1회 정답 및 해설

1	⑤	2	④	3	④	4	④	5	①
6	⑤	7	④	8	⑤	9	③	10	②
11	②	12	③	13	⑤	14	④	15	④
16	②	17	①	18	①	19	③	20	④
21	④	22	12	23	110	24	4	25	7
26	13	27	35	28	72	29	84	30	65

1. 정답 ⑤

이차함수 $y=x^2+6x+a$ 의 그래프는 아래로 볼록이므로
모든 실수 x에 대하여 $y \geq 0$가 되려면
이차함수의 그래프가 x축에 접하거나 만나지 않아야 한다.
즉, $x^2+6x+a=0$ 의 판별식을 D라 하면
$D \leq 0$
이다. $\frac{D}{4}=9-a \leq 0$ 이므로
$a \geq 9$
이다. 따라서 실수 a의 최솟값은 9이다.

2. 정답 ④

[출제의도] 이항계수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$(x^2-1)^7$ 의 전개식에서 일반항은 ${}_7\mathrm{C}_r(x^2)^{7-r}(-1)^r$ 이므로
x^6의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_4(-1)^4=35$ 이다.

3. 정답 ④

$\mathrm{P}(A^C \cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{7}{9}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{63}$

4. 정답 ④

$$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$$
$$=\int(x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+C$$

그런데 $f(0)=1$ 이므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$

$\therefore f(4)=13$

5. 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면 $a_4-a_2=2d=4 \iff d=2$

$\therefore a_n=2n+2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{na_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(2n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$$

6. 정답 ⑤

$\mathrm{E}(X)=-4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{2}=4$

$\therefore \mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)=12$

7. 정답 ④

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이 $\{b_n\}$ 이므로

$a_7=a_1+\sum_{n=1}^{6}b_n$

$a_7=51$, $a_1=3$ 이므로 $\sum_{n=1}^{6}b_n=a_7-a_1=48$

8. 정답 ⑤

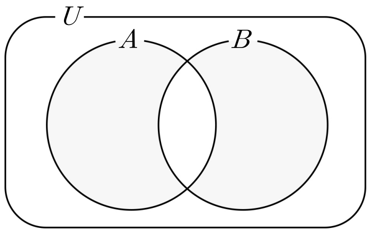
$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=2+3=5$

9. 정답 ③

ㄱ. $\sim p \Rightarrow r$ 이므로 $P^C \subset R$ (참)
ㄴ. (반례) $U=\{1, 2, 3\}$, $P=\{1, 2\}$, $Q=\{2\}$,
$R=\{1, 3\}$ 일 때, $P \not\subset Q$ (거짓)
ㄷ. $r \Rightarrow \sim q$에서 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로
$Q \subset R^C$ ……㉠
$\sim p \Rightarrow r$에서 $\sim r \Rightarrow p$ 이므로
$R^C \subset P$ ……㉡
$\sim r \Rightarrow q$ 이므로
$R^C \subset Q$ ……㉢
㉠, ㉡에 의하여 $Q \subset R^C \subset P$ 이므로 $Q \subset P$
$\therefore P \cap Q=Q$
㉠, ㉢에 의하여 $Q=R^C$
$\therefore P\cap Q=Q=R^C$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

10. 정답 ②

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$ 이고
벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$(A-B)\cup(B-A)$ 의 원소가 1, 3, 8이고
$n(A)=3$, $n(B)=2$ 이므로 $n(A\cap B)=1$ 이어야 한다.
$\therefore a-1 \in A\cap B$
$a-1$은 B의 원소 중 어느 하나와 같아야 한다.
(i) $a-1 \neq a+2$
(ii) $a-1=a^2-4a-7$ 이고 $a+2=8$ 일 때,
$a=6$
(i), (ii)에 의하여 $a=6$

11. 정답 ②

임의로 추출한 16가구의 월 식료품 구입비의
표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(45, 2^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(44\leq\overline{X}\leq 47)&=\mathrm{P}(44\leq\overline{X}\leq 45)+\mathrm{P}(45\leq\overline{X}\leq 47)\\&=\mathrm{P}(-0.5\leq Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\\&=0.1915+0.3413\\&=0.5328\end{aligned}$$

12. 정답 ③

ㄱ. $4=1+3=2+2$ 이므로 $P(4, 2)=2$ (참)
ㄴ. $P(10, 3)=8$, $P(7, 1)=1$, $P(7, 2)=3$, $P(7, 3)=4$
이므로 $P(10, 3)=P(7, 1)+P(7, 2)+P(7, 3)$ (참)
ㄷ. [반례] $P(4, 2)=2$, $P(4, 3)=1$ (거짓)

13. 정답 ⑤

$g(x)=f(x)-kx$ 가 $x=-3$ 에서 극값을 갖기 위해서는
$g'(-3)=0$ 이어야 한다.
$g'(x)=f'(x)-k$ 로부터
$g'(-3)=f'(-3)-k=0$, $8-k=0$
$\therefore k=8$

14. 정답 ④

$f'(x)=x^2-1$ 로부터 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+C$

그런데 $f(0)=0$ 이므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$

$\frac{1}{3}x^3-x=0 \iff x=-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$

$f(x)$ 가 기함수이므로 구하고자 하는 넓이는

$$2\times\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)\right\}dx=2\times\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\times\left\{\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)-(0-0)\right\}$$
$$= \frac{3}{2}$$

15. 정답 ④

$\mathrm{P}(A\cap B) = k$ (k는 상수)라 놓으면

$\mathrm{P}(A\cap B^C) = \mathrm{P}(A^C\cap B) = \frac{1}{6}$ 이므로

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}+k$

$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{1}{6}+k$

그런데 $\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B) = \frac{2}{3}$ 이므로

$\left(\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}+k\right)-k = \frac{2}{3}$

$\therefore\ k = \frac{1}{3}$

16. 정답 ②

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-1)$ 과 $y = 3x(x-1)$ 의 교점 A_n, P_n 의 좌표는

$(1,\ 0)$, $\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

따라서 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$= 2-\frac{4}{9} = \frac{14}{9}$$

17. 정답 ①

(ⅰ) $d=0$일 때,
(가)조건으로부터 $a+b+c=10$
(나)조건의 $a+b+c\le 5$ 에 모순
(ⅱ) $d=1$ 일 때,
(가)조건으로부터 $a+b+c=7$
(나)조건의 $a+b+c\le 5$ 에 모순
(ⅲ) $d=2$ 일 때,
(가)조건으로부터 $a+b+c=4$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_4 = 15$
(ⅳ) $d=3$ 일 때,
(가)조건으로부터 $a+b+c=1$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_1 = 3$
따라서 구하고자 하는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 의 개수는 $15+3=18$

18. 정답 ①

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ 라 하면 $b_{n+1} = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}$ 으로부터

$b_{n+1} = \frac{S_n}{n} \Leftrightarrow nb_{n+1} = S_n\ \cdots$ ㉠

마찬가지 논리로

$b_{n+2} = \frac{S_{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)b_{n+2} = S_{n+1}\ \cdots$ ㉡

이므로 ㉡−㉠ 으로부터

$(n+1)b_{n+2}-nb_{n+1} = S_{n+1}-S_n$

$(n+1)b_{n+2}-nb_{n+1} = b_{n+1}$

$(n+1)b_{n+2} = (n+1)b_{n+1}$

$\therefore\ b_{n+2} = b_{n+1}\ \ (\because\ n\ge 1)$

또한 ㉡÷㉠ 으로부터 $\frac{(n+1)b_{n+2}}{nb_{n+1}} = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 이므로

$S_{n+1} = \boxed{\frac{n+1}{n}}\times S_n$

$S_n = S_1\times\frac{S_2}{S_1}\times\frac{S_3}{S_2}\times\cdots\times\frac{S_n}{S_{n-1}}$

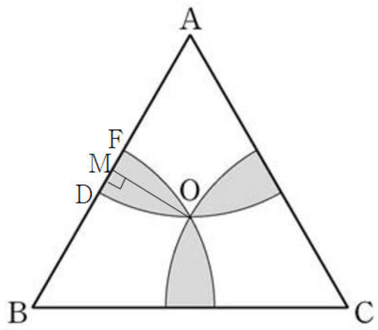
$= 10\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$

$= \boxed{10n}$

$f(n) = \frac{n+1}{n}$, $g(n) = 10n$ 이므로

$f(5)\times g(6) = \frac{6}{5}\times 60 = 72$

19. 정답 ③



O가 정삼각형의 외심이므로 무게중심과 일치한다.
$\overline{DF}$의 중점을 M이라 하자.
$S_1 = 6\times$(부채꼴$AOD-$삼각형AOM)
부채꼴$AOD-$삼각형$AOM = a$ 라 하면
$\overline{AO} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AM} = 3$

$a = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{3}$

$= \pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore S_1 = 6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})$

$\overline{AF} = 6-\overline{BF} = 6-2\sqrt{3}$ 이므로
한 변의 길이가 6인 정삼각형ABC가
삼각형 AFI 로 축소되므로

길이의 비는 $\frac{6-2\sqrt{3}}{6}$

넓이의 비는 $(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2$

개수는 3배로 증가하므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{6(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3})}{1-3(\frac{6-2\sqrt{3}}{6})^2} = (2\pi-3\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3)$$

20. 정답 ④

$(x^4-4x^3+10x-30)-(2x+2)>0$

$x^4-4x^3+8x-32>0$

$(x^3+8)(x-4)>0$ 로부터

$$f(t) = \begin{cases} t^4-4t^3+8t-32 & (t<-2,\ t>4) \\ -t^4+4t^3-8t+32 & (-2\le t\le 4)\end{cases}$$

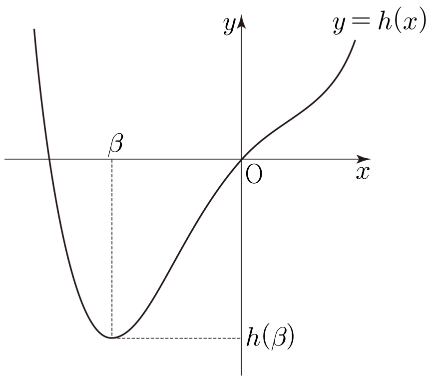
$x=t$ 인 지점에서의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 서로 달라야 하므로
$y=f(t)$ 의 개형이 바뀌는 $t=-2$, 4와 $f'(t)=0$ 을 만족하는
$t=-2$, $1-\sqrt{3}$ 1, $1+\sqrt{3}$, 4이 주어진 조건을 만족한다.
따라서 구하고자 하는 답은
$-2+(1-\sqrt{3})+1+(1+\sqrt{3})+4 = 5$

21. 정답 ④

ㄱ. $h'(x) = f'(x)+2$
$h'(\alpha) = f'(\alpha)+2>0$ (참)
ㄴ. 구간 $(0,\ \alpha)$에서 $-2<f'(x)<0$
$0<h'(x)<2$ 이므로 함수 $h(x)$는 증가한다. (거짓)
ㄷ. $h(0) = f(0)+2\times 0 = 0$
$h'(x) = f'(x)+2 = 0$ 을 만족시키는 x의 값을 β라 하자.
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	0	↗

함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



방정식 $h(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

22. 정답 12

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면 $3a_5 = a_7$ 으로부터
$3 \times (4r^4) = 4r^6$
$\therefore\ r^2 = 3$
$a_3 = a_1 \times r^2$ 이므로 $a_3 = 12$

23. 정답 110

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn\right) = \frac{1}{5}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+4n}-bn \times \frac{\sqrt{an^2+4n}+bn}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right) = \frac{1}{5}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a-b^2)n^2+4n}{\sqrt{an^2+4n}+bn}\right) = \frac{1}{5}$$
위 식의 극한값이 존재하므로 $a-b^2 = 0$, $\dfrac{4}{\sqrt{a}+b} = \dfrac{1}{5}$
따라서 $a = 100$, $b = 10$
$\therefore\ a+b = 110$

24. 정답 4

$f(x) = \displaystyle\int_0^x (2at+1)\,dt$ 의 양변을 미분하면
$f'(x) = 2ax+1$
$f'(2) = 17$ 이므로 $4a+1 = 17$
$\therefore\ a = 4$

25. 정답 7

함수 $f(x) = a|x+2|-4x$ 는
(i) $x < -2$ 일 때,
$f(x) = a(-x-2)-4x$
$= -(a+4)x-2a$
(ii) $x \geq -2$ 일 때,
$f(x) = a(x+2)-4x$
$= (a-4)x+2a$
$$f(x) = \begin{cases} -(a+4)x-2a & (x < -2) \\ (a-4)x+2a & (x \geq -2) \end{cases}$$
함수 f가 일대일대응이므로
두 직선 $y = -(a+4)x-2a$ 와 $y = (a-4)x+2a$ 의
기울기의 부호가 서로 같다.
$-(a+4)(a-4) > 0$, $(a+4)(a-4) < 0$
$\therefore\ -4 < a < 4$
$-4 < a < 4$ 를 만족시키는 정수 a는
$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$
따라서 정수 a의 개수는 7

26. 정답 13

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x} = 2$ 로부터
$f(x)-x^3 = 6x+a$
$f(x) = x^3+6x+a$ (a는 상수)라 놓을 수 있다.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -7$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^3+6x+a) = -7$
$a = -7$
$\therefore\ f(x) = x^3+6x-7$
$\therefore\ f(2) = 13$

27. 정답 35

$\mathrm{P}(X \leq 1)+\mathrm{P}(X \leq 7) = 1$
$\mathrm{P}(X \leq 2)+\mathrm{P}(X \leq 6) = 1$
$\mathrm{P}(X \leq 3)+\mathrm{P}(X \leq 5) = 1$
$\mathrm{P}(X \leq 4) = \dfrac{1}{2}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{7}\mathrm{P}(X \leq n) = 1+1+1+\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$
$\therefore\ 10a = 35$

28. 정답 72

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12% 이므로
$(60-a)+b = 300 \times 0.12$
$a-b = 24$ ⋯ ㉠
도서관 이용자 300명 중에서 임의로 택한 1명이 남성일 때
이 이용자가 20대일 확률과 임의로 택한 1명이 여성일 때
이 이용자가 30대일 확률이 서로 같으므로
$\dfrac{a}{200} = \dfrac{b}{100}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡ 으로부터 $a = 48$, $b = 24$
$\therefore\ a+b = 72$

29. 정답 84

두 열차 A, B가 지점 P 를 통과할 때의 속력을
각각 v_A, v_B 라 하면 $v_A = 0.9v_B$ 이다.
가까운 선로 중앙 지점 P 까지의 거리가 $75m$ 인 한 지점에서
L_A, L_B 를 구하면
$$L_A = 80+28\log\frac{v_A}{100} - 14\log\frac{75}{25} \quad \cdots ①$$
$$L_B = 80+28\log\frac{v_B}{100} - 14\log\frac{75}{25} \quad \cdots ②$$
② − ① 을 하면
$$L_B - L_A = 28\log\frac{v_B}{v_A} = 28\log\frac{v_B}{0.9v_B} = 28(1-2\log 3) = 28-56\log 3$$
따라서 $a = 28$, $b = -56$ 이고 $a-b = 84$ 이다.

30. 정답 65

$\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 할 때,
$f(m) \leq f(x)$, $g(m+5f(m)) \leq g(x)$ 을 만족시키는
자연수 m의 개수를 $p(x)$ 라 하면
$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} p(2k) = p(2)+p(4)+\cdots+p(20)$ 으로부터
$f(m)$ 은 $\log 20$ 의 지표보다 작거나 같아야 하므로 0 또는 1이 됨을 알 수 있다.
(i) $f(m) = 0$ 일 때,
$0 \leq f(x)$, $g(m) \leq g(x)$ 을 만족하는 한 자리 자연수 m 은
$x = 2$ 일 때, $m = 1, 2$
$x = 4$ 일 때, $m = 1, 2, 3, 4$
$x = 6$ 일 때, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
$x = 8$ 일 때, $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
$x = 10$ 일 때, $m = 1$
$x = 12$ 일 때, $m = 1$
$x = 14$ 일 때, $m = 1$
$x = 16$ 일 때, $m = 1$
$x = 18$ 일 때, $m = 1$
$x = 20$ 일 때, $m = 1, 2$
(ii) $f(m) = 1$ 일 때,
$1 \leq f(x)$, $g(m+5) \leq g(x)$ 을 만족하는 두 자리 자연수 m 은
$x = 10$ 일 때, $m = 95$
$x = 12$ 일 때, $m = 95, 96, 97, 98, 99$
$x = 14$ 일 때, $m = 95, 96, 97, 98, 99$
$x = 16$ 일 때, $m = 10, 11, 95, 96, 97, 98, 99$
$x = 18$ 일 때, $m = 10, 11, 12, 13, 95, 96, 97, 98, 99$
$x = 20$ 일 때, $m = 10, 11, 12, 13, 14, 15, 95, 96, 97, 98, 99$
(i), (ii)로부터
$$\sum_{k=1}^{10} p(2k) = 2+4+6+8+1+1+1+1+1+2+1 \quad +5+5+7+9+11$$
$$= 65$$

2회 정답 및 해설

1	③	2	①	3	⑤	4	⑤	5	①
6	①	7	②	8	④	9	②	10	③
11	④	12	④	13	③	14	⑤	15	④
16	③	17	④	18	①	19	③	20	②
21	②	22	8	23	137	24	18	25	8
26	52	27	17	28	43	29	44	30	300

1. 정답 ③

$\sqrt{2}\times 8^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 4$

2. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+1}{3^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 0$$

3. 정답 ⑤

유리함수 $f(x)=\frac{1}{x+2}+a$ 의 그래프의 점근선의

방정식은 $x=-2$, $y=3$ 이므로

$a=3$, $b=-2$

$\therefore\ a-b=5$

4. 정답 ⑤

등비수열의 성질을 이해하고 일반항을 구한다.

$a_2=2$, $a_3=4$ 이므로 공비는 2

$\therefore\ a_5=16$

5. 정답 ①

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\frac{1}{3}=\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ 에서 $\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$

6. 정답 ①

$f'(x)=2x+a$ 이므로 $f'(1)=2+a$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{2}f'(1) = \frac{1}{2}(2+a)$$

따라서 $\frac{1}{2}(2+a)=6$ 에서 $a=10$

7. 정답 ②

$\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0.25\times 0.75}{300}=0.025^2$ 에서 표본비율 $\hat{p}$는 정규분포

$\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$ 를 따른다. $\frac{\alpha}{100}=\beta$라 하면

$$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{\alpha}{100}\right)=\mathrm{P}(\hat{p}\ge\beta)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\beta-0.25}{0.025}\right)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

$\therefore\ \alpha=100\beta=30$

8. 정답 ④

$x^3-2x^2+k=k$ 에서 $x^3-2x^2=0$, $x=0$ 또는 2

$$\int_0^2 |\,x^3-2x^2+k-k\,|\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

9. 정답 ②

임의로 추출된 야구공 9 개 무게의 평균을 $\overline{X}$ 라 하면,

$\overline{X}$ 는 정규분포 $\mathrm{N}(144.9,\ 2^2)$ 을 따른다.

$$\mathrm{P}(141.7\le\overline{X}\le 148.9)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{141.7-144.9}{2}\le Z\le\frac{148.9-144.9}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.9224$$

10. 정답 ③

함수 $f(t)=\begin{cases}2 & (|t|>1)\\ 1 & (|t|=1)\\ 0 & (|t|<1)\end{cases}$ 이고 함수 $(x+k)f(x)$ 가

구간 $(0,\ \infty)$ 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이다.

