Ⅱ.평면벡터

2.평면벡터의 성분과 내적

중단원 기출문제

[난이도 : ★☆☆] [2018 학년도 대수능]

1 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ -1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

2 좌표평면 위의 점 $(4,\ 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,\ 2)$에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$라 하자. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

3 좌표 공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|^2$의 최댓값을 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

4 좌표 공간에서 원점에 대한 세 점 A, B, C, 의 위치벡터를 차례로 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라 할 때, 이들 벡터 사이의 내적을 표로 나타내면 다음과 같다.

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	2	1	$-\sqrt{2}$
$\vec{b}$	1	2	0
$\vec{c}$	$-\sqrt{2}$	0	2

예를 들어 $\vec{a}\cdot\vec{c}=-\sqrt{2}$이다. 세 점 A, B, C에 대하여 두 점 사이의 거리의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $\overline{AB}<\overline{AC}<\overline{BC}$ ② $\overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$
③ $\overline{AC}<\overline{AB}<\overline{BC}$ ④ $\overline{BC}<\overline{AB}<\overline{AC}$
⑤ $\overline{BC}<\overline{AC}<\overline{AB}$

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

5 한 모서리 길이가 4인 정사면체 $ABCD$에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O, 선분 AD의 중점을 P라 하자. 정사면체 $ABCD$의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 $\overrightarrow{OP}$가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

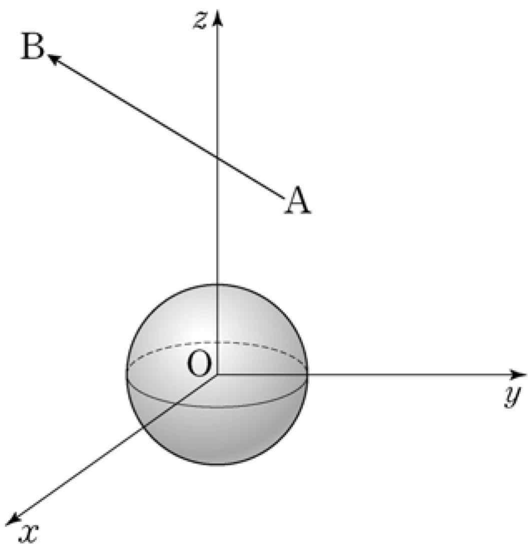
6 좌표 공간의 두 점 $A(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$, $B(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})$에 대하여 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}|=1$

(나) $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$이다. $16(a^2+b^2)$의 값을 구하시오.(단, a, b는 유리수이다.)

[4점][2016(B) /수능 29]



[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

7 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

8 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=30^\circ$이다.

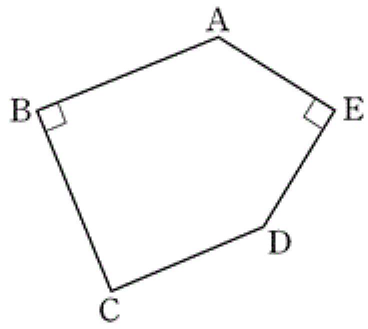
점 P가 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$를 만족시킬 때, $|\overrightarrow{PA}|^2$의 값은?[3점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2011 학년도 대수능]

9 평면에서 그림의 오각형 $ABCDE$가

$\overline{AB}=\overline{BC}$, $\overline{AE}=\overline{ED}$, $\angle B=\angle E=90^\circ$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보기]

ㄱ. 선분 BE의 중점 M에 대하여 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$

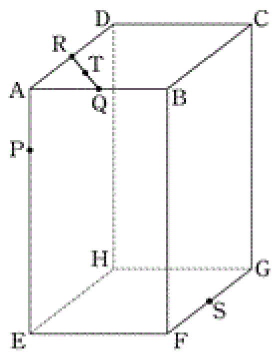
ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

10 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=4$, $\overline{AE}=8$인 직육면체 $ABCD-EFGH$에서 모서리 AE를 $1:3$으로 내분하는 점을 P, 모서리 AB, AD, FG의 중점을 각각 Q, R, S라 하자.

선분 QR의 중점을 T라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{TP}$와 벡터 $\overrightarrow{QS}$의 내적 $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{QS}$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★★] [2010 학년도 대수능]

11 좌표 공간의 점 $A(3, 3, 3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다.

$10(a+b)$의 값을 구하시오.(단, a, b는 유리수이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2005 학년도 대수능]

12 [이과]좌표평면 위의 점 A가 부등식 $y \geq \frac{1}{4}x^2+3$이 나타내는 영역에서 움직일 때, 벡터 $\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$의 종점 B가 나타내는 도형의 길이는?(단, O는 원점이다.)[3점]

① $\frac{\pi}{3}$　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ $\frac{2\pi}{3}$　⑤ 3

[난이도 : ★☆☆] [2004 학년도 대수능]

13 두 벡터 $\vec{a}=(-1, 3)$과 $\vec{b}=(2, 1)$에 대하여 내적 $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$의 값은?[2점]

① 11　② 13　③ 15
④ 17　⑤ 19

[난이도 : ★★☆] [2003 학년도 대수능]

14 두 벡터 $\vec{a}=(2, -3, 2)$, $\vec{b}=(1, -4, 0)$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[2점]

① $\frac{2}{17}$　② $\frac{5}{17}$　③ $\frac{8}{17}$
④ $\frac{11}{17}$　⑤ $\frac{14}{17}$

[난이도 : ★☆☆] [2002 학년도 대수능]

15 두 벡터 $\vec{a}=(9, x+1, -12)$, $\vec{b}=(-8, x, 7)$이 수직일 때, 양수 x의 값을 구하시오.[2점]

[난이도 : ★☆☆] [2001 학년도 대수능]

16 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$의 값은?

① 5　② 4　③ 3
④ 2　⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [1998 학년도 대수능]

17 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각이 60° 이다. $\vec{b}$의 크기는 1이고 $\vec{a}-3\vec{b}$의 크기가 $\sqrt{13}$일 때, $\vec{a}$의 크기는?

① 1 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 7

[난이도 : ★★☆] [1996 학년도 대수능]

18 좌표 공간에 두 점 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$이 있고, 점 $P(x, y, z)$는 $\triangle OAP$의 넓이가 2가 되도록 움직인다.

$0 \le x \le 1$일 때, 점 P의 자취가 만드는 도형을 평면 위에 펼쳤을 때의 넓이는?

① 16π ② 8π ③ 5π
④ 2π ⑤ π

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

19 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(1,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2018년 6월 모의평가]

20 좌표평면 위에 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle CAB)=\dfrac{3}{5}$
(나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=30$이고 $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 6월 모의평가]

21 두 벡터 $\vec{a}=(4, 1)$, $\vec{b}=(-2, k)$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$을 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오. [3점]

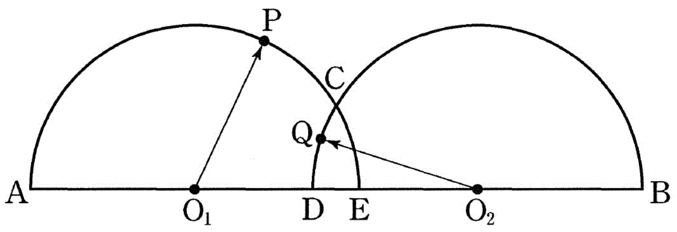
[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

22 그림과 같이 선분 AB위에 $\overline{AE}=\overline{DB}=2$인 두 점 D, E가 있다.

두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=1$인 두 점을 O_1, O_2라 하자.

