I.평면곡선

1.이차곡선

중단원 기출문제

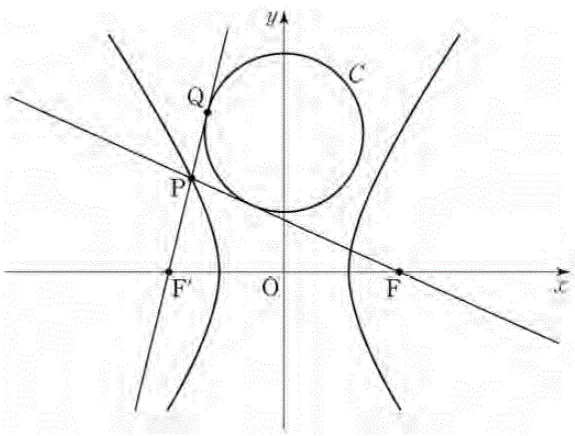
[난이도 : ★★☆] [2018 학년도 대수능]

1 타원 $\frac{(x-2)^2}{a}+\frac{(y-2)}{4}=1$의 두 초점의 좌표가 $(6, b)$, $(-2, b)$일 때, ab의 값은? (단, a는 양수이다.)[3점]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

[난이도 : ★★★] [2018 학년도 대수능]

2 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{17}=1$ 위의 점 P에 대하여 직선 FP와 직선 $F'P$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 직선 $F'P$와 원 C의 접점 Q에 대하여 $\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$일 때, $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2$의 값을 구하시오. (단, $\overline{F'P}<\overline{FP}$) [4점]



[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

3 두 양수 k, p에 대하야 점 $A(-k, 0)$에서 포물선 $y^2=4px$에 그은 두 접선이 y축과 만나는 두 점을 각각 F, F', 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 할 때, $\angle PAQ=\frac{\pi}{3}$이다. 두 점 F, F'을 초점으로 하고 두 점 P, Q를 지나는 타원의 장축의 길이가 $4\sqrt{3}+12$일 때, $k+p$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

[난이도 : ★★★] [2017 학년도 대수능]

4 점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$이고 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선이 다음 조건을 만족시킨다.

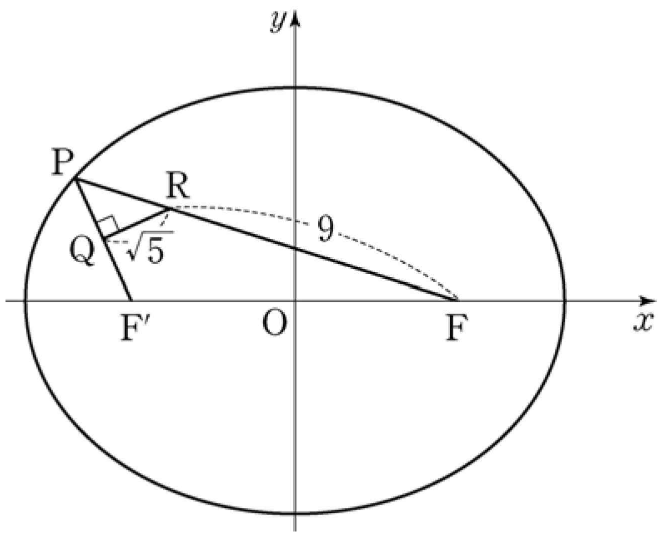
(가) 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{PF'}=30$, $16\le\overline{PF}\le 20$이다. (나) x좌표가 양수인 꼭짓점 A에 대하여 선분 AF의 길이는 자연수이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016 학년도 대수능]

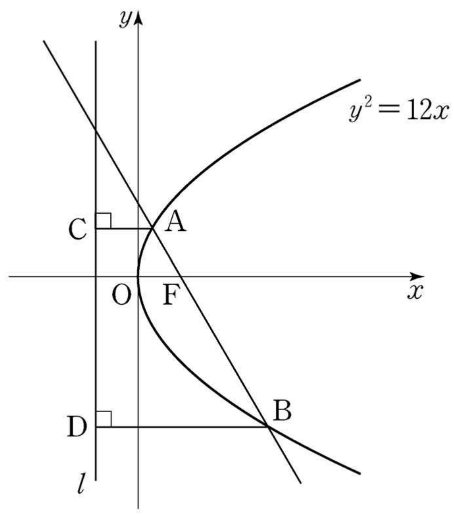
5 그림과 같이 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 위에 있고 제2사분면에 있는 점 P에 대하여 선분 PF'의 중점을 Q, 선분 PF를 $1:3$으로 내분하는 점을 R라 하자. $\angle PQR=\dfrac{\pi}{2}$, $\overline{QR}=\sqrt{5}$, $\overline{RF}=9$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 양수이다.)

[4점][2016(B) /수능 26]



[난이도 : ★★☆] [2015 학년도 대수능]

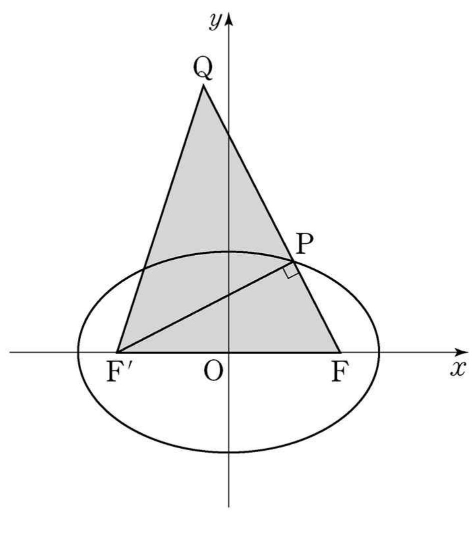
6 그림과 같이 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나는 직선과 포물선이 만나는 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AC}=4$일 때, 선분 BD의 길이는?[3점]



① 12 ② $\dfrac{25}{2}$ ③ 13 ④ $\dfrac{27}{2}$ ⑤ 14

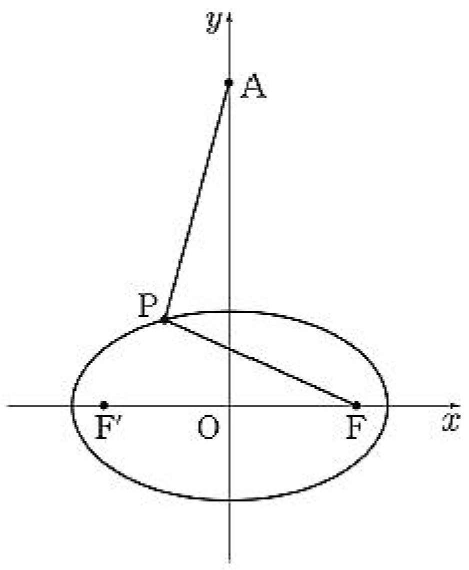
[난이도 : ★★★] [2015 학년도 대수능]

7 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P를 $\angle FPF'=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 제 1사분면에서 잡고, 선분 FP의 연장선 위에 y좌표가 양수인 점 Q를 $\overline{FQ}=6$이 되도록 잡는다. 삼각형 $QF'F$의 넓이를 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2014 학년도 대수능]

8 그림과 같이 y축 위의 점 $A(0,\ a)$와 두 점 $F,\ F'$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{AP}-\overline{FP}$의 최솟값이 1일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★★] [2013 학년도 대수능]

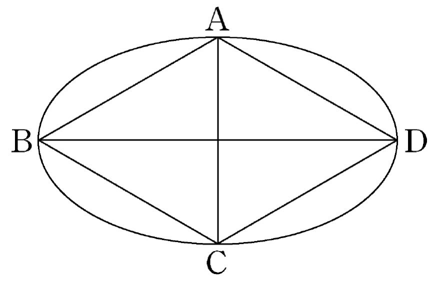
9 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 촛점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 $P,\ Q$라 하자. $\overline{PF}=1$이고 $\overline{FQ}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?[4점][2013학년도 수능]

① 210 ② 205 ③ 200
④ 195 ⑤ 190

[난이도 : ★★☆] [2012 학년도 대수능]

10 한 변의 길이가 10인 마름모 $ABCD$에 대하여 대각선 BD를 장축으로 하고, 대각선 AC를 단축으로 하는 타원의 두 촛점 사이의 거리는 $10\sqrt{2}$이다.

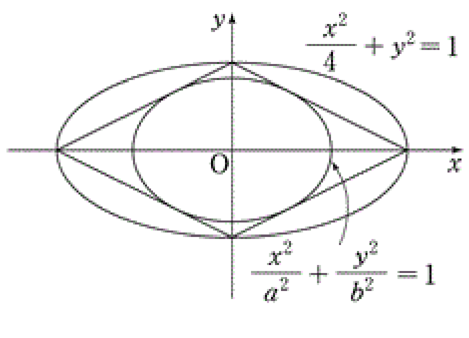
마름모 $ABCD$의 넓이는?[3점]



① $55\sqrt{3}$ ② $65\sqrt{2}$ ③ $50\sqrt{3}$
④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $45\sqrt{2}$

[난이도 : ★★☆] [2010 학년도 대수능]

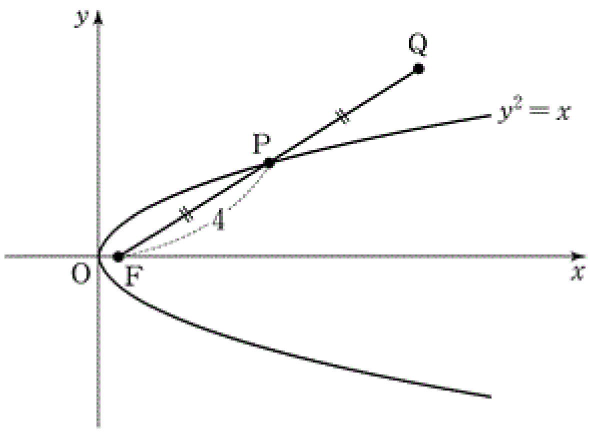
11 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $F(b,0)$, $F'(-b,0)$일 때, $a^2b^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

12 초점이 F인 포물선 $y^2=x$ 위에 $\overline{FP}=4$인 점 P가 있다.

그림과 같이 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{FP}=\overline{PQ}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 x좌표는?[3점]



① $\frac{29}{4}$ ② 7 ③ $\frac{27}{4}$
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

[난이도 : ★★☆] [2008 학년도 대수능]

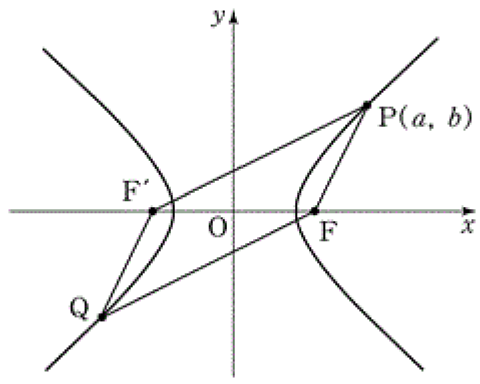
13 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F'이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

14 [이과]쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 촛?÷?각각 F, F'이라 하고,

꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 P의 원점에 대한 대칭인 점을 Q라 하자.

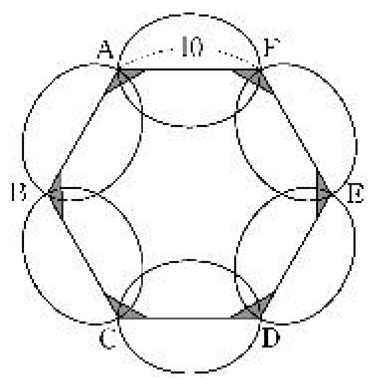
사각형 $F'QFP$의 넓이가 24가 되는 점 P의 좌표를 (a, b)라 할 때, $|a|+|b|$의 값은?[3점]



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[난이도 : ★★☆] [2007 학년도 대수능]

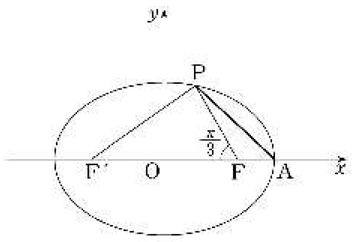
15 [이과]아래 그림은 한 변의 길이가 10인 정육각형 $ABCDEF$의 각 변을 장축으로 하고, 단축의 길이가 같은 타원 6개를 그린 것이다. 그림과 같이 정육각형의 꼭짓점과 이웃하는 두 타원의 촛점으로 이루어진 삼각형 6개의 넓이의 합이 $6\sqrt{3}$일 때, 타원의 단축의 길이는?[3점]



① $4\sqrt{2}$ ② 6 ③ $4\sqrt{3}$
④ 8 ⑤ $6\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2006 학년도 대수능]

16 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 촛점을 F와 F'이라 하고, 촛점 F에 가장 가까운 꼭짓점을 A라 하자. 이 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\angle PFF'=\frac{\pi}{3}$일 때, $\overline{PA}^2$의 값을 구하시오.[4점]



[난이도 : ★★★] [2005 학년도 대수능]

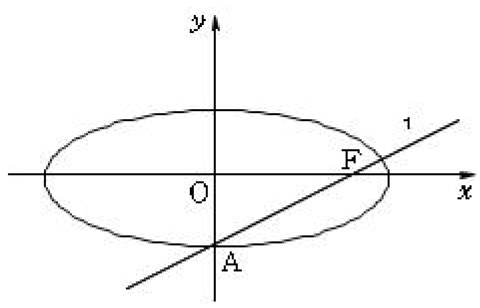
17 두 타원이 점 F를 한 초점으로 공유하고 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 두 타원의 장축의 길이가 각각 $16, 24$이고, 두 타원의 나머지 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|+\left|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}\right|$의 값은?[3점]

① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

[난이도 : ★☆☆] [2004 학년도 대수능]

18 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 타원의 한 촛점을 F라 하고, 이 타원이 y축과 만나는 한 점을 A라고 하자.

직선 AF의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x-1$일 때, 이 타원의 장축의 길이는?[2점]



① $4\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ 5
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

[난이도 : ★★☆] [2001 학년도 대수능]

19 이차곡선 $x^2-4x+9y^2-5=0$과 중심이 $(2, 0)$이고 반지름의 길이가 a인 원이 서로 다른 네 점에서 만날 때, a의 범위는?

① $0<a\le 2$ ② $1<a<3$
③ $2\le a<4$ ④ $0<a<4$
⑤ $a\ge 2$

[난이도 : ★★☆] [2018년 6월 모의평가]

20 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의 두 초점 사이의 거리가 $6\sqrt{6}$일 때, a^2의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

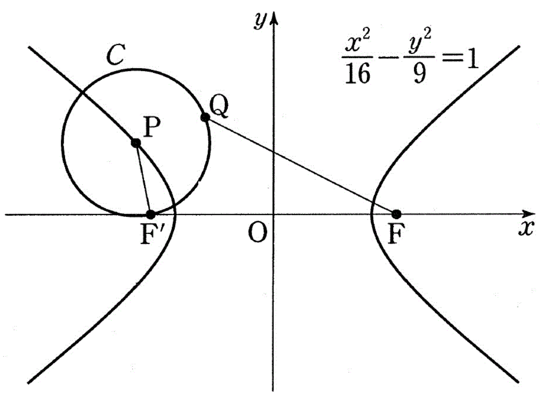
[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

21 타원 $4x^2+9y^2-18y-27=0$의 한 초점의 좌표가 $(p,\ q)$일 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★★] [2016년 6월 모의평가]

22 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 $F,\ F'$이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF'을 반지름으로 하는 원을 C라 하자.

원 C위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 점 C의 넓이는?(단, $\overline{PF'}<\overline{PF}$)[4점]



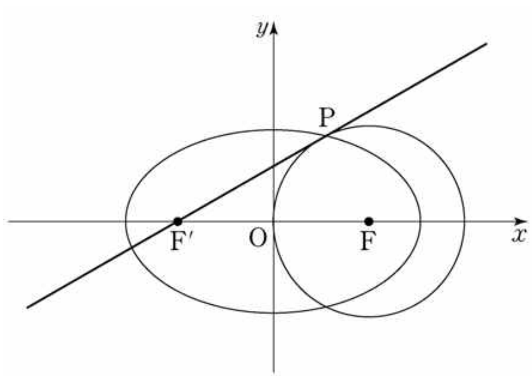
① 7π ② 8π ③ 9π
④ 10π ⑤ 11π

[난이도 : ★★☆] [2015년 6월 모의평가]

23 그림과 같이 두 점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 장축의 길이가 4인 타원이 있다.