$(1+k)f(1)=\lim_{x\to 1-0}(x+k)f(x) = \lim_{x\to 1+0}(x+k)f(x)$

$1+k=(1+k)\times 0=(1+k)\times 2$

따라서 $k=-1$ 이므로 $f(1)+k=1-1=0$

11. 정답 ④

$a_m=1$ 이므로 $m=2^1\times q$ (q는 홀수)

$2m=2^2\times q$ 이므로 $a_{2m}=2$

⋮

$\therefore a_m+a_{2m}+a_{3m}+\cdots+a_{10m}$

$=1+2+1+3+1+2+1+4+1+2\ =18$

12. 정답 ④

30 분 후 농도가 2 ng/mL 이므로

$\log(10-2)=1-30k$, $k=\frac{1}{30}\log\left(\frac{5}{4}\right)$

60 분 후 농도가 a 이므로

$\log(10-a)=1-60k$

$\log(10-a)=1-2\log\left(\frac{5}{4}\right)=\log\left(\frac{32}{5}\right)$

따라서 $a=\frac{18}{5}=3.6$

13. 정답 ③

$n=1$일 때,

$f(x)=x^2$ 이고 P$(0,\ 3)$, Q$(1,\ 1)$ 이므로 구하고자 하는 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times 2\times 1+\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=1+\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=1+\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

14. 정답 ⑤

$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\sqrt{n}},\ 1\right)$ 이므로 $\overline{\mathrm{PR}}=2n$, $\overline{\mathrm{QR}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\times 2n=\sqrt{n}$

$l_n=\sqrt{4n^2+\frac{1}{n}}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{{S_n}^2}{l_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+\frac{1}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^3}}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

15. 정답 ④

출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기

드 모르간의 법칙에 의해 $A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$

$n(A\cup B)=n(U)-n(A^C\cap B^C)=50-5=45$

$n((A-B)\cup(B-A))=n(A\cup B)-n(A\cap B)$

$=45-12=33$

16. 정답 ③

$f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=3+a$, $f(4)=4+a$ 이고

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하므로 일대일대응이다.
그러므로 $a=-1$
역함수 $g(x)$는 $g(1)=1$, $g(2)=3$, $g(3)=4$, $g(4)=2$이므로
$g^3(x)=g^6(x)=g^9(x)=x$ 이다.
$\therefore\ g^{10}(x)=g(g^9(x))=g(x)$,
$g^{11}(x)=g(g^{10}(x))=g(g(x))=g^2(x)$
따라서 $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)=a+g(2)+g^2(2)$
$=-1+3+4=6$

17. 정답 ④

(1) $n=2$일 때, $(*)$에서

$$(\text{좌변})=a_1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}$$

$$(\text{우변})=2a_2=2\times\left(1+\frac{1}{4}\right)=\boxed{\frac{5}{2}}$$

(좌변)=(우변)이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$ $(m\geq 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}=ma_m$$

이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{i}$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}+\frac{1}{m+1}$$

$$=ma_m+a_m+\frac{1}{m+1}$$

$$=\boxed{(m+1)}\times a_m+\frac{1}{m+1}$$

$$=(m+1)\left\{a_{m+1}-\frac{1}{(m+1)^2}\right\}+\frac{1}{m+1}$$

$$=(m+1)a_{m+1}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(1), (2)에 의하여
$n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$\therefore\ p=\frac{5}{2}$, $f(m)=m+1$

따라서 $p\times f(3)=10$

18. 정답 ①

점 A_2를 지나고 선분 B_1C_1에 평행한 직선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1의 교점을 각각 P, Q라 하자.
두 삼각형 $A_1B_1C_1$, A_1PQ 의 닮음비는 $3:2$,
두 삼각형 A_1PQ, $A_2B_2C_2$ 의 닮음비는 $2:1$이므로
삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 닮음비는 $3:1$
그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi$$

$$\therefore\ \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$$

19. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to+0}f(x)=-2$,

$\lim_{x\to 0+}f(-x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to 0+}\{f(x)+f(-x)\}=-2+2=0$ (참)

ㄴ. $f(x)=t$라 하면 $x\to 1+$일 때 $t\to -1+$

$\therefore\ \lim_{x\to 1+}f(f(x))=\lim_{t\to -1+}f(t)=0$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+}\{f(x-1)\}^2=\lim_{x\to 0+}\{f(x)\}^2$

$=(-2)^2=4$

$\lim_{x\to 1-}\{f(x-1)\}^2=\lim_{x\to 0-}\{f(x)\}^2$

$=2^2=4$

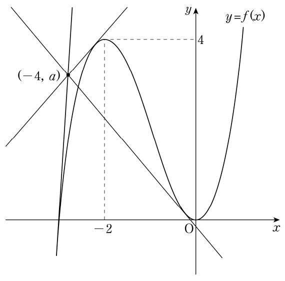
$\{f(1-1)\}^2=\{f(0)\}^2=2^2=4$

따라서 함수 $\{f(x-1)\}^2$은 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

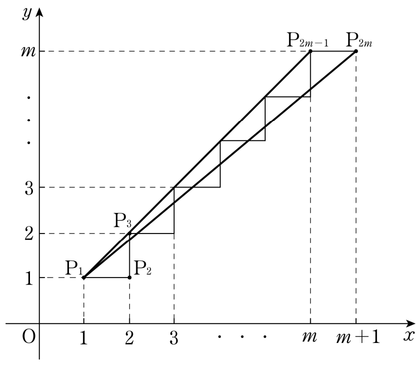
20. 정답 ②

세 개의 접선이 존재할 수 있는 점의 범위를 찾는 문제를 해결한다.



함수 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 4, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.
세 접선의 기울기의 곱이 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프에 접하는
세 접선의 기울기 중 한 접선의 기울기만 음수이다.
$0<a<4$이므로 정수 a의 최댓값 M은 3이다.
따라서 $M^2=9$

21. 정답 ②



$a_3=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_4=\sqrt{2^2+1^2}$, $a_5=\sqrt{2^2+2^2}$, $\cdots$,
$a_{2m-1}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$,
$a_{2m}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$

(i) $n=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m}-a_{2m-1})$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2-2m+1}-\sqrt{2(m-1)^2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii) $n=2m$ (m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m+1}-a_{2m})$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2}-\sqrt{2m^2-2m+1}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 (i), (ii)에 의해 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

22. 정답 8

A가 세 개의 공을 받으므로 남는 공의 수는 7이다.
7개의 공을 두 사람에게 나누어 주는 경우의 수이므로
${}_{2+7-1}C_7={}_8C_7=8$

23. 정답 137

$$a_3=\frac{a_2+a_4}{2}=27$$

$$a_{13}=\frac{a_{12}+a_{14}}{2}=127$$

공차를 d라 하면 $a_{13}=a_3+(11-1)d$ 에서
$d=10$
따라서 $a_{14}=a_{13}+d=137$

24. 정답 18

$E(3X)=3E(X)=18$에서 $E(X)=np=6$ ⋯ ㉠
$E(3X^2)=3E(X^2)=120$이므로 $E(X^2)=40$
$V(X)=np(1-p)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 에서
$6(1-p)=40-6^2=4$이므로 $p=\frac{1}{3}$
따라서 ㉠에 대입하면 $n=18$

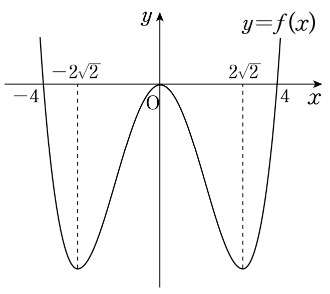
25. 정답 8

$X=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5\}$ 이므로
$n(X)=10$ 이 되기 위해서는
$(a+3<2,\ a+5\geq 2)$
또는 $(a+1\leq 9,\ a+3>9)$
$\therefore\ -3\leq a<-1$ 또는 $6<a\leq 8$
그러므로 자연수 a는 7, 8
따라서 자연수 a의 최댓값은 8

26. 정답 52

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 $x,\ y,\ z,\ w$
라 하면 $x+y+z+w=14$
$x,\ y,\ z,\ w$ 가 모두 홀수이므로
$x=2a+1,\ y=2b+1,\ z=2c+1,\ w=2d+1$
(단, $a,\ b,\ c,\ d$ 는 0 이상 4 이하의 정수)
$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$
$a+b+c+d=5$
$a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 5 개를 택한다.
이때 $a,\ b,\ c,\ d$ 는 4 이하의 정수이므로
한 가지만 5 번 택하는 4 가지 경우는 제외한다.
$${}_4H_5-4={}_{4+5-1}C_5-4={}_8C_5-4=\frac{8!}{5!3!}-4=52$$

27. 정답 17



$f'(x)=4x(x^2-8)$ 이므로
$f'(x)=0$ 에서 $x=-2\sqrt{2}$, 0 , $2\sqrt{2}$
(가)의 조건에 의해 $f(x)$ 는 구간 $(k,\ k+1)$ 에서 감소한다.
그래프에서 감소하는 구간은 $(-\infty,\ -2\sqrt{2})$, $(0,\ 2\sqrt{2})$ 이고,
k 는 정수이므로 $k=0$, 1 또는 -4 , -5 , ⋯
(나)의 조건에 의해 $f'(k+2)>0$ 이므로
$k=1$ 또는 -4
따라서 $1^2+(-4)^2=17$

28. 정답 43

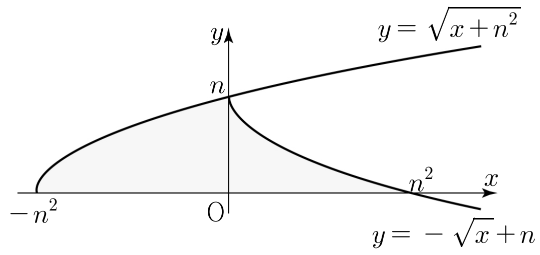
$a=6$ 이고 $0\leq b\leq 6$ 이므로 $a+b$ 가 3 의 배수가 되는 경우는
$b=0$, 3 , 6
$${}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$=\frac{1}{64}+\frac{20}{64}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$$
$\therefore\ p+q=43$

29. 정답 44

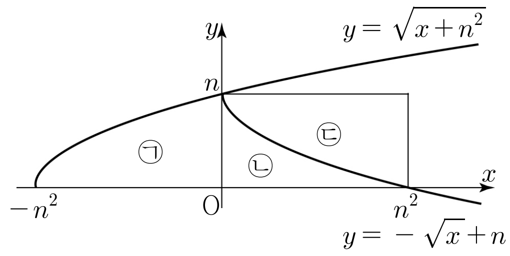
상용로그의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족하는 문제를 해결한다.
$(n+1)\log a=3n^2-4n+4$ 이므로
$$\log a=3n-7+\frac{11}{n+1}\quad\cdots ㉠$$
(가)에서 $2n\log a-\log a=(2n-1)\log a=$(정수) 이므로
㉠의 양변에 $(2n-1)$ 을 곱하면
$$(2n-1)\log a=(2n-1)(3n-7)+\frac{11(2n-1)}{n+1}$$
$$=(2n-1)(3n-7)+22-\frac{33}{n+1}$$
$\frac{33}{n+1}$ 이 정수이고 n 은 자연수이므로 $n+1$ 은 3 , 11 , 33
따라서 n 의 값의 합은 $2+10+32=44$

30. 정답 300

함수 $y=\sqrt{x+n^2}$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 $-n^2$만큼 평행이동한 것이고,
함수 $y=-\sqrt{x}+n$ 의 그래프는 함수 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를
y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이므로
두 함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계는
<그림1>과 같다.



<그림1>



<그림2>

이 때, 함수 $y=-\sqrt{x}+n$ 의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x+n^2}$ 의 그래프를
x축에 대하여 대칭이동한 후
x축의 방향으로 n^2만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 것이므로 <그림2>와 같이
함수 $y=\sqrt{x+n^2}$ 의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 영역 ㉠의
x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는
함수 $y=-\sqrt{x}+n$ 의 그래프와 두 직선 $x=n^2$, $y=n$ 으로 둘러싸인 영역
㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.
그러므로 영역 ㉠과 영역 ㉡의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는
영역 ㉡과 영역 ㉢의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수와 같다.
x축 위의 정수인 점은 0, 1, ⋯, n^2 이므로 (n^2+1)개
y축 위의 정수인 점은 0, 1, ⋯, n 이므로 $(n+1)$개
$\therefore\ a_n=(n^2+1)(n+1)=n^3+n^2+n+1$
$$\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}(n^3+n^2+n+1)$$
$$=\left(\frac{5\times 6}{2}\right)^2+\left(\frac{5\times 6\times 11}{6}\right)+\left(\frac{5\times 6}{2}\right)+5$$
$$=300$$
[다른 풀이]
<그림1>에서 y의 값에 대한 점의 개수는 아래의 표와 같다.

n	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$	$y=5$	합
1	3	1					4
2	9	5	1				15
3	19	13	7	1			40
4	33	25	17	9	1		85
5	51	41	31	21	11	1	156

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=4+15+40+85+156=300$$

3회 정답 및 해설

1	③	**2**	②	**3**	④	**4**	⑤	**5**	②
6	③	**7**	①	**8**	④	**9**	④	**10**	⑤
11	⑤	**12**	②	**13**	①	**14**	⑤	**15**	②
16	①	**17**	②	**18**	③	**19**	④	**20**	③
21	①	**22**	14	**23**	9	**24**	490	**25**	6
26	24	**27**	169	**28**	165	**29**	27	**30**	45

1. 정답 ③

$\log_2 24-\log_2 3=\log_2 8=3$

2. 정답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x+11)}{x}=11$$

3. 정답 ④

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{2}{3}$

4. 정답 ⑤

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=4$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=20$

5. 정답 ②

$a_n=S_n-S_{n-1}=(n+2^n)-\{(n-1)+2^{n-1}\}$

$=2^{n-1}+1\ (n\geq 2)$

따라서 $a_6=33$

6. 정답 ③

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 의
순서쌍 $(|a|,\ |b|,\ |c|)$ 의 개수는 5 이하의 자연수 중에서
중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
이때 a, b, c 는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로
순서쌍 $(a,\ b,\ c)$ 의 개수는 $(|a|,\ |b|,\ |c|)$ 의 개수의 2^3 배와 같다.
따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_5\mathrm{H}_3\times 2^3={}_{5+3-1}\mathrm{C}_3\times 8$$
$$={}_7\mathrm{C}_3\times 8$$
$$=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\times 8$$
$$=280$$

7. 정답 ①

6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수와 같다.
(6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)
=(5명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)×2+(5명을 한 팀으로 나누는 경우의 수)
(5명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)
=(4명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)×2+(4명을 한 팀으로 나누는 경우의 수)
$=7\times 2+1=15$
이므로 $15\times 2+1=31$ 이다.
<다른풀이>

$${}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3\times\frac{1}{2!}=6+15+10=31$$

8. 정답 ④

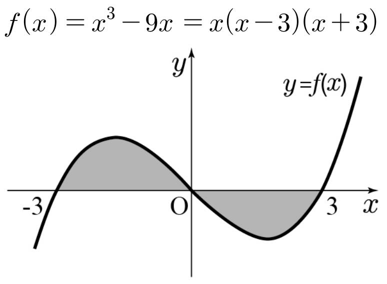
$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 2+}f(x)=0+1=1$

9. 정답 ④

다항식 $(1+3x)^5$ 의 전개식의 일반항은
${}_5\mathrm{C}_r\,1^{5-r}\,(3x)^r\ (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
따라서 $r=3$ 일 때 x^3 의 계수는 270

10. 정답 ⑤

$f(x)=x^3-9x=x(x-3)(x+3)$



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-3}^{3}|f(x)|\,dx=2\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2\right]_{-3}^{0}=\frac{81}{2}$$

11. 정답 ⑤

$$\int_0^1 f(x)dx=k\int_0^1(x-x^4)dx$$
$$=k\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{10}k$$
$$=1$$

에서 $k=\dfrac{10}{3}$

$\therefore\ 24k=24\times\dfrac{10}{3}=80$

12. 정답 ②

$f(x)=x^3+3x^2-9x+4-k$ 라 하면
$f'(x)=3(x+3)(x-1)$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$31-k$	↘	$-1-k$	↗

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면
$f(-3)f(1)<0$ 이므로
$(31-k)(-1-k)<0$
$-1<k<31$
따라서 모든 정수 k의 개수는 31

13. 정답 ①

두 점 A, B의 x좌표는 각각 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$
세 수 $-\sqrt{k}$, $\sqrt{k}$, 3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\sqrt{k}=-\sqrt{k}+3$, $\sqrt{k}=1$
따라서 $k=1$

14. 정답 ⑤

$f'(x)=2x$ 이고 $f'(1)=2$ 이므로 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ 에서의 접선 l의 방정식은
$y=2x-1$
접점 Q 의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b=2a-1$
직선 l에 곡선 $y=g(x)$ 가 접하므로
$g'(x)=-2x+6$
$g'(a)=-2a+6=2$
$a=2$, $b=3$ 이므로 점 $\mathrm{Q}(2,\ 3)$
$g(2)=3$ 이므로 $k=4$
원점으로부터 가까운 점을 R 라 하면
$\mathrm{R}(1,\ 0)$, $\mathrm{S}(5,\ 0)$
따라서 삼각형 QRS 의 넓이는 6

15. 정답 ②

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{xy}$ …… ①

$x>0$, $y>0$ 이므로 절대부등식의 성질에 의하여

$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ …… ②

(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)
그러므로 $(x+y)^2\geq 4xy$ 이고 정리하면

$\dfrac{1}{xy}\geq\dfrac{4}{(x+y)^2}$ …… ③

①, ②, ③에 의하여

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{xy}\geq\frac{12}{(x+y)^2}=\frac{4}{3}$$

따라서 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 의 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$

(별해)
$x>0$, $y>0$ 이므로 절대부등식의 성질에 의하여

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$
$$\geq\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}\right)=\frac{4}{3}$$

(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 $\dfrac{4}{3}$

16. 정답 ①

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3+4x$

$xf'(x)=12x^3-4x$
$f'(x)=12x^2-4$
$f(x)=4x^3-4x+C$ (C는 적분상수)
$x=1$일 때, $\int_1^1 f(t)dt=1\cdot f(1)-3+2=0$
$f(1)=1$이므로 $C=1$
따라서 $f(0)=1$

17. 정답 ②

$\log C_A=3-\log V_0+\log W_0$ ⋯ ㉠

$\log C_B=3-\log\frac{1}{9}V_0+\log\frac{1}{27}W_0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $\log\frac{C_A}{C_B}=\log\frac{1}{9}-\log\frac{1}{27}=\log 3$

따라서 $\frac{C_A}{C_B}=k$ 이므로 $k=3$

18. 정답 ③

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가
2 이하일 사건을 A라 하면 $P(A)=\frac{1}{3}$
3 이상일 사건을 B라 하면 $P(B)=\frac{2}{3}$
3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 경우는 다음과 같다.
(i) ABA 또는 ABB인 경우의 확률
$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$
(ii) AAB인 경우의 확률
$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$
(iii) BAA 또는 BAB인 경우의 확률
$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{9}=\frac{14}{27}$

19. 정답 ④

$\hat{p}=0.2$이므로 $2\times 2\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=2\times 2\times\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{400}}=0.08$

20. 정답 ③

(i) $n=2$일 때,
(좌변)$=2+a_1=3$,
(우변)$=2a_2=2\left(1+\boxed{\frac{1}{2}}\right)=3$
이므로 (★)이 성립한다.
(ii) $n=m$ $(m\geq 2)$일 때
(★)이 성립한다고 가정하면
$m+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}=ma_m$ 이므로
$(m+1)+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+a_m$
$=ma_m+\boxed{a_m+1}$
$=(m+1)\left(a_{m+1}-\boxed{\frac{1}{m+1}}\right)+1$
$=(m+1)a_{m+1}$
이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.
그러므로 (i), (ii)에 의하여
$n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여
$n+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=na_n$ 이 성립한다.
$p=\frac{1}{2}$, $f(m)=a_m+1$, $g(m)=\frac{1}{m+1}$
따라서 $\frac{p\times f(3)}{g(11)}=17$

21. 정답 ①

마름모의 성질에 의하여 마름모 ADEF 의
두 대각선이 만나는 점과 원의 중심이 일치하므로
$\overline{OE}=\frac{1}{2}\overline{AE}=2\sqrt{3}$

$\angle EOP=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{OP}=\sqrt{3}$, $\overline{PE}=3$
사각형 OPEQ 의 넓이 $S_1=3\sqrt{3}$
그림 R_n에서 새로 그려진 정삼각형의 한 변의
길이를 a_n이라 하면
$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

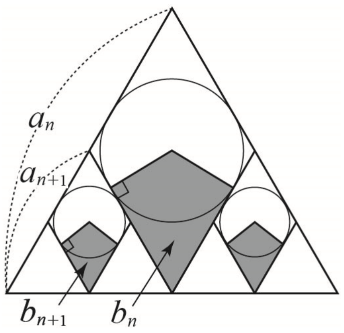


그림 R_n에 색칠한 한 개의 사각형의 넓이를 b_n이라 하면
$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n$
그림 R_{n+1}에서 새로 그려진 사각형의 개수는 그림 R_n에서 새로 그려진 사각형의 개수의 2배이다.
그러므로 S_n은 첫째항이 $3\sqrt{3}$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$인
등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이다.
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{3}$

22. 정답 14

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{84}{(2n+1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}84\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}42\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=14$$

23. 정답 9

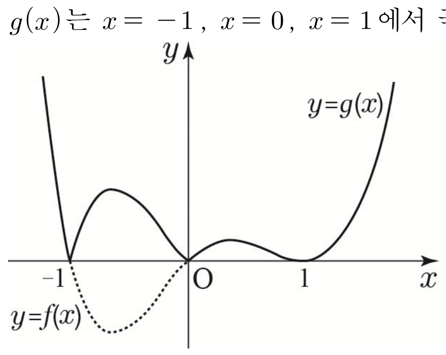
$p_1={}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$
$p_2={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$
따라서 $\frac{1}{p_1p_2}=9$

24. 정답 490

조건 (가)에서 $5\leq\log k<6$ 이므로
$10^5\leq k<10^6$ ⋯ ㉠
조건 (나)에서 $\log\frac{\sqrt{k}}{7}$ 의 가수가 0이므로
$\log\frac{\sqrt{k}}{7}=n$ (단, n은 정수)
$\frac{\sqrt{k}}{7}=10^n$ 이므로 $k=49\times 10^{2n}$
$\therefore\ 10^5\leq 49\times 10^{2n}<10^6$ ($\because$ ㉠)
이를 만족하는 $n=2$이므로 $k=49\times 10^4=490000$
$\therefore\ \frac{k}{1000}=490$

25. 정답 6

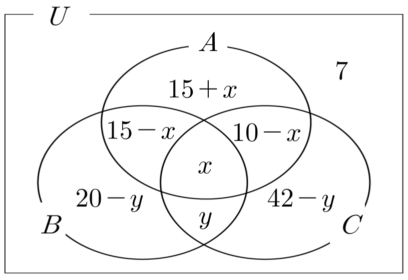
$g(1)=g'(1)$이고 $x=1$에서 극솟값을 가지므로
$g(1)=g'(1)=0$ ⋯ ㉠
㉠에 의하여 $f(1)=f'(1)=0$
$g(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서 극솟값을 가지므로



