Ⅱ.평면벡터

3.평면 운동

중단원 기출문제

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

1 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 위치 $P(x,\,y)$가 $x=\sqrt{3}\sin t$, $y=2\cos t-5$이다. 시각 $t=\alpha\,(0<\alpha<\pi)$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 평행할 때, $\cos\alpha$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

2 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $(x,\,y)$가
$\begin{cases} x=4(\cos t+\sin t) \\ y=\cos 2t \end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$이다.

점 P가 $t=0$에서 $t=2\pi$까지 움직인 거리(움직인 거리)를 $a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오.[4점]

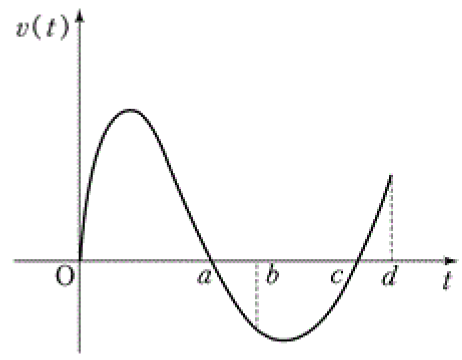
[난이도 : ★★★] [2009 학년도 대수능]

3 $x=0$에서 $x=6$까지 곡선 $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$의 길이를 구하시오.

[4점]

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

4 다음은 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0\le t\le d)$에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프이다.



$\int_0^a |v(t)|dt=\int_a^d |v(t)|dt$일 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

(단, $0<a<b<c<d$이다.)[3점]

[보기]
ㄱ. 점 P는 출발하고 나서 원점을 다시 지난다.
ㄴ. $\int_0^c v(t)dt=\int_c^d v(t)dt$
ㄷ. $\int_0^b v(t)dt=\int_b^d |v(t)|dt$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

5 $x=0$에서 $x=\ln 2$까지 곡선 $y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$의 길이는?[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$
④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

6 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0<t<\pi)$에서의 위치 $P(x,\ y)$가

$x=2t-\cos t,\quad y=4-\sin t$

이다. 시각 $t=\alpha(0<\alpha<\pi)$에서의 점 P의 속도 $\vec{v}$와 가속도 $\vec{a}$가 $\vec{v}\cdot\vec{a}=1$을 만족시킬 때, α의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{2\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5\pi}{6}$

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

7 양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 1)$에서의 위치 (x,y)가 $\begin{cases} x=2\ln t \\ y=f(t)\end{cases}$ 이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때시각 t는 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이다.

시각 $t=2$일 때, 점 P의 가속도를 $\left(-\frac{1}{2},\ a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

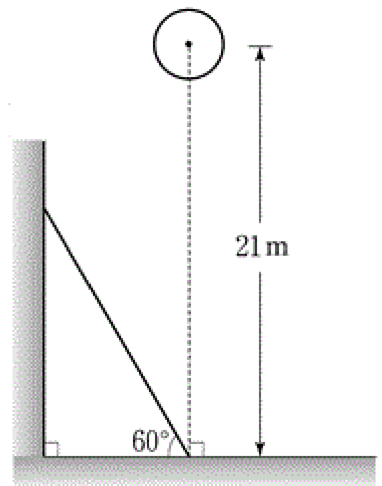
[난이도 : ★★☆] [2008년 6월 모의평가]

8 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $P(t)=\frac{1}{3}t^3+4t-\frac{2}{3},\ Q(t)=2t^2-10$이다.

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q사이의 거리를 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★★] [2007년 6월 모의평가]

9 그림과 같이 편평한 바닥에 60°로 기울어진 경사면과 반지름의 길이가 $0.5m$인 공이 있다. 이 공의 중심은 경사면과 바닥이 만나는 점에서 바닥에 수직으로 높이가 $21m$인 위치에 있다.



이 공을 자유낙하시킬 때, t초 후 공의 중심의 높이 $h(t)$는 $h(t)=21-5t^2(m)$

라고 한다. 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간, 공의 속도는?