점 F를 중심으로 하고 반지름의 길이가 c 인 원이 타원과 점 P에서 만난다.

점 P에서 원에 접하는 직선의 점 F' 을 지날 때, c 의 값은?[3점]

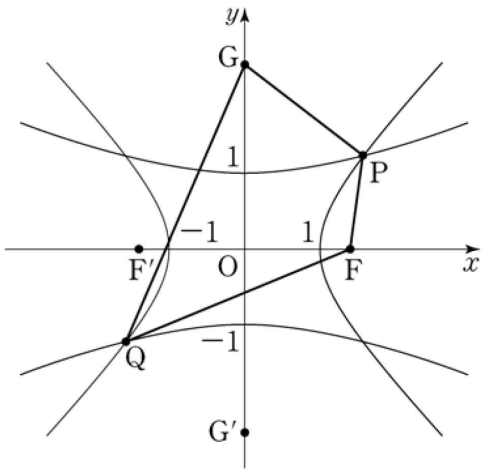


① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{10}-\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}-1$
④ $2\sqrt{3}-2$ ⑤ $\sqrt{14}-\sqrt{5}$

[난이도 : ★★★] [2015년 6월 모의평가]

24 그림과 같이 초점이 각각 F, F'과 G, G'이고 주축의 길이가 2, 중심이 원점 O인 두 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점을 P, 제3사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{PG}\times\overline{QG}=8$, $\overline{PF}\times\overline{QF}=4$일 때, 사각형 $PGQF$의 둘레의 길이는?(단, 점 F의 x좌표와 점 G의 y좌표는 양수이다.)

[4점]



① $6+2\sqrt{2}$ ② $6+2\sqrt{3}$ ③ 10
④ $6+2\sqrt{5}$ ⑤ $6+2\sqrt{6}$

[난이도 : ★★★] [2015년 9월 모의평가]

25 두 초점이 F, F'인 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)점 P는 제 1사분면에 있다. (나)삼각형 $PF'F$가 이등변삼각형이다.

삼각형 $PF'F$의 넓이를 a라 할 때, 모든 a의 값의 곱은? [4점]

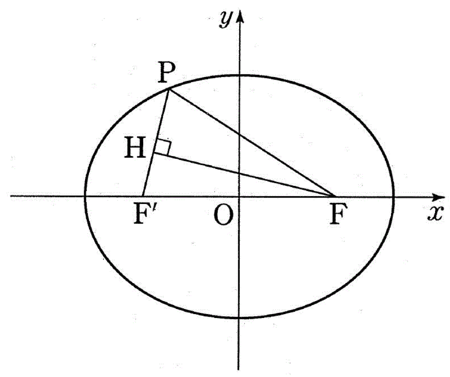
① $3\sqrt{77}$ ② $6\sqrt{21}$ ③ $9\sqrt{10}$
④ $21\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{105}$

[난이도 : ★★☆] [2014년 9월 모의평가]

26 1보다 큰 실수 a에 대하여 타원 $x^2+\frac{y^2}{a^2}=1$의 두 초점과 쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 12일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

27 그림과 같이 두 초점 F, F'이 x축 위에 있는 타원 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{a}=1$위의 점 P가 $\overline{FP}=9$를 만족시킨다. 점 F에서 선분 PF'에 내린 수선의 발 H에 대하여 $\overline{FH}=6\sqrt{2}$일 때, 상수 a의 값은? [4점]



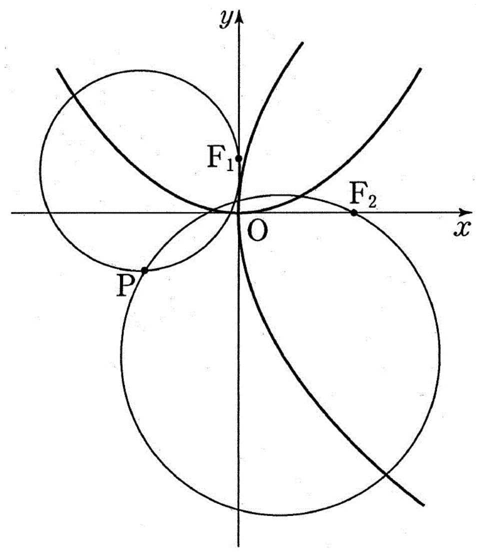
① 29 ② 30 ③ 31
④ 32 ⑤ 33

[난이도 : ★★★] [2014년 6월 모의평가]

28 좌표평면에서 포물선 $C_1 : x^2 = 4y$의 초점을 F_1, 포물선 $C_2 : y^2 = 8x$의 초점을 F_2라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가)중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원과 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2를 지나는 원의 교점이다.
(나)제 3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 $\overline{OP}^2$의 최댓값을 구하시오. [4점]



[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

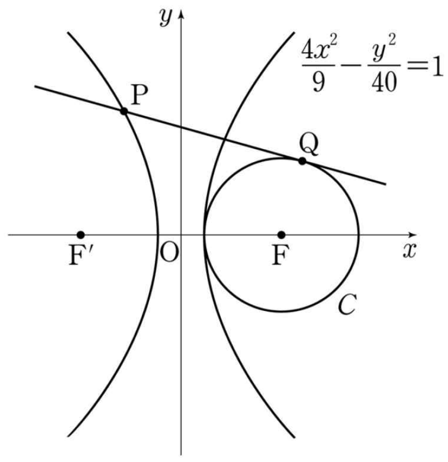
29 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$의 두 꼭짓점은 타원 $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{b^2} = 1$의 두 촛점이다. $a^2 + b^2$의 값은?[3점][2012년 6월]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[난이도 : ★★☆] [2012년 6월 모의평가]

30 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$의 두 초점은 F, F'이고, 점 F를 중심으로 하는 원 C는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제 2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에서 원 C에 접선을 그었을 때 접점을 Q라 하자.

$\overline{PQ} = 12$일 때, 선분 PF'의 길이는? [3점]

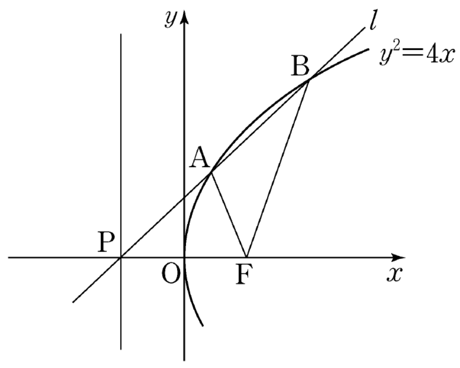


① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11
④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

31 포물선 $y^2 = 4x$의 촛점을 F, 준선이 x축과 만나는 점을 P, 점 P를 지나고 기울기가 양수인 직선 l이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자.

$\overline{FA} : \overline{FB} = 1 : 2$일 때, 직선 l의 기울기는?[4점][2012년 6월]



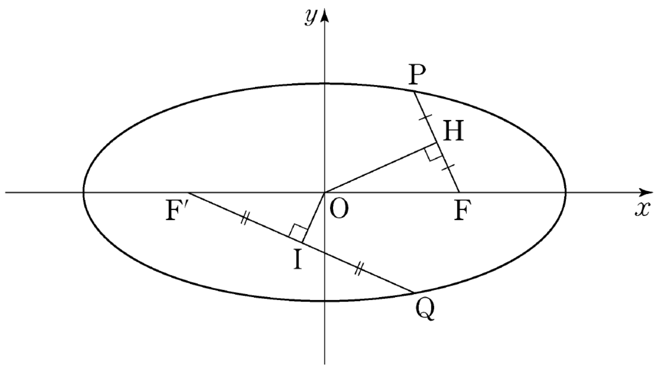
① $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{4}{5}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

32 두 점 $F(5,0)$, $F'(-5,0)$을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 원점 O에서 선분 PF와 선분 QF'에 내린 수선의 발을 각각 H와 I라 하자.

점 H와 점 I가 각각 선분 PF와 선분 QF'의 중점이고, $\overline{OH}\times\overline{OI}=10$일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l이라 하자. l^2의 값을 구하시오.

(단, $\overline{OH}\neq\overline{OI}$)[4점][2012년 6월]



[난이도 : ★★★] [2012년 6월 모의평가]

33 좌표평면에서 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다. (나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2=16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C라 하자.

점 $(3,0)$을 지나는 직선이 곡선 C와 두 점 P, Q에서 만나고 $\overline{PQ}=20$일 때,

두 점 P, Q의 x좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2011년 9월 모의평가]

34 두 초점이 F, F'이고, 장축의 길이가 10, 단축의 길이가 6인 타원이 있다.

중심이 F이고 점 F'을 지나는 원과 이 타원의 두 교점 중 한 점을 P라 하자.

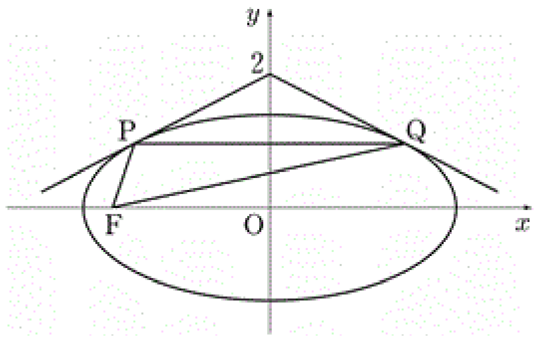
삼각형 PFF'의 넓이는?[3점][2011년 9월 평가원]

① $2\sqrt{10}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $\sqrt{70}$

[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

35 점 $(0,2)$에서 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 두 초점 중 하나를 F라 할 때, 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는 $a\sqrt{2}+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.(단, a, b는 유리수이다.)

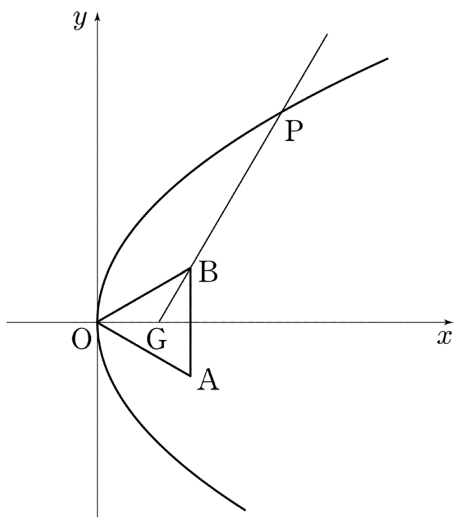
[4점][2011년 6월 평가원]



[난이도 : ★★★] [2011년 6월 모의평가]

36 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형 OAB의 무게중심 G가 x축 위에 있다. 꼭짓점이 O이고 초점이 G인 포물선과 직선 GB가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 선분 GP의 길이를 구하시오.

(단, O는 원점이다.)[4점][2011년 6월 평가원]



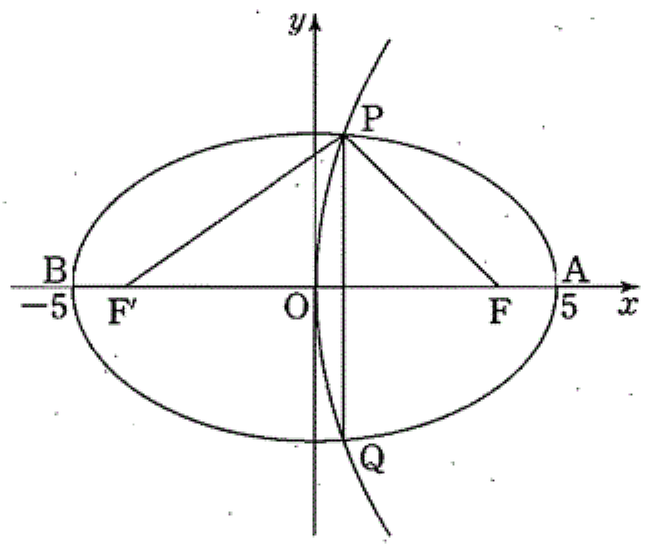
[난이도 : ★★☆] [2010년 9월 모의평가]

37 좌표평면에서 두 점 $A(5,\,0)$, $B(5,\,0)$에 대하여 장축이 선분 AB인 타원의 두 초점을 F, F'이라 하자.

초점이 F이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

$PQ=2\sqrt{10}$ 일 때, 두 선분 PF와 PF'의 길이의 곱 $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2009년 9월 모의평가]

38 쌍곡선 $9x^2-16y^2=144$의 초점을 지나고 점근선과 평행한 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?[3점]

① $\frac{75}{16}$　② $\frac{25}{4}$　③ $\frac{25}{2}$
④ $\frac{75}{4}$　⑤ $\frac{75}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2005년 9월 모의평가]

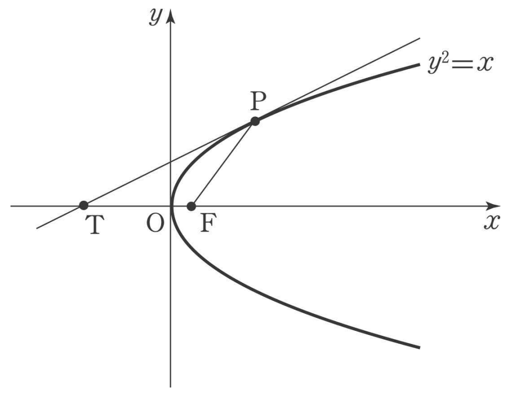
39 두 촛점을 공유하는 타원 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$과 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선의 한 점근선이 $y=\sqrt{35}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는?[3점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

[난이도 : ★★★] [2005년 9월 모의평가]

40 다음은 포물선 $y^2=x$위의 꼭짓점이 아닌 임의의 점 P에서의 접선과 x축과의 교점을 T, 포물선의 촛점을 F라고 ??때, $\overline{FP}=\overline{FT}$임을 증명한 것이다.



점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라고 하면, 접선의 방정식은

[(가)]

이 식에 $y=0$을 대입하면 교점 T의 좌표는 $(-x_1, 0)$이다.

촛점 F의 좌표는 [(나)]이므로

$\overline{FT}=$ (다)

한편 $\overline{FP}=\sqrt{\left(x_1-\dfrac{1}{4}\right)^2+y_1^2}=$ [(다)]

따라서 $\overline{FP}=\overline{FT}$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?[3점]

① $y_1y=\dfrac{1}{2}(x+x_1)$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $x_1+\dfrac{1}{2}$

② $y_1y=\dfrac{1}{2}(x+x_1)$, $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$, $x_1+\dfrac{1}{4}$

③ $y_1y=\dfrac{1}{2}(x+x_1)$, $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$, $x_1+\dfrac{1}{2}$

④ $y_1y=x+x_1$, $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$, $x_1+\dfrac{1}{4}$

⑤ $y_1y=x+x_1$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, $x_1+\dfrac{1}{2}$

[난이도 : ★★☆] [2004년 9월 모의평가]

41 두 촛점을 공유하는 타원 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$과 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선의 한 점근선이 $y=\sqrt{35}x$일 때, 이 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는?[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

[난이도 : ★☆☆] [2018년 4월 학력평가]

42 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$의 점근선의 방정식이 $y=kx$, $y=-kx$이다. 양수 k의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

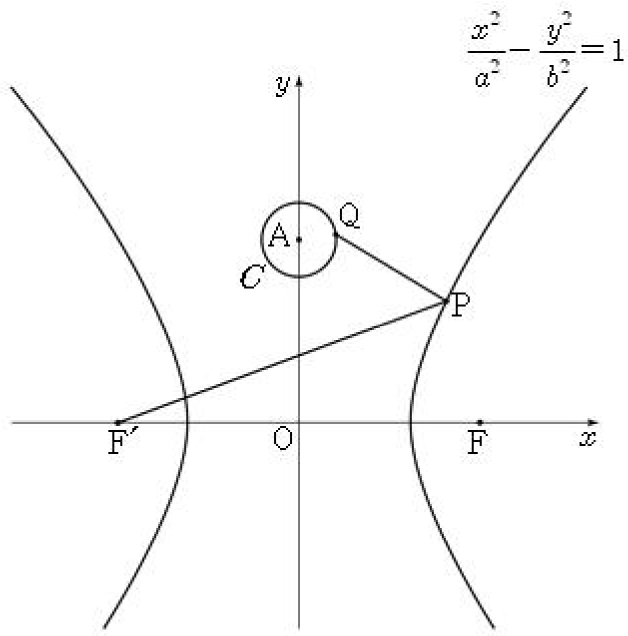
[난이도 : ★★☆] [2018년 4월 학력평가]

43 좌표평면 위에 두 점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$을 초점으로 하고 점 $A(0,\ 1)$을 지나는 타원 C가 있다. 두 점 A, F'을 지나는 직선이 타원 C와 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 B라 하자. 삼각형 ABF의 둘레의 길이가 16일 때, 선분 FF'의 길이는?[3점]

① 6 ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{15}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{21}$

[난이도 : ★★★] [2018년 4월 학력평가]

44 그림과 같이 두 초점이 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)\ (c>0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 $A(0,\ 5)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C가 있다. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P와 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 최솟값이 12일 때, a^2+3b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [4점]



[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

45 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 $(5, 3)$을 지나고 두 점근선의 방정식이 $y=x$, $y=-x$이다.

