점 A, B와 점 A', B'은 같은 점이고

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{CD} = \overline{C'D'}$, $\overline{A'D'} = \overline{AD}\cos\theta$,

$\overline{B'C'} = \overline{BC}\cos\theta$이므로

$\overline{AB} = 1$, $\overline{CD} = 1$, $\overline{AD} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, $\overline{BC} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

따라서, 사각형 $ABCD$의 둘레의 길이는 6이다.

28) 답 : 60

[해설]

[출제 의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기

구 S의 중심을 O라 하면 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인

정삼각형 APQ의 무게중심은 점 O와 같다.

점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 O'라 하면

점 O'는 선분 AQ의 중점이고 $\angle ABQ = \dfrac{\pi}{2}$이므로

점 B는 점 O'를 중심으로 하고 반지름이 선분 AO'인 원 위의 점이다.

삼각형 $BO'O$에서 $\overline{O'B} = \sqrt{3}$, $\overline{OB} = 2$, $\overline{OO'} = 1$이므로

$\angle BO'O = \dfrac{\pi}{2}$

그러므로 $\overline{OO'} \perp \overline{O'B}$, $\overline{PO'} \perp \overline{O'B}$

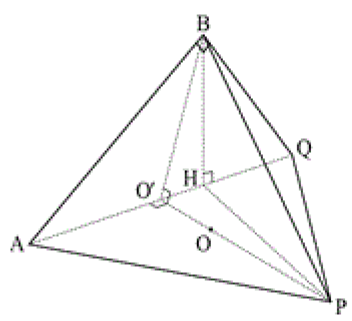
$\overline{AO'} \perp \overline{PO'}$, $\overline{PO'} \perp \overline{O'B}$이므로

직선 PO'는 평면 ABQ와 수직이고,

평면 ABQ와 평면 APQ는 수직이다.

그러므로 점 B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH이다.



삼각형 $BO'P$는 직각삼각형이고 $\overline{O'B} = \sqrt{3}$, $\overline{O'P} = 3$이므로

$\overline{PB} = 2\sqrt{3}$

삼각형 APB는 $\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{3}$인 이등변삼각형이고,

$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$이므로 삼각형 APB의 넓이는 $\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$

삼각형 ABQ와 삼각형 AHB는 닮음이므로

$\overline{AH}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

그러므로 삼각형 APH의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 3=2\sqrt{3}$

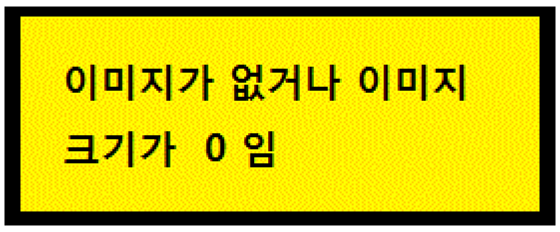
$\cos\theta=\frac{(\text{삼각형 } APH\text{의 넓이})}{(\text{삼각형 } APB\text{의 넓이})}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

따라서 $100\cos^2\theta=100\times\frac{3}{5}=60$

29) 답 : 16

[해설]

[출제 의도] 이면각의 정의를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.



두 선분 BC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{AM}=\overline{DM}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{MN}=2\sqrt{2}$

$\overline{PN}=\overline{QN}=1$ 이므로 $\overline{PM}=\overline{QM}=3$

$\theta=\angle PMQ$이고, $\overline{PQ}=2$이므로

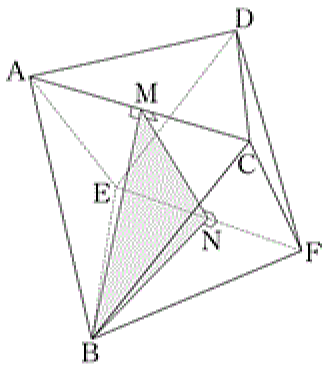
$\cos\theta=\frac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\frac{7}{9}$

따라서 $p+q=16$

30) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 정사영의 성질을 이해하여 넓이를 구한다.