(단, 경사면의 두께와 공기의 저항은 무시한다.)[4점]

① $-20m/$초 ② $-17m/$초 ③ $-15m/$초
④ $-12m/$초 ⑤ $-10m/$초

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

10 좌표평면 위의 곡선 $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}\ (0\leq x\leq 12)$에 대하여

$x=0$에서 $x=12$까지의 곡선의 길이를 l이라 할 때,

$3l$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

11 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가

$x(t)=t+\frac{20}{\pi^2}\cos(2\pi t)$이다. 점 P의 시각 $t=\frac{1}{3}$에서의

가속도의 크기를 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 3월 학력평가]

12 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치 x_P, x_Q는 다음과 같다.

$$\begin{cases} x_P=t^2-at \\ x_Q=\ln(t^2-t+1) \end{cases}$$

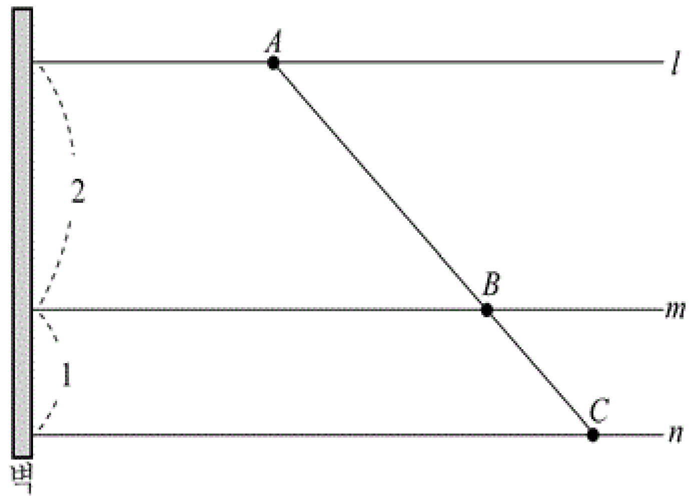
두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 t의 범위가 $\frac{1}{2}<t<2$일 때, 실수 a의 값은?[3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[난이도 : ★★★] [2010년 7월 학력평가]

13 그림과 같이 케이블 l, m, n은 모두 벽면과 수직이고, 케이블 사이의 거리가 각각 2, 1이다.

l위의 광원 A에서 m위의 물체 B에 빛을 비추면 n위에 그림자 C가 나타난다.



광원 A와 물체 B의 시각 $t\,(t\le 8)$에서 벽으로부터의 거리를 각각 $x=4-\frac{1}{2}t$, $y=t^2-\frac{11}{2}t+10$이라 할 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?(단, 광원, 물체, 그림자의 크기는 무시한다.)[4점]

[보기]
ㄱ. $t=\frac{5}{2}$에서 광원과 물체의 속도가 같아진다.
ㄴ. A와 C사이의 거리가 3인 순간은 두 번이다.
ㄷ. $2<t<3$에서 그림자 C의 가속도는 1이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

14 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=2\sin t-2\cos t$, $y=3\sin t\cos t$이다.

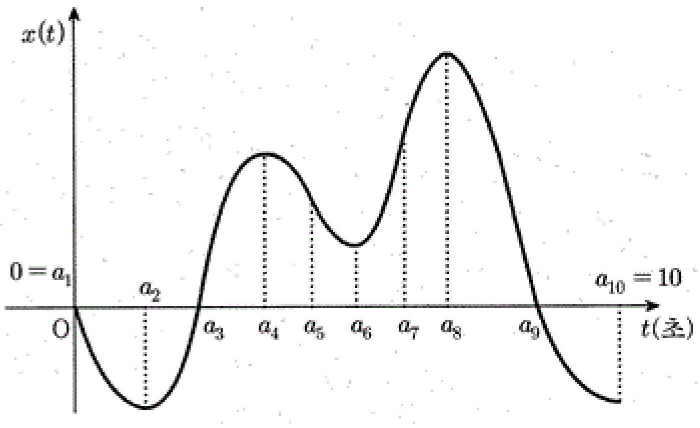
점 P의 속력의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

15 그림은 원점을 출발하여 10초 동안 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 나타낸 그래프이다. $x(t)$가 이계도함수를 가질 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