호 AC위를 움직이는 점 P와 호 DC위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{O_1O_2}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2015년 9월 모의평가]

23 좌표평면 위의 네 점 $O(0,0)$, $A(4,2)$, $B(0,2)$, $C(2,0)$에 대하여 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}$의 값은?[3점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

24 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

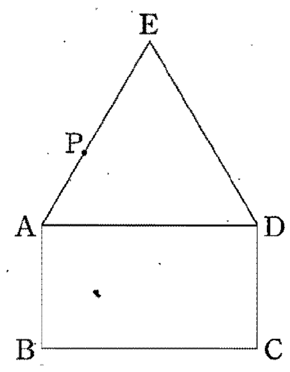
[난이도 : ★☆☆] [2011년 9월 모의평가]

25 두 벡터 $\vec{a}=(x+1,2)$, $\vec{b}=(1,-x)$가 서로 수직일 때, x의 값은?[2점][2011년 9월 평가원]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★★] [2010년 9월 모의평가]

26 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 $ABCD$와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE위를 움직일 때, 옳은 것만을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]



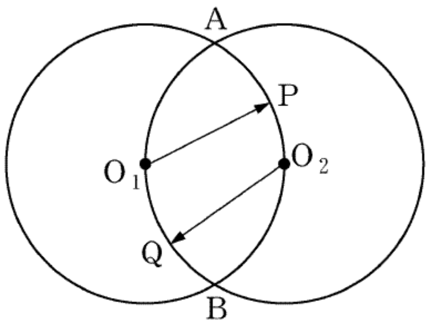
[보기]
ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.
ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.
ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2008년 9월 모의평가]

27 평면 위의 두 점 O_1, O_2사이의 거리가 1일 때, O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원의 교점을 A, B라 하자.

호 AO_2B위의 점 P와 호 AO_1B위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 내적 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?[3점]



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 1

[난이도 : ★★☆] [2005년 09월 모의평가]

28 크기가 1인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족할 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기는? (단, $0\le\theta\le\pi$) [3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

29 크기가 1인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}-\vec{b}|=1$을 만족할 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기는?(단, $0\le\theta\le\pi$)[3점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

30 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=4$

를 만족시킬 때, 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각을 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

31 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 꼭짓점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}$의 값은? [4점]

이미지가 없거나 이미지 크기가 0 임

(가)점 H가 선분 AB를 $2:3$으로 내분한다.
(나) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$
(다)삼각형 ABC의 넓이는 30이다.

① 36 ② 37 ③ 38
④ 39 ⑤ 40

[난이도 : ★★★] [2015년 10월 학력평가]

32 좌표 공간에서 구 $S: x^2+y^2+(z-3)^2=4$와 평면 $x-y+z-6=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자.

구 S 위의 점 $A(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3)$과 원 C 위를 움직이는 점 B에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$의 내적 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[4점]

[난이도 : ★★☆] [2012년 10월 학력평가]

33 중심이 C이고 반지름의 길이가 3인 구와 구 위의 한 점 A가 있다.

구 밖의 한 점 B를 $\overline{AB}=6$이고 $\overline{CB}=5$가 되도록 잡는다. 점 P가 이 구 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}$의 내적 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

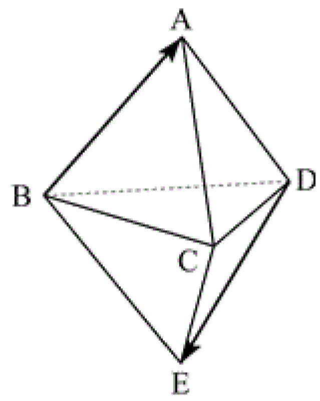
[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

34 좌표 공간의 세 점 $A(3,4,5)$, $B(4,8,6)$, $C(5,3,7)$과 xy평면 위의 점 P에 대하여 $\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}\right|$의 최솟값은?[3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

[난이도 : ★★☆] [2010년 10월 학력평가]

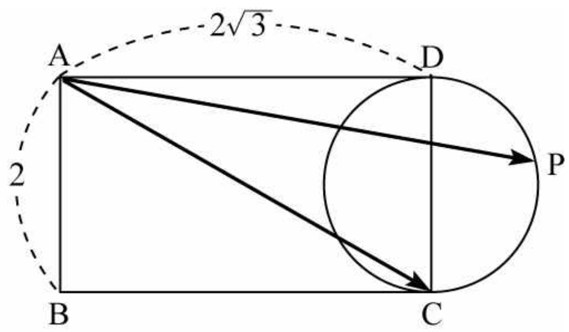
35 그림은 한 모서리의 길이가 6인 두 정사면체 $ABCD$와 $BCDE$에 대하여 면 BCD를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{DE}$에 대하여 $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

36 그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $ABCD$와 이 직사각형의 한 변 CD를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최댓값은?

(단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.)[4점]



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

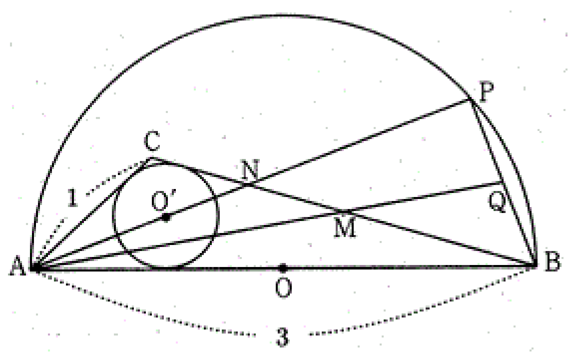
[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

37 두 점 $A(2, 0)$, $B(0, 1)$와 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다.

a^2+b^2의 값을 구하시오.[4점]

[난이도 : ★★★] [2010년 11월 학력평가]

38 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고, 길이가 3인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 내부에 $\overline{AC}=1$인 점 C를 잡고, $\triangle ABC$의 내접원의 중심을 O'이라 하자. 선분 AO'의 연장선과 선분 BC의 교점을 N, 반원과의 교점을 P라 하고, 선분 BC의 중점을 M, 선분 AM의 연장선과 선분 BP의 교점을 Q라 하자. 옳은 것만을에서 있는 대로 고른 것은?[4점]



[보 기]
ㄱ. $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$
ㄴ. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
ㄷ. $2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AM}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

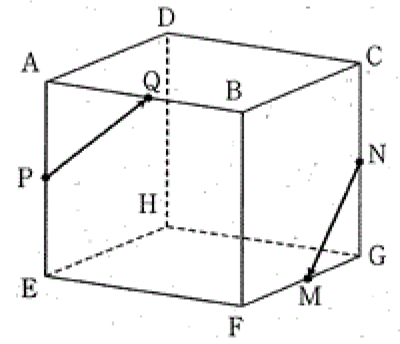
[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

39 그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{6}$인 정육면체 $ABCD-EFGH$가 있다.

모서리 AE, AB, FG, CG의 중점을 각각 P, Q, M, N이라 하자.

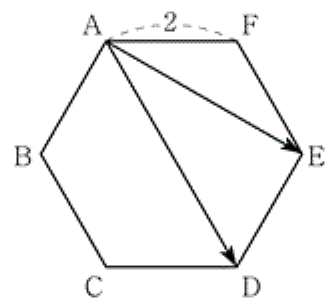
$\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\right|=\frac{b}{a}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

40 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 $ABCDEF$가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$의 값을 구하시오.[3점]



[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

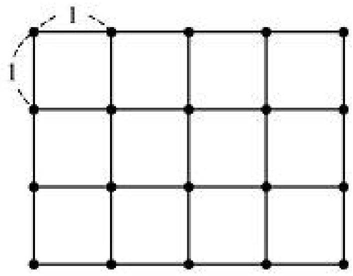
41 좌표 공간에서 벡터 $\vec{v}$가 x축, y축 각각과 이루는 각의 크기가 모두 60°일 때, 벡터 $\vec{v}$가 xy평면과 이루는 예각의 크기는?[3점]

[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

42 그림은 한 변의 길이가 1인 정사각형 12개를 붙여 만든 도형이다.

20개의 꼭짓점 중 한 점을 시점으로 하고 다른 한 점을 종점으로 하는 모든 벡터들의 집합을 S라 하자.