선분 AC와 EF의 중점을 각각 M, N이라 하면

사각형 $AEFC$가 정사각형이므로 $\overline{MN}=2$

$\overline{BM}=\overline{BN}=\sqrt{3}$

$\cos(\angle MBN)=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$ 이므로

$S_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

두 평면 BEF와 CBF가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD와 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 BEF와 평면 ACD가 평행하므로

$S_2=S_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\therefore$ $S_1+S_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

31) 답 : 15

[해설]

[출제 의도] 정사영을 활용하여 추론하기

$\tan(\angle AOB)=\tan(\angle AOC)=\sqrt{3}$

$\angle AOB=\angle AOC=\frac{\pi}{3}$

맞꼭지각의 성질에 의하여

$\angle DOE=\angle DOF=\frac{\pi}{3}$

$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=2$이므로 $\overline{DE}=\overline{DF}=2$

$\overline{OB}=\overline{OC}=4$이므로

삼각형 OBC와 삼각형 OEF의 닮음비가 $2:1$이고

$\overline{EF}=\sqrt{6}$

선분 EF의 중점을 H라 하자.

$\overline{DH}=\overline{OH}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

그러므로 삼각형 DEF의 넓이 S'은

$S'=\frac{1}{2}\times\overline{DH}\times\overline{EF}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{15}}{2}$

평면 OBC와 평면 OEF는 같은 평면이므로

두 평면 DEF와 OBC가 이루는 예각의 크기는

두 평면 DEF와 OEF가 이루는 예각의 크기와 같다.

두 평면 DEF와 OEF가 이루는 예각의 크기 θ는 두 직선 DH, OH가 이루는 예각의 크기와 같다.

$\cos\theta=\frac{\overline{DH}^2+\overline{OH}^2-\overline{OD}^2}{2\times\overline{DH}\times\overline{OH}}=\frac{1}{5}$

삼각형 DEF의 평면 OBC위로의 정사영의 넓이

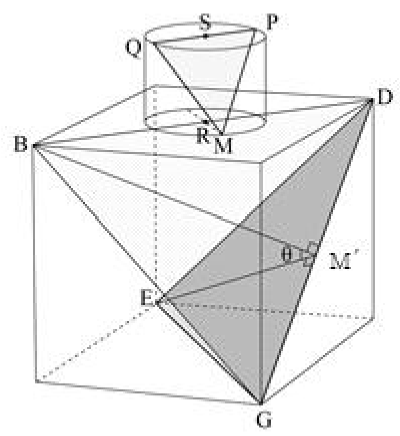
$S=S'\times\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{10}$

따라서 $100S^2=15$

32) 답 : 13

[해설]

[출제 의도] 정사영을 이용하여 수학외적 문제 해결하기



원기둥의 밑면 α, β의 중심을 각각 R, S라 하자.

$\overline{PQ}//\overline{DB}$이고, $\overline{SM}//\overline{RG}$이므로

평면 MPQ와 평면 GDB는 평행하다.

삼각형 GDB와 삼각형 DEG는 모두 정삼각형이고

두 삼각형이 만나서 생기는 선분은 $\overline{DG}$이다. 선분 DG의 중점을 M이라 하고

$\theta=\angle BME$라 하면

$\overline{BM}=\overline{EM}=2\sqrt{6}$, $\overline{BE}=4\sqrt{2}$ 이므로

삼각형 $BM'E$에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \cos(\angle BM'E) = \frac{24+24-32}{2\times 2\sqrt{6}\times 2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$$

삼각형 MPQ의 넓이 S는

$$S = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는

$$S\cos\theta = 2\sqrt{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$a=3$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=13$

33) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 두 직선이 이루는 각을 이해한다.

모서리 DE와 모서리 CB가 평행이므로

두 모서리 AC와 DE가 이루는 각은 두 모서리 AC와 CB가 이루는 각과 같다.

따라서 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

34) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 삼수선의 정리를 이해한다.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$

점 B에서 $\overline{AP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABP에서 $\overline{BH} = \sqrt{3}$

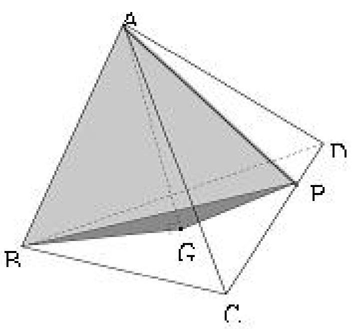
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH}\perp\overline{AP}$이다.