(단, 함수 $x(t)$는 $t=a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9$에서만 변곡점을 갖는다.)[3점]



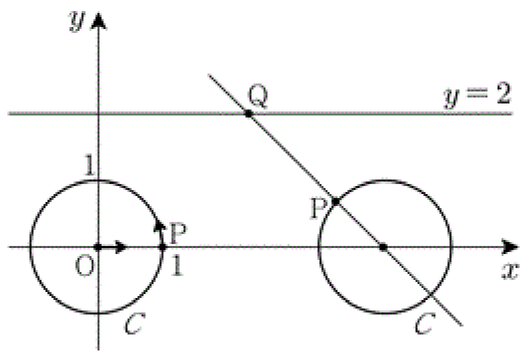
[보기]
ㄱ. 점 P는 출발 후 원점을 2번 지난다. ㄴ. 점 P는 출발하고 나서 10초 동안 운동 방향이 4번 바뀐다. ㄷ. 9개의 열린 구간 $I_n=(a_n,\ a_{n+1})(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$중 점 P의 속도가 증가하는 구간의 개수는 5개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

16 좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 C와 이 원 위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)점 P는 원 C위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 속력으로 움직인다. (나)원 C는 x축의 양의 방향으로 매초 10의 속력으로 움직인다.



원 C는 중심이 원점에서, 점 P는 점 $(1,\ 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 C의 중심과 점 P를 지나는 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q라 하자.

출발한 후 $\frac{3}{4}\pi$초가 되는 순간, 점 Q는 직선 $y=2$위를 매초 a의 속력으로 움직인다. a의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

17 좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,\ y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=9\cos t-\cos 9t,\ y=9\sin t-\sin 9t$로 나타내어지는 곡선이 있다.

점 P가 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{8}$까지 움직인 거리를 s라 할 때, $2s$의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

18 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치벡터를 $\vec{p}=(x,\ y)$라 하면 $x=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}$, $y=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}$이 성립한다.

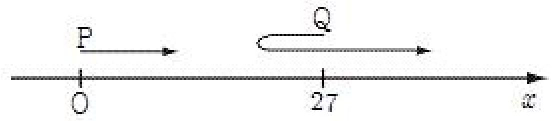
이때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $t=1$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 위치벡터 $\vec{p}$는 서로 수직이다.
ㄴ. 임의의 시각 t에서 점 P의 가속도 $\vec{a}$와 위치벡터 $\vec{p}$는 서로 같다.
ㄷ. 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리는 1이상이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 5월 학력평가]

19 수직선 위에서 움직이는 두 점 $P,\ Q$가 있다. 출발한 지 t초 후 두 점 $P,\ Q$의 위치가 각각 $x_1(t)=kt,\ x_2(t)=t^3-3t^2+27$일 때, 점 $P,\ Q$가 적어도 한 번 만나게 되는 상수 k의 최솟값을 구하시오.[4점]



정답 및 해설

3.평면 운동

중단원 기출문제

1) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 위치와 속도의 관계, 두 벡터가 평행할 조건 및 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 코사인의 값을 구할 수 있는가?

점 P의 시각 $t(0<t<\pi)$에서의 위치 $P(x,y)$가 $x=\sqrt{3}\sin t$, $y=2\cos t-5$ 이므로

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cot t \\ \dfrac{dy}{dt}=-2\sin t \end{cases}$$

따라서 점 P의 시각 $t=\alpha(0<\alpha<\pi)$에서의 속도 $\vec{v}$는

$\vec{v}=(\sqrt{3}\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)$

한편, 점 P의 시간 $t=\alpha(0<\alpha<\pi)$에서의 위치 $P(x,y)$는

$\begin{cases} x=\sqrt{3}\sin\alpha \\ y=2\cos\alpha-5 \end{cases}$ 이므로

$\overrightarrow{OP}=(\sqrt{3}\sin\alpha,\ 2\cos\alpha-5)$

시각 $t=\alpha(0<\alpha<\pi)$에서의 점 P의 속도 $\vec{v}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 평행하므로

$\vec{v}=t\overrightarrow{OP}$(단, t는 0이 아닌 실수)