집합 S의 두 원소 $\vec{x}, \vec{y}$에 대하여 다음 [보기]에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?[3점]



[보기]
ㄱ. $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$이면 $\lvert\vec{x}\rvert, \lvert\vec{y}\rvert$의 값은 모두 정수이다.
ㄴ. $\lvert\vec{x}\rvert=\sqrt{5}, \lvert\vec{y}\rvert=\sqrt{2}$이면 $\vec{x}\cdot\vec{y}\neq 0$이다.
ㄷ. $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 정수이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

43 세 점 $O(0, 0), A(4, 3), B(4, 0)$을 잇는 직각삼각형 AOB에서 세 내적값 a, b, c에 대하여
$a=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}, b=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}, c=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 크기를 바르게 비교한 것은?[3점]

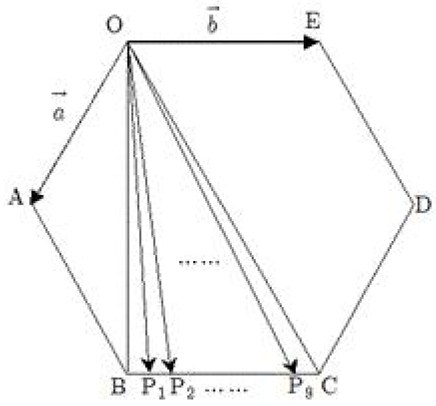
① $a=b>c$ ② $c=a>b$
③ $a>c>b$ ④ $b>a>c$
⑤ $c>a>b$

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

44 아래 그림과 같이 정육각형 $OABCDE$의 변 BC를 10등분한 점을 $P_1, P_2, \cdots, P_9$

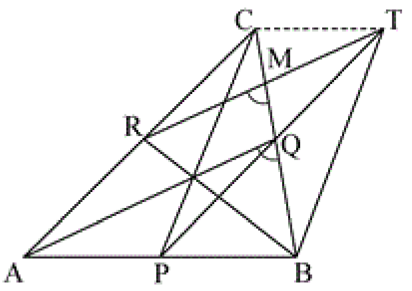
라 하자. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OE}=\vec{b}$라 할 때, $\sum_{k=1}^{9}\overrightarrow{OP_k}=m\vec{a}+n\vec{b}$가 성립한다.

이때, 두 실수 m, n에 대하여 $m+2n$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

45 $\triangle ABC$의 넓이를 S_1, $\triangle ABC$의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음은 S_1과 S_2사이에 일정한 비가 성립함을 증명한 것이다.

> $\triangle ABC$의 각 변의 중점을 P, Q, R로 놓고 그림과 같이 $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BT}$가 되도록
>
> 
>
>
> 점 T를 잡는다.
> 점 Q는 평행사변형 $PBTC$의 대각선 BC의 중점이므로
> $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QT}$ ⋯ ㉠
> 또 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$이므로
> $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AR}$ ⋯ ㉡
> ㉠, ㉡ 에서 $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QT}$
> ∴ [(가)]
> 따라서 $\triangle RBT$는 $\triangle ABC$의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형이다.
> 한편, 두 선분 BC와 RT의 교점을 M이라고 하면,
> $\overline{AQ}\ /\!/\ \overline{RT}$이고 점 R가 선분 AC의 중점이므로
> 점 M은 선분 CQ의 중점이다.
> $\angle\{RMB\}=\angle AQB$이므로
> $\triangle RBT=\frac{1}{2}\overline{RT}\times\overline{MB}\times\sin(\angle RMB)$
> $=$ [(나)] $\triangle ABC$

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [4점]

① $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{RT},\ \frac{2}{3}$

② $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CT},\ \frac{2}{3}$

③ $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{RT},\ \frac{3}{4}$

④ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CT},\ \frac{3}{4}$

⑤ $\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{PB},\ \frac{4}{5}$

[난이도 : ★★★] [2006년 10월 학력평가]

46 좌표 공간에서 세 점 $A(4,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$에 대하여 선분 AB의 중점을 D, 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라고 하자. 점 P가 선분 DE위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{AP}$의 내적 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최솟값은?(단, O는 원점이다.)[4점]

① -2　② $\frac{12}{7}$　③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{32}{7}$　⑤ $\frac{14}{3}$

[난이도 : ★☆☆] [2005년 0월 학력평가]

47 평면 위에 삼각형 OAB가 있다.
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\ (s\geq 0,\ t\geq 0)$를 만족하는 점 P가 그리는 도형에 대한 옳은 설명을 다음 [보기]에서 모두 고른 것은?[4점]

[보기]
ㄱ. $s+t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.
ㄴ. $s+2t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 AB의 길이보다 크다.
ㄷ. $s+2t\leq 1$일 때, 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB를 포함한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

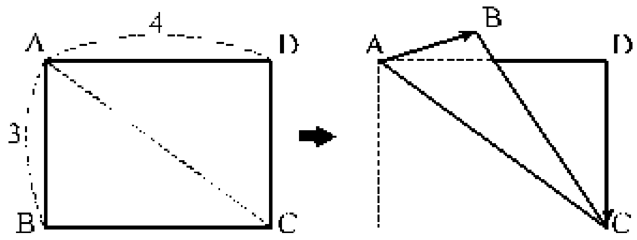
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★☆] [2005년 0월 학력평가]

48 두 벡터 $\vec{a}=(1,-2)$, $\vec{b}=(-2,2)$에 대하여 내적 $\vec{a}\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

49 $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=3$인 직사각형 모양의 종이 $ABCD$가 있다. 대각선 AC를 접는 선으로 하여 평면 ABC가 평면 ACD와 수직이 되게 접는다. 접은 도형에서 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

50 좌표평면 위에 세 점 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(0, 2)$가 있다. 점 $P(x, y)$가 두 조건 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 0$, $\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\le 4$를 만족할 때, 점 P가 존재하는 영역의 넓이는?[4점]

① π ② $\sqrt{2}+\pi$ ③ $2+\pi$
④ $3+\pi$ ⑤ 2π

정답 및 해설

2.평면벡터의 성분과 내적

중단원 기출문제

1) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 벡터의 연산을 할 수 있는가?

[구하는 값] $=\vec{a}+\vec{b}$

$=(3,\ -1)+(1,\ 2)=(4,\ 1)$

따라서 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은 $4+1=5$

2) 답 : 9

[해설]

[출제 의도] 법선벡터가 주어진 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

점 $(4,\ 1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1,\ 2)$인 직선의 방정식은

$1(x-4)+2(y-1)=0$

즉, $x+2y=6$

따라서 이 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(6,\ 0)$, $(0,\ 3)$ 이다.

따라서 $a=6$, $b=3$ 이므로

$a+b=9$ 이다.

3) 답 : 136

[해설]

[출제 의도] 벡터의 합의 크기의 최댓값을 구할 수 있는가?

구 $x^2+y^2+z^2=6$의 중심을 $O(0,\ 0,\ 0)$이라 하고

원 C의 중심을 C라 하면 원점 O에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발이 점 C이다 .

평면 $x+2z-5=0$이 법선벡터를 $\vec{n}$이라 하면

$\vec{n}=(1,\ 0,\ 2)$

이므로 원점 O를 지나고 평면 $x+2z-5=0$에 수직인 직선의 방정식은

$\frac{x}{1}=\frac{z}{2}$, $y=0$

$\frac{x}{1}=\frac{z}{2}=t$ (t는 실수)라 하면 $x=t$, $z=2t$

이므로 이를 $x+2z-5=0$에 대입하면

$t+4t-5=0$ 에서 $t=1$이다.

따라서 점 C의 좌표는 $(1,\ 0,\ 2)$이다.

한편, 원점 O와 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$d_1=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\sqrt{5}$ 이므로

원 C의 반지름의 길이는 $\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=1$

이므로 평면 $x+2z-5=0$은 y축과 평행하므로 원 C도 y축과 평행하다.

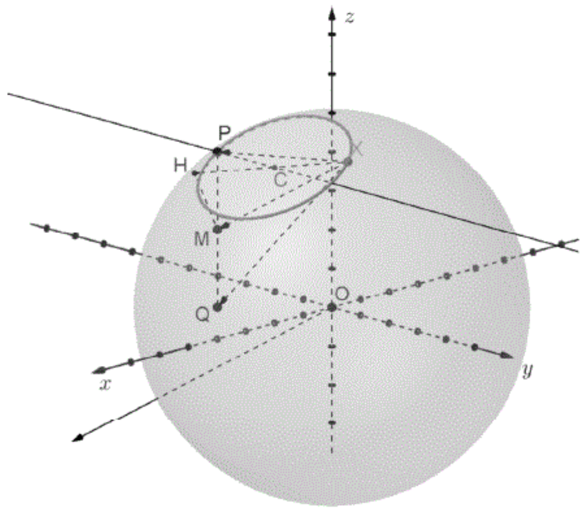
따라서 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선과 원 C가 만나는 두 점 정 y좌표가 작은 점이 점 P이다.