이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오.(단, a, b는 상수이다.)[3점]

[난이도 : ★★☆] [2016년 7월 학력평가]

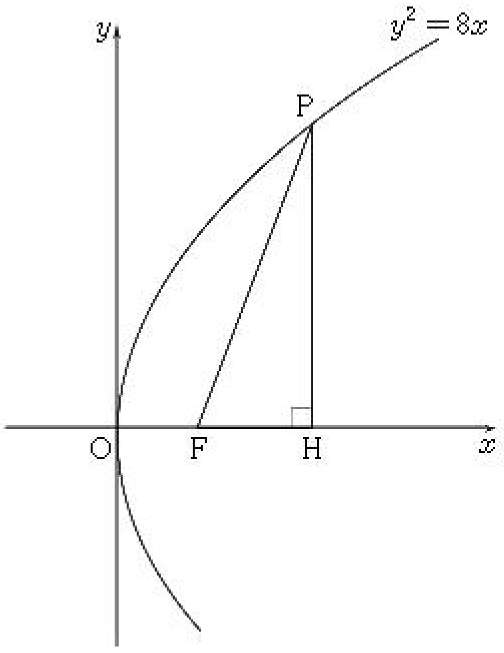
46 타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F'라 하자.

타원 위의 점 P가 $\angle FPF'=\dfrac{\pi}{2}$를 만족시킬 때, 삼각형 FPF'의 넓이는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[난이도 : ★★☆] [2016년 4월 학력평가]

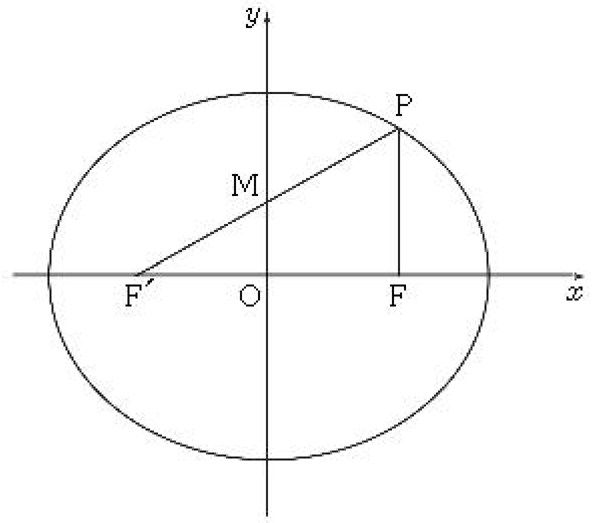
47 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PFH의 넓이가 $3\sqrt{10}$일 때, 선분 PF의 길이는?(단, 점 P의 x좌표는 점 F의 x좌표보다 크다.)[3점]



① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[난이도 : ★★★] [2016년 4월 학력평가]

48 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F'이라 하자. 타원 위의 점 P에 대하여 선분 PF'의 중점 M의 좌표가 $(0,\ 1)$이고 $\overline{PM}=\overline{PF}$일 때, a^2+b^2의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[4점]



① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

[난이도 : ★★★] [2016년 7월 학력평가]

49 두 양수 m, p에 대하여 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=m(x-4)$가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 B, 직선 $y=m(x-4)$와 y축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{AF}+\overline{BF}$의 값을 구하시오. [4점]

[난이도 : ★★☆] [2015년 7월 학력평가]

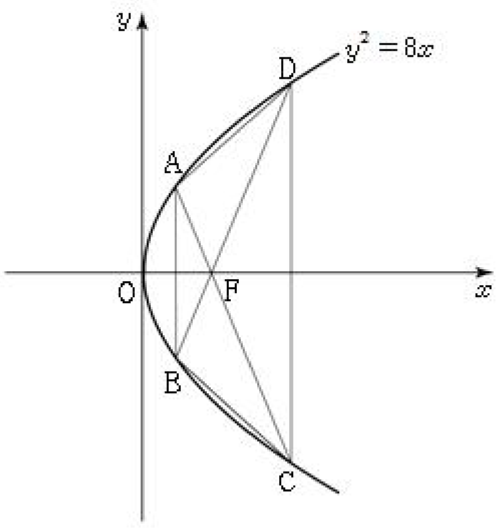
50 원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 서로 다른 네 점에서 만나고 이 네 점은 원의 둘레를 4등분한다.

이 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$일 때, a^2+b^2의 값은?(단, a, b는 상수이다.)[3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[난이도 : ★★★] [2015년 7월 학력평가]

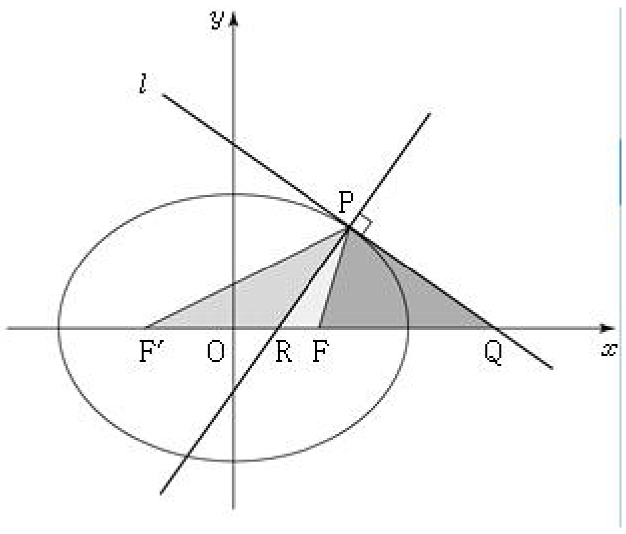
51 그림과 같이 포물선 $y^2=8x$ 위의 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형 $ABCD$에 대하여 두 선분 AB와 CD가 각각 y축과 평행하다. 사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점이 포물선의 초점 F와 일치하고 $\overline{DF}=6$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는? [4점]



① $14\sqrt{2}$ ② $15\sqrt{2}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $17\sqrt{2}$ ⑤ $18\sqrt{2}$

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

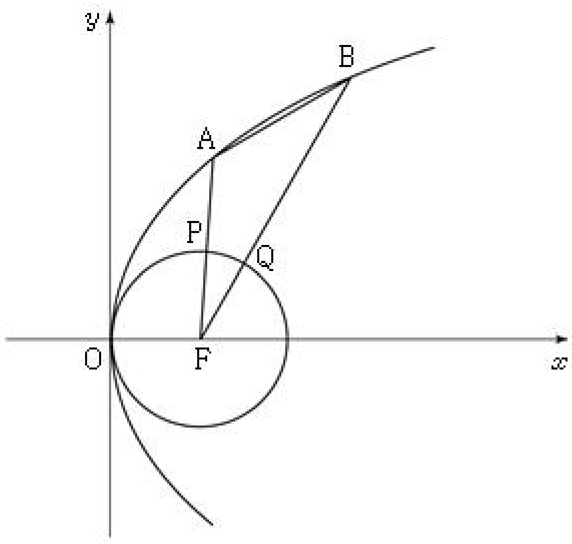
52 그림과 같이 두 초점이 F, F'인 타원 $3x^2+4y^2=12$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 P에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 접선 l과 수직인 직선을 그어 x축과 만나는 점을 R라 하자. 세 삼각형 PRF, $PF'R$, PFQ의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 점 P의 x좌표는? [4점]



① $\frac{13}{12}$ ② $\frac{7}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{17}{12}$

[난이도 : ★★★] [2014년 7월 학력평가]

53 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$의 초점 F를 중심으로 하고 원점을 지나는 원 C가 있다. 포물선 위의 점 A와 점 B에 대하여 선분 FA와 선분 FB가 원 C와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, 점 P는 선분 FA의 중점이고, 점 Q는 선분 FB를 $2:5$로 내분하는 점이다. 삼각형 AFB의 넓이가 24일 때, p의 값은?(단, 점 A와 점 B는 제1사분면 위에 있다.)[4점]



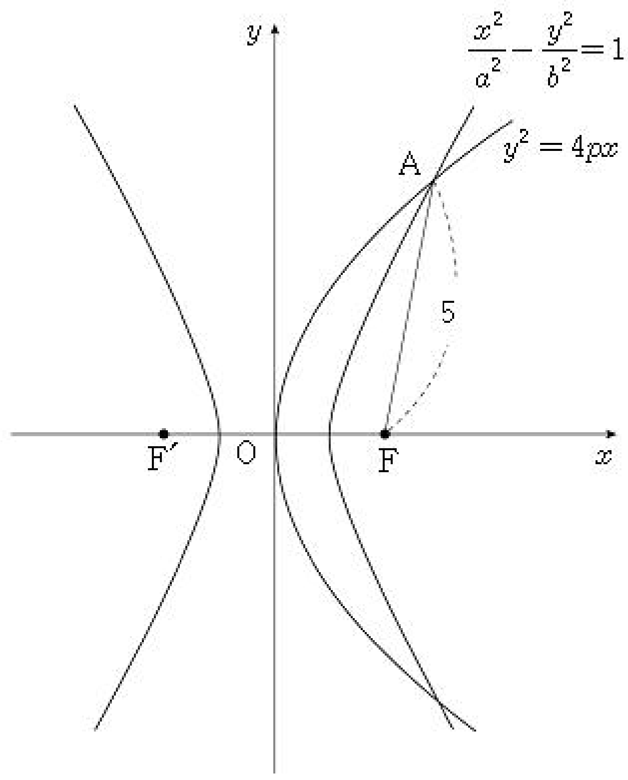
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[난이도 : ★★☆] [2012년 7월 학력평가]

54 원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$과 x축의 두 교점을 촛점으로 하고, 원의 중심을 지나는 타원의 장축의 길이를 구하시오.[3점][2012년 7월]

[난이도 : ★★★] [2012년 7월 학력평가]

55 그림과 같이 $F(p,\,0)$을 촛점으로 하는 포물선 $y^2=4px$와 $F(p,\,0)$과 $F'(-p,\,0)$을 촛점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\,b>0)$이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. $\overline{AF}=5$, $\cos(\angle AFF')=-\frac{1}{5}$일 때, ab의 값은?[4점][2012년 7월]



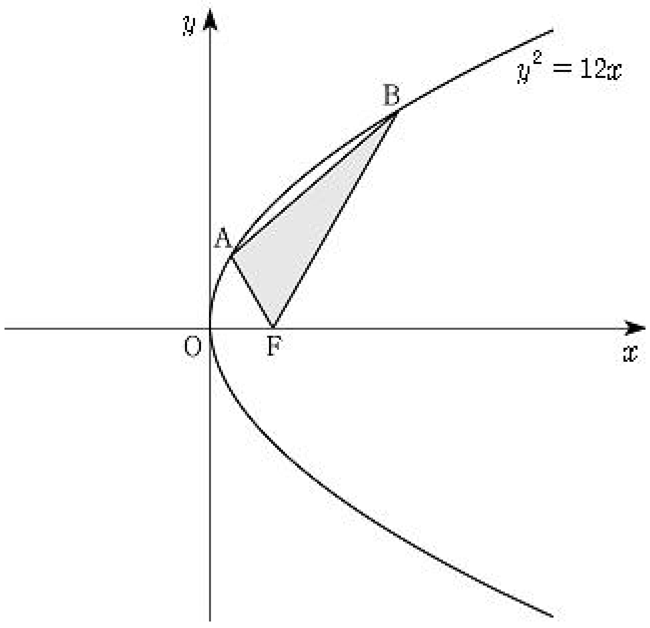
① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ 3

[난이도 : ★★★] [2012년 10월 학력평가]

56 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=12x$ 위에

$\angle OFA = \angle AFB = \frac{\pi}{3}$ 인 두 점 A, B가 있다.

삼각형 AFB의 넓이는?(단, O는 원점이고 두 점 A, B는 제 1사분면 위의 점이다.)[4점]



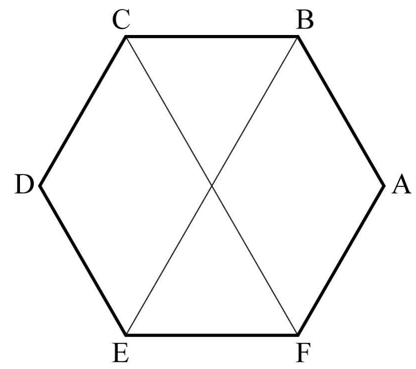
① $8\sqrt{3}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $14\sqrt{3}$ ⑤ $16\sqrt{3}$

[난이도 : ★★☆] [2011년 10월 학력평가]

57 한 변의 길이가 2인 정육각형 $ABCDEF$와 쌍곡선 H가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)쌍곡선 H의 초점은 점 A와 점 D이다. (나)쌍곡선 H의 점근선은 직선 BE와 직선 CF이다.

쌍곡선 H와 변 AB가 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{DP}-\overline{AP}$의 값은?[3점]

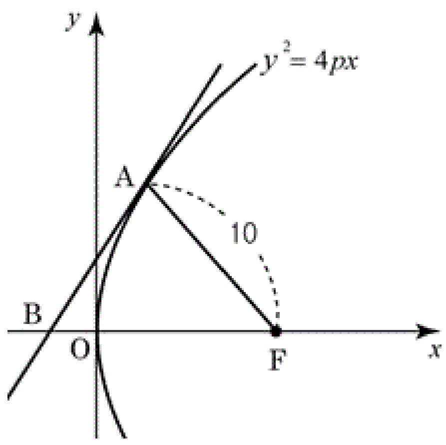


① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

[난이도 : ★★★] [2011년 7월 학력평가]

58 그림과 같이 포물선 $y^2=4px$의 초점을 F라 하고, $\overline{FA}=10$을 만족하는 포물선 위의 점 $A(a, b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자.

삼각형 ABF의 넓이가 40일 때, ab의 값을 구하시오.(단, $a<p$이다.)[4점]



[난이도 : ★★☆] [2010년 11월 학력평가]

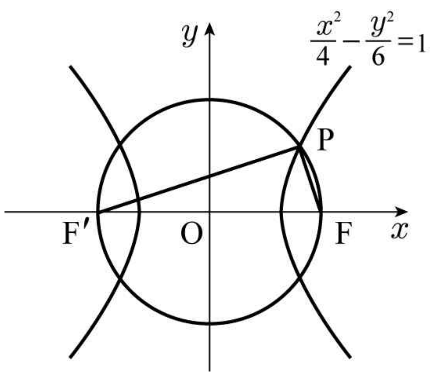
59 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선과 직선 $x=4$가 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 중심이 원점이고 점 P를 지나는 원이 쌍곡선과 제 1사분면에서 만나는 점을 Q, x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AQ}\times\overline{BQ}$의 값은?[3점]

① 9　② 15　③ 18
④ 20　⑤ 25

[난이도 : ★★★] [2010년 10월 학력평가]

60 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 촛점을 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$이라 하자.