$f(x)=(x-1)^2x(x+1)$
$g(x)=|(x-1)^2x(x+1)|$
따라서 $g(2)=6$

26. 정답 24

전체집합을 U, $n(A\cap B\cap C)=x$,
$n((B\cap C)-A)=y$ 라 하고 벤다이어그램에
각각의 영역에 해당하는 원소의 개수를 표시하면



$n(A\cup B\cup C)=102-y=93$ 이므로 $y=9$
x의 범위는 $0\le x\le 10$
두 문제 이상 맞힌 학생 수는 $34-x$ 이므로
최솟값은 $x=10$ 일 때 24명

27. 정답 169

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{1}{2n-1}+1-\frac{1}{2n+1}$$
$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+1$$

P_n과 Q_n의 x좌표의 차는
$(2n+1-(2n-1))=2$

$$S_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+1\right)\times 2$$
$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+1$$
$$\sum_{n=1}^{8}S_n=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}+1\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+8$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+8$$
$$=\left(1-\frac{1}{17}\right)+8=\frac{152}{17}$$

$\therefore p+q=17+152=169$

28. 정답 165

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{n+1}-a_n=3n+3$ 이므로

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+3)=\frac{3n(n+1)}{2}\quad(n\ge 2)$$

따라서 $a_{10}=165$

29. 정답 27

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (단, a,b,c는 상수)라 하면
조건 (가)에 의하여 $c=0$
$f'(x)=3x^2+2ax+b$ 에서 조건 (나)에 의하여
$a=-6$
$f'(x)=3x^2-12x+b=3(x-2)^2+b-12$
조건 (다)에 의하여 $b\ge 9$ 이고

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x^3-6x^2+bx)\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_0^3$$
$$=-\frac{135}{4}+\frac{9b}{2}\ge\frac{27}{4}\quad(\because\ b\ge 9)$$

$b=9$ 일 때, 최솟값 $m=\dfrac{27}{4}$
따라서 $4m=27$

30. 정답 45

<B 형>과 <C 형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는
●○●○● 또는 ○●○●○
(ⅰ) ●○●○●인 경우
1번의 <D 형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A 형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로
$_2\mathrm{C}_1\times{}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_2\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_4=30$
(ⅱ) ○●○●○인 경우
같은 방법으로
$_3\mathrm{C}_1\times{}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_4=15$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 경우의 수는 45

4회 정답 및 해설

1	③	2	④	3	④	4	⑤	5	⑤
6	⑤	7	①	8	①	9	①	10	③
11	②	12	①	13	③	14	②	15	③
16	⑤	17	⑤	18	②	19	①	20	③
21	②	22	45	23	72	24	132	25	11
26	13	27	14	28	50	29	315	30	3

1. 정답 ③

$$(3^2)^{\frac{1}{2}}+(3^{-2})^{\frac{1}{2}}=3^{2\times\frac{1}{2}}+3^{-2\times\frac{1}{2}}=3+3^{-1}$$
$$=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

2. 정답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1}$$
$$=4$$

3. 정답 ④

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$$

4. 정답 ⑤

$$\lim_{h\to 0}\{f(1+h)-3\}=\lim_{h\to 0}h\left\{\frac{f(1+h)-3}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}h\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}=0$$

$\lim_{h\to 0}\{f(1+h)-3\}=\lim_{h\to 0}f(1+h)-3=0$ 이므로
$\lim_{h\to 0}f(1+h)=3$
$f(x)$가 연속이므로
$f(1)=\lim_{h\to 0}f(1+h)=3$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=\frac{3}{2}$$

따라서 $f'(1)+f(1)=\dfrac{3}{2}+3=\dfrac{9}{2}$

5. 정답 ⑤

$\mathrm{E}(6X)=6\mathrm{E}(X)=13$ 이므로 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{13}{6}$
주어진 표를 이용하여 $\mathrm{E}(X)$를 구하면
$1\times\dfrac{1}{6}+2a+3b=\dfrac{13}{6}$
따라서 $2a+3b=2$

6. 정답 ⑤

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$, $d=3$ 인 등차수열이므로
$a_n=3n-1$, $a_{n+1}=3n+2$
첫째항부터 제n항까지 합 S_n은

$S_n=\dfrac{n(2+3n-1)}{2}=\dfrac{3n^2+n}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_na_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^2+n}{2}}{(3n-1)(3n+2)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{18+\frac{6}{n}-\frac{4}{n^2}}$

$=\dfrac{1}{6}$

7. 정답 ①

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$ 이므로 $f(x)=x^2+2x+c$

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+\dfrac{2}{x}+c$

$\displaystyle\lim_{x\to0+}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0+}(1+2x+cx^2)=1$

[다른 풀이]

$\dfrac{1}{x}=t$ 라 하면 $x\to0+$ 일 때, $t\to\infty$ 이므로

$\displaystyle\lim_{x\to0+}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t+c}{t^2}$

$=1$

8. 정답 ①

확률변수 X는 정규분포 $N(16,0.3^2)$ 을 따른다.

$P(X\le15.25)=P\left(\dfrac{X-16}{0.3}\le\dfrac{15.25-16}{0.3}\right)$

$=P(Z\le-2.5)$

$=P(Z\ge2.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le2.5)$

$=0.5-0.49=0.01$

9. 정답 ①

① $A*U=(A\cap U)\cup(A\cup U)^c=A\cup\phi=A$

② $B*A=(B\cap A)\cup(B\cup A)^c$ 이므로$A*B=B*A$

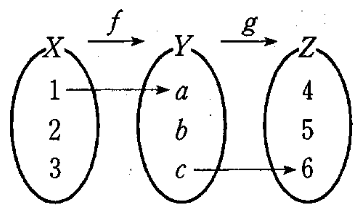
③ $A*\phi=(A\cap\phi)\cup(A\cup\phi)^c=\phi\cup A^c=A^c$

④ $A^c*B^c=(A^c\cap B^c)\cup(A^c\cup B^c)^c$

$=(A\cup B)^c\cup(A\cap B)=A*B$

⑤ $A*A^c=(A\cap A^c)\cup(A\cup A^c)^c=\phi\cup U^c=\phi$

10. 정답 ③



$f(1)=a$ 이므로 $f(3)=b$ 이거나 c

$f(3)=b$ 이면 $f(2)=c$ ($\because$ f 가 일대일 대응)

이 때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(c)=6$ (모순)

따라서 $f(3)=c$

11. 정답 ②

$T_0=60$, $T_s=20$ 이므로

$t=a$, $T=40$ 일 때

$40=20+(60-20)K^{-a}$ …㉠

$t=a+20$, $T=25$ 일 때

$25=20+(60-20)K^{-a-20}$ …㉡

㉠, ㉡에 의해서 $K^{-a}=\dfrac{1}{2}$ …㉢, $K^{-a-20}=\dfrac{1}{8}$ …㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $K^{-20}=\dfrac{1}{4}$

$K=2^{\frac{1}{10}}$ 을 ㉢에 대입하면 $2^{-\frac{a}{10}}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

따라서 $a=10$

[다른 풀이]

$K^{-a}=\dfrac{1}{2}$, $K^{-20}=\dfrac{1}{4}$ 이므로 $K^{-20}=\left(K^{-a}\right)^2=K^{-2a}$

따라서 $a=10$

12. 정답 ①

주어진 식에 의하여

$a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{2a_n-1}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2a_n-1}{a_n-1}=\dfrac{1+2(a_n-1)}{a_n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}+\boxed{2}$

이다. $b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ 이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\boxed{2}$

수열 $\{b_n\}$ 은 $b_1=1$ 이고, 공차가 2 인 등차수열이다.

$b_n=\boxed{2n-1}$ $(n\ge1)$

이다. 따라서 $a_n=\dfrac{1}{\boxed{2n-1}}+1$ $(n\ge1)$이다.

따라서 $k=2$, $f(n)=2n-1$ 이므로 $f(k)=f(2)=3$

13. 정답 ③

$P_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{a}{4}\right)$ 를 지나는 직선은 $y=-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}$

직선 $y=-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}$ 와 곡선 $y=ax^2$ 을 연립하면

$ax^2=-\dfrac{a}{2}x+\dfrac{a}{2}$

$2x^2+x-1=0$

$x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=-1$

P_2 는 $(-1,a)$, $x_2=-1$

같은 방법으로 P_3 을 구하면 P_3 은 $(2,4a)$, $x_3=2$

⋮

$x_n=\dfrac{1}{2}(-2)^{n-1}$

따라서 $x_{10}=-256$

14. 정답 ②

점 $P_1\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$ 은 곡선 $y=ax^2$ 위의 점이므로 $a=\dfrac{1}{3}$

직선 P_1P_2 의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{3}\times1\times x+2\times\dfrac{1}{3}\times1^2$, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

점 P_2의 x좌표는 직선 P_1P_2 와 곡선 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 의

교점이므로 $\dfrac{1}{3}x^2=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

$x^2+x-2=0$

$x=-2$ 또는 $x=1$

점 P_2의 x좌표는 -2

구하는 부분의 넓이는

$\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^3\right]_{-2}^{0}$

$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}-\dfrac{8}{9}=\dfrac{10}{9}$

15. 정답 ③

$g(x)=ax+b$ ($a\ne0$)라 하고 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 하자.

$g(0)=\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=2$ 이므로 $b=2$

$h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1+}h(x)=h(1)$ 이다.

$\displaystyle\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}f(x)(ax+2)=2(a+2)$,

$\displaystyle\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}f(x)(ax+2)=0$,

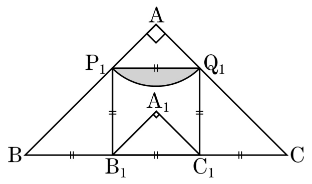
$h(1)=f(1)(a+2)=a+2$ 이므로 $a+2=0$

따라서 $a=-2$ 이고 $g(x)=-2x+2$ 이므로 $g(-1)=4$ 이다.

16. 정답 ⑤

$\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

17. 정답 ⑤

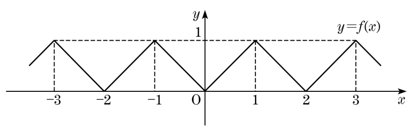


두 삼각형 P_1BB_1, Q_1CC_1 은 직각이등변삼각형이고
사각형 $P_1B_1C_1Q_1$ 은 정사각형이므로
$\overline{BB_1}=\overline{P_1B_1}=\overline{B_1C_1}=\overline{C_1C}$, $\overline{BC}:\overline{B_1C_1}=3:1$
그러므로 의 넓이의 비는 $9:1$
그런데 삼각형 AP_1Q_1 은 선분 P_1Q_1 이 빗변인
직각이등변삼각형이므로 $\overline{AP_1}=\overline{AB}-\overline{BP_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$
S_1 은 부채꼴 AP_1Q_1 의 넓이에서 삼각형 AP_1Q_1 의 넓이를 뺀 값이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{\pi-2}{18}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi-2}{18}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\pi-2}{16}$$

18. 정답 ②



주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$ 는 주기가 2 인
주기함수이므로

$$\begin{aligned}g(a+4)-g(4)&=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt-\int_{-2}^{a}f(t)dt\\&=\int_{-2}^{a+4}f(t)dt+\int_{a}^{-2}f(t)dt\\&=\int_{a}^{a+4}f(t)dt=\int_{0}^{4}f(t)dt\\&=2\int_{0}^{2}f(t)dt=2\end{aligned}$$

19. 정답 ①

한 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.
예를 들어 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 상자에 파란 공 1개와 노란 공 4개를 담으면 노란 상자에는 파란 공 4개와 빨간 공 1개를, 파란 상자에는 노란 공 1개와 빨간 공 4개를 담아야 한다.
즉, 빨간 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.
그러므로 노란 공 5개와 파란 공 5개 중에서 빨간 상자에 담을 5개의 공을 선택하는 방법의 수가 구하는 경우의 수이다.
따라서 노란 공과 파란 공 2종류의 공에서 중복을 허락하여 5개의 공을 빨간 상자에 담는 방법의 수는 ${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5==6$ 이다.

20. 정답 ③

-2 를 포함하는 원소가 세 개인 부분집합의 개수는 ${}_6C_2=15$ 이므로 -2 는 15 번 더해진다. 다른 6개의 원소에 대해서도 같은 방법으로 생각하면 모두 15 번 더해지므로 구하는 합은
$S_1+S_2+\cdots+S_{10}=15(-2-1+1+2+3+4)=105$

21. 정답 ②

$f(x)=\frac{x^2}{2}$ 이라 하면 $f'(x)=x$

$f'(a)=a$ 이므로 접선 l 의 방정식은 $y=ax-\frac{a^2}{2}$

직선 m 은 l 과 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{a}$

미분계수가 $-\frac{1}{a}$ 인 점 Q 의 x 좌표는 $f'(x)=-\frac{1}{a}$ 에서 $x=-\frac{1}{a}$

직선 m 과 곡선 $y=\frac{x^2}{2}$ 의 접점은 $Q\left(-\frac{1}{a},\frac{1}{2a^2}\right)$
직선 PQ 의 방정식은

$$y=\frac{\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2a^2}}{a+\frac{1}{a}}(x-a)+\frac{a^2}{2}=\frac{a^2-1}{2a}x+\frac{1}{2}$$

이 직선이 y 축과 만나는 점 R 를 구하면 $R\left(0,\frac{1}{2}\right)$

따라서 점 R 의 y 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

22. 정답 45

$(x+1)^{10}=\sum_{r=0}^{10}{}_{10}C_r\,x^r\cdot1^{10-r}$

따라서 x^2 의 계수는 ${}_{10}C_2=45$ 이다.

23. 정답 72

$a,10,17,b$ 가 등차수열이므로 공차는 $17-10=7$
그러므로 $a=10-7=3$, $b=17+7=24$
a,x,y,b 가 등비수열이므로 $xy=ab=72$

24. 정답 132

정적분의 성질에 의해 $x=12$ 를 대입하면
$\int_{12}^{12}f(t)dt=0$ 이므로 $-12^3+12^2+\int_{0}^{1}12f(t)dt=0$

따라서 $\int_{0}^{1}f(x)dx=132$

[다른 풀이]

$$\begin{aligned}\int_{12}^{x}f(t)dt&=-x^3+x^2+\int_{0}^{1}xf(t)dt\\&=-x^3+x^2+x\int_{0}^{1}f(t)dt\end{aligned}$$

$\int_{0}^{1}f(t)dt=c$ 라 하고 위 등식의 양변을 x 에 관하여 미분하면
$f(x)=-3x^2+2x+c$
$\int_{12}^{x}f(t)dt=-x^3+x^2+\int_{0}^{1}xf(t)dt$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_{12}^{x}(-3t^2+2t+c)dt&=\left[-t^3+t^2+ct\right]_{12}^{x}\\&=-x^3+x^2+cx-12(-132+c)\\&=-x^3+x^2+cx\end{aligned}$$

즉, $-132+c=0$
따라서 $\int_{0}^{1}f(x)dx=132$

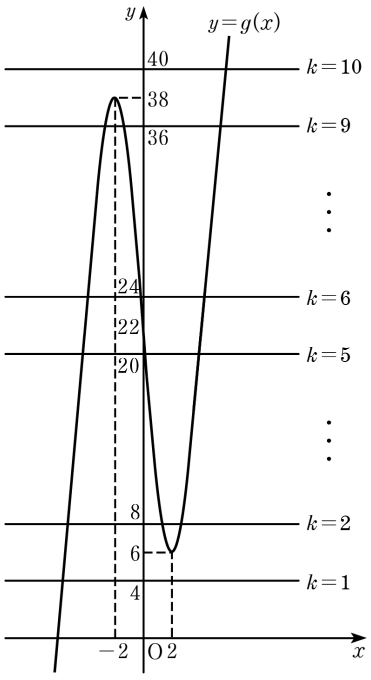
25. 정답 11

n 의 값을 구하면 다음과 같다.
(i) $1\le n\le 9$
$\log n$ 의 지표는 0 이므로 $f(n)$ 의 값은
$\log1$, $\log2$, $\cdots$, $\log9$
이 중 $f(n)<\log2$ 인 n 은 1
(ii) $10\le n\le 99$
$\log n$ 의 지표는 1 이므로 $f(n)$ 의 값은
$\log\frac{10}{10}$, $\log\frac{11}{10}$, $\cdots$, $\log\frac{99}{10}$
이 중 $f(n)<\log2$ 인 n 은 $10, 11, \cdots, 19$
따라서 집합 A 의 원소의 개수는 $1+10=11$ 이다.

26. 정답 13

$g(x)=x^3-12x+22$ 라 하면 $g'(x)=3(x-2)(x+2)$
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	38	↘	6	↗



삼차방정식의 양의 실근의 개수 $f(k)$는 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=4k$가 제1 사분면에서 만나는 교점의 개수와 같다.

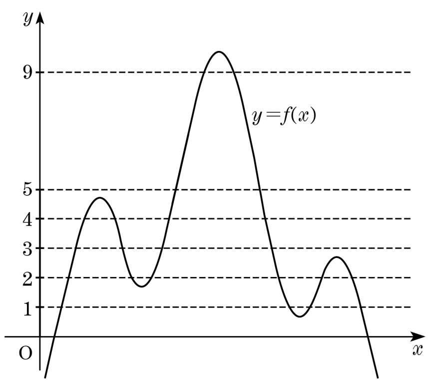
(ⅰ) $k=1$일 때 $f(k)=0$

(ⅱ) $k=2,3,4,5$ 일 때 $f(k)=2$

(ⅲ) $k=6,7,\cdots,10$ 일 때 $f(k)=1$

따라서 $\sum_{k=1}^{10} f(k)=0\times 1+2\times 4+1\times 5=13$

27. 정답 14



확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

따라서 $p=3$, $q=11$ 이므로 $p+q=14$ 이다.

28. 정답 50

직선 PQ의 방정식은

$y=(2a+1)(x-a)+a^2=(2a+1)x-(a^2+a)$

직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$x=(2a+1)x-(a^2+a)$ 이고 $a\neq 0$일 때 $x=\frac{a^2+a}{2a}$

$f(a)=\frac{a^2+a}{2a}$ 이고 $\lim_{a\to 0} f(a)=\lim_{a\to 0}\frac{a^2+a}{2a}=\frac{1}{2}$

따라서 $100\lim_{a\to 0} f(a)=50$

29. 정답 315

(가)에서 $a_n+a_{n+1}\leq |a_n|+a_{n+1}=n+6$

$n=2k-1$ 일 때 $a_{2k-1}+a_{2k}\leq 2k+5$

그런데 $\sum_{n=1}^{40} a_n=\sum_{k=1}^{20}(a_{2k-1}+a_{2k})\leq\sum_{k=1}^{20}(2k+5)=520$

(나)에서 $\sum_{n=1}^{40} a_n=520$ 이므로

$a_{2k-1}=|a_{2k-1}|\ (k=1,2,\cdots,20)$

$a_{2k-1}\geq 0$ 이므로 $a_{2k-1}+a_{2k}=2k+5$

따라서 $\sum_{n=1}^{30} a_n=\sum_{k=1}^{15}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{15}(2k+5)=315$

30. 정답 3

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$g'(1)=\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$\lim_{x\to 1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

(가)에서 $1<x<2$일 때, $g(x)=f(2-x)$ 이므로

$\lim_{x\to 1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$

$=-\lim_{x\to 1+}\frac{f(2-x)-f(1)}{(2-x)-1}$

$=-f'(1)$

이다. 즉, $f'(1)=-f'(1)$ 에서 $f'(1)=0$ … ㉠

또, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$g'(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

$-1<x<0$일 때, $1<x+2<2$이고

$g(x)=g(x+2)=f(2-(x+2))=f(-x)$ 이므로

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(-x)-f(0)}{x}$

$=-\lim_{x\to 0-}\frac{f(-x)-f(0)}{(-x)-0}$

$=-f'(0)$

이다. 즉, $f'(0)=-f'(0)$ 에서 $f'(0)=0$ … ㉡

㉠, ㉡에서 $f'(x)=3x(x-1)=3x^2-3x$ 이므로

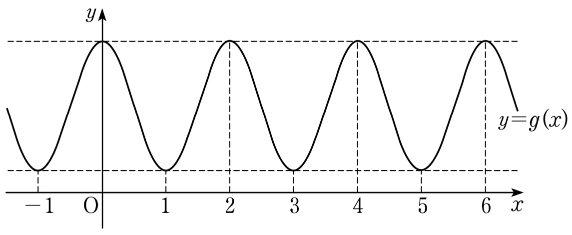
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

함수 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로

$g(6)-g(3)=g(0)-g(1)=f(0)-f(1)$

$=C-\left(1-\frac{3}{2}+C\right)=\frac{1}{2}$

따라서 $p+q=2+1=3$



5회 정답 및 해설

1	⑤	2	②	3	④	4	④	5	②
6	②	7	①	8	④	9	③	10	①
11	⑤	12	④	13	②	14	③	15	①
16	⑤	17	②	18	③	19	②	20	④
21	④	22	16	23	2	24	31	25	288
26	32	27	49	28	40	29	13	30	5

1. 정답 ⑤

$f(10)=\frac{10+1}{10-1}=\frac{11}{9}$ 이므로

$(f\circ f)(10)=f(f(10))=f\left(\frac{11}{9}\right)$

$=\frac{\frac{11}{9}+1}{\frac{11}{9}-1}=\frac{\frac{20}{9}}{\frac{2}{9}}=10$

2. 정답 ②

$x \ge 1$, $y \ge 1$, $z \ge 1$ 이고 $x+y+z=6$ 이므로
$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$ 로 치환하면
$X+Y+Z=3$ 인 음이 아닌 정수해 $(X,\ Y,\ Z)$ 의 개수와 일치하므로
${}_3H_3={}_5C_3=10$

3. 정답 ④

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-a}{x-2}=b$ 이므로
$f(x)=x^3-a$ 라 하면 $f(2)=0$ 이므로 $a=8$
$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12=b$
따라서 $a+b=20$

4. 정답 ④

X가 이항분포 $B(9,\ p)$를 따르므로
$E(X)=9\cdot p$, $V(X)=9\cdot p\cdot(1-p)$
$\therefore\ \{9\cdot p\}^2=9\cdot p\cdot(1-p)$ 에서
$9p=1-p$ $(\because\ 0<p<1)$
$\therefore\ p=\frac{1}{10}$

5. 정답 ②

9를 k개의 홀수들의 합으로 분할 할 때 반드시 k는 홀수가 되어야 하므로 자연수 9를 홀수들의 합으로 분할하는 방법은 다음과 같다.
1개의 수 : 9
3개의 수 : 1+1+7, 1+3+5, 3+3+3
5개의 수 : 1+1+1+1+5, 1+1+1+3+3
7개의 수 : 1+1+1+1+1+1+3
9개의 수 : 1+1+1+1+1+1+1+1+1
따라서 서로 다른 분할의 수는 모두 8개다.