따라서 직각삼각형 CBH에서 $\overline{BC}=2$, $\overline{BH}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{CH}=\sqrt{7}$

35) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 정사영의 성질 이해하기



정사면체 $ABCD$의 모서리의 길이를 $4a$라 하면,

코사인법칙에 의하여 $\overline{AP} = \overline{BP} = \sqrt{(4a)^2 + a^2 - 4a^2} = \sqrt{13}\,a$

삼각형 ABP의 넓이는 $6a^2$ 이다.

점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면,

점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이다.

삼각형 BGP의 넓이는 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 이므로

삼각형 BGP의 넓이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$ 이므로 $6a^2\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

36) 답 : 7

[해설]

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로

두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, $\overline{AB}=4$라 하면 $\overline{BM}=2\sqrt{3}$, $\overline{MP}=\sqrt{3}$ 이고,

직각삼각형 BNP에서 $\overline{BP}=\sqrt{13}$ 이다.

따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \left|\frac{\overline{BM}^2+\overline{MP}^2-\overline{BP}^2}{2\overline{BM}\cdot\overline{MP}}\right| = \frac{1}{6}$$

$$\therefore\ p+q=6+1=7$$

37) 답 : 3

[해설]

점 A, B, C를 평면 α 위로 정사영시킨 점을 각각 A', B', C'라 하자. 또한 점 A를 선분 BB', 선분 CC' 위로 정사영시킨 점을 각각 P, R이라 하고, 점 B를 선분 CC' 위로 정사영시킨 점을 Q라고 할 때, 세 개의 구가 서로 외접하므로

$AB=2+4=6$

$BC=4+8=12$

$CA=8+2=10$

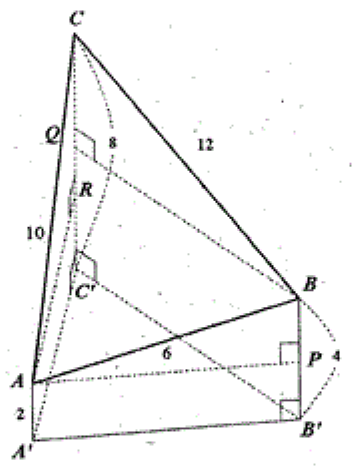
이다. 세 구가 평면 α 위에 있으므로

$BP=4-2=2$

$CQ=8-4=4$

$CR=8-2=6$

이다. 피타고라스 정리에 의해



$$A'B' = AP = \sqrt{6^2-2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$B'C' = BQ = \sqrt{12^2-4^2} = 8\sqrt{2}$$

$$C'A' = RA = \sqrt{10^2-6^2} = 8$$

이다. 제이코사인법칙에 의해

$$\cos B = \frac{6^2+12^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 12} = \frac{5}{9}$$

$$\cos B' = \frac{(4\sqrt{2})^2+(8\sqrt{2})^2-8^2}{2\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{9}\right)^2} = 8\sqrt{14}$$

$$\triangle A'B'C' = \frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2})\cdot(8\sqrt{2})\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 8\sqrt{7}$$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{8\sqrt{7}}{8\sqrt{14}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

따라서 $a=1, b=2$이므로 $a+b=3$이다.

38) 답 : ③

[해설]

점 C를 원점으로 하고 선분 BC와 선분 CE를 연결한 선분을 x축으로

선분 CD를 y축, 점 C를 지나며 평면 $DCEF$에 수직인 직선을 z축으로 하는

좌표 공간을 정하자.

점 O에서 xy평면에 내린 수선의 발을 G라 하면

G는 삼각형 ABC의 무게중심이 된다.

따라서 G의 좌표는 $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$이다.

또한, O'에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

H는 사각형 $CEFD$의 대각선의 중심이 된다.

따라서 H좌표는 $(1, 1, 0)$이다.

사면체의 높이와 정사각뿔의 높이를 구하여 O와 O'의 좌표를 구하면

$O\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $O'(1, 1, \sqrt{2})$가 된다.