따라서 점 P의 좌표는 $(1,\ -1,\ 2)$이고, 점 Q의 좌표는 $(1,\ -1,\ 0)$이다.

한편, $|\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{QX}|=|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|$ 이므로

선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|=2|\overrightarrow{XM}|$ 이다.



점 M의 좌표는 $(1,\ -1,\ 1)$이다.

점 M과 평면 $x+2z-5=0$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$d_2=\frac{|1+2-5|}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이다.

따라서 점 M에서 평면 $x+2z-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{MH}=d_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로

$\overline{HC}=\sqrt{\overline{MC}^2-\overline{MH}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

이때 원 C 위의 점 X에 대하여 $\overline{HX}$의 최댓값은

$\overline{HC}+1=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+1$ 이므로 $\overline{MX}^2$의 최댓값은

$\overline{MH}^2+(\overline{HC}+1)^2=\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{2\sqrt{30}}{5}+1=3+\frac{2\sqrt{30}}{5}$ 이다.

따라서 $|\overrightarrow{XP}+\overrightarrow{XQ}|^2=4|\overrightarrow{XM}|^2$의 최댓값은

$4\left(3+\frac{2\sqrt{30}}{5}\right)=12+\frac{8\sqrt{30}}{5}$ 이므로

$a=12$, $b=\frac{8}{5}$

따라서 $10(a+b)=120+16=136$

이다.

4) 답 : ②

[해설]

$\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|$

$=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$

$=|\vec{b}-\vec{a}|$

$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=2-2+2=2$

$\therefore\ \overline{AB}^2=2$ ...㉠

$\overline{BC}=|\overrightarrow{BC}|$

$=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|$

$=|\vec{c}-\vec{b}|$

$|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=2-2\times0+2=4$

∴ $\overline{BC}^2 = 4 \ldots$ ㉡

$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}|$

$= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|$

$= |\vec{c} - \vec{a}|$

$|\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2$

$= 2 - 2\times(-\sqrt{2})$

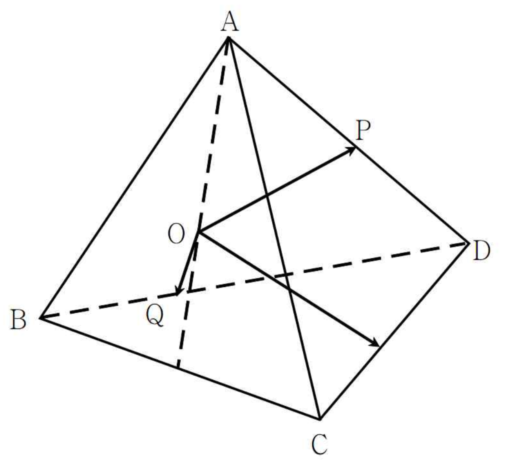
∴ $\overline{AC}^2 = 4 + 2\sqrt{2} \ldots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{AB}^2 < \overline{BC}^2 < \overline{AC}^2$ 이므로

$\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$

5) 답 : 19

[해설]



점 Q는 삼각형 BCD의 경계를 포함한 내부의 점이고 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ} = 0$을 만족시키는 점이다.

그런데 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대가 되려면 점 Q는 선분 DB 또는 선분 DC위에 점이여야 한다.

선분 DB위의 점을 Q라 하자.

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{DQ} = k\vec{b}$ $(0 < k < 1)$이다.

또 $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 16$에

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 8$이므로

[중간계산]: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$= (\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DO})\cdot(\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DO})$

$= \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)\cdot\left(k\vec{b} - \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)$

$= -\frac{5}{6}k + \frac{2}{3}$

$-\frac{5}{6}k + \frac{2}{3} = 0$에서

$k = \frac{4}{5}$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은

$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|$

$= \left|\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\right)\right|$

$= \left|-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right|$

이때,

$\left|-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right|^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}\right)$

$= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{5}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{16}{25}|\vec{b}|^2$

$= \frac{1}{4}\times 16 - \frac{4}{5}\times 8 + \frac{16}{25}\times 16$

$= \left(\frac{14}{5}\right)^2$

이므로 구하는 최댓값은 $\frac{14}{5}$이다.

∴ $p + q = 19$

6) 답 : 50

[해설]

[출제 의도] 벡터의 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

벡터 $\overrightarrow{AP}$를 시점이 원점이 되도록 옮겼을 때, 종점을 P'이라 하자.

이때,

[중간계산] $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$= \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$= \overrightarrow{OP'}\cdot(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA})$

$= \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$

이때, 점 Q가 점 P'이 되도록 잡으면 최댓값을 가지므로

[중간계산] $\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA} \le \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$

$= 1 - \overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA} \ldots$ ㉠

한편,

[중간계산] $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (1, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3}) - (2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$

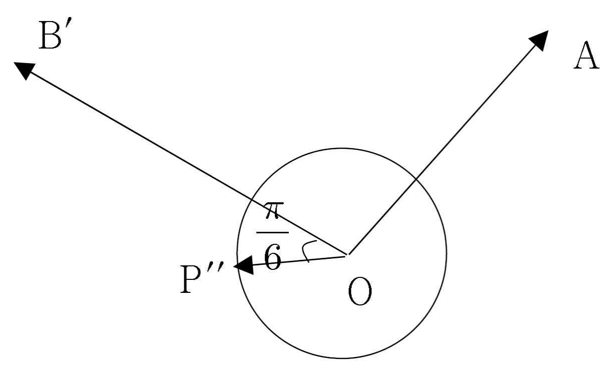
$= (-1, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})$

이고 점 B'을 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB'}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{AP}$와 벡터 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로

그림과 같이 점 P'이 세 점 O, A, B'에 의하여 결정된 평면 위에

그림과 같이 P''에 있을 때, $\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최솟값을 갖는다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\cos\alpha$

$= \frac{2, \sqrt{2}, \sqrt{3})\cdot(-1, -2\sqrt{2}, \sqrt{3}}{\sqrt{4+2+3}\sqrt{1+8+3}}$

$= \frac{(-2)+(-4)+3}{6\sqrt{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}$이 이루는 각의 크기는 $\alpha + \frac{\pi}{6}$이고

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{33}}{6}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{12}$$

그러므로

$$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OP'}||\overrightarrow{OA}|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=1\times\sqrt{4+2+3}\times\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{33}}{6}\right)=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{33}}{4}$$

그러므로 ㉠에서

$$1-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}\le 1-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$$

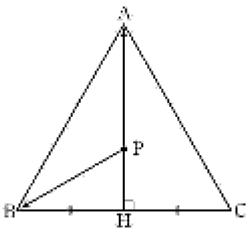
따라서 최댓값은 $\frac{7}{4}+\frac{\sqrt{33}}{4}$ 이므로

$$a=\frac{7}{4},\ b=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ 16(a^2+b^2)=50$$

7) 답 : 7

[해설]



$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\overline{PA}\cdot\overline{PH}$이고 $\overline{PA}+\overline{PH}=\sqrt{3}$ 이므로

산술-기하평균에 의하여 $\sqrt{3}=\overline{PA}+\overline{PH}\ge 2\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PH}}$

$$\therefore\ \overline{PA}\cdot\overline{PH}\le\frac{3}{4}$$

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이므로

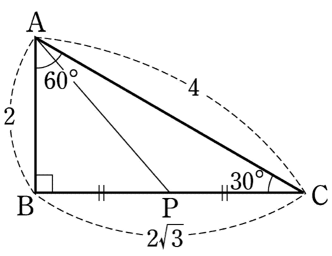
$$p+q=4+3=7$$

8) 답 : ③

[해설]

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

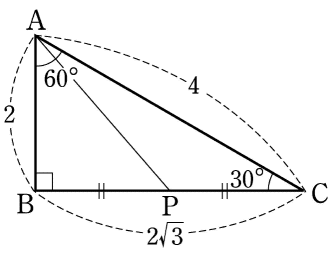
따라서 점 P는 선분 BC의 중점이다.



$$\therefore\ |\overrightarrow{AP}|^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$$

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

따라서 점 P는 선분 BC의 중점이다.



$$\therefore\ |\overrightarrow{AP}|^2=2^2+(\sqrt{3})^2=7$$

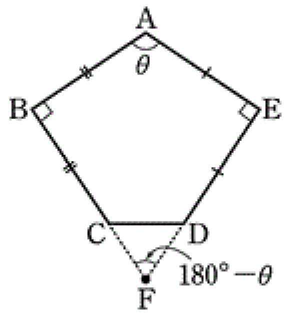
9) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$와 $\overrightarrow{AM}$은 서로 평행하다.