6. 정답 ②

① $A^c\cup A=U$, $A^c\cap A=\phi$ 이므로
$f(A^c)=f(U)-f(A)$
② $A\subset B$일 때, A의 임의의 원소를 x_1라 하면
$x_1\in B$ 이므로 $A\subset B$ 이면 $f(A)\le f(B)$
③ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 이므로
$f(A\cup B)=f(A)+f(B)$ 이기 위해서는
$A\cap B=\phi$ 이어야 한다.
그러므로 $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$ 는 $A\cap B\ne\phi$ 일 때는 성립하지 않는다.
따라서 항상 옳은 것은 ①, ②이다.

7. 정답 ①

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+20$	↘	a	↗	$a+4$

$x=0$일 때, 최솟값을 가지므로 $a=-4$
따라서 $x=-2$일 때, 최댓값은 16

8. 정답 ④

$\lim_{x\to -1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

9. 정답 ③

시험 점수의 분포 X 가 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$ 을 따르므로
$P(m\le X\le m+\sigma)=P(0\le Z\le 1)$
(단, $Z=\frac{X-m}{\sigma}$ $)=0.34$

10. 정답 ①

곡선이 (1, 1)을 지나므로 $a+b=-1$
$f'(x)=6x^2+a$ 이고 $f'(1)=2$ 이므로 $6+a=2$
$a=-4$, $b=3$
따라서 $a^2+b^2=25$

11. 정답 ⑤

$a^{\log_5 16}=16^{\log_5 a}=2^{4\log_5 a}$ 이므로
$2^{4\log_5 a}=2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots$
$\log_5 a=\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots$
$a_1=5^{\frac{1}{4}},\ a_2=5^{\frac{2}{4}},\ a_3=5^{\frac{3}{4}},\ \cdots$
따라서 $\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{40}{4}$
$=\frac{1}{4}\cdot\frac{40(40+1)}{2}=205$

12. 정답 ④

(사각형 AQCP 의 넓이)
=(삼각형 ACP 의 넓이)+(삼각형 AQC 의 넓이)
직선 AC 의 기울기가 2이므로 사각형 AQCP 의 넓이가 최대가 되려면
접선의 기울기가 2가 되는 접점을 P와 Q로 하면 된다.
$y'=3x^2-10x+4$ 에서 $3x^2-10x+4=2$
$3x^2-10x+2=0$ 의 두 근이 점 P, Q의 x좌표이므로
두 점 P, Q의 x좌표의 곱은 $\frac{2}{3}$

13. 정답 ②

시행을 5번 한 후 앞면이 나온 횟수를 k라 하면 점 P의 좌표는 $(k,\ 5-k)$
점 P가 직선 $x-y=3$ 위에 있으려면
$k-(5-k)=3$ 이므로 $k=4$
따라서 $k=4$일 확률은
${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

14. 정답 ③

1번 시행 : $P_1(0,1)$, $P_2(1,0)$
2번 시행 : $P_3(0,2)$, $P_4(1,1)$, $P_5(2,0)$
$\vdots$
n번 시행 : $P_{\frac{n(n+1)}{2}}(0,n)$, $\cdots$, $P_{\frac{n(n+3)}{2}}(n,0)$
$\frac{13\times 14}{2}<100<\frac{13\times 16}{2}$
그러므로 $P_{100}(a,\ b)$ 는 시행을 13번 한 후 위치할 수 있는 점이다.
$P_{91}(0,\ 13)$, $\cdots$, $P_{104}(13,\ 0)$
이므로 $P_{100}(9,\ 4)$
따라서 $a-b=5$

15. 정답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k^2+2nk}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)+1-1\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}\left\{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2-1\right\}\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2(x^2+1)(x^2-1)\,dx=\frac{26}{5}$$

16. 정답 ⑤

주어진 식에 의하여
$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$
이다. $b_n=\frac{n}{2^n}a_n$ 이라 하면
$b_{n+1}=b_n+\boxed{n}$ $(n\ge 1)$
이고 $b_1=\boxed{6}$ 이므로
$b_n=\boxed{\frac{n^2-n+12}{2}}$ $(n\ge 1)$ 이다. 그러므로
$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{\frac{n^2-n+12}{2}}$ $(n\ge 1)$ 이다.
$f(n)=n$, $p=6$,
$g(n)=b_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}k$ $(n\ge 2)$

$g(n)=6+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+12}{2}$

따라서 $f(p)+g(p)=f(6)+g(6)=6+21=27$

17. 정답 ②

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$ 이므로

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=k$ 이므로 $f(x)=(x-1)(x-a)$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1-a=k$

$h(x)=f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$h(2)=\lim\limits_{x\to2+}h(x)=\lim\limits_{x\to2-}h(x)$

$h(2)=f(2)g(2)=3(2-a)$

$\lim\limits_{x\to2+}h(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x-1)(x-a)(2-x)=0$

$\lim\limits_{x\to2-}h(x)=\lim\limits_{x\to2-}(x-1)(x-a)(x+1)$

$=3(2-a)$

따라서 $a=2$ 이므로 $k=-1$

18. 정답 ③

C_1은 중심이 $O_1(2-1,0)$, 반지름의 길이가 1인 원

C_2는 중심이 $O_2\left(2-\dfrac{1}{2},0\right)$, 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원

C_3은 중심이 $O_3\left(2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2,0\right)$, 반지름의 길이가 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$인 원

C_n은 중심이 $O_n\left(2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},0\right)$, 반지름의 길이 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원

$B(-1,0)$을 지나고, 기울기가 a_n인 직선의 방정식을 $y=a_n(x+1)$ 이라 하자.

점 O_n 부터 직선 $a_nx-y+a_n=0$ 까지의 거리는

원 C_n의 반지름의 길이가 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 과 같다.

$\dfrac{\left|a_n\left(3-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\right|}{\sqrt{a_n^{\,2}+1}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$

$\sqrt{a_n^{\,2}+1}=2^{n-1}a_n\left(3-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$

$a_n^{\,2}+1=4^{n-1}a_n^{\,2}\left(3-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)^2$

$=a_n^{\,2}(9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n+1)$

$a_n^{\,2}=\dfrac{1}{9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n}$

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n}}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}2^na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{\sqrt{9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n}}=\dfrac{2}{3}$

19. 정답 ②

함수 $f'(x)=(x-a)(x-b)$ 이고

(가)에서 $f(x)$ 가 $x=\dfrac{1}{2}$ 에서 극값을 가지므로 $a=\dfrac{1}{2}$ 또는 $b=\dfrac{1}{2}$

$f(a)-f(b)=\displaystyle\int_0^a(t-a)(t-b)dt-\int_0^b(t-a)(t-b)dt$

$=\displaystyle\int_0^a(t-a)(t-b)dt+\int_b^0(t-a)(t-b)dt$

$=\displaystyle\int_b^a(t-a)(t-b)dt=-\dfrac{(a-b)^3}{6}=\dfrac{1}{6}$

이므로 $b-a=1$

$b=\dfrac{1}{2}$ 이면 $a=-\dfrac{1}{2}$ 이므로 모순

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$ 이고 $b=\dfrac{3}{2}$ 이므로 $a+b=2$

20. 정답 ④

C_1: $x^2+y^2=1$

C_2: $(x-2)^2+y^2=2^2$

C_3: $\{x-(2+2^2)\}^2+y^2=(2^2)^2$

$\vdots$

C_n: $\{x-(2+2^2+\cdots+2^{n-1})\}^2+y^2=(2^{n-1})^2$

원 C_n 의 중심의 x 좌표 $a_n=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-2\quad(n\ge2)$

원 C_n 의 반지름의 길이 $r_n=2^{n-1}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{r_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-2}{2^{n-1}}=2$

21. 정답 ④

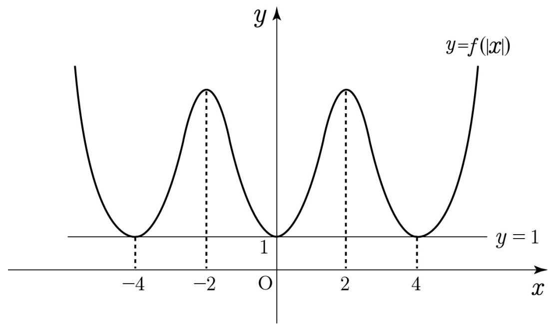
사차함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1이고

함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로

$f(x)=(x-2)^4+a(x-2)^2+b$

$f(0)<f(2)$ 이고 방정식 $f(|x|)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$f(x)$ 가 $x=0$, 4에서 극솟값 1을 갖고 $x=2$ 에서 극댓값을 가져야 한다.



$f(0)=f(4)=1$ 에서 $16+4a+b=1$

$f'(x)=4(x-2)^3+2a(x-2)$ 에서 $f'(0)=f'(4)=0$ 이므로

$-32-4a=0$

$a=-8$, $b=17$ 이므로

$f(x)=(x-2)^4-8(x-2)^2+17$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값 $f(2)=17$

22. 정답 16

수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이므로 $b_n=3n-3+b_1$

주어진 조건에 의하여

$a_n=b_n-2n=n-3+b_1$

$a_{10}=7+b_1=11$

$b_1=4$

따라서 $b_5=4+12=16$

23. 정답 2

점 $(2,1)$ 에 대하여 대칭이므로

$y=\dfrac{ax+b}{x+c}=\dfrac{k}{x-2}+1=\dfrac{x+k-2}{x-2}$

점 $(3,3)$ 을 지나므로 $k=2$ 이다. 그러므로

$y=\dfrac{x}{x-2}$

폐구간 $[-1,1]$ 에서 함수는 단조 감소하므로 $x=1$ 에서 최솟값,

$x=-1$ 에서 최댓값을 가진다.

$M=f(-1)=\dfrac{1}{3}$, $m=f(1)=-1$

$\therefore\ 3M-m=3\times\dfrac{1}{3}-(-1)=2$

24. 정답 31

$\log x=1+\alpha\ (0<\alpha<1)$ 이라 하자.

$\log\sqrt{x}=\dfrac{1+\alpha}{2}$ 이고 $\log\dfrac{1}{x}=-2+(1-\alpha)$

주어진 조건에 의하여 $\dfrac{1+\alpha}{2}=5(1-\alpha)$

$\alpha=\dfrac{9}{11}$ 이므로 $\log x=1+\dfrac{9}{11}=\dfrac{20}{11}$

따라서 $p+q=31$

25. 정답 288

모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한

신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\dfrac{1}{10}-c,\ \dfrac{1}{10}+c\right]$ 이므로

$c=1.96\times\sqrt{\dfrac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}=1.96\times\dfrac{3}{100}$ 이다.

또, 모집단에서 임의로 n명을 추출하여 구한 모비율에 대한

신뢰도 95% 의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$ 이므로

$s(n)=1.96\times\sqrt{\dfrac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\dfrac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}$ 이다.

이 때, $1.96\times\dfrac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}=\dfrac{50}{81}\times 1.96\times\dfrac{3}{100}$ 이므로

$\sqrt{n}=6\sqrt{8}$

$\therefore\ n=36\times 8=288$

26. 정답 32

주어진 조건에 의하여

$E_1=300R\log_a 16$, $E_2=240R\log_a x$ 이고,

$E_1=E_2$ 이므로 $300R\log_a 16=240R\log_a x$

$\frac{5}{4}\log_a 16=\log_a 32=\log_a x$

따라서 $x=32$

27. 정답 49

[실행 3]까지 할 때, 상자 B 의 흰 공의 개수가 홀수가 되려면

(i) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 2개를 상자 A 로 넣고

[실행 3]에서는 상자 A 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 B 로 넣는 경우

$\dfrac{_{10}C_2}{_{12}C_2}\times\dfrac{_8C_1\times{_2C_1}}{_{10}C_2}=\dfrac{8}{33}$

(ii) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 A 로 넣고

[실행 3]에서는 상자 A 에서 흰 공 2개를 상자 B 로 넣는 경우

$\dfrac{_{10}C_1\times{_2C_1}}{_{12}C_2}\times\dfrac{_9C_2}{_{10}C_2}=\dfrac{8}{33}$

(i), (ii)에 의하여 $\dfrac{8}{33}+\dfrac{8}{33}=\dfrac{16}{33}$

따라서 $p+q=49$

28. 정답 40

(가)에서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 y 축 대칭

(다)에서 $\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}3f(x)\,dx=15$

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=5$

(나)에 의해 $\int_{-6}^{10}f(x)dx=8\int_{-1}^{1}f(x)dx=40$

29. 정답 13

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3 이라 하고 곰 인형을

크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4 라 하자.

(i) a_3 이 b_2 보다 왼쪽에 있는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

(ii) a_3 이 b_2 보다 오른쪽에 있는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 13

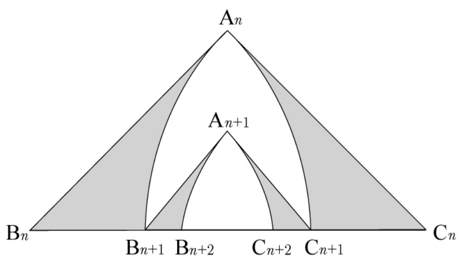
30. 정답 5

$S_1=2\{($삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이$)-($부채꼴 $B_1A_1C_2$ 의 넓이$)\}$

$\quad=2\left(4-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{\pi}{4}\right)=2(4-\pi)$

$S_2=2\{($삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이$)-($부채꼴 $B_2A_2C_3$ 의 넓이$)\}$

$\quad=2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{B_nC_n}=2l_n$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2l_{n+1}$ 이라 하면

$\overline{A_nB_n}=\overline{B_nC_{n+1}}=\sqrt{2}\,l_n$ 이고 $\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}+\frac{1}{2}\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\overline{B_nC_{n+1}}$ 이므로

$l_n+l_{n+1}=\sqrt{2}\,l_n$

$l_{n+1}=(\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$

$\dfrac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{1}{4-\pi}\cdot\dfrac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1+\sqrt{2}$

$a=1$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=5$

6회 정답 및 해설

1	⑤	2	③	3	④	4	①	5	⑤
6	②	7	⑤	8	③	9	②	10	⑤
11	③	12	③	13	④	14	③	15	④
16	⑤	17	①	18	①	19	④	20	④
21	③	22	10	23	93	24	16	25	36
26	40	27	160	28	167	29	20	30	25

1. 정답 ⑤

$(h\circ g\circ f)(x)=h(x)\ \Rightarrow\ h(g\circ f)(x))=h(x)$

$f(x)=2x-1$ 에서

$h(g(2x-1))=h(x)\ \Rightarrow\ g(2x-1)=x$

$x=2$ 로 놓으면 $g(3)=2$

2. 정답 ③

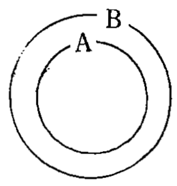
$A\subset B$이면

$A\cup B=B,\ A\cap B=A$

또, $A^c\supset B^c,\ A-B=\phi$

그런데 $(A\cap B)^c=A^c$

$\therefore\ (A\cap B)^c\neq B^c$



3. 정답 ④

$10\le x<100$ 이면 $\log x$ 의 지표는 1 이고,

$1000\le x^2<10000$ 이면 $\log x^2$ 의 지표는 3 이므로

$\lim_{x\to 100-}f(x)=1$ 이고 $\lim_{x\to 100-}f(x^2)=3$ 이다.

$\therefore\ \lim_{x\to 100-}\{f(x)+f(x^2)\}=\lim_{x\to 100-}f(x)+\lim_{x\to 100-}f(x^2)$

$=1+3=4$

4. 정답 ①

$(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{b}\right)=5-\left(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\right)$

$\le 5-2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{4a}{b}}=1$

5. 정답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}\left\{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right\}$

$\frac{b}{n}=h$ 라고 하면 $n\to\infty$ 일 때, $h\to 0$ 이다.

(준식)$=\lim_{h\to 0}\frac{b}{h}\{f(a+h)-f(a-h)\}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{b}{h}\{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)\}$

$=\lim_{h\to 0}b\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$

$=b\{f'(a)+f'(a)\}$

$=2bf'(a)$

6. 정답 ②

3 번 시행에서 빨간 공, 노란 공, 파란공이 각각 하나씩 나오는 경우의 수는

$_3P_3$ 이므로 구하는 확률은

$_3P_3\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{2}{20}=6\cdot\frac{1}{200}=\frac{3}{100}$

7. 정답 ⑤

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)=1^2-1+2a=2a$ 이고, $g(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to1+}(g\circ f)(x)=(2a)^2+a\times2a+3=6a^2+3$

$\lim_{x\to1-}f(x)=3+a$ 이므로

$\lim_{x\to1-}(g\circ f)(x)=(3+a)^2+a\times(3+a)+3$

$=2a^2+9a+12$

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(2a)=6a^2+3$

따라서 $6a^2+3=2a^2+9a+12$ 이어야 하므로

$4a^2-9a-9=0$

$(a-3)(4a+3)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은 $\dfrac{9}{4}$이다.

[다른 풀이]

이차함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이고 곡선 $y=g(x)$는

직선 $x=-\dfrac{a}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$ 또는

$\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=-a$ 이어야 한다.

$1-1+2a=3+a$ 에서

$a=3$ $(1-1+2a)+(3+a)=-a$ 에서

$a=-\dfrac{3}{4}$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$3-\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$

8. 정답 ③

X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \dfrac{1}{3}\right)$를 따른다.

$\mathrm{V}(X)=180\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=40$

9. 정답 ②

$2n$장의 카드에서 세 장의 카드를 동시에 뽑을 때, 세 장의 카드에 적힌 수의 합이 짝수인 경우는 세 수 모두 짝수인 경우와 세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우가 있다.

(ⅰ) 세 수가 모두 짝수인 경우의 수는 짝수 n개 중 3개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(ⅱ) 세 수 중 두 수는 홀수이고 나머지 한 수는 짝수인 경우의 수는 홀수 n개 중 2개를 택하고 짝수 n개 중 한 개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_nC_2\times{}_nC_1=\frac{n(n-1)}{2!}\times n=\frac{n^2(n-1)}{2}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$a_n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}+\frac{n^2(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)(n-2+3n)}{6}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{3}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(2n-1)}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{3}=\frac{2}{3}$$

10. 정답 ⑤

버스로 등교하는 사건을 A, 지각하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{1}{20}}{\frac{6}{10}\times\frac{1}{20}+\frac{4}{10}\times\frac{1}{15}}=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{3}{100}+\frac{2}{75}}=\frac{9}{17}$$

11. 정답 ③

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}<a_n<2^n$ 에서

$\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}<a_n<2^n$

$2^n-1<a_n<2^n$

$1-\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{a_n}{2^n}<1$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$, $\lim_{n\to\infty}1=1$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=1$

$\dfrac{3n-1}{n+1}<\sum_{k=1}^{n}b_k<\dfrac{3n+1}{n}$ 에서

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n+1}=3$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n}=3$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}b_n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8^n-1}{4^{n-1}a_n+8^{n+1}b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{8^n}}{\frac{1}{4}\times\frac{a_n}{2^n}+8\times b_n}=\frac{1-0}{\frac{1}{4}\times1+8\times0}=4$$

12. 정답 ③

$\dfrac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$

따라서 P는 $t=3$일 때 운동방향을 바꾸므로

$a=1$

마찬가지로 $\dfrac{dx_2}{dt}=2t+8$ 이므로 $b=0$

t분 후의 M의 좌표를 $f(t)$라 하면

$f(t)=t^3-4t^2+4t$

$f'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

$\therefore\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=3$

13. 정답 ④

$\log3$, $\log(3^t+3)$, $\log12$는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\log(3^t+3)=\dfrac{\log12+\log3}{2}=\dfrac{\log36}{2}=\log\sqrt{36}$

$3^t+3=\sqrt{36}=6$, $3^t=3$

따라서 $t=1$

14. 정답 ③

$f(n)=\log n=1+\alpha$

조건에 의해 $1\le2\alpha<2$ 에서 $\dfrac{1}{2}\le\alpha<1$

$1+\dfrac{1}{2}\le\log n<2$, $10^{\frac{3}{2}}\le n<10^2$

문제에서 $3.1<\sqrt{10}<3.2$, $31<10\sqrt{10}<32$

즉, $10\sqrt{10}=31.\cdots$ 이므로 $31.\cdots\le n<10^2$

그런데 n은 자연수이므로 $32\le n<100$

따라서 자연수 n의 개수는 68이다.