즉, $(\sqrt{3}\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)=t(\sqrt{3}\sin\alpha,\ 2\cos a-5)$ 에서

$\sqrt{3}\cos\alpha=t\times\sqrt{3}\sin\alpha$ ...㉠

$-2\sin\alpha=t\times(2\cos\alpha-5)$ ...㉡

$0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $t=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

이므로 이 값을 ㉡에 대입하면

$-2\sin\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\times(2\cos\alpha-5)$

$-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-5\cos\alpha$

이때, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$이므로

$-2(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-5\cos\alpha$

$-2=-5\cos\alpha$

따라서 $\cos\alpha=\dfrac{2}{5}$

2) 답 : 64

[해설]

경과거리는

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{16(1-\sin 2t)+4\sin^2 2t}\,dt$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}2(2-\sin 2t)dt$

$=[4t+\cos 2t]_0^{2\pi}$

$=8\pi=a\pi$

$\therefore\ a^2=64$

3) 답 : 78

[해설]

$f'(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x$

$=x-(x^2+2)^{\frac{1}{2}}$

곡선의 길이 l은

$\displaystyle l=\int_0^6\sqrt{1+x^2(x^2+2)}$

$\displaystyle=\int_0^6(x^2+1)\ dx$

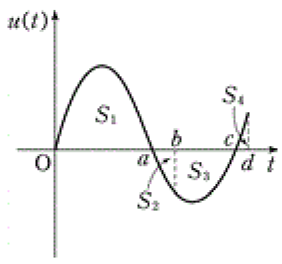
$=78$

4) 답 : ④

[해설]

그림과 같이 각각의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4라고 하자.

조건에서 $S_1=S_2+S_3+S_4$이다.



ㄱ. $S_1>S_2+S_3$이므로, 다시 원점을 지나지 않는다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^c v(t)dt=S_1-S_2-S_3$

$\displaystyle\int_c^d v(t)dt=S_4=S_1-S_2-S_3$

$\displaystyle\therefore\ \int_0^c v(t)dt=\int_c^d v(t)dt$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^b v(t)dt=S_1-S_2$

$\displaystyle\int_b^d |v(t)|dt=S_3+S_4$

조건에서 $S_1=S_2+S_3+S_4,\ S_1-S_2=S_3+S_4$

$\displaystyle\therefore\ \int_0^b v(t)dt=\int_b^d |v(t)|dt$

5) 답 : ⑤

[해설]

$x=0$에서 $x=\ln 2$까지 곡선의 길이는

$\displaystyle[\text{구하는 값}]=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2+1}\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx$

$\displaystyle=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{8}e^{2\ln 2}-\frac{1}{2}e^{-2\ln 2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

따라서 곡선의 길이는 $\frac{3}{4}$ 이다

6) 답 : ②

[해설]

$\vec{v}=(2+\sin t,\ -\cos t)\ldots$①

$\vec{a}=(\cos t,\ \ \sin t)\ldots$②

$t=\alpha$일 때, 점 P 의 $\vec{v}=(2+\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$, $\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

$\vec{v}\cdot\vec{a}=(2+\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

$\qquad=2\cos\alpha=1$

α는 $0<\alpha<\pi$ 이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

7) 답 : 15

[해설]

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t\geq 1)$에서의 위치 $(x,\,y)$가

$x=2\ln t,\ y=f(t)$로 주어졌으므로

시각 t에서의 속도는 $\vec{v}=\left(\frac{2}{t},\,f'(t)\right)$이고

시각 t에서의 가속도는 $\vec{a}=\left(-\frac{2}{t^2},\,f''(t)\right)$이다.

$t=2$일 때 점 P의 속도가 $\left(1,\,\frac{3}{4}\right)$이므로 $f'(2)=\frac{3}{4}$ 이다.

$t=2$일 때 점 P의 가속도가 $\left(-\frac{1}{2},\,a\right)$이므로 $f''(2)=a$이다.