∴ 참

ㄴ.



위의 그림과 같이 $\overline{BC}$와 $\overline{ED}$의 연장 선의 교점을 F라 하자.

$\angle BAE=\theta$라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$가 이루는 각의 크기는

$180^\circ-\theta$이고, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AE}|\cos\theta$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{ED}|\cos\theta$

또한, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{ED}|$ 이므로

$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$ ∴ 참

ㄷ. $|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}+|\overrightarrow{ED}|^2$,

$|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2$

이다. ㄴ에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED}$이고,

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{ED}|$ 이므로

$|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{BE}|^2$

$\therefore\ |\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{ED}|=|\overrightarrow{BE}|$ ∴ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

10) 답 : 12

[해설]

$\overrightarrow{TP}=(-1,\ -1,\ 2)$

$\overrightarrow{QS}=(2,\ 2,\ 8)$

$\therefore\ \overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{QS}=-2-2+16=12$

11) 답 : 30

[해설]

(방법 1)벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각을 θ라 하면

$$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|^2=\frac{4}{9}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{OP}|^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$$

$$=\frac{4}{9}\times27+\frac{1}{9}\times9+\frac{4}{9}\times3\sqrt{3}\times3\times\cos\theta$$

$$=13+4\sqrt{3}\cos\theta\le13+4\sqrt{3}$$

$$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|\le\sqrt{13+4\sqrt{3}}=\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}=1+2\sqrt{3}$$

(방법 2)두 벡터의 합의 크기가 최대일 때에는 두 벡터의 방향이 같을 때이므로

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OA}\,(k>0)$라 놓으면 $\overrightarrow{OP}=k(3,\ 3,\ 3)=(3k,\ 3k,\ 3k)$

점 $P(3k,\ 3k,\ 3k)$는 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위에 있으므로

$$(3k)^2+(3k)^2+(3k)^2=9\Leftrightarrow k^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이때 $\overrightarrow{OP}=(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}(3,3,3)+\frac{1}{3}(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{3})$

$=\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}},\ 2+\frac{1}{\sqrt{3}},\ 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{3\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{13+4\sqrt{3}}$

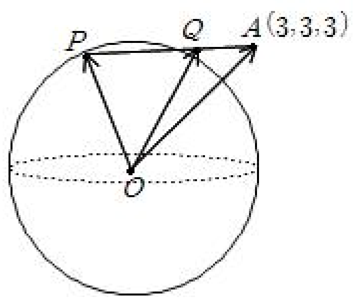
$=\sqrt{(1+2\sqrt{3})^2}=1+2\sqrt{3}$

[다른 풀이]

선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라고 할 때,

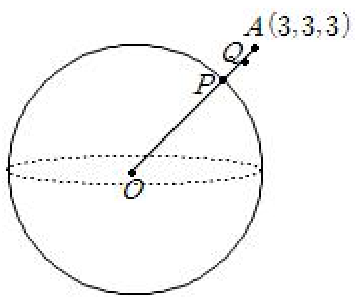
$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$

이다.



$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{3}$로 일정하므로

$|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 되는 것은 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때이다.



$\overline{PQ}=\frac{2}{3}\overline{PA}=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$이므로

$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{3}-2)=1+2\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 (x,y,z)라 하면

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}(3,3,3)+\frac{1}{3}(x,y,z)=\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)$

이므로

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|=\left|\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)\right|$

$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$는 구면 위의 점 $P(x,y,z)$와 점 $Q(-6,\ -6,\ -6)$ 사이의 거리이므로

$\overline{PQ}$의 최댓값은 $\overline{OQ}+3=\sqrt{6^2+6^2+6^2}+3=6\sqrt{3}+3$이다.

따라서, $\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$의 최댓값은

$\frac{1}{3}(6\sqrt{3}+3)=2\sqrt{3}+1$이므로 $a=1,\ b=2$이다.

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

12) 답 : ①

[해설]

원점을 지나는 직선 $y=kx$가 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2+3$과 접하는 순간을 구하기 위해 두 식을 연립하면

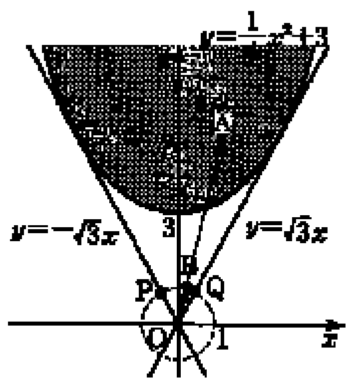
$\frac{1}{4}x^2+3=kx,\ x^2-4kx+12=0$

$\frac{D}{4}=4k^2-12=0$에서 $k=\pm\sqrt{3}$

그러므로 두 접선의 방정식은 $y=\pm\sqrt{3}x$이다.

$\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$는 $\overrightarrow{OA}$와 같은 방향의 단위벡터이므로

종점 B의 자취는 두 접선 사이의 단위원이다.



$y=\pm\sqrt{3}x$가 원점을 중심으로 하는 단위원과 만나는 점을 P, Q라 하면

종점 B가 그리는 자취는 부채꼴 OPQ의 호이고,

두 접선이 x축과 이루는 각의 크기는 각각 $\frac{\pi}{3}$이다.

따라서 부채꼴의 중심각이 $\frac{\pi}{3}$이므로 구하는 길이는

$1\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

[정답] ①

13) 답 : ①

[해설]

$\vec{a}+\vec{b}=(-1+2,\ 3+1)=(1,\ 4)$

$\therefore\ \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=(-1,\ 3)\cdot(1,\ 4)=-1+12=11$

14) 답 : ⑤

[해설]

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{17}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1+(-4)^2+0}=\sqrt{17}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-3)\cdot(-4)+2\cdot0=14$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{14}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\frac{14}{17}$

15) 답 : 12

[해설]

두 벡터는 수직이므로 내적은 0이다.

따라서, $\vec{a}=(9,\ x+1,\ -12)$, $\vec{b}=(-8,\ x,\ 7)$로부터

$\vec{a}\cdot\vec{b}=9\times(-8)+(x+1)\times x+(-12)\times7$

$=-72+x^2+x-84=0$

$x^2+x-156=0$

$(x+13)(x-12)=0$

$\therefore\ x=12\ (\because\ x>0)$

16) 답 : ⑤

[해설]

$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

$\therefore\ 36=4-4\vec{a}\cdot\vec{b}+36$

$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

17) 답 : ④

[해설]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ=|\vec{a}|\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}|$

$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$ 이므로 양변을 제곱하면

$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=13$ 이며 내적의 성질에 의해

$(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b})=13$ 이며 전개하면

$\vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}\cdot\vec{b}=13$

$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|+9=13$

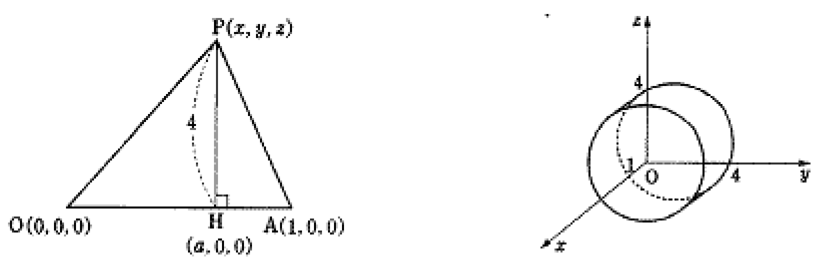
$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$