15. 정답 ④

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\dfrac{400}{1000}=0.4$ 이므로

신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이 N은

$N=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\quad=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{1000}}$

한편 이 때의 최대 허용 표본 오차 M은

$M=1.96\times\sqrt{\dfrac{1}{4n}}=1.96\times\sqrt{\dfrac{1}{4000}}$

$\therefore\ \dfrac{N}{2M}=\dfrac{2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{1000}}}{2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{1}{4000}}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{0.4\times0.6}{1000}}}{\sqrt{\dfrac{1}{4000}}}$

16. 정답 ⑤

ㄱ. $P(E)=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$I(E)=-\log_2 P(E)\quad=-\log_2\dfrac{1}{2}\quad=1$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\therefore\ I(A\cap B)=-\log_2 P(A\cap B)\quad=-\log_2 P(A)P(B)$

$=-\{\log_2 P(A)+\log_2 P(B)\}$

$=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$

$=I(A)+I(B)$ (참)

ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2 P(A\cup B)$

$=-\log_2\{P(A\cup B)\}^2$

$I(A)+I(B)=-\log_2 P(A)-\log_2 P(B)$

$=-\log_2 P(A)P(B)$

$P(A\cup B)\ge P(A)>0$, $P(A\cup B)\ge P(B)>0$ 이므로

$\{P(A\cup B)\}^2\ge P(A)P(B)$

$\therefore\ \log_2\{P(A\cup B)\}^2\ge\log_2 P(A)P(B)$

$-\log_2\{P(A\cup B)\}^2\le-\log_2 P(A)P(B)$

$\therefore\ 2I(A\cup B)\le I(A)+I(B)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 정답 ①

(ⅰ) $n=2k$(k는 자연수)일 때

두 자연수 (n_1,n_2)의 순서쌍은

$(2k-1,1),(2k-2,2),\cdots,(k,k)$ 이므로 모두 k개이다.

$\therefore P(2k)=k$

(ⅱ) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때

두 자연수 (n_1,n_2)의 순서쌍은

$(2k-2,1),(2k-3,2),\cdots,(k,k-1)$ 이므로 모두 $(k-1)$개이다.

$\therefore P(2k-1)=k-1$

ㄱ. $P(2k)=k=\left[\dfrac{2k}{2}\right]$

$P(2k-1)=k-1=\left[\dfrac{2k-1}{2}\right]$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 이 성립한다. [참]

ㄴ. m,n이 홀수일 때, $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k,l은 자연수)이라 두면

$P(m)=P(2k-1)=k-1$

$P(n)=P(2l-1)=l-1$

$P(m+n)=P(2k+2l-2)\ =k+l-1$

$\therefore P(m+n)=k+l-1$

$\neq(k-1)+(l-1)=P(m)+P(n)$ [거짓]

ㄷ. $n=2k$일 때

$P(n^2)=P(4k^2)=2k^2$ 이고

$\{P(n)\}^2=\{P(2k)\}^2=k^2$ 이므로

$P(n^2)\neq\{P(n)\}^2$ [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

18. 정답 ①

수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 0이 아니므로

$\dfrac{a_n}{n}-\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_na_{n+1}}{n+1}$

의 양변에 $\dfrac{n(n+1)}{a_na_{n+1}}$ 을 곱하면

$\dfrac{n+1}{a_{n+1}}-\dfrac{n}{a_n}=\boxed{\ n\ }$이다.

$b_n=\dfrac{n}{a_n}$ 이라 하면 $b_1=\dfrac{1}{2}$ 이고

$b_{n+1}-b_n=\boxed{\ n\ }$ $(n\ge1)$이므로

$b_n=\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+1}{2}$

$a_n=\dfrac{n}{b_n}=\boxed{\dfrac{2n}{n^2-n+1}}$

따라서 $f(n)=n$, $g(n)=\dfrac{2n}{n^2-n+1}$ 이다.

$\therefore\ f(13)g(4)=13\times\dfrac{8}{13}=8$

19. 정답 ④

$\overline{P_1B_1}=\overline{B_1Q_1}=2$, $\angle P_1B_1Q_1=90^\circ$ 이므로

직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2^2=2$ 이다.

$\overline{B_1D_1}$ 이 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 두 변 B_2C_2 , D_2A_2 와 만나는 점을 각각 M_1 , N_1 이라 하고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이를 x라 하면

$\overline{B_1M_1}=\sqrt{2}$, $\overline{M_1N_1}=x$, $\overline{N_1D_1}=\overline{A_2N_1}=\dfrac{x}{2}$

이고 $\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{B_1D_1}=\overline{B_1M_1}+\overline{M_1N_1}+\overline{N_1D_1}\quad=\sqrt{2}+x+\dfrac{x}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

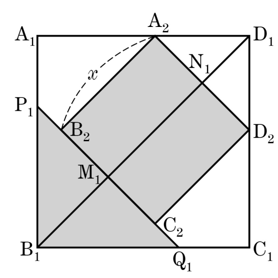
따라서 두 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 과 $A_2B_2C_2D_2$ 의 닮음비는

$\overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\dfrac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$ 이다.

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n 은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1 과

그림 R_2에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2 의 비는



$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

그림에서 그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1 은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의

넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$ 의 넓이의 합이므로

수열 $\{S_n\}$ 은

첫째항이 $S_1=\dfrac{1}{2}\times2\times2+\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{50}{9}$ 이고

공비가 $\dfrac{32}{81}$ 인 등비수열이다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{50}{9}}{1-\dfrac{32}{81}}=\dfrac{450}{49}$

[다른 풀이]

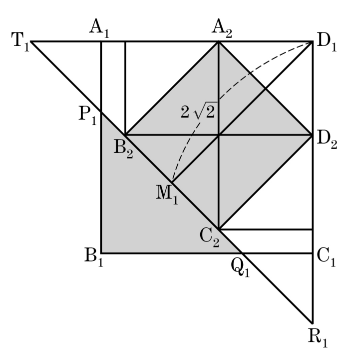
정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이가 3이므로

$\overline{B_1D_1}=3\sqrt{2}$

꼭짓점 D_1 에서 선분 P_1Q_1 에 내린 수선의 발을 M_1 이라 하면 $\overline{D_1M_1}=2\sqrt{2}$ 이다.

직선 D_1A_1 과 직선 P_1Q_1 의 교점을 T_1, 직선 C_1D_1 과 직선 P_1Q_1 의 교점을 R_1이라 하자.

이때 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이는 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$ 의 넓이의 $\dfrac{4}{9}$ 이다.



직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$ 은 높이가 $2\sqrt{2}$ 이고, 밑변의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 직각이등변삼각형 $T_1R_1D_1$ 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$

이고, 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이는

$8\times\frac{4}{9}=\frac{32}{9}$

이다. 따라서 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 한 변의 길이는

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{\frac{32}{9}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \overline{A_1B_1}:\overline{A_2B_2}=3:\frac{4\sqrt{2}}{3}=9:4\sqrt{2}$

모든 자연수 n에 대하여 그림 R_n 은 정사각형과 직각이등변삼각형으로 이루어진 닮음인 도형이므로

그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1 과

그림 R_2 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_2 의 비는

$S_1:S_2=9^2:(4\sqrt{2})^2=81:32$

그림에서 그림 R_1 에 색칠되어 있는 부분의 넓이 S_1 은 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의 넓이와 직각이등변삼각형 $P_1B_1Q_1$ 의 넓이의 합이므로 수열 $\{S_n\}$ 은

첫째항이 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$ 이고

공비가 $\frac{32}{81}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{50}{9}}{1-\frac{32}{81}}=\frac{450}{49}$$

20. 정답 ④

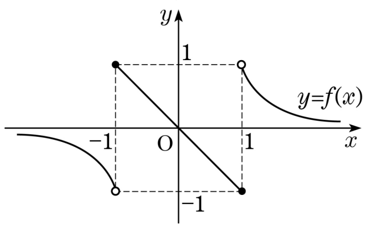
주어진 조건에서 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고 원점을 지난다.

또, 함수 $f(x)$는 $x\neq -1$, $x\neq 1$인 모든 x에서 연속이고, 구간 $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 각각 감소한다.

ㄱ. 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$와 원점에서만 만난다.

ㄴ. (반례) 함수 $f(x)=\begin{cases}-x & (|x|\le 1)\\ \frac{1}{x} & (|x|>1)\end{cases}$ 은 주어진 조건을 만족시키지만

x축과 원점에서만 만난다.



ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$f'(c_1)=\frac{-1-0}{1-0}=-1$

을 만족시키는 실수 c_1이 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

마찬가지로 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 0]$에서 연속이고, 열린 구간 $(-1,\ 0)$에서 미분가능하므로

$f'(c_2)=\frac{1-0}{-1-0}=-1$

을 만족시키는 실수 c_2가 열린 구간 $(-1,\ 0)$에 적어도 하나 존재한다.

그러므로 $f'(\alpha)=-1$을 만족시키는 실수 α가 적어도 두 개 존재한다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 정답 ③

$n\ge 2$일 때, 제 $n-1$ 행의 맨 오른쪽 끝의 수는

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$ 이다.

따라서 a_n은 $\frac{n(n-1)}{2}$보다 큰 수 중 가장 작은 n의 배수이다.

(ⅰ) n이 홀수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}$ 이 n의 배수이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$a_{2n-1}=\frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2}=2n^2-n$

(ⅱ) n이 짝수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}=n\times\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$ 이므로

$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2$

$a_{2n}=\frac{1}{2}(2n)^2=2n^2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{30}a_n&=\sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})\\&=\sum_{n=1}^{15}(2n^2-n+2n^2)\\&=4\sum_{n=1}^{15}n^2-\sum_{n=1}^{15}n\\&=4\times\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{15\times16}{2}\\&=4840\end{aligned}$$

22. 정답 10

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$ (단, $0\le r\le n$)이므로

x^2의 계수는 ${}_nC_2=45$

$\frac{n(n-1)}{2}=45$, $n(n-1)=90$

$\therefore\ n=10$

23. 정답 93

1을 반드시 포함 하는 원소의 개수가 4개 이하인 부분집합의 개수를 구하면

원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_0=1$ (개)

원소가 2개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_1=8$ (개)

원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$ (개)

원소가 4개인 부분집합의 개수는 ${}_8C_3=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ (개)

따라서 $1+8+28+56=93$ (개)

24. 정답 16

$f(x)=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시키면

$g(x)=(x-a)^3+b$ 의 그래프가 된다.

$g(0)=-a^3+b=0$ 이므로 $b=a^3$ …… ㉠

한편, 그래프의 평행이동에 의해

$\int_a^b g(x)dx=\int_{a-c}^{b-c}g(x+c)dx$ 가 성립함을 이용하면

$\int_a^{3a}g(x)dx=\int_a^{3a}\{(x-a)^3+b\}dx=\int_0^{2a}(x^3+b)dx$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int_0^{2a}(x^3+b)dx-\int_0^{2a}x^3dx&=\int_0^{2a}bdx\\&=2ab=32\ \cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $2ab=2a^4=32$ 이므로 $a^4=16$

25. 정답 36

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t,

그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,

$r_t=\frac{\sqrt{3}}{6}x_t$, $x_t=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}t$ 이므로

$r_t=\frac{12+3t}{2}$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는

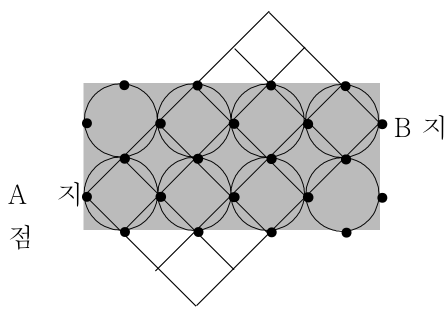
$S(t)=\pi\left(\frac{12+3t}{2}\right)^2$ 이므로

$x_t=24\sqrt{3}$ 일 때, $t=4$

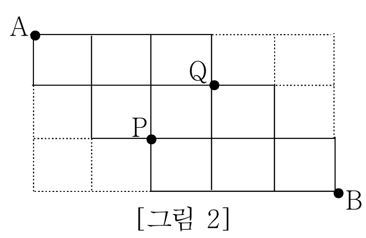
$S'(4)=2\pi\left(\frac{12+3\times4}{2}\right)\times\frac{3}{2}=36\pi$ 이다.

따라서 $a=36$

26. 정답 40



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수는 [그림 2]에서 A 지점에서 출발하여 실선을 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수와 같다.

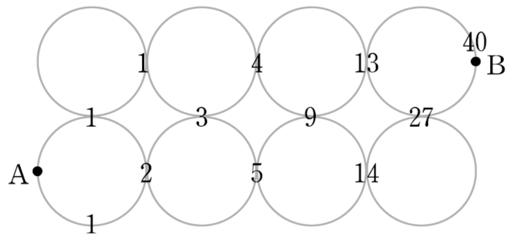
(1) A → P → B의 경우

$\left(\dfrac{4!}{2!\,2!}-1\right)\times\dfrac{4!}{3!}=5\times4=20$ (가지)

(2) A → Q → B의 경우

$\dfrac{4!}{3!}\times\left(\dfrac{4!}{2!\,2!}-1\right)=4\times5=20$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $20+20=40$ (가지)



27. 정답 160

주어진 식을 정리하면

$\log\dfrac{Q_t}{Q_0}=kt$

$\dfrac{Q_t}{Q_0}=10^{kt}$

충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 a초 후에

남은 전하량은 $Q_a=\dfrac{1}{4}Q_0$ 이므로

$\dfrac{Q_a}{Q_0}=\dfrac{1}{4}=10^{ak}$ … ㉠

충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 b초 후에

남은 전하량은 $Q_b=\dfrac{1}{10}Q_0$ 이므로

$\dfrac{Q_b}{Q_0}=\dfrac{1}{10}=10^{bk}$ … ㉡

충전된 전하량이 Q_0 인 축전기에 전구를 연결한 지 $2a+b$초 후에 남은 전하량은 Q_{2a+b} 라 하면 ㉠, ㉡에 의해

$\dfrac{Q_{2a+b}}{Q_0}=10^{(2a+b)k}=10^{2ak}10^{bk}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{160}$

$\therefore\ Q_{2a+b}=\dfrac{1}{160}Q_0$

$\therefore\ p=160$

28. 정답 167

함수 $f(x)$ 가 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$, $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$ 을 지나고

$1\le f'(x)\le 3$ 이므로

(i) 두 점 $(3,\ 7)$, $(4,\ 8)$ 의 기울기가 1 이므로

$3\le x\le 4$ 에서 $f(x)=x+4$

(ii) 두 점 $(5,\ 10)$, $(6,\ 13)$ 의 기울기가 3 이므로

$5\le x\le 6$ 에서 $f(x)=3x-5$

(iii) 주어진 조건에 의해 $(4,\ 8)$과 $(5,\ 10)$을 지나는 함수는 이차함수이고

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f'(4)=8a+b=1$

$f'(5)=-10a+b=3$

$a=1,\ b=-7$

$f(4)=8$ 에서 $c=20$

$\displaystyle\int_3^6 f(x)dx=\int_3^4(x+4)dx+\int_4^5(x^2-7x+20)dx+\int_5^6(3x-5)dx$

$=\dfrac{167}{6}$

$\therefore\ 6a=167$

29. 정답 20

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\log a_k=n^2-n\quad(n\ge1)$

$b_n=n\log a_n$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ 라 하면 $S_n=n^2-n$ 이므로

$b_1=S_1=0$

$b_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$

$=2n-2\ \ (n\ge2)$

$\therefore\ b_n=n\log a_n=2n-2\quad(n\ge1)$

$\therefore\ \log a_n=2-\dfrac{2}{n}\quad(n\ge1)$

$n=1$ 또는 $n=2$ 일 때, $\log a_n$ 의 가수는 0 이므로

$m\ge3$ 이다. 이때 $0<\dfrac{2}{m}<1$ 이므로

$\log a_m=1+\left(1-\dfrac{2}{m}\right)$

에서 $\log a_m$ 의 가수는 $1-\dfrac{2}{m}$ 이다.

$1-\dfrac{2}{m}=0.9$

$\therefore\ m=20$

30. 정답 25

점 Q_n은 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점이므로 $Q_n\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)$이다.

$\overline{OP_n}=p_n$, $\overline{OQ_n}=q_n$, $\overline{P_nQ_n}=r_n$이라 하면

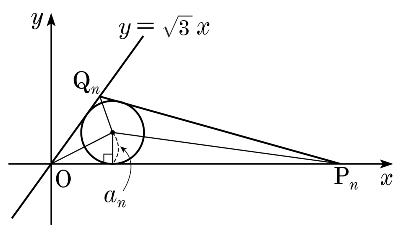
$p_n=n$

$q_n=\sqrt{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\dfrac{2}{n}$

$r_n=\sqrt{\left(n-\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(0-\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{n^4-2n^2+4}}{n}$

삼각형 OP_nQ_n 의 넓이를 S_n이라 하면

$S_n=\dfrac{1}{2}\times n\times\dfrac{\sqrt{3}}{n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



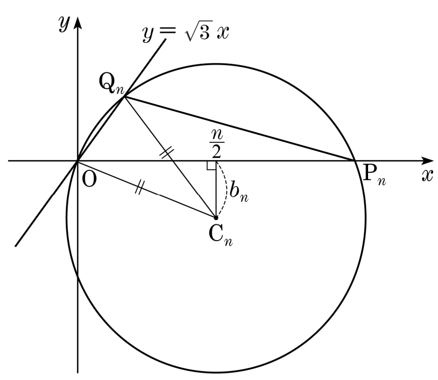
삼각형 OP_nQ_n 의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리 a_n은 내접원의 반지름의 길이와 같다.

$S_n=\dfrac{1}{2}(p_n+q_n+r_n)\times a_n$ 에서

$a_n=\dfrac{2S_n}{p_n+q_n+r_n}$

$=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{n+\dfrac{2}{n}+\dfrac{\sqrt{n^4-2n^2+4}}{n}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\,n}{n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}}$ … ㉠



삼각형 OP_nQ_n 의 외접원의 중심을 $C_n(x_n,\ y_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 OP_n의 수직이등분선 위에 있으므로 $x_n=\dfrac{n}{2}$이다.

$\overline{OC_n}=\overline{Q_nC_n}$ 에서 $\overline{OC_n}^2=\overline{Q_nC_n}^2$ 이므로

$\left(\dfrac{n}{2}\right)^2+{y_n}^2=\left(\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(y_n-\dfrac{\sqrt{3}}{n}\right)^2$

$\dfrac{n^2}{4}+{y_n}^2=\dfrac{n^2}{4}-1+\dfrac{1}{n^2}+{y_n}^2-\dfrac{2\sqrt{3}}{n}y_n+\dfrac{3}{n^2}$

$\therefore\ y_n=\dfrac{4-n^2}{2\sqrt{3}\,n}$

$b_n=|y_n|$ 이므로 $n\ge2$ 일 때

$b_n = \dfrac{n^2-4}{2\sqrt{3}n}$ … ㉡

㉠, ㉡에서

$$L=\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}n}{n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}} \times \frac{n^2-4}{2\sqrt{3}n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-4}{2\left(n^2+2+\sqrt{n^4-2n^2+4}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{4}{n^2}}{2\left(1+\frac{2}{n^2}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^4}}\right)}$$
$$=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 100L = 100\times\frac{1}{4}=25$

7회 정답 및 해설

1	④	2	①	3	②	4	③	5	④
6	①	7	①	8	⑤	9	③	10	②
11	③	12	①	13	④	14	①	15	⑤
16	①	17	③	18	⑤	19	②	20	③
21	④	22	25	23	256	24	22	25	72
26	20	27	13	28	6	29	79	30	16

1. 정답 ④

$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=6$ 이고

$f'(x)=4x+a$ 이므로

$\therefore\ f'(1)=4+a=6$

$\therefore\ a=2$

2. 정답 ①

$a_n=6+(n-1)\cdot d$ 에서 $a_8-a_6=2d$

$S_8-S_6=a_7+a_8=12+13d$

$\dfrac{2d}{12+13d}=2$ 에서

$\therefore\ d=-1$

3. 정답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B^C)$

$=\mathrm{P}(A)\cdot(1-\mathrm{P}(B))=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

4. 정답 ③

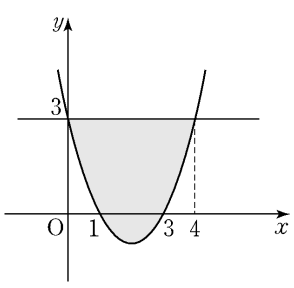
두 그래프의 교점은 $x^2-4x+3=3$

$\therefore\ x=0,\ 4$

따라서, 구하는 넓이는

$\int_0^4\{3-(x^2-4x+3)\}dx$

$=\dfrac{1\cdot(4-0)^3}{6}=\dfrac{32}{3}$



5. 정답 ④

X가 이항분포 $\mathrm{B}(9,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=9\cdot p$, $\mathrm{V}(X)=9\cdot p\cdot(1-p)$

$\therefore\ \{9\cdot p\}^2=9\cdot p\cdot(1-p)$ 에서

$9p=1-p$ $(\because\ 0<p<1)$

$\therefore\ p=\dfrac{1}{10}$

6. 정답 ①

주어진 조건으로부터

(가) $a+b=c+d$

(나) $7a+b=49c+7d$

(다) $f(x)=f^{-1}(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 는 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}\cdot(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

이므로 $\frac{a}{c}=-\frac{d}{c}$ 즉, $a=-d$

이들 세 조건을 이용하면 $a=4c,\ b=-7c,\ d=-4c$ 이다.