점 P가 점 $(0,\,f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때,

시각 t는 $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고, 주어진 식을 정리하면

$2t=s+\sqrt{s^2+4}$

$(2t-s)^2=s^2+4$

$4t^2-4ts+s^2=s^2+4$

$ts=t^2-1$

$\therefore s=t-\frac{1}{t}\ldots$㉠이다.

$$s=\int_1^t|\vec{v}|dt=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+(f'(t))^2}\,dt$$

에서 양변을 t로 미분하면 $\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2}$ 이다.

한편 ㉠에서 $\frac{ds}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$ 이므로

$1+\frac{1}{t^2}=\sqrt{\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2}$ 임을 알 수 있고

양변을 제곱하여 정리하면

$$1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}=\frac{4}{t^2}+(f'(t))^2$$

$$(f'(t))^2=1-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}=\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2$$

$$f'(t)=1-\frac{1}{t^2}\ \left(\because\ f'(2)=\frac{3}{4}\right)\ldots㉡$$

㉡의 식을 t로 미분하면

$f''(t)=\frac{2}{t^3}$ 이고 $a=f''(2)=\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $60a=60\times\frac{1}{4}=15$ 이다.

다른 풀이

$x=2\ln t$, $y=f(t)$ 이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=f'(t)$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2}{t^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=f''(t)$

$\vec{v}=\left(\frac{2}{t},\,f'(t)\right)$ 에 $t=2$ 를 대입하면

$\vec{v}=(1,\,f'(2))=\left(1,\,\frac{3}{4}\right)$이므로

$\therefore\ f'(2)=\frac{3}{4}$

$\vec{a}=\left(-\frac{2}{t^2},\,f''(t)\right)$ 에 $t=2$를 대입하면

$\vec{a}=\left(-\frac{1}{2},\,f''(2)\right)=\left(-\frac{1}{2},\,a\right)$

$\therefore\ a=f''(2)$

$$s=\int_1^{\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}}\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

에서 $g(s)=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 라 하자

$$s=\int_1^{g(s)}\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$$

양변을 s에 대하여 미분하면

$$1=\sqrt{\left(\frac{2}{g(s)}\right)^2+\{f'(g(s))\}^2}\cdot(g'(s))$$

양변을 제곱하면

$$\left[\left(\frac{2}{g(s)}\right)^2+\{f'(g(s))\}^2\right]\cdot(g'(s))^2=1\ \cdots\ \cdots㉠$$

위의 식을 미분하면

$$\left[2\left(\frac{2}{g(s)}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\{g(s)\}^2}\right)\cdot g'(s)+2\{f'(g(s))\}\cdot f''(g(s))\cdot g'(s)\right]\cdot(g'(s))^2$$
$$+\left[\left(\frac{2}{g(s)}\right)^2+\{f'(g(s))\}^2\right]\cdot 2g'(s)\cdot g''(s)=0\ \cdots\ \cdots㉡$$

한편, $g'(s)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{2s}{2\sqrt{s^2+4}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{s}{2\sqrt{s^2+4}}$

$$g''(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{s^2+4}-s\cdot\frac{2s}{2\sqrt{s^2+4}}}{s^2+4}=\frac{2}{(s^2+4)\sqrt{s^2+4}}$$

$g(s)=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}=2$ 를 정리하면 $s=\frac{3}{2}$

$g\left(\frac{3}{2}\right)=2$, $g'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{5}$, $g''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{16}{125}$

㉠에 $s=\frac{3}{2}$ 를 대입하면

$$\left[\left(\frac{2}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^2+\left\{f'\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}^2\right]\cdot\left(g'\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2=1$$

$$\left[\left(\frac{2}{2}\right)^2+\{f'(2)\}^2\right]\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$$

$f'(2)=\frac{3}{4}$

㉡에 $s=\frac{3}{2}$ 를 대입하면

$$\left[2\left(\frac{2}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\left\{g\left(\frac{3}{2}\right)\right\}^2}\right)\cdot g'\left(\frac{3}{2}\right)\right.$$
$$\left.+2\left\{f'\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}\cdot f''\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\cdot g'\left(\frac{3}{2}\right)\right]\cdot\left(g'\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2+\left[\left(\frac{2}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\right)^2+\left\{f'\left(g\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right\}^2\right]\cdot 2g'\left(\frac{3}{2}\right)\cdot g''\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\left[2\left(\frac{2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\{2\}^2}\right)\cdot\frac{4}{5}+2\{f'(2)\}\cdot f''(2)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2$$
$$+\left[\left(\frac{2}{2}\right)^2+\{f'(2)\}^2\right]\cdot 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{125}=0$$