$(|\vec{a}|-4)(|\vec{a}|+1)=0$

$\therefore\ |\vec{a}|=4$

18) 답 : ②

[해설]



$P(x,y,z)$에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 $H(a,0,0)$라 하면

$\overline{OA}=1$로 일정하므로 $\overline{PH}=4$

$\overline{PH}=\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}=4 \Rightarrow (x-a)^2+y^2+z^2=16$

한편, $\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{OA}$이므로

$(x-a,y,z)\cdot(1,0,0)=0 \Rightarrow x-a=0$

$\therefore\ x=a$

$y^2+z^2=16\ (0\le x\le 1)$이므로

옆면의 넓이는 $2\pi\times4\times1=8\pi$

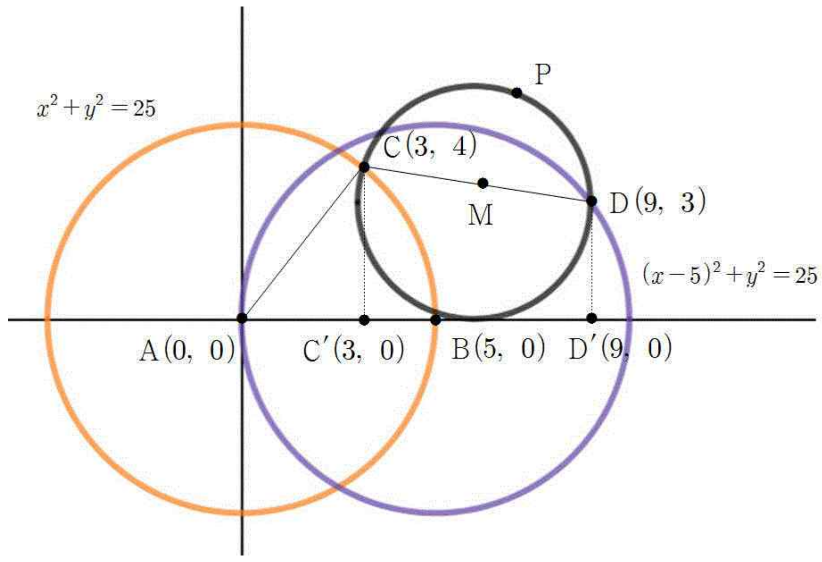
19) 답 : 14

[해설]

$\vec{a}+2\vec{b}=(2,\ 4)+2(1,\ 3)=(4,\ 10)$

20) 답 : 31

[해설]



그림과 같이 점 A를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자.

조건 (가)에 의해 점 C의 좌표는 $C(3,\ 4)$가 된다.

두 점 C, D에서 x에 내린 수선의 발을 각각 C', D'이라 하면

조건 (나)에 의해 선분 $C'D'$의 길이는 6이 된다.

또한, $|\overrightarrow{CD}|<9$이므로 점 D의 y좌표는 양수가 되어야 하므로

점 D의 좌표는 $D(9,\ 3)$이 된다.

선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 P는 점 $M\left(6,\ \frac{7}{2}\right)$을

중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{37}}{2}$인 원 위의 점이므로

점 P좌표는 $P\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$와 같이 잡을 수 있다.

$A(0,\ 0)$, $B(5,\ 0)$이므로

[구하는 식] $=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$

$$=\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$$

$$=\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)\left(1+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)^2$$

$$=\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{37}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$=\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\le\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}$$

따라서 $a=\frac{55}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이고 구하는 값은 $a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=31$이다.

21) 답 : 8

[해설]

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,\ 1)\cdot(-2,\ k)=-8+k=0$

따라서 $k=8$

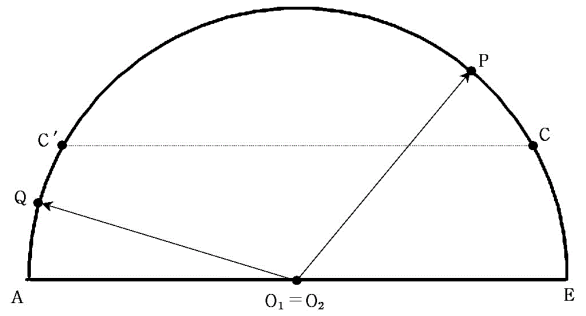
22) 답 : 19

[해설]

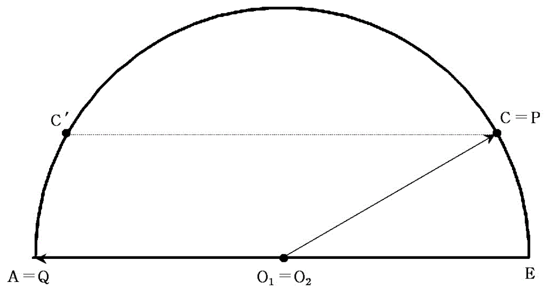
점 P는 호 AC 위에 존재하고 점 Q는 호 DC 위에 존재하므로

C를 지나고 AE에 평행한 직선이 원과 만나는 점을 C'라 하고,

$\overrightarrow{O_2Q}$를 시점을 O_1으로 하면 다음과 같다.

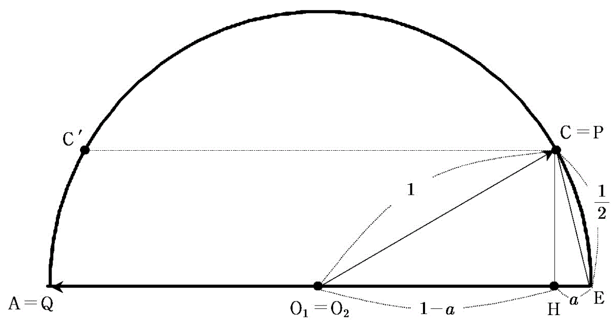


$\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$는 길이가 1인 벡터이므로 각이 제일 클 때 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$는 최소가 되고 그 점은 P가 C이며, Q가 A일 경우이므로



$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{EO_2}$이므로 $\left|\overrightarrow{EC}\right|=\frac{1}{2}$이다.

C에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{HE}=a$라 하면



피타고라스 정리에 의해

$$1-(1-a)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-a^2$$

$$2a-a^2=\frac{1}{4}-a^2$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{8}$$

$\overline{AH}=2-a$, $\overline{HB}=2-a$이므로

$$\overline{AB}=4-2a=4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$$

$\therefore\ p+q=19$

23) 답 : ⑤

[해설]

$\overrightarrow{OA}=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(2,\ 0)-(0,\ 2)=(2,\ -2)$

따라서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)=8-4=4$

24) 답 : ②

[해설]

문제에서 주어진 조건은 아래 두 가지이다.

$\left|\vec{a}\right|=2$ ....㉮

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ ....㉯

$\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 수직이므로

$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-t\vec{b}\right)=0$이며 내적의 성질에 의해

$\left|\vec{a}\right|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$이며 ㉮, ㉯에 의해

$4-2t=0$

$\therefore\ t=2$

25) 답 : ①

[해설]

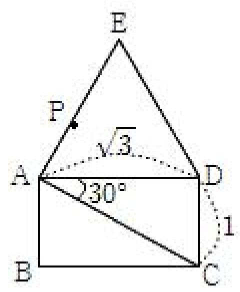
[출제 의도]두 벡터가 수직일 조건을 구할 수 있는가?

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x+1)\times1+2(-x)=-x+1=0$

$\therefore\ x=1$

26) 답 : ⑤

[해설]



ㄱ. $\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}\right|=\left|\overrightarrow{PB}\right|=\overline{PB}$이므로

선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$이다.(참)

ㄴ. $\triangle ACD$에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$이므로

$\angle CAD=30^\circ$

$\triangle EAD$가 정삼각형이므로

$\angle EAD=60^\circ$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90^\circ$

$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

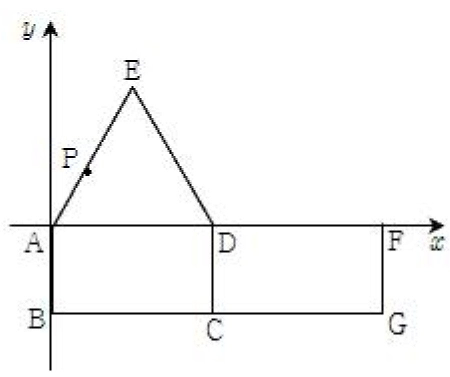
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+0$

$=2^2=4$(참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.