두 점 F, F'을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$이 제 1사분면 에서 만나는 점을 P라 할 때, $\cos(\angle PFF')$의 값은?(단, c는 양수이다.)[4점]



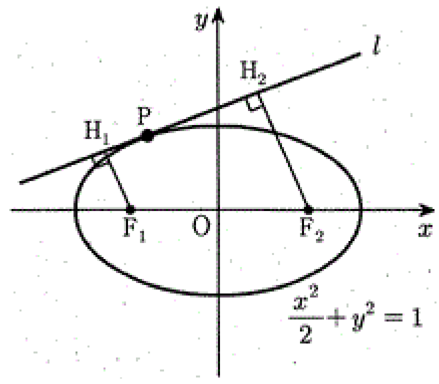
① $\frac{\sqrt{10}}{10}$　② $\frac{\sqrt{10}}{15}$　③ $\frac{2\sqrt{10}}{15}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$　⑤ $3\frac{\sqrt{10}}{10}$

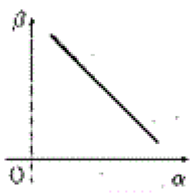
[난이도 : ★★☆] [2009년 10월 학력평가]

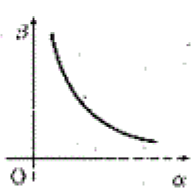
61 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$위를 움직이는 점 P에서의 접선을 l이라 하자.

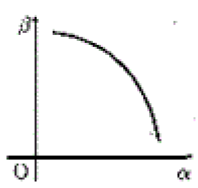
또, 두 촛점 F_1, F_2에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.

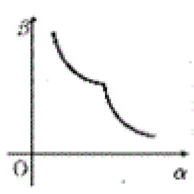
$\overline{H_1F_1}=\alpha$, $\overline{H_2F_2}=\beta$일 때, α, β사이의 관계를 나타내는 그래프의 개형은?[3점]

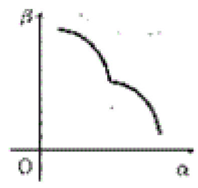


① 

② 

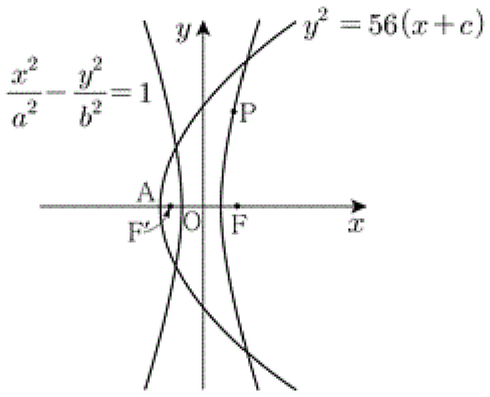
③ 

④ 

⑤ 

[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

62 그림과 같이 두 점 $F(k, 0)$, $F'(-k, 0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$과 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=56(x+c)$가 있다.



쌍곡선 위의 임의의 점 P에 대하여 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=10$이 성립하고, 포물선의 꼭짓점 A에 대하여 $\overline{AF'}:\overline{FF'}=1:6$이 성립한다.

이때, $\frac{c^2}{a^2-b^2}$의 값은?(단, $0<k<c$이다.)[4점]

① $\frac{53}{14}$ ② $\frac{55}{14}$ ③ $\frac{30}{7}$
④ $\frac{32}{7}$ ⑤ $\frac{34}{7}$

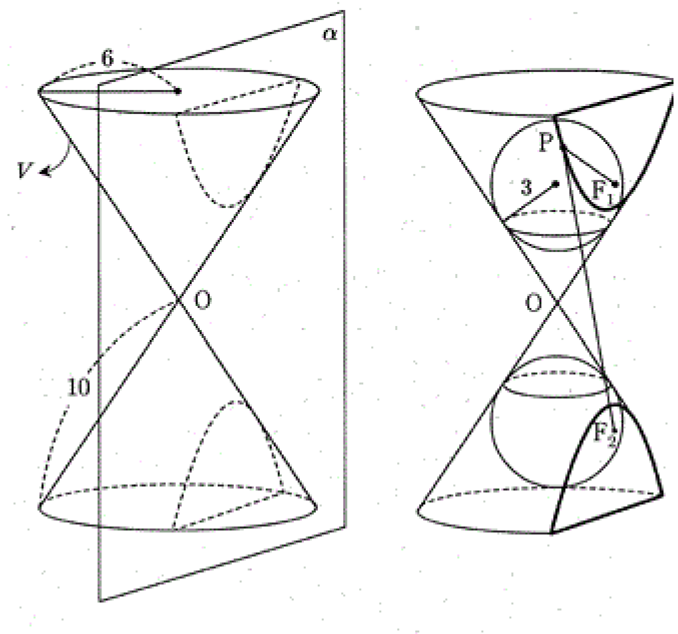
[난이도 : ★★★] [2009년 10월 학력평가]

63 [그림 1]과 같이 반지름의 길이가 6, 모선의 길이가 10인 원뿔 두 개가 점 O를 공유하면서 밑변이 서로 평행한 입체도형을 V라 하자.

V의 밑면과 수직인 평면 α로 V를 자르면 단면에 쌍곡선이 생긴다.

[그림 2]와 같이 반지름의 길이가 3인 두 개의 구가 잘린 입체도형의 옆면 및 단면에 접할 때, 두 개의 구와 평면 α가 접하는 점을 각각 F_1, F_2라 하자.

이때, 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|$의 값을 구하시오.[4점]

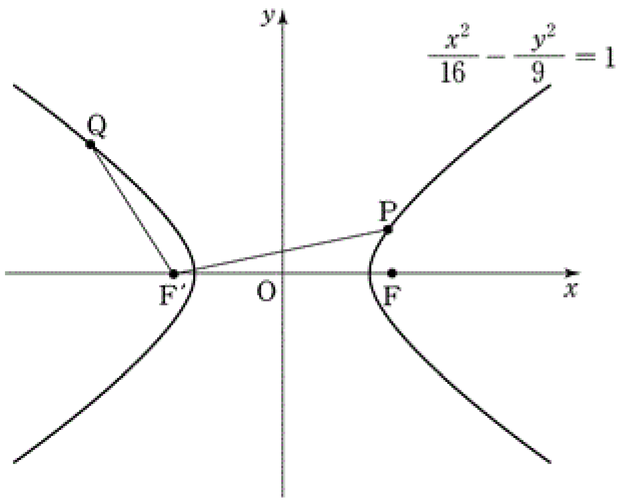


[그림 1] [그림 2]

[난이도 : ★★☆] [2008년 04월 학력평가]

64 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 촛점을 F, F'이라 하자.

제 1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 제 2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=3$일 때, $\overline{QF}-\overline{PF}$의 값을 구하시오. [3점]



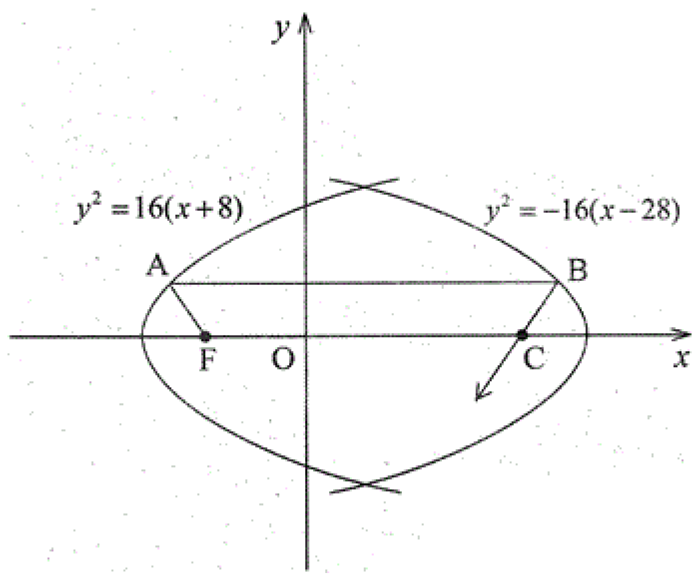
[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

65 아래 그림과 같이 촛점 $F(-4, 0)$에서 포물선 $y^2=16(x+8)$위의 점 A를 향하여 출발한 빛이 포물선에 반사되어 x축에 평행하게 진행된다.

이 빛이 포물선 $y^2=-16(x-28)$위의 점 B에서 다시 반사되어 x축과 만나는 점을 C라 하자.

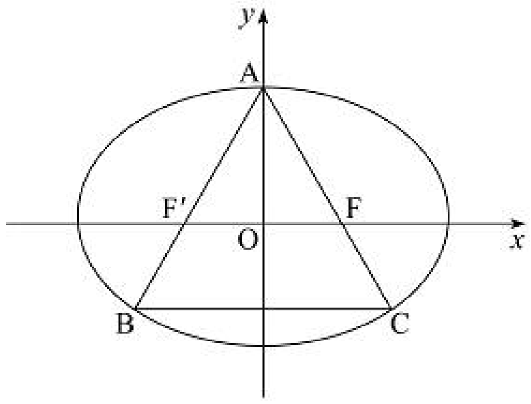
이때 세 선분 길이의 합 $\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BC}$의 값을 구하시오.

(단, 포물선 위의 점 A는 제 2사분면 위에 있다.)[3점]



[난이도 : ★★☆] [2008년 10월 학력평가]

66 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(0<b<a)$에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. 타원의 두 초점 $F,\ F'$이 각각 선분 $AC,\ AB$위에 있을 때, $\frac{b}{a}$의 값은?(단, 점 A는 y축 위에 있다.)[3점]



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

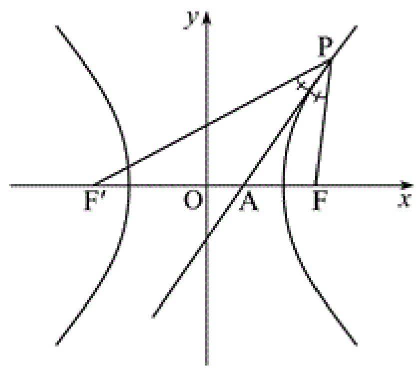
[난이도 : ★☆☆] [2007년 10월 학력평가]

67 두 포물선 $y^2=4(x-a)$와 $y^2=-8x$가 초점을 공유할 때, 상수 a의 값은?[2점]

① -3 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 3

[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

68 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 $F,\ F'$이라 하자. 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle F'PF$의 이등분선이 x축과 점 $A(1,\,0)$에서 만날 때, 삼각형 $PF'F$의 둘레의 길이를 구하시오.[3점]



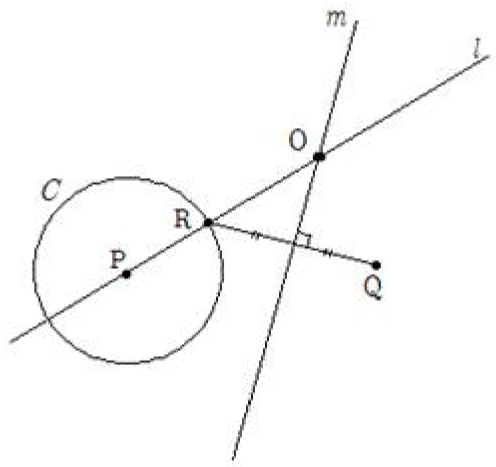
[난이도 : ★★☆] [2007년 10월 학력평가]

69 다음은 어느 이차곡선을 작도하는 과정이다.

[1단계]정점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C를 그리고, 원 밖의 한 점 Q를 잡는다.

[2단계]동점 R은 원 C위를 움직인다.

[3단계]두 점 P와 R를 지나는 직선 l과 $\overline{QR}$의 수직이등분선 m이 만나는 점을 O라 하자.



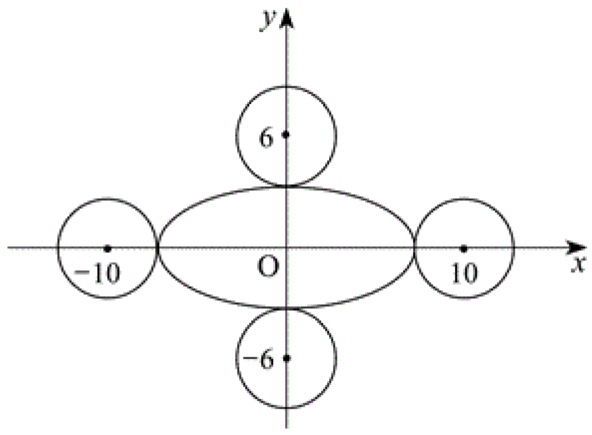
위 과정에서 점 O의 자취가 그리는 이차곡선에 대하여 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?[3점]

[보기]
ㄱ. $\overline{OP}$와 $\overline{OQ}$의 길이의 차는 일정하다. ㄴ. 점 Q는 이차곡선의 촛점이다. ㄷ. 작도된 이차곡선을 반사거울로 생각하고, 점 P에서 이 곡선 위로 빛을 쏘면 점 Q를 지난다.

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[난이도 : ★★★] [2007년 10월 학력평가]

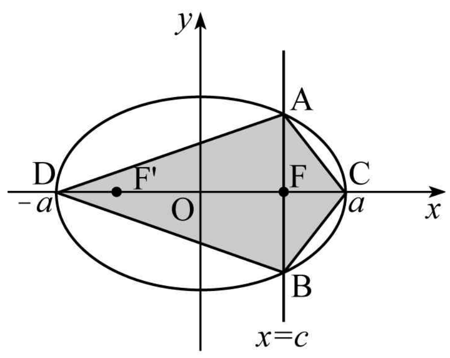
70 그림과 같이 좌표평면에 중심의 좌표가 각각 $(10, 0)$, $(-10, 0)$, $(0, 6)$, $(0, -6)$이고 반지름의 길이가 모두 같은 4개의 원에 동시에 접하고, 촛점이 x축 위에 있는 타원이 있다.



이 타원의 두 촛점 사이의 거리가 $4\sqrt{10}$일 때, 장축의 길이를 구하시오.(단, 네 원의 중심은 타원의 외부에 있다.)[4점]

[난이도 : ★★★] [2005년 0월 학력평가]

71 그림과 같이 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$을 촛점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{16}=1$과 직선 $x=c$의 교점을 A, B라 하자. 두 점 $C(a, 0)$, $D(-a, 0)$에 대하여, 사각형 $ADBC$의 넓이를 구하시오.(단, a와 c는 양수이다.)[4점]

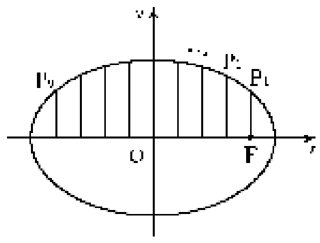


[난이도 : ★☆☆] [2004년 10월 학력평가]

72 포물선 $(x-1)^2=4y$, $(y+2)^2=-8x$의 촛점을 각각 F_1, F_2라고 할 때, $\overline{F_1F_2}^2$의 값을 구하시오.[3점]

[난이도 : ★★☆] [2004년 10월 학력평가]

73 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 장축을 10등분한 후 장축의 양 끝점을 제외하고 각 등분점에서 장축에 수직인 직선을 그어 x축 윗쪽 부분에 있는 타원과의 교점을 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_9라 하자. 타원의 한 초점을 F라고 할 때, $\sum_{k=1}^{9}\overline{FP_k}$의 값을 구하시오.[4점]



정답 및 해설

1.이차곡선

중단원 기출문제

1) 답 : ①

[해설]

[출제 의도] 타원의 방정식에서 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

타원 $\dfrac{(x-2)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표가 $(6, b)$, $(-2, b)$ 이므로

이 타원의 중심은 $(2, b)$이다.

한편 타원 $\dfrac{(x-2)^2}{a}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$은 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시킨 것이다.

타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 중심이 $(0, 0)$이므로

점 $(0, 0)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 점 $(2, 2)$이다.

이때, 두 점 $(2, b)$와 $(2, 2)$가 일치해야 하므로

$b=2$

한편, 타원 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{4}=1$의 초점의 좌표를 $(c, 0)$, $(-c, 0)$(단, $c>0$) 이라 하면

$c=4$이므로

$a=2^2+4^2=20$

따라서 $ab=20\times 2=40$

2) 답 : 116

[해설]

[출제 의도] 쌍곡선의 정의를 이해하고 있는가?

원의 중심을 $A(0, a)$라 하고, 원과 직선 PF의 접점을 R라 하자.

$\overline{PF'}=p$, $\overline{PQ}=\overline{PR}=q$, $\overline{RF}=r$ 라 하자.