$\therefore\ a=f''(2)=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 60a=15$

8) 답 : 12

[해설]

P, Q의 속도를 구하면

$P'(t)=t^2+4$, $Q'(t)=4t$

두 점의 속도가 같아지는 시각은

$t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0$

$\therefore\ t=2$

시각 t일 때 두 점 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t+\frac{28}{3}\right|$ 에서

$t=2$일 때에는 $\overline{PQ}=\left|\frac{8}{3}-8+8+\frac{28}{3}\right|=\frac{36}{3}=12$

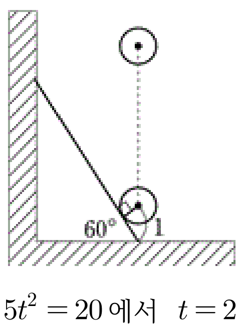
9) 답 : ①

[해설]

$h(t)=21-5t^2=1$일 때,

공이 경사면과 처음으로

충돌하므로



$5t^2=20$에서 $t=2$

$h'(t)=-10t$에서

$t=2$일 때의 공의 속도는

$h'(2)=-20m/$초

10) 답 : 56

[해설]

[출제 의도] 곡선의 길이 이해하기

$y'=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ 이므로

$$l=\int_0^{12}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{12}\sqrt{1+\frac{x}{4}}\,dx$$

$\sqrt{1+\frac{x}{4}}=t$라 놓으면 $1+\frac{x}{4}=t^2$, $\frac{1}{4}\frac{dx}{dt}=2t$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=12$일 때 $t=2$이므로

$$l=\int_1^2 8t^2dt=\left[\frac{8}{3}t^3\right]_1^2=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=\frac{56}{3}$$

따라서 $3l=56$

11) 답 : 40

[해설]

[출제 의도] 가속도를 활용하여 문제 해결하기

$x'(t)=1-\frac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$

$x''(t)=-80\cos(2\pi t)$

따라서 시각 $t=\frac{1}{3}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\left|x''\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-80\cos\frac{2\pi}{3}\right|=40$$

12) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]위치와 속도의 관계 및 속도의 부호의 의미를 이해하여 두 점이 서로 반대 방향으로 움직인 시각을 구한다.

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-a$$

$$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=2t-\frac{1}{t^2-t+1}$$

두 점 P, Q가 움직이는 방향이 서로 반대 방향이 되려면 $v_Pv_Q<0$ 이어야 한다.

$$v_Pv_Q=\frac{(2t-a)(2t-1)}{t^2-t+1}<0$$

$\therefore\ (2t-a)(2t-1)<0\cdots$ ①($\because\ t^2-t+1>0$)

① 의 해가 $\frac{1}{2}<t<2$이므로 $\frac{a}{2}=2$

$\therefore\ a=4$

13) 답 : ③

[해설]

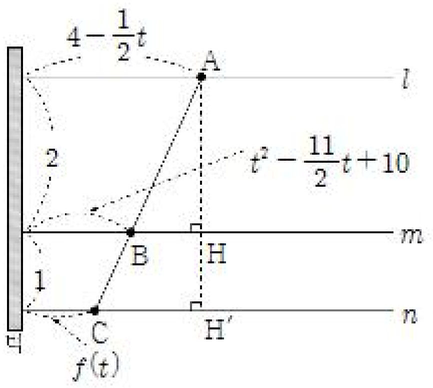
ㄱ. 광원과 물체의 속도는 각각 $\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}$, $\frac{dy}{dt}=2t-\frac{11}{2}$ 이므로

$t=\frac{5}{2}$에서 속도는 $-\frac{1}{2}$로 같다. ∴ 참

ㄴ. $\overline{AB}+\overline{BC}=3$인 순간은 $t^2-\frac{11}{2}t+10=4-\frac{1}{2}t$이므로

$t=2$ 또는 $t=3 \therefore$ 참

ㄷ. 그림자 C의 시각 t에서 벽으로부터의 거리를 $f(t)$, 점 A에서 직선 m, n에 내린 수선의 발을 각각 H, H'라 하자.