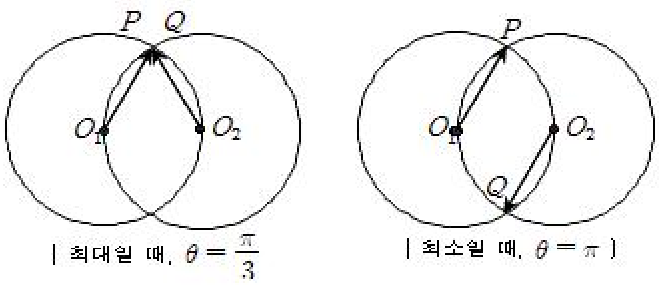
$\overline{AD}=\overline{DF}$인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 $DCGF$를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$이므로

$|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은 점 $G(2\sqrt{3},\ -1)$에서
직선 AE에 이르는 거리와 같다.
직선 AE의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$즉, $\sqrt{3}x-y=0$이므로
구하는 최솟값은 $\dfrac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{2}$ (참)
따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27) 답 : ②
[해설]
두 점 P, Q는 모두 반지름이 1인 호 위를 움직이므로, 두 벡터
$|\overrightarrow{O_1P}|=|\overrightarrow{O_2Q}|=1$이 되고,
이로부터 두 벡터의 내적이 최대와 최소를 이룰 때를
그림으로 표현하면 아래와 같다.



따라서 최댓값 (M)과 최솟값 (m)은 각각 다음과 같다.
$M=1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$, $m=1\cdot1\cdot\cos\pi=-1$

28) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]벡터
$|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 제곱하면
$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로
$1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1$
$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$
따라서, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로
$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\cdot1}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}\,(\because 0\le\theta\le\pi)$

29) 답 : ③
[해설]
[출제 의도]벡터
$|\vec{a}-\vec{b}|=1$의 양변을 제곱하면
$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$이므로
$1-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=1$
$\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$
따라서, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$이므로
$\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\cdot1}=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{3}\,(\because 0\le\theta\le\pi)$

30) 답 : ③
[해설]
[출제 의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기
$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$
$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$
$=13+12\cos\theta=16$
따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

31) 답 : ①
[해설]
[출제 의도] 두 평면벡터의 내적 이해하기
조건 (가)에서 $|\overrightarrow{AH}|=2k$, $|\overrightarrow{HB}|=3k\ (k>0)$라 하면
$|\overrightarrow{AB}|=5k$
조건 (나)에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AH}|\times|\overrightarrow{AB}|=40$
$2k\times5k=40$이므로
$k=2$이고 $|\overrightarrow{AB}|=10$
조건 (다)에서 삼각형 ABC의 넓이는 30이므로
$\dfrac{1}{2}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{CH}|=30$에서 $|\overrightarrow{CH}|=6$
$\angle AHC=\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CH}=|\overrightarrow{CH}|^2=36$

32) 답 : 134
[해설]
[출제 의도] 공간도형의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.
원 C의 중심을 O'이라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B})$
$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}$
평면 $x-y+z-6=0$을 α라 하면
구의 중심과 점 O'을 지나는 직선 위의 점의 좌표가 $(t,\ -t,\ t+3)$이고
점 O'이 평면 α 위의 점이므로 $O'(1,\ -1,\ 4)$이다.
따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OO'}=12$
구 S의 중심에서 평면 α까지 거리 $\sqrt{3}$, 구의 반지름의 길이 2에서
원 C의 반지름의 길이는 1 평면 α와 직선 OA가
이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{(1,\ -1,\ 1)\cdot(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3)}{\sqrt{1+1+1}\,\sqrt{2+2+9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$
$\begin{cases}\overline{OA}=\sqrt{13}\\ \overline{O'B}=1\end{cases}$이고, $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{O'B}$가 이루는 각의 크기를 β라 하면
$\theta\le\beta\le\pi-\theta$이므로 $\cos(\pi-\theta)\le\cos\beta\le\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$, $\overline{OA}=\sqrt{13}$, $\overline{O'B}=1$이고

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{O'B}|\cos\beta$이므로

$-\sqrt{10}\le|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{O'B}|\le\sqrt{10}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값은 $12+\sqrt{10}$, 최솟값은 $12-\sqrt{10}$이므로 곱은 134

33) 답 : 52

[해설]

[출제 의도] 평면과 구의 위치관계를 이용하여 벡터의 내적과 관련된 문제를 해결한다.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP}$

$=6\cdot5\cdot\frac{36+25-9}{2\cdot6\cdot5}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP}=26+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP}$

그런데 최대일 때의 점 P를 P_M, 최소일 때의 점 P를 P_m이라 하면

$\overrightarrow{CP_M}$, $\overrightarrow{CP_m}$은 $\overrightarrow{BA}$와 평행하고 방향이 반대이므로

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP_M}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CP_m}=0$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BP}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $26+26=52$

34) 답 : ②

[해설]

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $G(4,5,6)$이다.

$\left|\frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}\right|=|\overrightarrow{PG}|$이다.

이때, $|\overrightarrow{PG}|$의 값이 최소이려면

점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로

$P(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{PG}|$의 최솟값은 6이다.

35) 답 : 12

[해설]

좌표 공간에서 $B(0,0,0)$, $D(0,6,0)$, $C(3\sqrt{3},3,0)$이라 하면

$A(\sqrt{3},3,2\sqrt{6})$, $E(\sqrt{3},3,-2\sqrt{6})$이다.

$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},3,2\sqrt{6})$, $\overrightarrow{DE}=(\sqrt{3},-3,-2\sqrt{6})$

$\therefore\ |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2=(2\sqrt{3})^2=12$

36) 답 : ④

[해설]

점 A를 원점, 직선 AD를 x축, 직선 AB를 y축으로 하면

점 C의 좌표는 $C(2\sqrt{3},-2)$이다.

원 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ 위의 점 $P(x,y)$에 대하여

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=2\sqrt{3}x-2y$

$2\sqrt{3}x-2y=k$라 하면 $10\le k\le18$일 때,

직선과 원이 만나므로 k의 최댓값은 18이다.

37) 답 : 21

[해설]

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P'이라 하면,

두 벡터의 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overline{AB}\times\overline{AP'}$이다.

$\overline{AP'}$가 최대가 되는 점 P는 직선 AB와 수직인 기울기를 갖고, 타원에 접하는 접점 중에서 제 2사분면 위의 점이다.

따라서, 접선의 기울기는 2이고, 접선의 방정식은 $y=2x+\sqrt{17}$이다.

38) 답 : ⑤

[해설]

ㄱ. $\overline{AB}$의 원의 지름이고, $\angle APB=90^\circ$이므로 내적은 0이다. (참)

ㄴ. $\triangle ABC$에서 $\overline{AN}$은 $\angle CAB$의 이등분선이므로

$\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BN}:\overline{NC}=3:1$이다.

따라서 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB}=b$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$라 하자.

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BQ}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}\cdot(t\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\cdot\left(t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow(2t-3)(\vec{b}\cdot\vec{c}+3)=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$이므로, $t=\frac{3}{2}$이다.

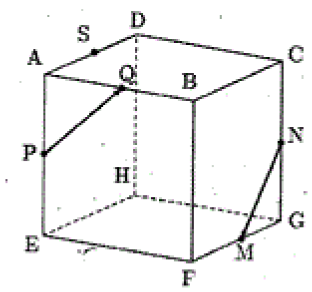
따라서, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AM}$이다. (참)

39) 답 : 13

[해설]

$\overline{AD}$의 중점을 S라 하자.

$\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{SP}$이고, $\triangle SPQ$는 정삼각형이므로



$\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\right|^2=\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}\right|^2$

$|\overrightarrow{PQ}|^2+|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{SP}|\cos120^\circ+\frac{1}{4}|\overrightarrow{SP}|^2$

$(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}(\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}$

따라서 $\left|\overrightarrow{PQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SP}\right|=\frac{3}{2}$이므로 $a^2+b^2=13$이다.