$\overline{F'Q}=5\sqrt{2}$ 이므로 $p+q=5\sqrt{2}$ ...㉠

쌍곡선의 주축의 길이가 $2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

이므로 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF}-\overline{PF'}=q+r-p=4\sqrt{2}$ ...㉡

$\overline{AQ}=\overline{AR}$, $\overline{AF}=\overline{AF'}$ 이고 $\angle AQF'=\angle ARF=90^\circ$ 이므로

두 삼각형 AQF'과 직각삼각형 ARF는 서로 합동이다.

따라서 $\overline{RF}=\overline{QF'}$ 이므로

$r=5\sqrt{2}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$p-q=\sqrt{2}$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하면 $p=3\sqrt{2}$, $q=2\sqrt{2}$

따라서

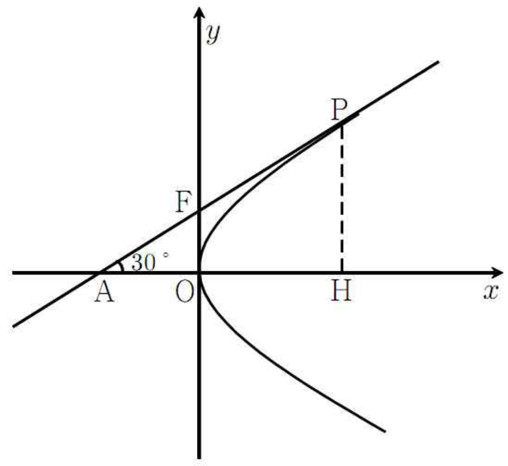
[구하는 값] $=\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2$

$=p^2+(q+r)^2$

$=(3\sqrt{2})^2+(7\sqrt{2})^2=18+98=116$

3) 답 : ①

[해설]



포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선이 x축과 만나는 점의 좌표가 $(-x_1, 0)$이므로

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(k, 0)$이다.

$\angle PAH=30^\circ$ 이므로

$\overline{FO}=\dfrac{k}{\sqrt{3}}$, $\overline{PH}=\dfrac{2k}{\sqrt{3}}$

$\overline{AF}=\overline{FP}=\dfrac{2k}{\sqrt{3}}$

$\overline{PF'}=\sqrt{k^2+\left(\dfrac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2}=2k$

타원의 장축의 길이는 $\overline{PF}+\overline{PF'}=\dfrac{2k}{\sqrt{3}}+2k=4\sqrt{3}+12$

$\therefore\ k=6$ ...㉠

또 점 $(6, 4\sqrt{3})$이 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로

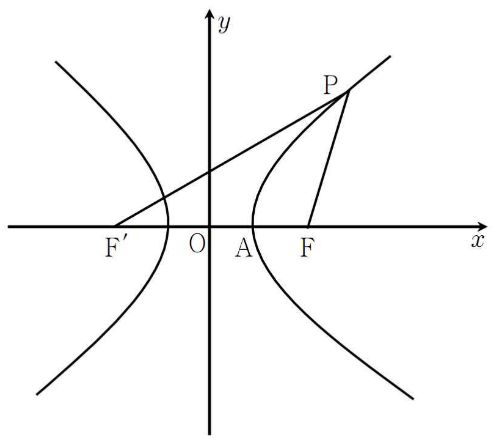
$(4\sqrt{3})^2=24p$

$\therefore\ p=2$ ...㉡`

㉠, ㉡에서 $p+k=8$

4) 답 : 12

[해설]



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>0.b>0$)이라하면

점근선의 방정식은 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$이므로 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$

$b=\dfrac{4}{3}a$

조건 (가)에서 $\overline{PF'}>\overline{PF}$이고 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$

$\overline{PF}=30-2a$

정답 및 해설

이때, $16 \le \overline{PF} \le 20$ 이므로

$16 \le 30-2a \le 20$

$5 \le a \le 7$ ...㉠

점 $A\ (a, 0)$이고 $F\ (c, 0)$이라면

$c=\sqrt{a^2+b^2}$, $b=\frac{4}{3}a$이므로

$c=\frac{5}{3}a$

$\overline{AF}=\frac{5}{3}a-a=\frac{2}{3}a$

조건 (나)에서 선분 AF의 길이가 자연수이므로 a는 3의 배수이다

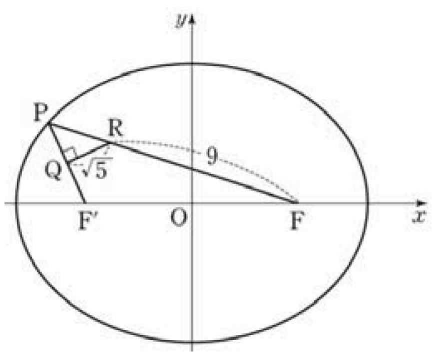
그런데 $5 \le a \le 7$이므로 $a=6$

따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는 12이다.

5) 답 : 104

[해설]

[출제 의도] 코사인법칙과 타원의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?



직각삼각형 PQR에서 $\overline{PR}=\frac{1}{3}\overline{PF}=3$ 이므로

$\overline{PQ}=\overline{QF'}=k$라 하면

$k^2+5=9$

$\therefore\ k=2\ (\because k>0)$

이때

$\overline{PF'}=2\times2=4$

$\overline{PF}=3+9=12$이고

$\overline{PF}+\overline{PF'}=12+4=16$

이므로 주어진 타원의 장축의 길이는 16이다.

따라서 $2a=16$이므로 $a=8$

직각삼각형 PQR에서 $\angle QPR=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{2}{3}$

따라서 삼각형 FPF'에서 코사인 정리에 의해

$\overline{FF'}^2=12^2+4^2-2\times12\times4\times\cos\theta=160-96\times\frac{2}{3}$

$=160-64=96$

$\therefore\ \overline{FF'}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

따라서 $c=\frac{1}{2}\overline{FF'}=2\sqrt{6}$ 이므로

$a^2-b^2=(2\sqrt{6})^2$

$b^2=64-24=40$

$\therefore\ a^2+b^2=64+40=104$

6) 답 : ①

[해설]

포물선의 방정식이 $y^2=12x=4\cdot3x$이므로

초점 $F(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$이다.

조건에서 $\overline{AC}=4$이므로 점 A의 x좌표는 1이다.

점 A는 포물선 위의 점이므로 $y^2=12x$에 대입하면

$y^2=12$이며 $\therefore\ y=\pm2\sqrt{3}$

$\therefore\ A(1, 2\sqrt{3})$

따라서 두 점 A와 F를 지나는 직선의 방정식은 $y=-\sqrt{3}(x-3)$이고,

점 B의 x좌표는 $\{-\sqrt{3}(x-3)\}^2=12x$,

$x^2-10x+9=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-9)=0$

$\therefore\ x=9\ (\because\ x>1)$

$\therefore\ \overline{BD}=9-(-3)=12$

7) 답 : 12

[해설]

[해설] $\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$라고 하면

타원의 방정식 $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$로부터 장축의 길이가 $2\cdot3=6$이므로

타원의 정의에 의해 $\therefore\ a+b=6$ ⋯ ㉠

타원의 두 초점 사이의 거리 $\overline{FF'}=2\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$ 이므로

직각삼각형 FPF'에서 $a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$ ⋯ ㉡

㉠에서 $a=6-b$를 ㉡에 대입하면 $(6-b)^2+b^2=(2\sqrt{5})^2$

$2b^2-12b+16=0$, $b^2-6b+8=0$, $(b-2)(b-4)=0$

$\therefore\ b=4\ (\because\ b>a)$

또한, 조건에서 $\overline{FQ}=6$이므로

$\therefore\ \triangle QF'F$의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot\overline{FQ}\cdot\overline{PF'}=\frac{1}{2}\cdot6\cdot b=3b=12$

8) 답 : 105

[해설]

[출제 의도] 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

타원의 정의에 의하여

$\overline{FP}+\overline{F'P}=10$이므로 $\overline{FP}=10-\overline{F'P}$

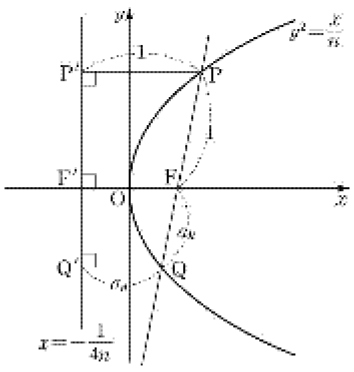
$\overline{AP}-\overline{FP}=\overline{AP}-(10-\overline{F'P})=\overline{AP}+\overline{F'P}-10 \ge \overline{AF'}-10$

$\overline{AP}-\overline{FP}$의 최솟값이 1이므로 $\overline{AF'}=11$, $F'(-4, 0)$이므로

$\overline{AF'}=\sqrt{16+a^2}=11$, $16+a^2=121$에서 $a^2=105$

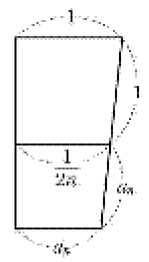
9) 답 : ①

[해설]



포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$ 의 촛점은 $F\left(\dfrac{1}{4n},0\right)$이다.

세 점 P, F, Q에서 준선 $x=-\dfrac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 P', F', Q'이라 하면



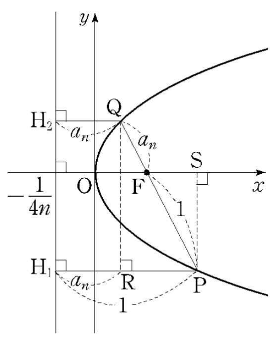
$\overline{FF'}=\dfrac{1}{2n}$이고, 포물선의 정의에 의해 $\overline{PP'}=1$, $\overline{QQ'}=a_n$

$\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1\cdot a_n+1\cdot a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2n}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$ 이며 정리하면

$4na_n=1+a_n \Leftrightarrow a_n(4n-1)=1$ 이므로 $\therefore\ a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$

[다른 풀이]



P에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1

Q에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2,

Q에서 PH_1에 내린 수선의 발을 R,

P에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{PF}=1=\overline{PH_1}$, $\overline{FS}=1-\dfrac{1}{2n}$, $\overline{QF}=a_n=\overline{QH_2}$

$\triangle PQR \backsim \triangle FPS$이므로 $\overline{PQ}:\overline{PR}=\overline{FP}:\overline{FS}$이고

$(1+a_n):(1-a_n)=1:\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$

$1-a_n=\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)(1+a_n)=1-\dfrac{1}{2n}+\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)a_n$

$\dfrac{1}{2n}=\left(2-\dfrac{1}{2n}\right)a_n$

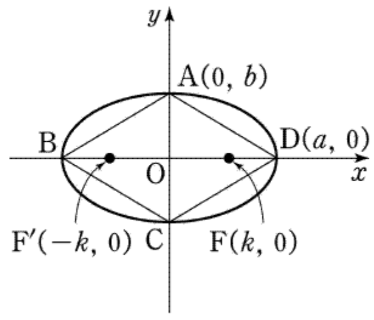
$a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

$\displaystyle\therefore\ \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=220-10=210$

10) 답 : ③

[해설]

마름모 $ABCD$에서 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$로 놓고 촛점의 좌표를 $F(\pm k, 0)$이라고 놓으면 그림과 같다.



$\overline{AD}=10$이므로 $a^2+b^2=100\cdots$①

$k=5\sqrt{2}$이므로 $a^2-b^2=50\cdots$②

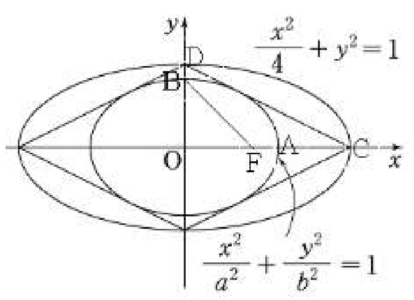
①, ② 에서 $b=5$, $a=5\sqrt{3}$이다.

마름모 $ABCD$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}(2a)(2b)=50\sqrt{3}$

11) 답 : 17

[해설]

아래 그림에서



접선 CD의 방정식은 그 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로

$y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{a^2\times\dfrac{1}{4}+b^2}$ 인데 실제로 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$이므로

$\dfrac{a^2}{4}+b^2=1 \Leftrightarrow a^2+4b^2=4\ldots$①

또 $F(b,0)$이므로 $\overline{OF}=b$ 그런데 $\overline{OB}=b$이므로

$\overline{BF}=\sqrt{2}b$

$\overline{OA}=a$이고 $\overline{BF}=\overline{OA}$이므로

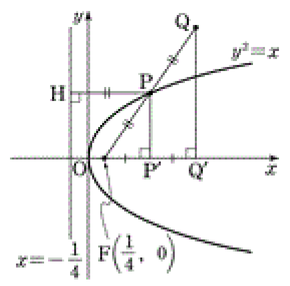
$a=\sqrt{2}b \Leftrightarrow a^2=2b^2\ldots$②

①, ②에서 $a^2=\dfrac{4}{3}$, $b^2=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ a^2b^2=\dfrac{8}{9}$

12) 답 : ①

[해설]



$\overline{HP}=4$이므로 $P'\left(\frac{15}{4}, 0\right)$

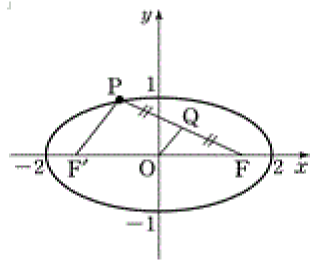
또한, $\overline{FP'}=\overline{P'Q'}$이므로 $Q'\left(\frac{29}{4}, 0\right)$

13) 답 : 15

[해설]

$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$에서, $\overline{FP}$의 중점을 Q라고 하면

$$\left|\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}}{2}\right|=|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}$$



한편, $\overrightarrow{F'P}//\overrightarrow{OQ}$이므로

$|\overrightarrow{F'P}|=\overline{PF'}=1$이다.

$\overline{PF'}+\overline{PF}=4$이므로, $\overline{PF}=k=3$

$\therefore\ 5k=15$

14) 답 : ①

[해설]

점 (a, b)는 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$위의 점이므로 $\frac{a^2}{5}-\frac{b^2}{4}=1\cdots$ ①

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$의 두 초점의 좌표는 $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$이다.

이때, 사각형 $F'QFP$의 넓이는 합동인 두 삼각형 $F'QF$, FPF'의 넓이와 같으므로

$\square F'QFP=2\times\triangle FPF'$

$=2\times\frac{1}{2}\times\overline{FF'}\times|b|$

$=6|b|=24$

$\therefore\ |b|=4\cdots$ ②

① , ②에서 $a^2=25$이므로 $|a|=5$

$\therefore\ |a|+|b|=5+4=9$

15) 답 : ④

[해설]

정육각형의 한 내각의 크기는 120°이므로 색칠한 이등변삼각형에서 길이가 같은 두 변의 길이를 a라 하면 6개의 삼각형의 넓이의 합은

$$6\times\frac{1}{2}\times a^2\sin 120^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2=6\sqrt{3}$$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

따라서 주어진 타원의 장축의 길이는 10이고

두 초점 사이의 거리는 $10-2\cdot 2=6$이다.