$\overline{BH}=\left(4-\frac{1}{2}t\right)-\left(t^2-\frac{11}{2}t+10\right)=-t^2+5t-6$

$\overline{CH'}=4-\frac{1}{2}t-f(t)$

$\overline{BH}:\overline{CH'}=2:3$ 이므로

$f(t)=\frac{3}{2}t^2-8t+13$ 이다.

속도 v는 $v=\frac{df(t)}{dt}=3t-8$ 이므로

가속도 a는 $a=\frac{dv}{dt}=3$ 이다. $\therefore$ 거짓

14) 답 : 14

[해설]

$\frac{dx}{dt}=2\cos t+2\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\cos 2t$ 이므로

점 P의 속력 $|v|$는

$$|v|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(2\cos t+2\sin t)^2+9\cos^2 2t}$$
$$=\sqrt{4+4\sin 2t+9\left(1-\sin^2 2t\right)}$$
$$=\sqrt{-9\sin^2 2t+4\sin 2t+13}$$

$\sin 2t=A$라 하면 $-1\le A\le 1$이고

$|v|=\sqrt{-9A^2+4a+13}$ 이므로 $|v|$는 $A=\frac{2}{9}$일 때,

최댓값 $\sqrt{\frac{121}{9}}=\frac{11}{3}$ 이다.

15) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $t=a_3, a_9$에서 원점을 지난다. $\therefore$ 참

ㄴ. $x'(t)$의 부호가 바뀌는 시각은 $t=a_2, a_4, a_6, a_8$로 운동방향은 4번 바뀐다. $\therefore$ 참

ㄷ. 속도 $x'(t)$가 증가하려면 $x''(t)>0$이어야 한다.

따라서 속도가 증가하는 구간은

$(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_5, a_6), (a_6, a_7), (a_9, a_{10})$

이므로 구하는 구간의 개수는 5개다. $\therefore$ 참

16) 답 : 6

[해설]

t초 후에 $P\,(10t+\cos t, \sin t)$이고, 직선의 방정식은

$y=\frac{\sin t}{\cos t}(x-10t)$ 이므로 점 Q의 x좌표는 $x=10t+2\cot t$

$\therefore \frac{dx}{dt}=10-2\csc^2 t$

$\therefore \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=\frac{3}{4}\pi}=6$

17) 답 : 9

[해설]

$\frac{dx}{dt}=-9\sin t+9\sin 9t$, $\frac{dy}{dt}=9\cos t-9\cos 9t$ 이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=18\sqrt{\frac{1-\cos 8t}{2}}=18\sin 4t$$

따라서

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{8}}18\sin 4t\,dt=\frac{9}{2}$$

$\therefore 2s=9$

18) 답 : ④

[해설]

ㄱ. $\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}, \frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

$t=1$일 때 $\vec{v}\cdot\vec{p}=\frac{e^2-e^{-2}}{2}\neq 0$ (거짓)

ㄴ. $\vec{a}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=\vec{p}$ (참)

ㄷ. $\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\,dt \ \ge \int_0^1 1dt=1\ (\text{참})$$

19) 답 : 9

[해설]

[출제 의도]접선의 방정식을 이용하여 최솟값 구하기

[해설] P, Q가 만나기 위해서는 $x_1(t)$와 $x_2(t)$가 교점 을 가져야 한다.

$x_1(t)$의 기울기 k는 원점에서 $x_2(t)$에 그은 접선의 기울기보다 크거나 같아야 한다.(단, $t\ge 0$)

$x_2(t)$위의 한 점을 (a, a^3-3a^2+27)이라 하면

접선의 방정식은 $y-(a^3-3a^2+27)=(3a^2-6a)(x-a)$이고

이 접선이 원점을 지나므로 $2a^3-3a^2-27=0$

$(a-3)(2a^2+3a+9)=0$

$a=3$일 때 접선의 기울기는 9이므로

k의 최솟값은 9이다.