40) 답 : 12

[해설]

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$이므로 $|\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|^2=4$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2=4$이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=12$

41) 답 : ③

[해설]

좌표 공간에서 벡터 $\vec{v}$가 x축, y축과 이루는 각의 크기가 각각

60° 일 때,

벡터 $\vec{v}$가 z축과 이루는 각의 크기를 γ라 하면

$\cos^2 60° + \cos^2 60° + \cos^2\gamma = 1$이 되어

$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\gamma = 45°$ ($\because$ $\cos\gamma > 0$)된다.

즉, 벡터 $\vec{v}$가 z축과 이루는 각의 크기가 45° 이므로

벡터 $\vec{v}$가 xy평면과 이루는 각도 45° 가 된다.

42) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]벡터의 내적을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ.(반례) $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$이지만 $|\vec{x}|=\sqrt{2}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$인 경우가 있다.(거짓)

ㄴ. $|\vec{x}|=\sqrt{5}$, $|\vec{y}|=\sqrt{2}$이면 두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$는 수직이 될 수 없다.

$\therefore$ $\vec{x}\cdot\vec{y}\neq 0$(참)

ㄷ. 주어진 도형을 좌표평면에서 생각하면 $\vec{x}, \vec{y}$의 성분은 모두 정수이므로 $\vec{x}\cdot\vec{y}$는 항상 정수이다.(참)

43) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]내적의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

점 B에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 D이라 하면

$a=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAD=\overline{AO}\times\overline{AD}$

$b=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}=0$

$c=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle BOA=\overline{OA}\times\overline{OD}$

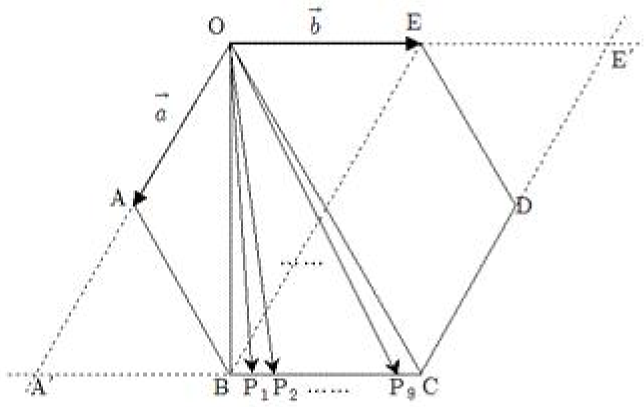
$\therefore$ $c>a>b$ ($\because$ $|\overline{OD}|>|\overline{AD}|$)

44) 답 : 45

[해설]

[출제 의도]선분의 내분점을 나타내는 위치벡터의 개념을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

아래 그림에서 $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}+2\vec{b}$이다.



점 P_k는 선분 BC를 $k:10-k$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP_k}=\frac{(10-k)\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}}{10-k+k}=\frac{20\vec{a}+(10+k)\vec{b}}{10}$$

$\sum_{k=1}^{9}\overrightarrow{OP_k}=$

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{20\vec{a}+(10+k)\vec{b}}{10}=\sum_{k=1}^{9}2\vec{a}+\sum_{k=1}^{9}\vec{b}+\sum_{k=1}^{9}\frac{k}{10}\vec{b}=18\vec{a}+9\vec{b}+\frac{9}{2}\vec{b}=18\vec{a}+\frac{27}{2}\vec{b}$$

$m=18$, $n=\frac{27}{2}$이므로 $m+2n=45$이다.

45) 답 : ③

[해설]

[출제 의도]삼각형의 넓이에 대한 정리를 증명할 수 있는가를 묻는 문제이다.

그림에서 점 Q는 평행사변형 $PBTC$의 대각선 BC의 중점이므로

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QT}\cdots$ ①

또, 삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$이므로

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AR}\cdots$ ②

① , ②에서 $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QT}$

사각형 $AQTR$는 평행사변형이므로[$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{RT}$]

따라서 $\triangle RBT$는 $\triangle ABC$의 세 중선의 길이를 각 변의 길이로 하는 삼각형이다.

한편, 두 선분 BC와 RT의 교점을 M이라고 하면, $\overline{AQ}//\overline{RT}$이고,

점 R가 선분 AC의 중점이므로

점 M은 선분 CQ의 중점이다. $\therefore$ $\overline{MB}=\frac{3}{4}\overline{BC}$

$\angle B=\angle AQB$이므로

$\triangle RBT=\frac{1}{2}\times\overline{RT}\times\overline{MB}\times\sin(\angle B)$

$\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\frac{3}{4}\overline{BC}\times\sin(\angle AQB)$ [=] $\frac{3}{4}$ $\triangle ABC$

46) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]벡터의 내적에 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$A(4, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, 6)$에 대하여

점 D, E의 좌표는 각각 $D(2, 3, 0)$, $E(0, 2, 4)$이다.

점 P가 선분 DE위를 움직이므로

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DE}=(2, 3, 0)+t(-2, -1, 4)$

$(-2t+2, -t+3, 4t)$ (단, $0\le t\le 1$)

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(-2t-2, -t+3, 4t)$이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=(-2t+2, -t+3, 4t)\cdot(-2t-2, -t+3, 4t)$

$(4t^2-4)+(t^2-6t+9)+16t^2=21t^2-6t+5$

$21\left(t-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{32}{7}$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}$의 최솟값은 $t=\frac{1}{7}$일 때 $\frac{32}{7}$이다.

47) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]벡터의 합의 의미를 이해하고 이를 이용하여 도형의 모양을 유추할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ ($0\le t\le 1$)이므로

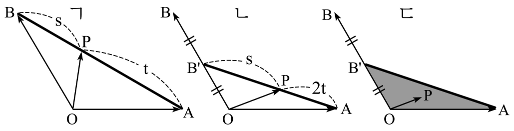
점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다. $\therefore$ 참

ㄴ. $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$이므로

점 P가 그리는 도형은 선분 AB' (이때, $\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$)이고,

그 길이는 선분 AB의 길이보다 작은 경우도 있다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. 양수 s, t가 $s+2t \le 1$이면 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB'이므로
삼각형 OAB에 포함된다. ∴ 거짓



48) 답 : 17

[해설]

[출제 의도]벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\vec{a} \cdot (\vec{a}-2\vec{b}) = (1,\ -2) \cdot (5,\ -6) = 5+12 = 17$

49) 답 : 106

[해설]

[출제 의도]벡터의 내적을 성질을 이해하고 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'}$ 인 점 B'에 대하여

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$

점 B에서 평면 ACD에 내린 수선의 발을 E,

점 E에서 선분 AB'에 내린 수선의 발을 F라 하면

삼수선의 정리에 의해 $\overline{BF} \perp \overline{AB'}$ 이다.

$\cos(\angle BAE) = \frac{3}{5}$ 이므로 $\overline{BE} = \frac{9}{5}$, $\overline{AF} = \frac{27}{25}$

$\cos(\angle BAB') = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{9}{25}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$

$\overline{AB} \cdot \overline{AB'} \cdot \cos(\angle BAB') = \frac{81}{25}$

$\therefore\ a+b = 25+81 = 106$

50) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]벡터의 내적을 계산하여 부등식의 영역의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overrightarrow{PA} = (2-x,\ -y)$, $\overrightarrow{PB} = (-x,\ 2-y)$이므로

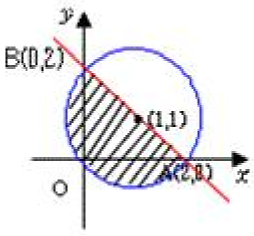
$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2-2x+y^2-2y \le 0$

$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2 \le 2 \cdots ①$

$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = (x,\ y) \cdot (2,\ 2)$

$2x+2y \le 4 \therefore\ x+y \le 2 \cdots ②$

① , ②에서 점 P가 나타내는 영역은 아래 그림의 색칠한 부분이다.



따라서 구하는 영역의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi = \pi$