따라서 이 타원과 합동이고 중심이 원점이고 장축이 x축 위에 있는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

이때, 초점의 좌표는 $(\pm 3, 0)$이어야 하므로

$5^2-b^2=3^2$

$\therefore\ b^2=16$

따라서 구하는 타원의 단축의 길이는

$2\times|b|=2\times 4=8$

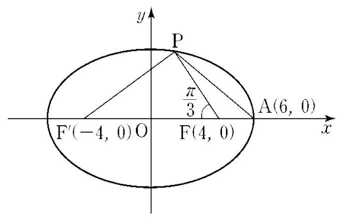
16) 답 : 39

[해설]

타원의 방정식 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$에서

$a^2-b^2=36-20=16$이므로

두 초점 F, F'의 좌표는 각각 $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$



$\overline{PF}=t$로 놓으면 타원의 정의에 의하여

$\overline{PF'}=12-t$이므로 $\triangle PFF'$에서 제이코사인법칙을 이용하면

$$(12-t)^2=t^2+8^2-2\cdot 8\cdot t\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$t^2-24t+144=t^2+64-8t$

$16t=80$, $t=5$

또, $\triangle PFA$에서 $\angle PFA=\frac{2}{3}\pi$이므로

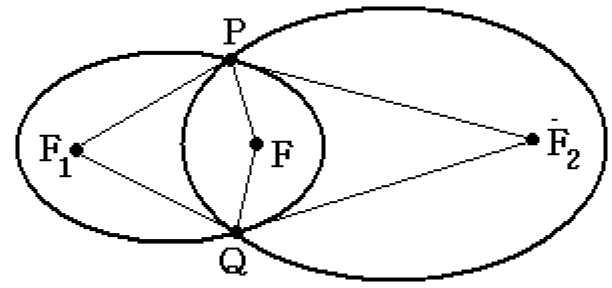
$$\overline{PA}^2=2^2+5^2-2\cdot 2\cdot 5\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$

$=4+25+10=39$

17) 답 : ①

[해설]

아래 그림에서 타원의 정의를 이용하면



$\overline{PF}+\overline{PF_1}=16$, $\overline{PF}+\overline{PF_2}=24$이므로

$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=8$

마찬가지로 $\overline{QF}+\overline{QF_1}=16$, $\overline{QF}+\overline{QF_2}=24$이므로

$|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=8$

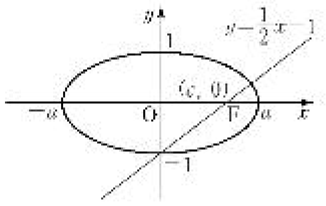
$\therefore\ |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|+|\overline{QF_1}-\overline{QF_2}|=16$

18) 답 : ⑤

[해설]

타원이 x축의 양의 부분과 만나는

점의 좌표를 $(a, 0)$이라 하면 타원의 방정식은



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

한편, 촛점 $F(c, 0)=(2, 0)$이므로 $2^2=a^2-1$

$\therefore\ a^2=5,\ a=\sqrt{5}$

$\therefore$ (장축의길이) $=2\sqrt{5}$

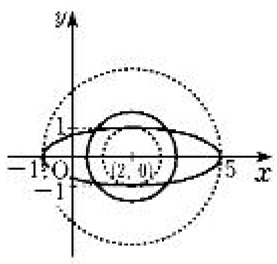
19) 답 : ②

[해설]

주어진 이차곡선은 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+y^2=1$이므로

다음 그림에서 구하는 원의 반지름 a의 범위는

$1<a<3$



20) 답 : ③

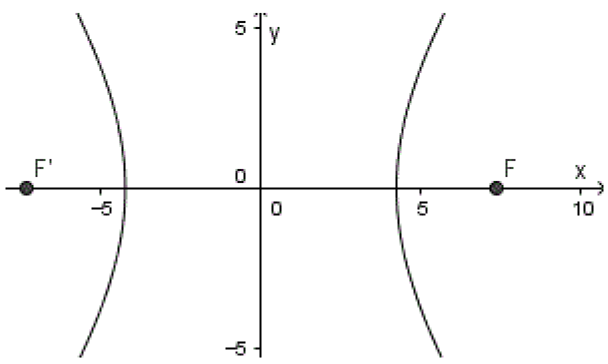
[해설]

[출제 의도] 쌍곡선 식의 계수와 초점의 관계를 묻는 문제이다.

초점 사이의 거리가 $6\sqrt{6}$이므로

초점의 좌표는 $(3\sqrt{6}, 0), (-3\sqrt{6}, 0)$ 이다.

$a^2+36=(3\sqrt{6})^2=54\to\ a^2=18$



[다른 풀이]

두 초점사이의 거리가 $6\sqrt{6}$이므로 초점의 좌표는 $(-3\sqrt{6},\ 0)$ 와 $(3\sqrt{6},\ 0)$이다.

$a^2+36=(3\sqrt{6})^2=54$이다

따라서, $a^2=54-36=18$이다

21) 답 : 6

[해설]

$4x^2+9y^2-18y-27=0$을 표준형으로 바꾸면

$4x^2+9(y^2-2y+1)-36=0$

$4x^2+9(y-1)^2=36$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

따라서 초점은 $y=1$위에 존재하고 초점의 좌표를 $(c, 1)$라 하면

$c^2=9-4=5$이므로

$\therefore\ c=\sqrt{5}$

$\therefore\ p=\sqrt{5}\ ,\ q=1$

$\therefore\ p^2+q^2=6$

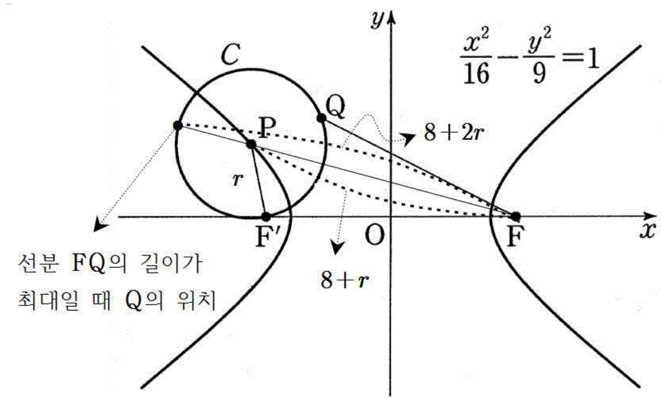
22) 답 : ③

[해설]

원 C 의 반지름의 길이를 r 이라 할 때,

타원의 정의에 의하여 $\overline{FP}=8+r$이다.

선분 FQ의 길이가 최대일 때의 점 Q의 위치는 그림과 같다.



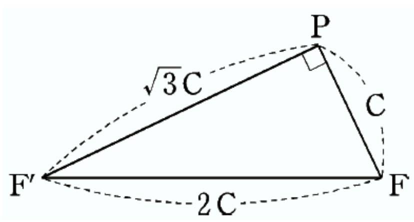
위 그림에서 선분 FQ 의 길이의 최댓값은 $8+2r$이므로

$8+2r=14$, $\therefore\ r=3$이다.

따라서 원 C의 넓이는 9π이다.

23) 답 : ④

[해설]



$\Rightarrow\overline{PF'}+\overline{PF}=\sqrt{3}c+c=4$

$\therefore\ c=\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}=2\sqrt{3}-2$

24) 답 : ④

[해설]

두 쌍곡선은 각각 원점에 대하여 대칭이므로 두 쌍곡선의 교점인 P, Q도 원점대칭이 된다.

그러므로 원점대칭인 G, G'에 대해 $\overline{PG}=\overline{QG'}$가 성립 $\cdots$①

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QG}-\overline{QG'}=2$이며, ①에 의해 $\overline{QG}-\overline{PG}=2$이다.

그러므로, $\overline{PG}\times\overline{QG}=\overline{PG}(\overline{PG}+2)=8$이 성립하고, $\overline{PG}=2$이다.

$(\because\overline{PG}>0)$

$\therefore\ \overline{PG}=2,\ \overline{QG}=4$

같은 방식으로 원점대칭되는 F, F'에 대해 $\overline{QF'}=\overline{PF}$가 성립 $\cdots$②

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{QF}-\overline{QF'}=2$이며, ②에 의해 $\overline{QF}-\overline{PF}=2$이다.

그러므로, $\overline{PF}\times\overline{QF}=\overline{PF}(\overline{PF}+2)=2$이 성립하고

$\overline{PF}=-1+\sqrt{5}$ ($\because \overline{PF}>0$)이다.

$\therefore$ $\overline{PF}=-1+\sqrt{5}$, $\overline{QF}=1+\sqrt{5}$

따라서, 사각형 $PGQF$의 둘레의 길이는

$\overline{PG}+\overline{QG}+\overline{PF}+\overline{QF}$

$=2+4+(-1+\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})$

$=6+2\sqrt{5}$

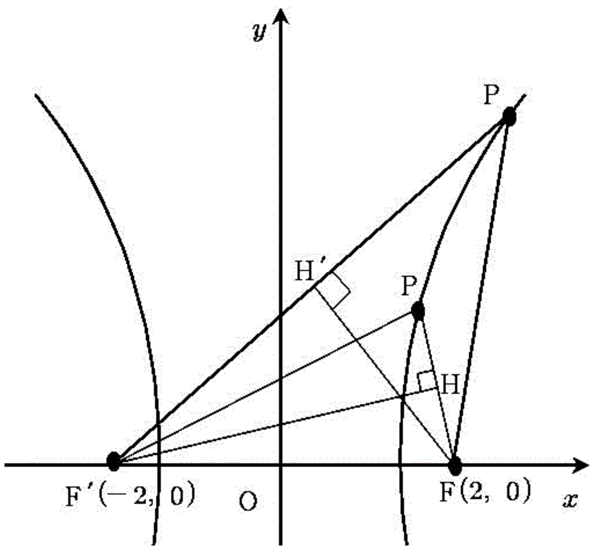
25) 답 : ⑤

[해설]

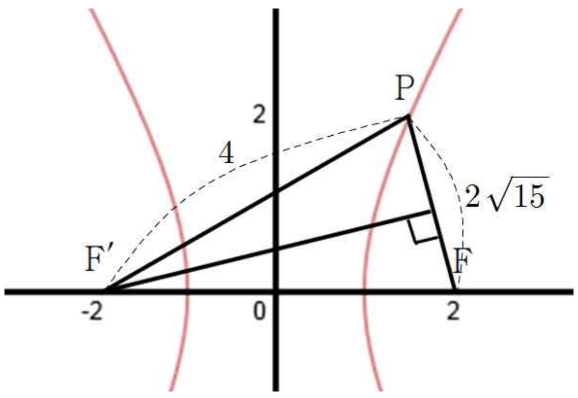
삼각형 $PF'F$ 에서 $|PF'-PF|=2$이므로

$\overline{FF'}=\overline{PF'}$인 경우와 $\overline{F'F}=\overline{PF}$인

두 개의 이등변삼각형이 생긴다.



i) $\overline{FF'}=\overline{PF'}$인 경우



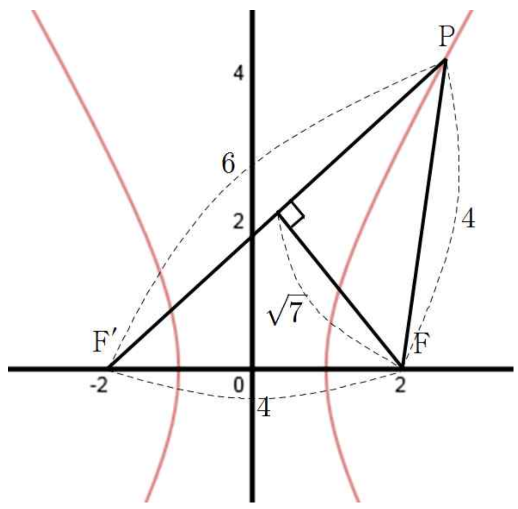
$\overline{FF'}=\overline{PF'}=4$ $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$ 이므로 $\overline{PF}=2$

F'에서 $\overline{PF}$에 내린 수선의 발을 H이라 하면

$\overline{F'H}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

삼각형 $PF'F$의 넓이 $=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{F'H}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

ii) $\overline{F'F}=\overline{PF}$인 경우



$\overline{F'F}=\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$이므로

$\overline{PF'}=6$ F에서 $\overline{PF'}$에 내린

수선의 발을 H'이라 하면

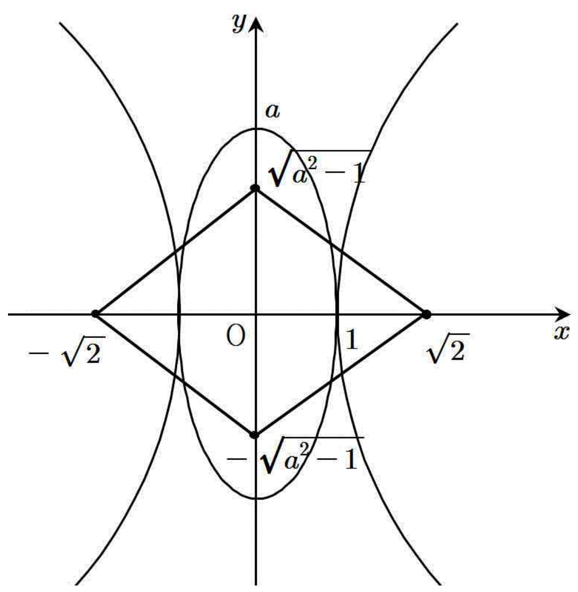
$\overline{FH}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

삼각형 $PF'F$의 넓이 $=\frac{1}{2}\times6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

$\therefore$ 넓이 a 의 곱은 $\sqrt{15}\times3\sqrt{7}=3\sqrt{105}$

26) 답 : 19

[해설]



타원의 두 초점의 좌표는 $(0,\ \pm\sqrt{a^2-1})$이고

쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{2},\ 0)$이므로

사각형의 넓이= $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{a^2-1}=12$

$2(a^2-1)=36$

$a^2-1=18$

$\therefore$ $a^2=19$

27) 답 : ②

[해설]

[타원의 성질]

$\overline{FP}+\overline{F'P}=14$

$9+\overline{F'P}=14$, $\overline{F'P}=5$

$\triangle FPH$에서 $\overline{FP}^2-\overline{PH}^2=\overline{FH}^2$ 에서

$9^2-\overline{PH}^2=(6\sqrt{2})^2$ 에서 $\overline{PH}=3$

따라서 $\overline{F'H}=2$

$\overline{FF'}=2\sqrt{49-a}$

$\triangle FHF'$에서 $\overline{FH}^2+\overline{F'H}^2=\overline{FF'}^2$

$(6\sqrt{2})^2+2^2=(2\sqrt{49-a})^2$

$76=4(49-a)$

$a=30$

28) 답 : 5

[해설]

[포물선의 성질]

중심이 C_1 위에 있고 점 F_1을 지나는 원을 k_1이라 하고

포물선 $x^2=4y$ 위의 원 k_1의 중심을 Q_1이라 하면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{Q_1F_1}=k_1$의 반지름 $=(Q_1$으로부터 준선 $y=-1$에 이르는 거리$)$

이므로 원 k_1은 준선 $y=-1$에 접한다.

따라서 원 k_1 위의 점 P 의 y 좌표 ≥ -1이다.

같은 방법으로

중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원을 k_2 라 하고

포물선 $y^2=8x$ 위의 원 k_2의 중심을 Q_2라 하면 포물선의 정의에 의하여

$\overline{Q_2F_2}=k_2$의 반지름 $=(Q_2$ 로부터 준선 $x=-2$ 까지의 거리$)$

이므로 원 k_2 는 준선 $x=-2$ 에 접한다.

따라서 원 k_2 위의 점 P 의 x 좌표 ≥ -2 이다.

따라서 두 원 k_1, k_2 의 교점 P 는

x 좌표 ≥ -2, y 좌표 ≥ -1 이므로

(나) 조건에 의하여 3사분면에서 $\overline{OP}$ 가 최대일 때는 P 가 $(-2,\ -1)$에 있을 때이다.

$P(-2,\ -1)$ 을 지나고 준선에 접하는 두 원이

$(x+2)^2+(y-1)^2=4$과 $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+(y+1)^2=\left(\frac{17}{8}\right)^2$로 존재하므로

$P(-2,\ -1)$ 은 조건을 만족한다.

따라서 $\overline{OP}$ 의 최댓값은 $\sqrt{5}$이고 $\overline{OP}^2$ 의 최댓값은 5 이다.

29) 답 : ④

[해설]

$a^2=13-b^2$이므로 $\therefore\ a^2+b^2=13$

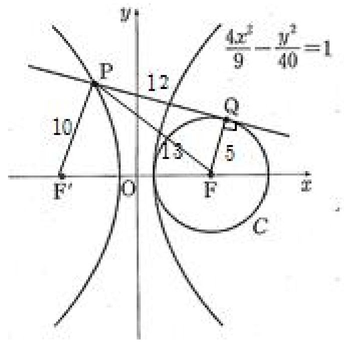
30) 답 : ①

[해설]

$\dfrac{x^2}{\frac{9}{4}}-\dfrac{y^2}{40}=1$에서 원 C와 쌍곡선의 교점은 $R\left(\frac{3}{2},0\right)$이다.

$F(c,0)$이라 두면 $c^2=\frac{9}{4}+40=\frac{169}{4}=\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\therefore\ F\left(\frac{13}{2},0\right)$



따라서, 원 C의 반지름의 길이 $r=\frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$

$\overline{PF}^2=\overline{PQ}^2+\overline{FQ}^2=12^2+5^2=13^2\ \left(\angle PQF=\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \overline{PF}=13$

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{PF'}=\overline{PF}-3=10$

31) 답 : ⑤

[해설]

$A(a^2,2a),\ B(b^2,2b)$ (단, $b>a>0$) 이라 하면

포물선의 정의에서 준선 $x=-1$에서 A, B까지의 거리의 비도 $1:2$이다.