따라서 $f(5)=\dfrac{5a+b}{5c+d}=\dfrac{13c}{c}=13$

7. 정답 ①

① $A*U=(A\cap U)\cup(A\cup U)^c=A\cup\phi=A$

② $B*A=(B\cap A)\cup(B\cup A)^c$ 이므로 $A*B=B*A$

③ $A*\phi=(A\cap\phi)\cup(A\cup\phi)^c=\phi\cup A^c=A^c$

④ $A^c*B^c=(A^c\cap B^c)\cup(A^c\cup B^c)^c$
$=(A\cup B)^c\cup(A\cap B)=A*B$

⑤ $A*A^c=(A\cap A^c)\cup(A\cup A^c)^c=\phi\cup U^c=\phi$

8. 정답 ⑤

$x=R^{\frac{27}{23}}$ 일 때, $v=\frac{1}{2}v_0$ 이므로

$\dfrac{v_c}{v}=1-k\log\dfrac{x}{R}$ 에서

$2=1-k\log R^{\frac{4}{23}}$, $k\log R=-\dfrac{23}{4}$

$x=R^a$ 일 때, $v=\frac{1}{3}v_0$ 이므로

$3=1-k\log R^{a-1}=1-(a-1)k\cdot\log R$

$\therefore\ 2=\frac{23}{4}(a-1)$

$\therefore\ a=\dfrac{31}{23}$

9. 정답 ③

그래프에서 $\lim_{x\to-1-}f(x)=3$, $\lim_{x\to+}f(x)=0$

$\therefore\ \lim_{x\to-1-}f(x)+\lim_{x\to0+}f(x)=3$

10. 정답 ②

한 병의 용량을 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따른다. 이 때, 크기 25인 표본의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\geq 2000)=\mathrm{P}\left(Z\geq\dfrac{2000-m}{2}\right)$
$=0.9772=0.5+0.4772$
$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)$
$=0.5+\mathrm{P}(-2\leq Z\leq 0)$

$\therefore\ \dfrac{2000-m}{2}=-2$

$\therefore\ m=2004$

11. 정답 ③

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a_1+2\log a_2+3\log a_3+\cdots+n\log a_n=n^2-n$

$\therefore\ \sum_{m=1}^{n}m\log a_m=n^2-n$

따라서

$n\log a_n=(n^2-n)-\{(n-1)^2-(n-1)\}$
$=2n-2\ \ (n\geq 2)$

이고, $\log a_1=1^2-1=0$ 이므로

$n\log a_n=2n-2\ \ (n\geq 1)$

$\therefore \log a_n=\dfrac{1}{n}(2n-2)=2-\dfrac{2}{n}$

$n\leq 2$ 이면 $\log a_n$ 의 가수는 0 이고

$n\geq 3$ 이면 $\log a_n$ 의 가수는 $1-\dfrac{2}{n}$ 이다.

$\log a_k$ 의 가수가 0.99 이므로

$1-\dfrac{2}{k}=0.99$

$\frac{2}{k}=\frac{1}{100}$

$\therefore k=200$

12. 정답 ①

네 사람은 수리영역 문항을 각각 1문항씩 풀어야 하며, C가 언어영역을 풀었다고 할 때, 네 사람이 푼 문항을 표로 나타내면 다음과 같다.

	언어	수리	외국어	사탐	계
A	○	○	☆		3
B		○	○		3
C	○	○		○	3
D		○	○		3
계	3	4	3	2	12

B 와 D 는 언어영역 문항을 풀 수도 있고 사회탐구영역 문항을 풀 수도 있다.
따라서 'A는 외국어영역 문항을 풀었다.'가 참이다.

13. 정답 ④

자연수 n에 대하여 6^n은 짝수, 3^n은 홀수이므로

$a_n=f(6^n)-f(3^n)$

$=\log_2 6^n-\log_3 3^n$

$=n\cdot\log_2 6-n=n\cdot(1+\log_2 3)-n$

$=n\cdot\log_2 3$

$\therefore \sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}n\cdot\log_2 3=\log_2 3\times\frac{15\cdot16}{2}$

$=120\log_2 3$

14. 정답 ①

$f(mn)=f(m)+f(n)$

(ⅰ) m이 짝수, n이 짝수일 때

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

따라서, m과 n이 모두 짝수일 때는 항상 성립한다.

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times10=100$ (개)

(ⅱ) m이 짝수, n이 홀수일 때

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_3 n$

$\log_2 n=\log_3 n$

$\therefore n=1$

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times1=10$ (개)

(ⅲ) m이 홀수, n이 짝수

$\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m=\log_3 m$

$\therefore m=1$

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $1\times10=10$ (개)

(ⅳ) m이 홀수, n이 홀수

$\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

따라서, m과 n이 모두 홀수일 때는 항상 성립한다.

순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $10\times10=10$ (개)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는

$100+10+10+100=220$ (개)

15. 정답 ⑤

주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우와 검은 공을 꺼내는 경우로 나누어 생각하면

(ⅰ) 흰 공을 꺼내는 경우 ; $\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) 검은 공을 꺼내는 경우 : $\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 : $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

16. 정답 ①

주어진 식의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1}=(n+1)\log a_n+1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$\frac{\log a_{n+1}}{n+1}=\frac{\log a_n}{n}+\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$b_n=\frac{\log a_n}{n}$ 이라 하면 $b_1=1$이고

$b_{n+1}=b_n+\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

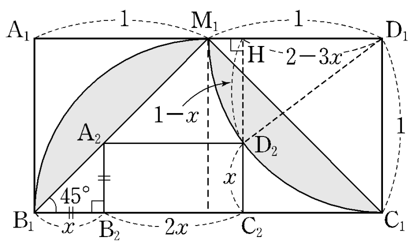
$=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)=\left(2-\frac{1}{n}\right)$

이므로 $\log a_n=n\times\left(2-\frac{1}{n}\right)$ 이다.

$\therefore f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$ 이고 $g(n)=2-\frac{1}{n}$ 이므로

$\frac{g(10)}{f(4)}=\frac{2-\frac{1}{10}}{\frac{1}{4\times5}}=38$

17. 정답 ③



무한등비급수 $S=\frac{a}{1-r}$ 를 구한다.

R_1의 넓이 $a=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\times2=\frac{\pi}{2}-1$

공비 r를 구하기 위해 먼저 길이의 닮음비

$\frac{\overline{C_2D_2}}{\overline{C_1D_1}}$ 를 구한다.

$\overline{C_2D_2}=x$ 라 두면 D_2에서 $\overline{A_1D_1}$ 에서 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{B_1M_1}$ 과 $\overline{B_1C_1}$ 이 이루는 각이 $45°$이므로

$\overline{B_1B_2}=\overline{A_2B_2}=x$, $\overline{B_2C_2}=2x$, $\overline{HD_1}=2-3x$, $\overline{HD_2}=1-x$ 가 되고

$\overline{HD_1}^2+\overline{HD_2}^2=\overline{D_1D_2}^2=1$ 에서

$(2-3x)^2+(1-x)^2=1$, $5x^2-7x+2=0$

$(5x-2)(x-1)=0$ $\therefore x=\frac{2}{5},\ 1$

$x\neq1$ 이므로 $x=\frac{2}{5}$

따라서, 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$ 이고, 이것이 공비가 된다.

$\therefore S=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

18. 정답 ⑤

3명의 학생이 흰색 탁구공을 각각 $x,\ y,\ z$개씩 받는다면

$x+y+z=8$ ($x\geq1,\ y\geq1,\ z\geq1$ 인 자연수)

$\therefore {}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=21$ …… ㉠

주황색 탁구공을 각각 $x',\ y',\ z'$ 개씩 받는다면

$x'+y'+z'=7$ ($x'\geq1,\ y'\geq1,\ z'\geq1$ 인 자연수)

$\therefore {}_{3+4-1}C_4={}_6C_4=15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $21\times15=315$

19. 정답 ②

$\log x$ 의 지표와 가수가 각각 $f(x),\ g(x)$이므로

$\log x=f(x)+g(x)$ ($f(x)$ 는 정수, $0\leq g(x)<1$)

$f(x)-(n+1)g(x)=n$

$f(x)-n=(n+1)\cdot g(x)$ …… ㉠

$0\leq g(x)<1$ 이므로

$0\leq f(x)-n<n+1$

$n\leq f(x)<2n+1$

$f(x)$는 정수이므로, $n,\ n+1,\ \cdots,\ 2n$이고, 식 ㉠에 대입하면

$f(x)=n$일 때 $g(x)=0$

$\therefore \log x=n$

$f(x)=n+1$ 일 때 $g(x)=\frac{1}{n+1}$

$\therefore \log x=n+1+\frac{1}{n+1}$

$f(x)=n+k$일 때 $g(x)=\frac{k}{n+1}$

$\therefore \log x=n+k+\frac{k}{n+1}$

$\therefore a_n=10^n\times10^{n+1+\frac{1}{n+1}}\times\cdots\times10^{n+k+\frac{k}{n+1}}\times\ \cdots\times10^{2n+\frac{n}{n+1}}$

$\therefore \log a_n = \sum_{k=0}^{n}\left(n+k+\frac{k}{n+1}\right)$

$= n(n+1)+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2(n+1)}$

$= \frac{3n^2+3n}{2}+\frac{n}{2} \quad = \frac{3n^2+4n}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n^2} = \frac{3}{2}$

20. 정답 ③

$(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^r 의 계수는 ${}_n\mathrm{C}_r$ 이므로

$(1+x)^n(1+x)^n$ 에서 x^n 의 계수는

${}_n\mathrm{C}_0\,{}_n\mathrm{C}_n + {}_n\mathrm{C}_1\,{}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2\,{}_n\mathrm{C}_{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,{}_n\mathrm{C}_0$

$= {}_n\mathrm{C}_0\,{}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1\,{}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2\,{}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\,{}_n\mathrm{C}_n$

$= ({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2$

$(1+x)^{2n}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$

$\therefore ({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$

$\therefore ({}_{12}\mathrm{C}_0)^2 + ({}_{12}\mathrm{C}_1)^2 + ({}_{12}\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_{12}\mathrm{C}_n)^2 = {}_{24}\mathrm{C}_{12}$

21. 정답 ④

접점 $(t,\ t^3+at^2+bt)$ 에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2at+b)(x-t)+t^3+at^2+bt$

$y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2$

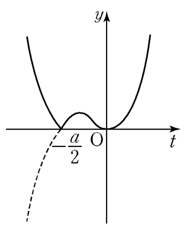
따라서, 접선이 y축과 만나는 점 P는

$\mathrm{P}(0,\ -2t^3-at^2)$

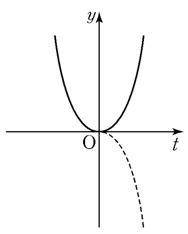
원점에서 점 P까지의 거리 $g(t)$는

$g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2\cdot|2t+a|$

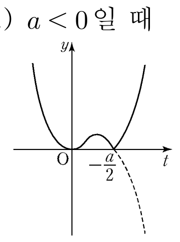
(i) $a>0$일 때



(ii) $a=0$일 때



(iii) $a<0$일 때



따라서, 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능이려면 $a=0$

조건 (가)에서 $f(1)=1+a+b=2$, $b=1$

$\therefore f(x)=x^3+x$

$\therefore f(3)=3^3+3=30$

22. 정답 25

$\int_{-a}^{a}(3x^2+2x)dx = \int_{-a}^{a}3x^2dx \quad \left(\because \int_{-a}^{a}2x\,dx=0\right)$

$=2\int_{0}^{a}3x^2dx \quad (\because 3x^2$ 은 우함수$)$

$=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$

$2a^3=\frac{1}{4}$ 에서 $a=\frac{1}{2}$

$\therefore 50a=25$

23. 정답 256

조건 (나)에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 -2인 등비수열이므로 $a_2=-2\times a_1$

조건 (가)에서 $a_1=-2a_1+3$, $a_1=1$

$\therefore a_n=1\cdot(-2)^{n-1}$

$\therefore a_9=1\cdot(-2)^8=256$

24. 정답 22

삼차함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=0$이다.

$f'(x)=6x^2-24x+a$ 이므로 $f'(1)=6-24+a=0$

$\therefore a=18$

따라서, $f(x)=2x^3-12x^2+18x-4$ 이고

$f(1)=2-12+18-4=4=M$

$\therefore a+M=18+4=22$

25. 정답 72

어른 2명이 앉는 방법 : $2\times3\times2!=12$ 가지

어린이 3명이 앉는 방법 : $3!=6$ 가지

$\therefore 12\times6=72$ 가지

26. 정답 20

5개 중 임의로 2개를 배정하는 전체 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2=10$

(i) $X=1$인 경우

배정된 서랍의 번호를 순서쌍으로 나타내면

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5) 이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{10}$

(ii) $X=2$인 경우

(2, 3), (2, 4), (2, 5) 이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$인 경우

(3, 4), (3, 5) 이므로 $\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{10}$

(iv) $X=4$인 경우

(4, 5) 이므로 $\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{10}$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 확률변수 X의 확률분포는

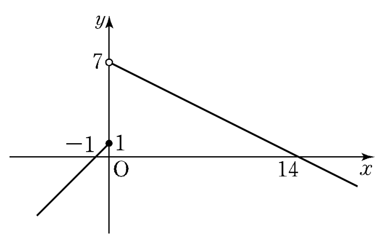
X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{10}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{10}+4\times\frac{1}{10}=2$

$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\times\mathrm{E}(X)=20$

27. 정답 13

$y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고

함수 $f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(i) $a=0$일 때

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0+}(f(x))^2=49$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=\lim_{x\to0-}(f(x))^2=1$

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)\neq\lim_{x\to0-}f(x)f(x-a)$ 이므로

$a=0$일 때 함수 $f(x)f(x-a)$는 $x=a$에서 불연속이다.

(ii) $a\neq0$일 때

$\lim_{x\to a+}f(x)f(x-a)=7f(a)$

$\lim_{x\to a-}f(x)f(x-a)=f(a)$

$f(a)f(0)=f(a)$

따라서, 함수 $f(x)f(x-a)$가 $x=a$에서 연속이 되기 위해서는

$7f(a)=f(a)$, $f(a)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 14

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 13이다.

28. 정답 6

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=1+(n-1)\times6=6n-5$ 이다.

$\therefore a_{2n}=12n-5$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(6k-5)$

$=6\sum_{k=1}^{n}k-5n$

$= 6 \times \dfrac{n(n+1)}{2} - 5n$

$= 3n^2 - 2n$

$\therefore\ S_{2n} = 3 \times (2n)^2 - 2 \times (2n) = 12n^2 - 4n$

$a_{n+1} - a_n = 6 \quad (n \geq 1)$이므로

$T_{2n} = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{2n} a_{2n}$

$= (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n})$

$= 6 + 6 + \cdots + 6$

$= 6n$

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n} T_{2n}}{S_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(12n-5) \times 6n}{12n^2 - 4n}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{36n - 15}{6n - 2}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \frac{36 - \frac{15}{n}}{6 - \frac{2}{n}}$

$= \dfrac{36}{6} = 6$

29. 정답 79

(가)에서 $f(a) + g(b) = 2 + \dfrac{1}{4}$ 이므로

$f(a) = 2,\ g(b) = \dfrac{1}{4}$

(나)에서 $g(b) = \dfrac{1}{4}$ 이므로 $g(a) \neq 0$

이때 $g\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1 - g(a)$ 이므로

$g(a) = 1 - g(a) + \dfrac{1}{4}$, 즉 $g(a) = \dfrac{5}{8}$

$\log a = f(a) + g(a) = 2 + \dfrac{5}{8} = \dfrac{21}{8}$

$\therefore\ a = 10^{\frac{21}{8}}$

(다)에서 $g(b) \neq 0$ 이므로 $f\left(\dfrac{1}{b}\right) = -1 - f(b)$,

$a^5 = 10^{\frac{105}{8}} = 10^{13 + \frac{1}{8}}$ 에서 $f(a^5) = 13$ 이므로

$f(b) = -1 - f(b) + 13$, 즉 $f(b) = 6$

$\log b = f(b) + g(b) = 6 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{4}$

$\therefore\ b = 10^{\frac{25}{4}}$

$\therefore\ ab = 10^{\frac{21}{8} + \frac{25}{4}} = 10^{\frac{71}{8}}$

따라서 $m + n = 79$

30. 정답 16

$f(x) = x(x-p)(x-6) \quad (0 < p < 6)$으로 놓을 수 있다.

이때, k의 값에 관계없이 $\displaystyle\int_\alpha^\gamma \{f(x) + f(x-k)\}dx = 0$ 이어야 하므로

$k = 0$일 때 두 함수 $y = f(x)$, $y = -f(x)$ 의 그래프의 교점은

$(0,\ 0)$, $(p,\ 0)$, $(6, 0)$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_\alpha^\gamma \{f(x) + f(x)\}dx = 2\int_0^6 f(x)dx = 0$ 이다.

즉, $f(x) = x(x-p)(x-6)$ 는 점$(0, p)$에 대하여 대칭이다.

$x(x-p)(x-6) = -(2p-x)(2p-x-p)(2p-x-6)$

$= (x-2p+6)(x-p)(x-2p)$

$\therefore\ -2p + 6 = 0$

$\therefore\ p = 3$

$f(x) = x(x-3)(x-6)$ 이고, $x = 4$ 에서 두 곡선이 만나므로

$f(4) = -f(4-k)$

$4(4-3)(4-6) = -(4-k)(4-k-3)(4-k-6)$

$= (4-k)(1-k)(2+k)$

$\therefore\ k = 2$

$\therefore \displaystyle\int_0^k f(x)dx = \int_0^2 x(x-3)(x-6)dx$

$\displaystyle = \int_0^2 (x^3 - 9x^2 + 18x)dx$

$= \left[\dfrac{x^4}{4} - 3x^3 + 9x^2\right]_0^2 = 16$

8회 정답 및 해설

1	①	2	⑤	3	①	4	⑤	5	①
6	⑤	7	②	8	④	9	②	10	⑤
11	②	12	③	13	③	14	③	15	⑤
16	①	17	④	18	⑤	19	③	20	②
21	③	22	12	23	3	24	55	25	61
26	5	27	4	28	64	29	11	30	527

1. 정답 ①

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{3n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 - \frac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{2 + 0 - 0}{3 - 0} = \dfrac{2}{3}$

2. 정답 ⑤

$\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r (x^2)^{7-r} \left(\dfrac{1}{x}\right)^r = {}_7\mathrm{C}_r x^{14-3r}$

$14 - 3r = 2$ 에서 $r = 4$

따라서 x^2 의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_4 = 35$ 이다.

3. 정답 ①

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$ 이므로

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A \cup B) = \dfrac{3}{4}$

두 사건 A, B가 서로 배반이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ 이다.

따라서 $\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{P}(B)$ 에서 $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{4}$ 이다.

4. 정답 ⑤

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2) = 0$ 이므로 $\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x) - 1\} = 0$

$\therefore\ f(2) = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x\to2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 2$

$\therefore \displaystyle\lim_{h\to0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$

$\displaystyle = \lim_{h\to0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} + \lim_{h\to0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h}$

$= 2f'(2) = 2 \times 2 = 4$

5. 정답 ①

(i) 4 명의 학생 중에서 선물을 받을 2 명을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 이다.

(ii) (i)에서 택한 2 명에게 4 개의 선물을 적어도 하나씩 나누어 주는 방법의 수는 각각 하나씩 나누어 주고 남은 2 개에서 2 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_{2+2-1}\mathrm{C}_2 = 3$ 이다.