$\therefore \overrightarrow{CO}=\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{CO'}=(1, 1, \sqrt{2})$

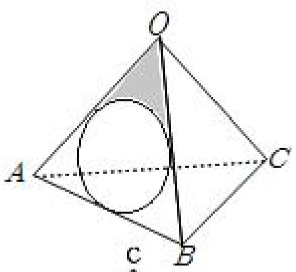
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO'}}{|\overrightarrow{CO}||\overrightarrow{CO'}|}$$

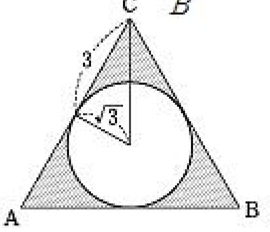
$$=\frac{-1+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\sqrt{2}}{2\times 2}=\frac{5}{12}\sqrt{3}-\frac{1}{4}$$

39) 답 : 27

[해설]

구하는 부분의 넓이는 아래 그림에서 어두운 부분을 평면 ABC 위로 정사영시킨 넓이와 같다.





정사면체에서 이면각 θ에 대해 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이므로

$$S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2-\pi\left(\sqrt{3}\right)^2\right\}\times\frac{1}{3}$$

$$=3\sqrt{3}-\pi$$

$\therefore (S+\pi)^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2=27$

40) 답 : 160

[해설]

[출제 의도]세 평면의 교점을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 네 평면 중 세 평면이 만나는 점이 사면체의 꼭짓점이므로

$A(0, 0, 4)$, $B(0, 4, 0)$, $C(2, 2, 0)$이다.

따라서 사면체 $OABC$의 부피는

$$V=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 2\right)\times 4=\frac{16}{3}$$

$30V=160$

41) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]벡터의 연산을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AO}}{3}$ 이므로 B는 선분 OP를 $2:1$로 내분하는 점이다.

원뿔의 전개도에서 L은 선분 AA'이고

선분 OA와 선분 OA'을 $2:1$로 내분하는 점을 각각 X, X'이라 하면

점 B의 자취는 선분 XX'이다.

부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$30\times\theta=2\pi\times 10$에서 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ 이므로

삼각형 OAA'에서 $\frac{\overline{AA'}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{30}{\sin\frac{\pi}{6}}$

$\therefore \overline{AA'}=30\sqrt{3}$

$\therefore \overline{XX'}=\frac{2}{3}\overline{AA'}=20\sqrt{3}$

42) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]미분법을 활용하여 증명문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{PS}=x$, (기둥높이) $=\sqrt{16-x^2}$,

사각기둥의 부피 $V(x)=x^2\sqrt{16-x^2}$이다.

미분하면

$$V'(x)=2x\sqrt{16-x^2}+x^2\frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$\frac{2x(16-x^2)-x^3}{\sqrt{16-x^2}}=\frac{32x-3x^3}{\sqrt{16-x^2}}$$

$V'(x)=0$의 해는 부피를 최대로 만든다. $\therefore x=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

43) 답 : 826

[해설]

[출제 의도]공간도형에서 직선의 위치 관계를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) n이 홀수일 때, $f(n)=(n-2)+(n-1)=2n-3$

$\therefore f(2k-1)=4k-5$

(ⅱ) n이 짝수일 때, $f(n)=(n-2)+(n-2)=2n-4$

$\therefore f(2k)=4k-4$

$$\sum_{n=3}^{30}f(n)=\sum_{k=2}^{10}\{f(2k-1)+f(2k)\}=\sum_{k=2}^{10}(8k-9)=826$$

44) 답 : 60

[해설]
[출제 의도]삼수선의 정리를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AD}\perp\alpha$, $\overline{DH}\perp\overline{BC}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$
점 H는 선분 BC의 중점이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{10^2-6^2}=8,\ \overline{DH}=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

$$\therefore\ \triangle DBC=\frac{1}{2}\times12\times10=60$$

45) 답 : ④
[해설]
[출제 의도]공간도형에서 이면각의 크기를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
꼭짓점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{AH}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$,
$\overline{DH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,
$\triangle AHD$에서 $\cos\theta=\dfrac{4^2+(2\sqrt{10})^2-4^2}{2\times4\times2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$