$a^2+1:b^2+1=1:2,\ 2a^2-b^2=-1\cdots$ ㉠

$P(-1,0)$과 A, B의 기울기에서

$2b-\frac{2a}{b^2-a^2}=\frac{2a}{a^2+1},\ ab=1\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\sqrt{2}$ 이므로

$\therefore$ l의 기울기는 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

32) 답 : 180

[해설]

$\overline{PF'}$와 $\overline{QF}$를 연결하여

$\overline{PF'}=2\overline{OH}=2a,\ \overline{QF}=2\overline{OI}=2b$라 하면

타원의 정의에 의해 $\overline{PF'}+\overline{PF}=\overline{QF'}+\overline{QF}$이고

$\angle FPF'=\angle FPF'=90^\circ$ 이므로

$\therefore\ \overline{PF'}=\overline{QF'},\ \overline{PF}=\overline{QF}$

$\triangle PFF'$에서 $4a^2+4b^2=100$

$\overline{OH}\times\overline{OI}=a\times b=10$

$\therefore\ l^2=(2a+2b)^2=180$

33) 답 : 14

[해설]

$A(x_1,y_1)$이라 두면 접선 $y_1y=8(x+x_1)$

$x=0$이면 $y=8\frac{x_1}{y_1}$

y축과 교점 $D\left(0,\ 8\frac{x_1}{y_1}\right)$

$y_1^2=16x_1$이므로 $\frac{y_1}{2}=8\frac{x_1}{y_1}$

$\therefore\ D\left(0,\ \frac{y_1}{2}\right)$

따라서, $\triangle OAD$의 무게중심

$$B\left(0+0+\frac{x_1}{3},\ \frac{0+\frac{y_1}{2}+y_1}{3}\right)=\left(\frac{x_1}{3},\ \frac{y_1}{2}\right)$$

$\frac{x_1}{3}=x$, $\frac{y_1}{2}=y$라 두면

$x_1=3x$, $y_1=2y$, $y_1^2=16x_1$이므로 $4y^2=16\times 3x$

따라서, $y^2=12x$

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=(3+x_1)+(3+x_2)=20$

$x_1+x_2+6=20$

$\therefore\ x_1+x_2=14$

34) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]타원의 방정식을 구하고 타원의 정의를 활용할 수 있는가?

조건을 만족하는 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$라 하면

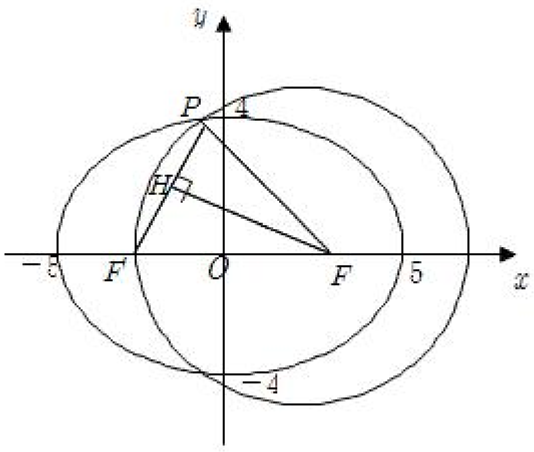
$2a=10$, $2b=6$

$\therefore\ a=5$, $b=3$

따라서, 두 초점 F, F'의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)\,(c>0)$라 하면

$F\left(\sqrt{5^2-3^2}, 0\right)$, $F'\left(-\sqrt{5^2-3^2}, 0\right)$

즉, $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$이다.



이때, $\overline{FF'}=\overline{FP}=8$, $\overline{PF}+\overline{PF'}=10$이므로

$\overline{F'P}=2$이고 점 F에서 선분 PF'에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{FH}=\sqrt{8^2-1^2}=3\sqrt{7}$

따라서 구하고자 하는 삼각형 PFF'의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

35) 답 : 32

[해설]

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면 접선의 방정식은 $\frac{x_1x}{8}+\frac{y_1y}{2}=1$이고

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$\frac{2y_1}{2}=1$에서 $y_1=1$

타원과 $y=1$을 연립시키면

$x=\pm 2$

$P(-2, 1)$, $Q(2, 1)$

$\therefore$ $\overline{PQ}$의 길이는 4

타원의 다른 촛점을 F'이라 하면

$\overline{FQ}=\overline{PF'}$에서

$\overline{PF}+\overline{FQ}=\overline{PF}+\overline{PF'}=4\sqrt{2}$

구하는 길이는 $4\sqrt{2}+4$

$a^2+b^2=32$

36) 답 : 8

[해설]

해설

삼각형의 높이는 3이므로

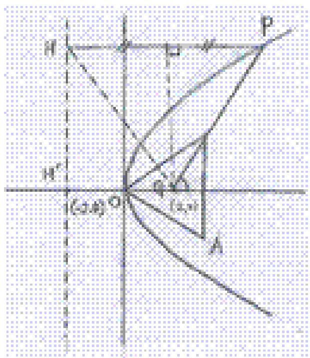
$\overline{OG}=2$ 준선의 방정식은 $x=-2$

P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{GP}$와 x축이 이루는 각이 60°이 므로 $\angle HPG=60^\circ$

$\overline{PH}=\overline{PG}$이므로 삼각형 APH는 정삼각 형이다

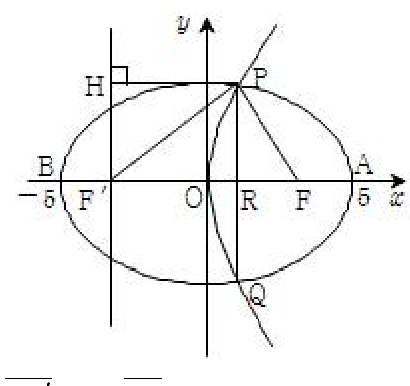
준선과 x축이 만나는 점을 H'이라 하면 촛점과 준선간의 거리 $\overline{GH'}=4$

$\overline{GP}=\overline{PH}=2\times\overline{GH'}=2\times 4=8$



37) 답 : 103

[해설]



$\overline{PF'}=m$, $\overline{PF}=n$이라 하면 타원의 정의에 의해

$m+n=10\cdots$①

선분 PQ와 x축의 교점을 R라 하면

$\overline{PR}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{10}$

직각삼각형 $PF'R$에서 $\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$

점 F'을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라 하면 l은 포물선의 준선이고,

점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{PH}=\overline{PF}$

이다.

$\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$ 이므로

$n=\sqrt{m^2-10}$ 에서 $n^2=m^2-10\cdots$②

① 에서 $n=10-m$이므로 ②에 대입하면

$$(10-m)^2=m^2-10$$

$$m^2-20m+100=m^2-10$$

$$20m=110,\ m=\frac{11}{2}$$

$$n=10-m=\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ mn=\frac{11}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{99}{4}$$

$$\therefore\ p+q=4+99=103$$

38) 답 : ⑤

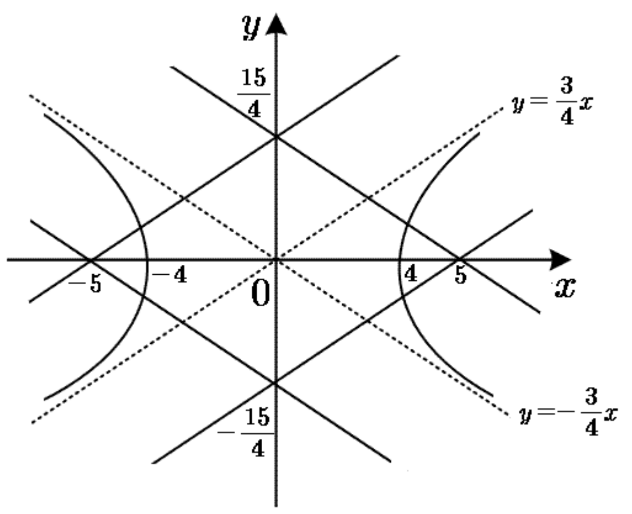
[해설]

초점 $(\pm5,0)$이고 점근선은 $y=\pm\frac{3}{4}$이므로

촛점을 지나고 점근선에 평행한 직선은

$y=\frac{3}{4}(x\pm5),\ y=-\frac{3}{4}(x\pm5)$이므로

이 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$y=\frac{3}{4}(x+5),\ y=-\frac{3}{4}(x-5)$와 x축으로 둘러싸인 넓이의 2배와 같다.

$$\therefore\ 10\times\frac{15}{4}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{75}{2}$$

39) 답 : ④

[해설]

이차곡선[정답]④

타원의 방정식에서 촛점은 x축 위에 있으므로

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$이라 하면

두 꼭짓점 사이의 거리는 $2a$이고, 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{35}x$이므로

$$\frac{b}{a}=\sqrt{35}$$

즉, $b=\sqrt{35}a$①

또한, 타원과 쌍곡선이 촛점을 공유하므로

$$a^2+b^2=5^2-4^2$$

$$\therefore\ a^2+b^2=9$$

① 을 대입하면

$$a^2+35a^2=9$$

$$\therefore\ a=\sqrt{\frac{9}{36}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서, 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는

$$2a=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

40) 답 : ②

[해설]

점 P의 좌표를(x_1,y_1)이라고 하면, 접선의 방정식은

$$y_1y=\frac{1}{2}(x+x_1)$$

이 식에 $y=0$을 대입하면 $x=-x_1$이므로

교점 T의 좌표는$(-x_1,0)$이다.

$y^2=4\cdot\frac{1}{4}\cdot x$에서 촛점 F의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},0\right)$이므로

$$\overline{FT}=x_1+\frac{1}{4}$$

$$\overline{FP}=\sqrt{\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+y_1^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{16}+x_1}\ (\because\ y_1^2=x_1)$$

$$=\sqrt{x_1^2+\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{16}}=\sqrt{\left(x_1+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=x_1+\frac{1}{4}$$

41) 답 : ④

[해설]

[출제 의도]이차곡선

타원의 방정식에서 촛점은 x축 위에 있으므로

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$이라 하면

두 꼭짓점 사이의 거리는 $2a$이고,

한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{35}x$이므로

$$\frac{b}{a}=\sqrt{35}$$

즉, $b=\sqrt{35}a\cdots$①

또한, 타원과 쌍곡선이 촛점을 공유하므로

$$a^2+b^2=5^2-4^2$$

$\therefore\ a^2+b^2=9$에 ①을 대입하면

$$a^2+35a^2=9$$

$$\therefore\ a=\sqrt{\frac{9}{36}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

따라서, 쌍곡선의 두 꼭짓점 사이의 거리는

$$2a=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

42) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 쌍곡선의 방정식 이해하기

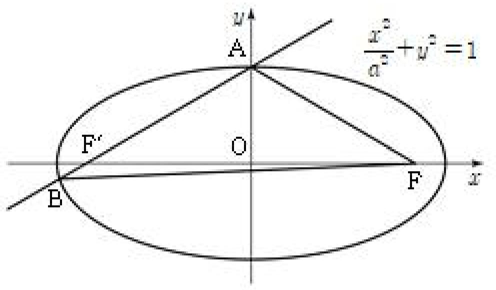
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$의 점근선의 방정식은 $y=\dfrac{2}{5}x$, $y=-\dfrac{2}{5}x$이므로 $k=\dfrac{2}{5}$

43) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 타원의 정의를 활용하여 문제 해결하기

점 $A(0,\ 1)$을 지나는 타원 C의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(\,a>0\,)$이라 하자.



그림과 같이 $\overline{AF}+\overline{AF'}=\overline{BF}+\overline{BF'}=2a$이고, 삼각형 ABF의 둘레의 길이가 16이므로 $4a=16$, $a=4$

$\therefore\ c^2=16-1=15$

따라서 선분 FF'의 길이는 $2\sqrt{15}$

44) 답 : 54

[해설]

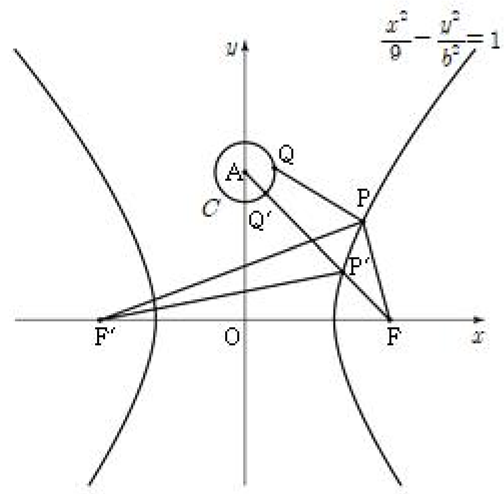
[출제 의도] 쌍곡선의 방정식을 활용하여 추론하기

쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로 $a^2=9$

점 P가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$\overline{PF'}-\overline{PF}=6$

$\overline{PQ}+\overline{PF'}=\overline{PQ}+\left(\overline{PF}+6\right)=\left(\overline{PQ}+\overline{PF}\right)+6$



$\overline{PQ}+\overline{PF}$는 두 점 P, Q가 선분 AF 위의 점일 때 최소이다.

그림과 같이 선분 AF가 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 원 C와 만나는 점을 각각 P', Q'이라 하면

$\overline{PQ}+\overline{PF'}\ \geq\left(\overline{P'Q'}+\overline{P'F}\right)+6=\left(\overline{AF}-1\right)+6=\sqrt{c^2+25}+5$

$\overline{PQ}+\overline{PF'}$의 최솟값이 12이므로 $\sqrt{c^2+25}+5=12$

$c^2=24$

$\therefore\ b^2=c^2-a^2=24-9=15$

따라서 $a^2+3b^2=9+3\times15=54$

45) 답 : 8

[해설]

[출제 의도] 이차곡선의 성질 이해하기

두 점근선의 방정식이 $y=x$, $y=-x$이므로

$\dfrac{b}{a}=\pm1\ \therefore\ b^2=a^2$ …… ㉠

점 $(5,\ 3)$을 지나므로

$\dfrac{25}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a^2=16$

따라서 주축의 길이는 $2|a|=8$

46) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 타원의 정의를 활용하여 문제 해결하기

타원의 두 초점을 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$ $(c>0)$이라 하면

$25-9=c^2$ 이므로 $c=4$

$\overline{PF}=m$, $\overline{PF'}=n$이라 하면 타원의 정의에 의하여 $m+n=10$

삼각형 FPF'는 직각삼각형이므로 $m^2+n^2=8^2$

$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn$

$8^2=10^2-2mn$

$mn=18$

따라서 삼각형 FPF'의 넓이는 $\dfrac{1}{2}mn=9$

47) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 이차곡선의 성질 이해하기

$\overline{PF}=a$라 하면 점 P에서 $F(2,\ 0)$까지의 거리는 점 P에서 준선 $x=-2$에 이르는 거리와 같으므로

$\overline{FH}=a-4$

$\overline{PH}=\sqrt{a^2-(a-4)^2}=\sqrt{8a-16}=2\sqrt{2a-4}$

삼각형 PFH의 넓이가 $3\sqrt{10}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times(a-4)\times2\sqrt{2a-4}=3\sqrt{10}$

$(a-4)\sqrt{a-2}=3\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$\left(a^2-3a+11\right)(a-7)=0$

$\therefore\ a=7$

따라서 선분 PF의 길이는 7

48) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 이차곡선의 성질 추론하기

$\overline{PM}=\overline{PF}$, $\overline{PM}=\overline{MF'}$이고 $\overline{MF'}=\overline{MF}$이므로

삼각형 PMF는 정삼각형이고

$\angle F'FP=90^\circ$, $\overline{MO}=1$이므로

$\overline{PF}=2$, $\overline{PF'}=4$, $\overline{FF'}=2\sqrt{3}$

장축의 길이가 $2|a|=2+4=6$이므로 $|a|=3$

$a^2-b^2=3$에서 $b^2=6$

따라서 $a^2+b^2=15$

49) 답 : 14

[해설]

[출제 의도] 포물선의 성질 이해하기

포물선의 초점을 $F(p,0)$, 점 $A(\alpha, m(\alpha-4))$ $(\alpha>0)$라 하면, 점 $B(-p,0)$, 점 $C(0,-4m)$ 이다.