$\therefore\ {}_4\mathrm{C}_2 \times 3 = 18$

6. 정답 ⑤

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 = (x+1)(3x-5)$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = \dfrac{5}{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-1)$	↘	$f\left(\frac{5}{3}\right)$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값을 가지므로

$f(-1)=-1-1+5+k=20$
$\therefore\ k=17$

7. 정답 ②

$f(x)$가 분수함수이므로 $c\neq 0$ …… ㉠

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 가 원점을 지나므로 $b=0$ …… ㉡

또, $f(x)$의 점근선의 방정식이 $x=1$, $d=-2$ 이므로

$-\dfrac{d}{c}=1$, $\dfrac{a}{c}=-2$ ……㉢

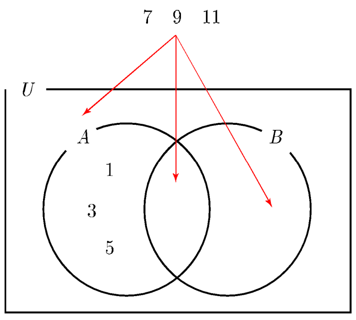
㉠, ㉡, ㉢에서 $f(x)=\dfrac{-2x}{x-1}$

$f^{-1}(-1)=\alpha$ 라 하면 $f(\alpha)=-1$

$f(\alpha)=-\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}=-1$ 에서 $\alpha=-1$

8. 정답 ④

주어진 조건에 의해서 7, 9, 11은 $A\cap B$ 또는 $B-A$ 또는 $(A\cup B)^C$에 속하는 원소이다.
따라서 순서쌍 (A, B)의 개수는 7, 9, 11의 원소가 속하는 집합을 정하는 방법의 수 $3^3=27$



9. 정답 ②

잡음 지수가 5이고 주파수 대역이 B_1 일 때의 수신 가능한 신호의 최소 크기를 P_1 이라 하면

$P_1=a+5+10\log B_1$

잡음 지수가 15이고 주파수 대역이 B_2 일 때의 수신 가능한 신호의 최소 크기를 P_2 라 하면

$P_2=a+15+10\log B_2$

$P_1=P_2$ 이므로

$a+5+10\log B_1=a+15+10\log B_2$

$\log B_2-\log B_1=-1$, $\log\dfrac{B_2}{B_1}=-1$

$\therefore\ \dfrac{B_2}{B_1}=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

10. 정답 ⑤

$(x+1)^{24}$에서 x^{22}항의 계수는 ${}_{24}C_{22}={}_{24}C_2$
$x(x+1)^{23}$에서 x^{22}항의 계수는 ${}_{23}C_{21}={}_{23}C_2$
$x^2(x+1)^{22}$에서 x^{22}항의 계수는 ${}_{22}C_{20}={}_{22}C_2$
⋮
$x^{22}(x+1)^2$에서 x^{22}항의 계수는 ${}_2C_0={}_2C_2$
따라서 구하는 계수는

${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{24}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{24}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{24}C_2$
$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{24}C_2$
⋮
$={}_{24}C_3+{}_{24}C_2$
$={}_{25}C_3$
$=\dfrac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2}$
$=2300$

[다른 풀이]
위 풀이에서

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{24}C_2=\sum_{k=2}^{24}\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=\sum_{k=1}^{23}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{23\cdot 24\cdot 25}{6}$$
$$=2300$$

[다른 풀이]
주어진 다항식은 첫째항이 $(1+x)^{24}$이고 공비가 $\dfrac{x}{1+x}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제 23항까지의 합이다.
따라서 주어진 다항식은

$$\frac{(1+x)^{24}\left\{1-\left(\frac{x}{1+x}\right)^{23}\right\}}{1-\frac{x}{1+x}}=(1+x)^{25}-(1+x)x^{23}$$

따라서 구하는 x^{22}의 계수는 $(1+x)^{25}$의 x^{22}의 계수와 같다.
따라서 구하는 계수는

${}_{25}C_3=\dfrac{25\cdot 24\cdot 23}{3\cdot 2}=2300$

11. 정답 ②

$\dfrac{2\cdot 2}{2\times 2+3\times 3}=\dfrac{4}{13}$

12. 정답 ③

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1+(-1)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1-}f(-x)=\lim\limits_{t\to -1+}f(t)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(-x)=\lim\limits_{t\to -1-}f(t)=1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(-x)\neq\lim\limits_{x\to 1+}f(-x)$ 이므로 함수 $f(-x)$는 $x=1$에서의 극한값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(1)f(-1)=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)f(-x)=1\times(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)f(-x)=(-1)\times 1=-1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}f(x)f(-x)=-1$

따라서 $f(1)f(-1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)f(-x)$ 이므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

13. 정답 ③

$\mathrm{A}(k, 3\sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$, $\mathrm{C}(k, 0)$에서
$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{k}$, $\overline{\mathrm{OC}}=k$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{k}$
$\sqrt{k}$, k, $3\sqrt{k}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$k^2=\sqrt{k}\cdot 3\sqrt{k}$, $k^2=3k$, $k(k-3)=0$
따라서 $k=3\ (\because\ k>0)$

14. 정답 ③

$$\lim_{k\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OB}}-\overline{\mathrm{BC}}}=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k^2+9k}-3\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k}}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k+9}-3}{\sqrt{k+1}-1}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{k(\sqrt{k+1}+1)}{k(\sqrt{k+9}+3)}$$
$$=\lim_{k\to 0+}\frac{\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+9}+3}=\frac{1}{3}$$

15. 정답 ⑤

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots$$
$$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$$
$$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\frac{k}{n}=x_k$ 라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

16. 정답 ①

$a_{n+1}=\frac{na_n+6}{n+2}$ 의 양변에 $(n+2)$ 를 곱하면

$(n+2)a_{n+1}=na_n+6$

이다. 다시 양변에 $(n+1)$ 을 곱하면

$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+6(n+1)$

이다. $b_n=n(n+1)a_n$ 이라 하면

$b_{n+1}=b_n+\boxed{6(n+1)}$

이다. $b_1=2$ 이고 $b_{n+1}-b_n=6(n+1)$ 이므로

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}6(k+1)$$

$$=2+6\left\{\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)\right\}$$

$$=\boxed{3n^2+3n-4}\quad(n\ge 1)$$

이다. $n(n+1)a_n=3n^2+3n-4$ 이므로

$$a_n=\frac{\boxed{3n^2+3n-4}}{n(n+1)}\quad(n\ge 1)$$

$f(n)=6(n+1)$, $g(n)=3n^2+3n-4$ 이므로

$f(4)+g(10)=30+326=356$

17. 정답 ④

딸기의 무게 X가 평균이 m 이고 표준편차가 σ 인 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 하자.

임의추출한 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\overline{X}=20$, 표본표준편차 $s=5$ 의 결과를 이용하여 모평균 m 을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$$\left[20-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\ ,\ 20+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\right]$$

조건에서 신뢰구간이 $[19.02,\ a]$ 이므로

$$20-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=19.02\ ,\ 20+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=a$$

위의 식을 풀면 $n=100$, $a=20.98$

$\therefore\ n+a=120.98$

18. 정답 ⑤

삼각형 OAB 의 넓이를 S, 원의 중심을 C 라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{a^2+9}$, $S=\triangle COA+\triangle CBO+\triangle CAB$ 이므로

$$S=\frac{3}{2}a=r\times\frac{a+3+\sqrt{a^2+9}}{2}$$

위의 식을 정리하면

$$\frac{r}{a}=\frac{3}{a+3+\sqrt{a^2+9}}$$

$$\therefore\ \lim_{a\to 0+}\frac{r}{a}=\lim_{a\to 0+}\frac{3}{a+3+\sqrt{a^2+9}}$$

$$=\frac{3}{3+\sqrt{9}}=\frac{1}{2}$$

19. 정답 ③

$f(x)=x^3+ax$ 를 미분하면

$f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A 에서의 접선의 방정식은

$y=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(3+a)(x+1)+(-1-a)$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ b=2$

따라서 점 B 의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$ 이다.

마찬가지로 점 B 에서의 접선의 방정식은

$y=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

이 접선이 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 구하면

$x^3+ax=(12+a)(x-2)+(8+2a)$

$x^3-12x+16=0$, $(x-2)^2(x+4)=0$

$\therefore\ c=-4$

주어진 조건에서

$$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)$$
$$=8+2a-64-4a$$
$$=-80$$

$\therefore\ a=12$

[다른 풀이]

점 A 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 하면

$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-b)$

$g(x)$ 는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$ 는 이차항을 갖지 않는다.

즉, 이차항의 계수는 0 이므로

$-b+2=0\quad\therefore\ b=2$

점 B 에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$ 라 하면

$f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-c)$

마찬가지로 이차항의 계수는 0 이므로

$-c-4=0\quad\therefore\ c=-4$

따라서

$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=-56-2a=-80$

$\therefore\ a=12$

20. 정답 ②

두 점 $A(2,0)$, $B(0,3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{3}{2}x+3$$

이 직선과 함수 $y=ax^2$ 의 그래프의 교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$-\frac{3}{2}p+3=ap^2\ \cdots\cdots\ ㉠$$

$$S_1=\int_0^p\left\{\left(-\frac{3}{2}x+3\right)-ax^2\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^p$$

$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}ap^3$$

$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}p\left(-\frac{3}{2}p+3\right)$$

$$=-\frac{1}{4}p^2+2p\ \cdots\cdots\ ㉡$$

한편 $S_1+S_2=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$ 이고 $S_1:S_2=13:3$ 이므로

$$S_1=3\times\frac{13}{16}=\frac{39}{16}\ \cdots\cdots\ ㉢$$

㉡, ㉢에서 $-\frac{1}{4}p^2+2p=\frac{39}{16}$

$4p^2-32p+39=0$

$(2p-3)(2p-13)=0$

따라서 $p=\frac{3}{2}$ $(\because\ 0<p<2)$

그러므로 ㉠에서 $-\frac{9}{4}+3=\frac{9}{4}a$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

21. 정답 ③

R_1 에 있는 원의 반지름의 길이는 $2-\sqrt{2}$ 이므로

$S_1=(2-\sqrt{2})^2\pi$

R_2 에 있는 작은 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면

$\overline{AC}=2\sqrt{2}x+2(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

$x=2-\sqrt{2}$

R_1 에 있는 원과 R_2 에 있는 작은 원의 넓이의 비는

$$2^2:(2-\sqrt{2})^2=1:\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

따라서 R_n 과 R_{n+1} 에서 각각 새로 그려지는 두 원의 넓이의 비는

$1 : \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ 이고 원의 개수의 비는 1 : 2 이다.
그러므로 구하는 무한급수의 합은 첫째항이 $S_1 = (2-\sqrt{2})^2\pi$ 이고,
공비가 $2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{2}$ 인 무한등비급수의 합과 같다.
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{(2-\sqrt{2})^2\pi}{1-(3-2\sqrt{2})} = (\sqrt{2}-1)\pi$

22. 정답 12

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-a_n}{2}$ 이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{3-a_n}{2}=0$, $\lim_{n\to\infty}a_n=3$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4na_n+5}{n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+\frac{5}{n}}{1-\frac{3}{n}}=\frac{4\times3+0}{1-0}=12$

23. 정답 3

$(x+a+4)(x+2a+1) \ge 0$
$x^2+(3a+5)x+(a+4)(2a+1) \ge 0$
모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $D \le 0$ 이다.
$D=(3a+5)^2-4(a+4)(2a+1)$
$=9a^2+30a+25-4(2a^2+9a+4)$
$=a^2-6a+9$
$=(a-3)^2 \le 0$
$\therefore a=3$
[다른 풀이]
모든 실수 x 에 대하여
$(x+a+4)(x+2a+1) \ge 0$ 이므로 완전제곱식이 되어야 한다.
따라서 $a+4=2a+1$
$\therefore a=3$

24. 정답 55

10 이하의 음이 아닌 정수를 확률변수 X 라 하면
$f(r) = {}_{10}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \mathrm{P}(X=r)$ 이므로
확률변수 X 는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.
$\mathrm{E}(X) = 10\times\frac{1}{2}=5$, $\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$
$\therefore 2\sum_{r=0}^{10}r^2f(r) = 2\mathrm{E}(X^2) = 2[\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2] = 55$

25. 정답 61

4 장의 카드에서 2 장을 뽑는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 이고
이 중에서 '한'과 '국'이 적힌 카드를 뽑는 경우의 수는 1 이다.
따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.
$\therefore 10p+q=60+1=61$

26. 정답 5

조건 (가)에서 $f(a)=f(2)=f(6)=k$ 로 놓으면
$f(a)-k=f(2)-k=f(6)-k=0$
$g(x)=f(x)-k$ 라 하면
$g(a)=g(2)=g(6)=0$
$g(x)=(x-a)(x-2)(x-6)$
그러므로 $f(x)=(x-a)(x-2)(x-6)+k$
$f(x)$ 를 미분하면
$f'(x)=(x-2)(x-6)+(x-a)(x-6)+(x-a)(x-2)$
조건 (나)에서 $f'(2)=-4$ 이므로
$-4(2-a)=-4$
$\therefore a=1$
$\therefore f'(a)=(a-2)(a-6)=(-1)\times(-5)=5$

27. 정답 4

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 가수가 $f(x)$ 이므로
$f(x)=\log3$ 에서 $\log x$ 의 가수는 $\log 3$ 이다.
따라서 $\log x = n+\log 3$ (n 은 정수) …… ㉠
$\frac{1}{100} \le x \le 100$ 일 때, $-2 \le \log x \le 2$
이것을 ㉠에 대입하면
$-2 \le n+\log3 \le 2$
$-2-\log3 \le n \le 2-\log3$
$0<\log3<1$ 이므로 $-3<n<2$
$\therefore n=-2, -1, 0, 1$
따라서 구하는 x 의 개수는 4 이다.
[참고]
x 의 값을 구하면 다음과 같다.
(i) $n=-2$ 일 때
$\log x=-2+\log3$, $\log x=\log(3\times10^{-2})$
$x=3\times10^{-2}=\frac{3}{100}$
(ii) $n=-1$ 일 때
$\log x=-1+\log3$, $\log x=\log(3\times10^{-1})$
$x=3\times10^{-1}=\frac{3}{10}$
(iii) $n=0$ 일 때
$\log x=\log3$
$x=3$
(iv) $n=1$ 일 때
$\log x=1+\log3$
$x=30$
따라서 구하는 x 는 $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{10}$, 3, 30 이다.

28. 정답 64

$f(t)=2t^2-8t$, $g(t)=t^3-10t^2+24t$ 라 하자.
x 초 후의 두 점 P , Q 사이의 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$\left|\int_0^x f(t)dt-\int_0^x g(t)dt\right| = \left|\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt\right|$
$h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t)\}dt$ 라 하자.
$h'(x)=f(x)-g(x)$
$=(2x^2-8x)-(x^3-10x^2+24x)$
$=-x^3+12x^2-32x$
$=-x(x-4)(x-8)$
$h'(x)=0$ 에서 $x=0, 4, 8$
$h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	8
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$h(x)$	0	↘	$h(4)$	↗	$h(8)$

$h(x)=\int_0^x\{(2t^2-8t)-(t^3-10t^2+24t)\}dt$
$=\int_0^x(-t^3+12t^2-32t)dt$
$=-\frac{1}{4}x^4+4x^3-16x^2$
$x=4$ 일 때
$|h(x)|=\left[\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right]_0^4=64$
$x=8$ 일 때
$|h(x)|=\left[\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right]_0^8=0$
따라서 $|h(x)|$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 64 를 갖는다.

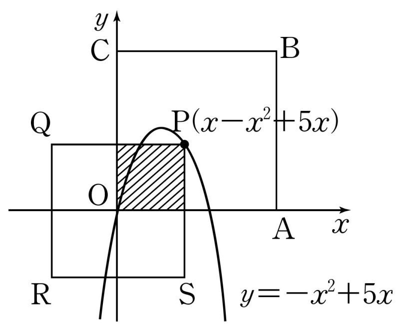
29. 정답 11

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은 $a_n=6+(n-1)p$
수열 $\{b_n\}$ 의 일반항은 $b_n=6p^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 되려면 모든 자연수 n 에 대하여
$6p^{n-1}=6+p(m-1)$ 인 자연수 m 이 존재한다.
$p(m-1)=6p^{n-1}-6$
$m-1=\frac{6p^{n-1}-6}{p}=6p^{n-2}-\frac{6}{p}$
$\frac{6}{p}=6p^{n-2}-m+1$
p^{n-2} ($n\ge2$)과 m 은 모두 자연수이므로 $\frac{6}{p}$ 도 자연수이다.

따라서 p 는 6 의 약수이다.
$\therefore\ p=2,\ 3,\ 6\ (\because\ p>1)$
그러므로 모든 자연수 p 의 합은 $2+3+6=11$ 이다.
[다른 풀이]
$a_m=b_2$ 인 자연수 m 이 존재하므로
$6+(m-1)p=6p$ 에서
$m-1=\dfrac{6(p-1)}{p}=6-\dfrac{6}{p}$
$\dfrac{6}{p}$ 이 자연수이어야 하므로 p 는 6의 약수이다.
(ⅰ) $p=2$ 일 때
$a_m=4+2m\ ,\ b_n=6\cdot 2^{n-1}$
(ⅱ) $p=3$ 일 때
$a_m=3+3m\ ,\ b_n=6\cdot 3^{n-1}$
(ⅲ) $p=6$ 일 때
$a_m=6m\ ,\ b_n=6^n$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 모든 경우 임의의 자연수 n 에 대하여
$b_n=a_m$ 을 만족시키는 m 이 존재하므로
수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항은 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 된다.
$\therefore\ p=2,\ 3,\ 6$ 이고 모든 자연수 p 의 합은 11 이다.

30. 정답 527

$\mathrm{P}(x,\ -x^2+5x)$ 라면 $0\le x\le 5$ 일 때
겹치는 부분의 넓이 $S(x)$는
$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$
$S'(x)=-3x^2+10x=-3x\left(x-\dfrac{10}{3}\right)$
따라서, $x=\dfrac{10}{3}$ 일 때 $S(x)$는 최댓값을 갖는다.
$S\left(\dfrac{10}{3}\right)=-\dfrac{1000}{27}+\dfrac{500}{9}=\dfrac{500}{27}$
$\therefore\ p=27,\ q=500,\ p+q=527$



9회 정답 및 해설

1	③	2	⑤	3	②	4	④	5	②
6	③	7	②	8	⑤	9	②	10	②
11	④	12	①	13	②	14	③	15	①
16	⑤	17	①	18	③	19	④	20	⑤
21	⑤	22	21	23	19	24	16	25	2
26	30	27	56	28	3	29	4	30	420

1. 정답 ③

$\log_{\sqrt{3}}2+\log_3\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\log_3\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$

2. 정답 ⑤

$(1+2x)^6=\displaystyle\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k(2x)^k$ 이므로
$(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는 $k=4$ 일 때이므로
${}_6\mathrm{C}_4\times 2^4=240$
$(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 $k=3$ 일 때이므로
${}_6\mathrm{C}_3\times 2^3=160$
따라서 $(1+2x)^6(1-x)$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는
$240-160=80$

3. 정답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$ 이다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$
$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$

4. 정답 ④

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=6\int_1^2 f(x)dx=14$

5. 정답 ②

$\dfrac{a_n}{n+1}=b_n$ 이라 하면 $a_n=(n+1)b_n$ 이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)b_n}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n+1)}{3n^2}\times\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}\times 3=2$$

6. 정답 ③

집합 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5\}$, $C=\{2,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여,
$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{2\}$
$B\cup C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$, $B\cap C=\{2,\ 5\}$
$A\cup C=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap C=\{2,\ 4\}$ 이고,
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 $B\Rightarrow A$
$(B\cup C)-(B\cap C)=\{1,\ 4\}$ 에서 $B\Rightarrow C$
$(A\cup C)-(A\cap C)=\{3,\ 5\}$ 에서 $A\Rightarrow C$이다.
$\therefore\ B\Rightarrow A\Rightarrow C$

7. 정답 ②

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1$ … ㉠
$f(x)$는 $x=0$ 에서 미분가능하므로
$f'(0)=\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$
그런데 $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$,
$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=2a(0-1)=-2a$ 이므로
$-1=-2a$ … ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\dfrac{1}{2}$
$\therefore\ f(1)=b=\dfrac{1}{2}$ 이다.

8. 정답 ⑤

$f^{-1}(x)=g(x)$ 이므로 $g^{-1}(x)=f(x)$
$(g\circ g\circ g\circ g\circ g)(x)=-3$ 에서
$x=(g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1}\circ g^{-1})(-3)$
$=(f\circ f\circ f\circ f\circ f)(-3)$
$=(f\circ f\circ f\circ f)(18)$
$=(f\circ f\circ f)(-3)=(f\circ f)(18)=f(-3)=18$

9. 정답 ②

$f'(x)=2x^2+a$ 에서 $f'(0)=a$, $f'(1)=2+a$
그러므로 $a(2+a)=-1$, $(a+1)^2=0$
따라서 $a=-1$

10. 정답 ②

$10=C\log\dfrac{10(30-6)}{6(30-10)}$ 에서 $C=\dfrac{10}{\log 2}$
$T=\dfrac{10}{\log 2}\cdot\log\dfrac{15(30-6)}{6(30-15)}=20$

11. 정답 ④

	A 역	B 역	
	승차	하차	승차
남자	90	18	60
여자	60	12	60

B 역에서 C 역으로 가는 도중 기차에 타고 있는 승객의 수는
남자 $90-18+60=132$,
여자 $60-12+60=108$ 이므로
전체 승객은 240 이다.

여자 승객이 선택될 확률은 $\frac{108}{240}$ 이고,

A 역에서 승차한 여자 승객이 선택될 확률은

$\frac{60-12}{240}=\frac{48}{240}$ 이므로

구하는 확률은 $\frac{\frac{48}{240}}{\frac{108}{240}}=\frac{4}{9}$

12. 정답 ①

주어진 다항식은 세 인수
$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}),(1+x^3+x^6+x^9),\quad(1+x^4+x^8)$ 에서
각각 단항식을 택해서 곱한 식으로 전개가 된다.
주어진 다항식에서 차수가 각각 2의 배수, 3의 배수, 4의 배수이다.
x^{10}의 계수는 결국 다음 조건들
$a\in\{0,2,4,6,8,10\}$, $b\in\{0,3,6,9\}$, $c\in\{0,4,8\}$, $a+b+c=10\cdots$ ㉠
을 만족하는 순서쌍 (a,b,c)의 개수와 같다.
a,b,c가 각각 $2,3,4$의 배수이기 때문에 a,b,c를 각각 $2,3,4$를
여러 번 합한 값으로 생각할 수 있다.
$a=2l(l=0,1,2,3,4,5)$, $b=3m(m=0,1,2,3)$,
$c=4n(n=0,1,2)$ 이라 두면
$10=a+b+c=2l+3m+4n$
이것을 만족하는 음이 아닌 정수해 (l,m,n)의 개수가 x^{10}의 계수이다.
그런데 (l,m,n)은 순서대로 $2,3,4$를 합하는 횟수를 의미한다.
따라서 ㉠을 만족하는 경우의 수는 $2,3,4$의 합으로 나타내어지는
10의 분할의 수와 같다.