삼각형 ABC의 무게중심이 점 F이므로

$\left(\dfrac{\alpha-p}{3}, \dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}\right)$에서 $\dfrac{\alpha-p}{3}=p$, $\dfrac{m\alpha-4m-4m}{3}=0$

$\alpha=4p$, $(\alpha-8)m=0$

$m>0$이므로 $\alpha=8$, $p=2$

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 A'라 하면,

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}+\overline{AA'}=10$

따라서 $\overline{AF}+\overline{BF}=14$

50) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 쌍곡선의 성질 이해하기

원 $x^2+y^2=8$과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 만나는 네 점이 원의 둘레를 4등분하므로

쌍곡선이 점 $(2,\ 2)$를 지난다.

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$ ⋯ ㉠

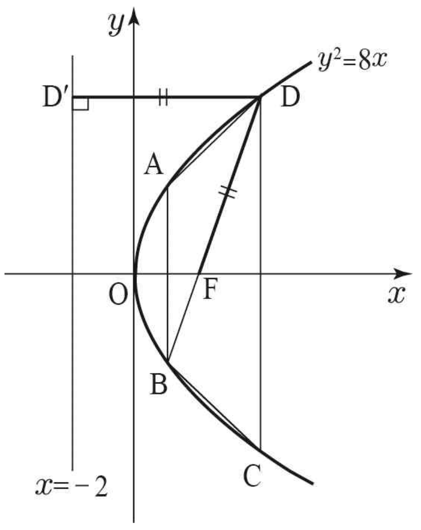
쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$이므로 $b=\sqrt{2}a$ ⋯ ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a^2+b^2=6$

51) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도] 포물선의 성질을 활용하여 문제 해결하기



포물선 $y^2=8x$의 초점 F의 좌표는 $(2,\ 0)$

점 D에서 포물선의 준선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 D'이라 하면

$\overline{DD'}=\overline{FD}=6$이므로 점 D의 x좌표는 4이고 점 D의 좌표는 $(4,\ 4\sqrt{2})$

점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

직선 BF의 기울기와 직선 FD의 기울기가 같으므로 $\dfrac{-b}{2-a}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}$

$b=2\sqrt{2}a-4\sqrt{2}$

$b^2=8a$, $a^2-5a+4=0$

$a<2$ 이므로 $a=1$

따라서 사각형 $ABCD$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(8\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times3=18\sqrt{2}$

52) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 타원의 접선의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

초점 $F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$

$P(x_1, y_1)$에서 접선의 방정식은 $3x_1x+4y_1y=12$

접선의 x절편은 $\dfrac{4}{x_1}$

$P(x_1, y_1)$에서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-y_1=\dfrac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$

접선에 수직인 직선의 방정식의 x절편은 $\dfrac{x_1}{4}$

세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$\overline{RF}=1-\dfrac{x_1}{4}$, $\overline{F'R}=\dfrac{x_1}{4}+1$, $\overline{FQ}=\dfrac{4}{x_1}-1$

$2\left(\dfrac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\dfrac{x_1}{4}\right)+\left(\dfrac{4}{x_1}-1\right)$

양변에 $4x_1$을 곱하여 정리하면

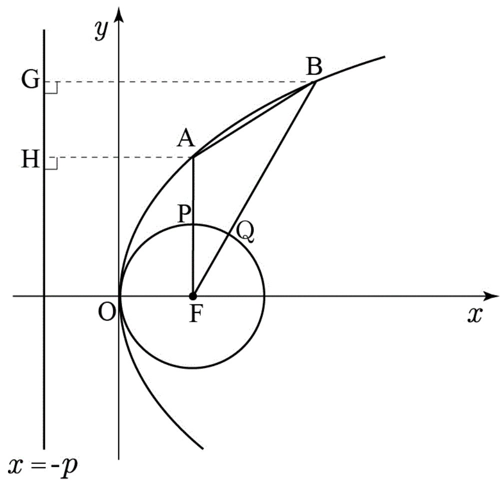
$3{x_1}^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$

따라서 $x_1=\dfrac{4}{3}$

53) 답 : ④

[해설]

[출제 의도] 포물선의 성질 이해하기



원의 반지름의 길이가 $\overline{FP}=p$이므로 $\overline{AP}=p$

$\overline{AF}=\overline{AH}$이므로 점 A의 x좌표는 p

$\overline{FQ}=p$이므로 $\overline{BQ}=\dfrac{5}{2}p$

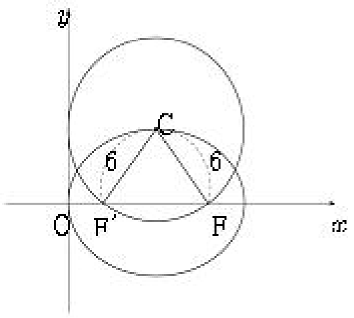
$\overline{BF}=\overline{BG}$이므로 점 B의 x좌표는 $\dfrac{5}{2}p$

삼각형 AFB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2p\times\left(\dfrac{5}{2}p-p\right)=24$ 따라서 $p=4$

54) 답 : 12

[해설]

[출제 의도] 타원의 성질 이해하기



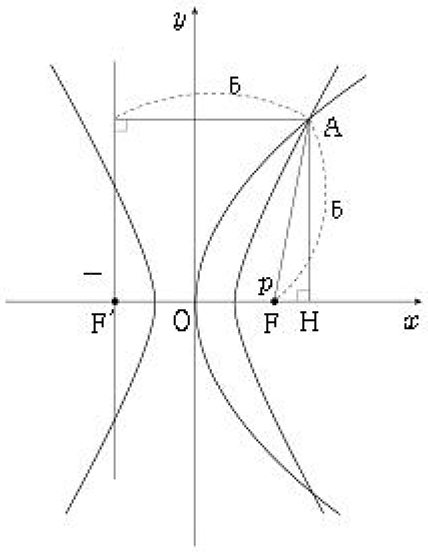
원 $(x-6)^2+(y-5)^2=36$의 중심을 C, 타원의 촛점을 각각 F, F'이라 하면

장축의 길이는 $\overline{F'C}+\overline{CF}=12$

55) 답 : ②

[해설]

[출제 의도] 포물선과 쌍곡선의 성질 이해하기



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\cos(\angle AFH)=\dfrac{1}{5}$이므로 $\overline{FH}=1$

포물선의 정의에 의하여 $2p+1=5$

$\therefore\ p=2$

$A(3,\ 2\sqrt{6})$이므로 $\overline{AF'}=7$

쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{AF'}-\overline{AF}|=2\{a\}=2$이므로

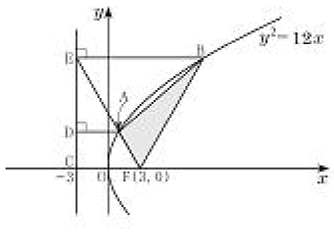
$a=1,\ b=\sqrt{3}$

$\therefore\ ab=\sqrt{3}$

56) 답 : ③

[해설]

[출제 의도] 포물선의 정의를 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.



$\angle EFB=\dfrac{\pi}{3}$이고 $\overline{BF}=\overline{BE}$이므로

$\triangle BEF$는 정삼각형이다.

$\overline{FC}=6$이므로

$\overline{FB}=\overline{FE}=2\overline{FC}=12$

$\overline{AF}=\overline{AD}$이고 $\angle DAE=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$\overline{AE}=2\overline{AD}=2\overline{AF}$에서 $3\overline{AF}=12$즉, $\overline{AF}=4$

$\therefore\ \triangle AFB=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

57) 답 : ⑤

[해설]

두 점근선의 교점을 원점으로 하고, 두 초점이 x축 위에 있는 좌표평면에서 쌍곡선 H의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$이라 하자.

두 초점의 좌표가 $A(2,\ 0)$, $D(-2,\ 0)$이므로 $a^2+b^2=2^2$

직선 BE가 점근선이므로 $\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{DP}-\overline{AP}=2a=2$

58) 답 : 16

[해설]

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$이라 하면, 접선의 방정식에 의해 점 B의 좌표는 $(-a,\ 0)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발 H의 좌표는 $(a,\ 0)$

점 H와 준선사이의 거리는 10이다.

$\overline{BO}=\overline{OH}=a,\ \overline{HF}=10-2a$

$\dfrac{1}{2}\overline{BF}\times\overline{AH}=5b=40$

$b=8,\ \overline{HF}=6,\ a=2,\ p=8\ \therefore\ A(2,\ 8)$

따라서 $ab=16$

59) 답 : ③

[해설]

주어진 원과 x축과의 교점을 $A(-5,\ 0)$, $B(5,\ 0)$이라 하자.

두 점 $A(-5,\ 0)$, $B(5,\ 0)$는 쌍곡선의 촛점이다.

$\overline{AQ}=a,\ \overline{BQ}=b$라 하면

쌍곡선의 정의에 의해 $a-b=8$이고,

직각삼각형 $\triangle ABQ$에서 $a^2+b^2=10^2$이다.

$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$에서

$\overline{AQ}\times\overline{BQ}=ab=18$이다.

60) 답 : ①

[해설]

$\overline{F'P}=a,\ \overline{FP}=b$라 하면 $a-b=4$

$\angle F'PF=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{10})^2=40$

따라서 $a=6,\ b=2$이므로

$\cos(\angle PFF')=\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

61) 답 : ②

[해설]

(ⅰ)점 P가 x축 위에 있을 때

$\alpha\beta=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$

(ⅱ)점 P가 x축 위에 있지 않을 때

타원 위의 점 P에서 접선의 기울기를 m이라고 하면

타원의 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{2m^2+1}$ 이다.

두 초점 $(-1,0)$, $(1,0)$에서 접선까지의 거리를 각각 구하면

$$\alpha=\frac{\left|-m\pm\sqrt{2m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}},\ \beta=\frac{\left|m\pm\sqrt{2m^2-1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

이때, $\alpha\beta=\dfrac{\left|-m\pm\sqrt{2m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}\dfrac{\left|m\pm\sqrt{2m^2+1}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=1$ 이다.

따라서(ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$ 의 관계를 나타나는 그래프의 개형은

② 이다.

62) 답 : ④

[해설]

$\left|\overline{PF}-\overline{PF'}\right|=10$ 이므로 $a=5$ 이다.

$y^2=4\times14(x+c)$ 이므로 $\overline{AF}=14$ 이다.

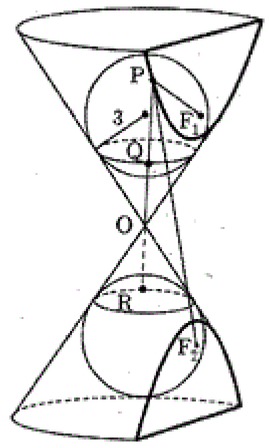
$\overline{AF'}:\overline{FF'}=1:6$ 이므로 $\overline{AF'}=2,\ \overline{FF'}=12$ 이다.

$$\frac{c^2}{a^2-b^2}=\frac{64}{25-11}=\frac{32}{7}$$

63) 답 : 8

[해설]

F_1과 Q는 구의 밖의 한 점 P에서 그은 접점이므로



$\overline{PF_1}=\overline{PQ}$

이다. 마찬가지로 $\overline{PF_2}=\overline{PR}$ 이므로

$$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=\left|\overline{PQ}-\overline{PR}\right|=\overline{QR}$$

이다. 따라서

$\dfrac{1}{2}\overline{QR}:3=8:6$

이므로 $\overline{QR}=8$ 이다.

64) 답 : 13

[해설]

$\overline{QF}-\overline{QF'}=8$ (왜냐하면 $\overline{QF}>\overline{QF'}$)

$\overline{PF'}-\overline{PF}=8$ (왜냐하면 $\overline{PF'}>\overline{PF}$)

$(\overline{PF'}-\overline{QF'})+(\overline{QF}-\overline{PF})=16$

$\therefore\ \overline{QF}-\overline{PF}=13$

65) 답 : 44

[해설]

포물선 $y^2=16(x+8)$의 초점은 $F(-4,0)$이고, 준선은 $x=-12$이다.

포물선에 반사된 빛은 초점으로 모이므로

포물선 $y^2=-16(x-28)$의 초점은 $C(24,0)$, 준선은 $x=32$가 된다.

초점과 준선의 성질을 이용하면 선분 FA는 A에서 준선 $x=-12$까지의 거리가

되며 선분 BC는 B에서 준선 $x=32$까지의 거리가 되므로

$\overline{FA}+\overline{AB}+\overline{BC}$는 준선과 준선까지의 거리가 되므로

$32-(-12)=44$ 이다.

$\therefore\ 44$

66) 답 : ⑤

[해설]

[출제 의도]타원을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{AF}=a,\ \overline{OF}=\dfrac{1}{2}a,\ \overline{AO}=b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므로 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

67) 답 : ①

[해설]

[출제 의도]포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

포물선 $y^2=4(x-a)$의 초점은 $(a+1,0)$이고,

포물선 $y^2=-8x$의 초점은 $(-2,0)$이다. $\therefore\ a=-3$

68) 답 : 18

[해설]

[출제 의도]쌍곡선의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$F'(-3,0),\ F(3,0)$이고 주축의 길이는 4이므로

$\overline{PF'}=a,\ \overline{PF}=b$라 하면 $a-b=4$

$\angle F'PA=\angle FPA$ 이므로 $a:b=2:1$

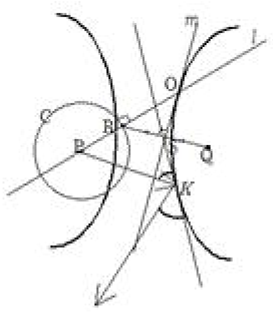
$\therefore\ a=8,\ b=4$

따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는 $8+4+6=18$ 이다.

69) 답 : ②

[해설]

[출제 의도]쌍곡선의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.



점 0의 자취를 그려보면 다음과 같은 쌍곡선이 된다.

점 Q는 쌍곡선의 초점이며, $\overline{OR},\ \overline{OQ}$의 길이는 같다.

따라서 $\overline{OP}-\overline{OR}$은 항상 일정하다. 점 P에서 반대쪽 쌍곡면 점 K로 빛을 쏘면

접선을 기준으로 입사각과 반사각이 같게 밖으로 빛이 반사해 나간다.
따라서, 옳은 것은 ①, ② 이다.

70) 답 : 14

[해설]

[출제 의도]타원의 성질을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원의 반지름의 길이를 r라 하면 타원의 장축과 단축의 길이는 각각 $2(10-r), 2(6-r)$이므로

타원의 방정식은 $\frac{x^2}{(10-r)^2}+\frac{y^2}{(6-r)^2}=1$이다.

타원의 두 촛점사이의 거리가 $4\sqrt{10}$ 이므로

$$(10-r)^2-(6-r)^2=(2\sqrt{10})^2 \therefore\ r=3$$

따라서 타원의 장축의 길이는 $2(10-3)=14$이다.

71) 답 : 32

[해설]

[출제 의도]타원의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 F는 타원의 촛점이므로 $c^2=a^2-16$

점 $A(c, k)$라 하면

$$k^2=16\frac{a^2-c^2}{a^2} \therefore\ k=4\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\frac{16}{a}$$

따라서 $\square ADBC$의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2k=2ak=2a\cdot\frac{16}{a}=32$$

72) 답 : 18

[해설]

[출제 의도]포물선의 촛점을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

포물선 $(x-1)^2=4y$의 촛점 F_1의 좌표는

$F_1(0+1, 1)$즉, $F_1(1, 1)$이다.

포물선 $(y+2)^2=-8x$ 촛점 F_2의 좌표는

$F_2(-2, 0-2)$즉, $F_2(-2, -2)$이다.

$$\therefore\ \overline{F_1F_2}^2=3^2+3^2=18$$

73) 답 : 90

[해설]

[출제 의도]타원의 정의를 이해하여 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$의 두 초점의 좌표는

$F(-8, 0), F'(8, 0)$, 장축의 길이는 $2\times 10=20$이다.

이때, $\overline{P_1F'}=\overline{P_9F}, \overline{P_2F'}=\overline{P_8F},$

$\overline{P_3F'}=\overline{P_7F}, \overline{P_4F'}=\overline{P_6F}$이므로

$$\sum_{k=1}^{9}\overline{FP_k}=20\times 4+\overline{P_5F}=80+10=90$$