13. 정답 ②

1위 팀의 승리한 경기 수를 x라 하면
총 경기 수가 ${}_5C_2\times9$ 이므로

${}_5C_2\times9=\frac{5(x+10)}{2}$

$\therefore\ x=26$

14. 정답 ③

총 경기 수는 ${}_5C_2\times9=90$,
주어진 두 팀(A와 B)가 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 60이고
나머지 3개의 팀의 승리할 것으로 예상되는 경기 수의 합은 30이므로
$x+y+z=30$
$x,\ y,\ z$가 모두 5이상 이므로
$x=x'+5$, $y=y'+5$, $z=z'+5$ 라 하면
$x'+y'+z'=15\ (x'\geq0, y'\geq0, z'\geq0)$
$\therefore\ {}_{3+15-1}C_{15}={}_{17}C_{15}={}_{17}C_2=136$

15. 정답 ①

$a_{n+1}=2a_n+n+1$ 에서 n에 $n+1$을 대입하면
$a_{n+2}=2a_{n+1}+n+1+1$ 이므로 $f(n)=n+2$
$a_n=1+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)=2^{n+1}-n-2$ 이므로
$g(n)=-n-2$
$\therefore\ f(5)-g(5)=7-(-7)=14$

16. 정답 ⑤

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘

ㄱ. $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)
ㄴ. $f(0)=0$이면 도함수 $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로
함수 $f(x)$는 원점 대칭이다.
따라서 극댓값 $f(1)$, 극솟값 $f(-1)$에 대하여 $f(1)=-f(-1)$ 이므로
$f(1)+f(-1)=0$ 이다. (참)
ㄷ. 극댓값 $f(1)$이 0보다 작으므로 방정식 $f(x)=0$은
$x<-1$인 오직 하나의 실근을 갖는다. (참)

17. 정답 ①

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로
$\mathrm{P}(k,\ k)$, $\mathrm{Q}(2k,\ 2k)$ 이다.
따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$ 이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$ 에서 $k=2$ 이다.
$a^2=2$
$\therefore\ a=\sqrt{2}$

18. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to-1-0}f(x)=1$ 이고 $f(-1)=1$ 이므로 (참)
ㄴ. $\lim_{x\to1+0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)\lim_{x\to1+0}g(x)=1\cdot0=0$
$\lim_{x\to1-0}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)\lim_{x\to1-0}g(x)=0$ (참)
ㄷ. ㄴ에서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$, $f(1)g(1)=1\cdot1=1$ (거짓)

19. 정답 ④

S_1 , S_2 , S_3 이 등차수열을 이루므로 $2S_2=S_1+S_3$ 이다.

$3S_2=S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^{2}f(x)dx$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=\frac{9}{2}$

$\therefore\ S_2=\frac{3}{2}$

20. 정답 ⑤

기울기가 -2인 직선 l의 y절편을 b라 하면
직선 l의 방정식은 $2x+y-b=0$
점 $\mathrm{C}(2,\ 0)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$ 에 이르는 거리
$r=\frac{|2\cdot2-b|}{\sqrt5}=\frac{|4-b|}{\sqrt5}$ 에서 $b=4\pm\sqrt5r\ \cdots$ ㉠
점 $\mathrm{C}'(3,3)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$ 에 이르는 거리
$f(r)=\frac{|9-b|}{\sqrt5}$ 에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면

$\lim_{r\to+0}f(r)=\lim_{r\to+0}\frac{|5\pm\sqrt5r|}{\sqrt5}=\sqrt5$

21. 정답 ⑤

직선 $y=\frac{1}{\sqrt3}x$ 와 x축이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$ 이다.

$\triangle\mathrm{OO_1A_1}$ 은 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{OO_1A_1}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_1=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle\mathrm{OO}_n\mathrm{A}_n$ 은 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{OO}_n\mathrm{A}_n=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_n=\frac{2}{3}\pi\cdot l_{n-1}\quad(n\geq2)$

수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2\pi}$ 이고 공비가 $\frac{3}{2\pi}$ 인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\frac{\frac{3}{2\pi}}{1-\frac{3}{2\pi}}=\frac{3}{2\pi-3}$

22. 정답 21

$a_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$ 에서

$a_3 = 7,\ a_5 = 13$ 이므로 $a_1 + a_3 + a_5 = 21$

23. 정답 19

$\mathrm{E}(X) = 1\cdot\dfrac{3}{10} + 2\cdot\dfrac{1}{2} + 3\cdot\dfrac{1}{5} = \dfrac{19}{10}$ 이므로

$\mathrm{E}(10X) = 10\mathrm{E}(X) = 10\cdot\dfrac{19}{10} = 19$

24. 정답 16

$64 = 2^6$ 이므로 $[\log_2 64] = 6$

$3^3 = 27 < 64 < 3^4 = 81$ 이므로 $[\log_3 64] = 3$

$4^3 = 64$ 이므로 $[\log_4 64] = 3$

$5^2 = 25 < 64 < 5^3 = 125$ 이므로 $[\log_5 64] = 2$

$6^2 = 36 < 64 < 6^3 = 216$ 이므로 $[\log_6 64] = 2$

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=2}^{6} [\log_n 64] = 16$

25. 정답 2

$F(x) = \displaystyle\int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$ 라 하면 $F'(x) = x^2+3x-2$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\ &= \frac{1}{4}F'(2)\\ &= \frac{1}{4}(2^2+3\cdot 2-2) = 2\end{aligned}$$

26. 정답 30

$\dfrac{p(1-p)}{n} = \dfrac{0.25\times 0.75}{300} = 0.025^2$ 에서 표본비율 $\hat{p}$ 는

정규분포 $\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$ 를 따른다.

$\dfrac{\alpha}{100} = \beta$ 라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p} \ge \frac{\alpha}{100}\right) &= \mathrm{P}(\hat{p} \ge \beta) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{\beta - 0.25}{0.025}\right)\\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228\end{aligned}$$

$\therefore\ \alpha = 100\beta = 30$

27. 정답 56

쌓는 순서가 정해져 있으므로 세 개의 원판을 택하면 쌓는 방법은 한가지로 정해진다.

그러므로 구하는 방법의 수는 서로 다른 6 개에서 3 개를 택하는 중복조합의 수이므로

${}_{6+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$

28. 정답 3

선분 CP_0 의 길이를 $a\,(0<a<1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} = \overline{\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5} = \cdots = a$

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \overline{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4} = \overline{\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6} = \cdots = 1-a$

이므로 $l_{2n} = n$ 이다.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{l_{2n}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ a+b = 3$

29. 정답 4

$f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $y = f'(x)$ 의 그래프는 y 축에 대칭이므로 $a = 0$

따라서 $f'(x) = 3x^2+b$ 이고, 조건 (나)에서 $f'(1) = 0$ 이고 $f(1) = 0$ 이므로

$b = -3,\ c = 2$

따라서 $f(x)$ 의 극댓값 $f(-1) = 4$

30. 정답 420

a_n 의 경우, 마지막 상태에서는 $4n$ 개의 동전 중 $2n$ 개의 동전이 500이므로 적어도 $2n$ 번의 시행을 해야 한다.

그런데 $4n$ 개 동전을 4 개씩 n 개의 묶음으로 나누면 각 묶음마다 2 회씩을 시행하여 총 $2n$ 회의 시행 후 마지막 상태를 만들 수 있다. 즉,

와 같이 $2n$ 번의 시행으로 마지막 상태를 만들 수 있으므로 $a_n = 2n$ 이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=1}^{20} 2n = 2\sum_{n=1}^{20} n = 2\times\frac{20\cdot 21}{2} = 420$

10회 정답 및 해설

1	④	2	③	3	④	4	③	5	②
6	⑤	7	①	8	③	9	①	10	⑤
11	③	12	③	13	②	14	③	15	②
16	①	17	④	18	③	19	②	20	①
21	①	22	120	23	128	24	31	25	4
26	72	27	140	28	15	29	127	30	184

1. 정답 ④

$2^a = 3$ 이므로 이 식을 $3^b = \sqrt{2}$ 에 대입하면

$(2^a)^b = \sqrt{2}$

이 식을 정리하면 $2^{ab} = 2^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $ab = \dfrac{1}{2}$

2. 정답 ③

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B) &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\ &= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\ &= \frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B) = \frac{11}{12}\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{4}$

3. 정답 ④

함수 $f(x)$ 는 연속함수이다.

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+a & (x>1)\\ 4x & (x<1)\end{cases}$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}(3x^2+a) = \lim_{x\to 1-}4x$ 에서 $3+a = 4$ 이다.

$\therefore\ a = 1$

4. 정답 ③

등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$a_n = 4\cdot 5^{n-1}$

$$\begin{aligned}\log a_{21} &= \log(4\cdot 5^{20})\\ &= 2\log 2 + 20\log 5\\ &= 2\times 0.3010 + 20\times(1-0.3010)\\ &= 14.5820\end{aligned}$$

따라서 지표가 14 이므로 a_{21} 은 15 자리의 자연수이다.

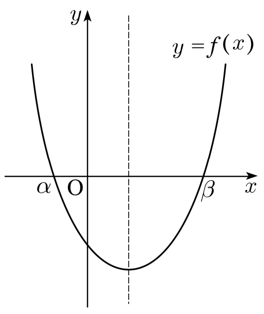
5. 정답 ②

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X 라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 830) &= \mathrm{P}\left(Z\ge\frac{830-800}{50}\right)\\ &= \mathrm{P}(Z\ge 0.6)\\ &= 0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.6)\\ &= 0.5-0.2257 = 0.2743\end{aligned}$$

6. 정답 ⑤

이차함수 $f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore\ C < B < A$

7. 정답 ①

$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = S_n$ 이라 하면

$a_n + b_n = S_n - S_{n-1}\ (n \ge 2)$

$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$= -\frac{1}{n(n+1)}$

$\lim_{n\to\infty} n^2(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(n^2 a_n + n^2 b_n)$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}$

$= -1$

또, 조건에 의해 $\lim_{n\to\infty} n^2 b_n = 2$

따라서 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty}(n^2 a_n + n^2 b_n - n^2 b_n)$

$= \lim_{n\to\infty}(n^2 a_n + n^2 b_n) - \lim_{n\to\infty} n^2 b_n$

$= -3$

8. 정답 ③

$\frac{{}_3C_2}{{}_{n+3}C_2} = \frac{6}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{12}$

$n^2 + 5n - 66 = (n+11)(n-6) = 0$

$\therefore\ n = 6$

9. 정답 ①

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x)$ 이므로

$f(x)\{1 - 2f'(x)\} = 0$ 이다.

이때, 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로 $f'(x) = \frac{1}{2}$ 이다.

이때, $f(1) = 0$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\therefore\ f(3) = 1$

10. 정답 ⑤

$n \ge k \ge 3$일 때,

$k(k-1)(k-2)\,{}_nC_k = k(k-1)(k-2) \times \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$= \frac{n!}{(k-3)!(n-k)!}$

$= n(n-1)(n-2) \times \frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}$

$= n(n-1)(n-2)\,{}_{n-3}C_{k-3}$

$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)(k-2)\,{}_nC_k\, p^k(1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2)\,{}_nC_k\, p^k(1-p)^{n-k}$

$= \sum_{k=3}^{n} n(n-1)(n-2)\,{}_{n-3}C_{k-3}\, p^k(1-p)^{n-k}$

$= n(n-1)(n-2)p^3 \sum_{k=0}^{n-3} {}_{n-3}C_k\, p^{k-3}(1-p)^{n-3-k}$

$= n(n-1)(n-2)p^3\{p + (1-p)\}^{n-3}$

$= n(n-1)(n-2)p^3$

$\therefore\ f(n) = n(n-1)(n-2)$

$\therefore\ f(10) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

11. 정답 ③

$2a_n + n = p$ 에

$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20$ 을 대입하면

$2a_1 + 1 = p$

$2a_2 + 2 = p$

$\cdots$

$2a_{20} + 20 = p$

변끼리 더하면

$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) + (1 + 2 + \cdots + 20) = 20p$

$2p + \frac{20 \times 21}{2} = 20p$

$18p = 210$

$\therefore\ p = \frac{35}{3}$

$2a_{10} + 10 = \frac{35}{3}$ 에서

$a_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{35}{3} - 10\right) = \frac{5}{6}$

12. 정답 ③

$pq_{(2)} = 2p + q$

(i) $p = 1, q = 0\ :\ pq_{(2)} = 2$

(ii) $p = 1,\ q = 1\ :\ pq_{(2)} = 3$

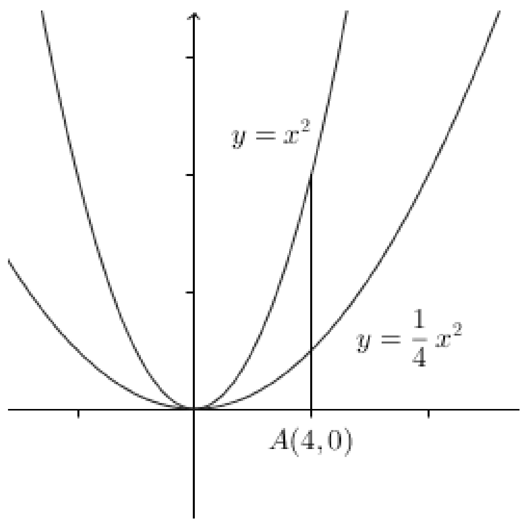
(iii) $p = 0,\ q = 1\ :\ pq_{(2)} = 1$

$\therefore\ P = \{2,\ 3\},\ Q = \{1,\ 3\},\ Q^c = \{0,\ 2\}$

빨간 전등이 점등되는 경우는 점등모양에서 0, 2, 3 이므로

$P \cup Q^c = \{0,\ 2,\ 3\}$

13. 정답 ②

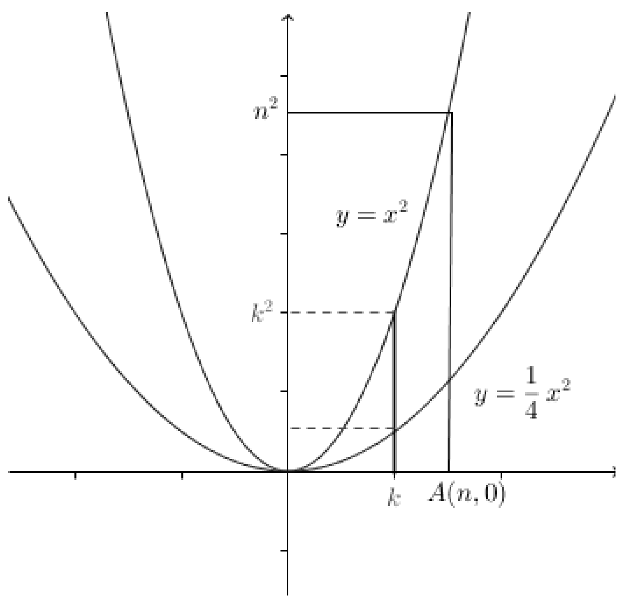


위의 그림에서 $n = 4$일 때, 구하는 넓이는

$\int_0^4\left(x^2 - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \int_0^4 \frac{3}{4}x^2\,dx = \left[\frac{1}{4}x^3\right]_0^4 = 16$

$\therefore 16$

14. 정답 ③



위의 그림에서 직사각형 속의 격자점에서 $y = \frac{1}{4}x^2$ 밑에 있는 격자점을 빼면 되므로

$a_n = (n+1)(n^2+1) - \sum_{k=1}^{n} k^2$

$= (n+1)(n^2+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{2}{3}$

15. 정답 ②

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 30 이고 공차가 $-d$ 인 등차수열이므로

$a_n = 30-(n-1)d \quad (n \geq 1)$

$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}$

$=\frac{(k+1)\{30-(m-1)d+30-(m+k-1)d\}}{2}$

$=\frac{(k+1)\{60-(2m+k-2)d\}}{2} = 0$

$k+1>0$ 이므로

$(2m+k-2)d=60$

$2m+k=2+\frac{60}{d}$

이를 만족하는 자연수 m, k 이 존재하기 위해서는 d가 60 의 약수이어야 한다.

$60=2^2\times3\times5$ 이므로 d의 개수는 $3\times2\times2=12$

[다른 풀이]

등차수열의 연속된 $(k+1)$개의 항의 합이 0 이기 위한 수열의 조건은 다음과 같다.

(i) $k+1$이 홀수일 때

$\cdots, d,\ 0,\ -d,\ \cdots$

이때 d는 30 의 양의 약수가 되어야 하므로

$d=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30$

(ii) $k+1$이 짝수일 때

$\cdots,\ \frac{d}{2},\ -\frac{d}{2},\ \cdots$

이때 $30-(n-1)d=\frac{d}{2}$ 에서

$n=\frac{1}{2}+\frac{30}{d}$

n은 자연수이므로

$d=4,\ 12,\ 20,\ 60$

(i), (ii)에서 구하는 d의 개수는 12 이다.

16. 정답 ①

$a=-1,\ f(m)=-\frac{m(m+1)}{2}$ 이므로

$a+f(9)=(-1)+(-45)=-46$

17. 정답 ④

중심이 P $(x,\ y)$ 이므로 x 축에 접하는 원의 반지름의 길이는 y 이다.

두 원이 외접하므로 $\overline{\mathrm{PA}}=y+1$

즉, $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=y+1$ 이다.

$x^2+(y-3)^2=(y+1)^2$ 에서 $x^2=8y-8$

이때, $x\to\infty$ 이면 $y\to\infty$ 이므로

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}$

$=\lim_{y\to\infty}\frac{8y-8}{y+1}=8$

18. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=0$ 이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)g(x)=0$ (참)

19. 정답 ②

t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q} 라 하면

$x_{\mathrm{P}}=5+\int_0^t(3t^2-2)\,dt=t^3-2t+5$,

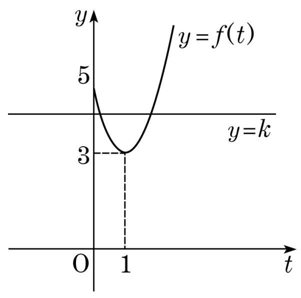
$x_{\mathrm{Q}}=k+\int_0^t 1\,dt=t+k$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3-2t+5=t+k$

즉, $t^3-3t+5=k$ 이어야 한다.

$f(t)=t^3-3t+5$ 라 하면 $f'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$ 이므로

$t>0$에서 함수 $f(t)$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(t)$ 가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은

$3<k<5$ 이므로 정수 k는 4 이다.

20. 정답 ①

정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 8^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 16 인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$ 을 따른다.

또, 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 25 인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$ 즉, $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다. 이때

$\mathrm{P}(\overline{X}\leq53)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{X}-50}{2}\leq\frac{53-50}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq1.5)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)$

$\mathrm{P}(\overline{Y}\leq69)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}\leq\frac{53-50}{\frac{\sigma}{5}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq-\frac{30}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{30}{\sigma}\right)$

이때 $\mathrm{P}(\overline{X}\leq53)+\mathrm{P}(\overline{Y}\leq69)=1$ 이므로

$\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)=\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{30}{\sigma}\right)$

$1.5=\frac{30}{\sigma}$ 이므로 $\sigma=20$

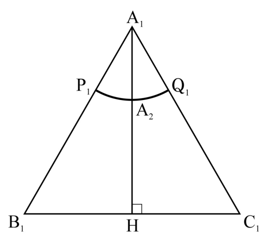
$\mathrm{P}(\overline{Y}\geq71)=\mathrm{P}\left(\frac{\overline{Y}-75}{4}\geq\frac{71-75}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq-1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1)$

$=0.5+0.3413=0.8413$

21. 정답 ①



$\overline{\mathrm{A_1P_1}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}=2$ 이므로 $l_1=\frac{2}{3}\pi$ 이다.

한편, 꼭짓점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H로 놓으면

$\overline{\mathrm{A_1H}}=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{A_2H}}=\overline{\mathrm{A_1H}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}=3\sqrt{3}-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$ 이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}=\sqrt{3}\,\pi$

22. 정답 120

${}_{10}\mathrm{C}_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

23. 정답 128

$y'=3x^2-2$ 이므로 곡선 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 10 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=10(x-2)$, $y=10x-16$

$S=\frac{1}{2}\cdot16\cdot\frac{8}{5}=\frac{64}{5}$

$\therefore\ 10S=128$

24. 정답 31

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(8k-4)-1 \ =4n^2-1 \ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n} = \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n^2-1}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

$\therefore \ p+q=31$

25. 정답 4

주어진 식에 $x=3,\ -3$ 을 대입하면

(i) $x=3$ 일 때

$5\cdot f(-1)+7\cdot f(5)=1$

(ii) $x=-3$ 일 때

$-f(5)-5f(-1)=1$

두 식을 더하면

$6f(5)=2$

$\therefore 12f(5)=4$

26. 정답 72

운전석에 앉는 사람을 정하는 방법은 2(가지)

영희와 철수가 앉는 방법은 ${}_3P_2=6$ (가지)

남아있는 3명이 앉는 방법은 $3!=6$ (가지)

$\therefore \ 2\times6\times6=72$ (가지)

27. 정답 140

$70=10\log\dfrac{\frac{1}{10^5}}{x_0}=10(-5-\log x_0)$ ...... ㉠

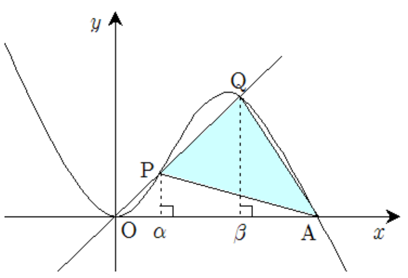
$a=10\log\dfrac{10^2}{x_0}=10(2-\log x_0)$ ...... ㉡

㉡-㉠을 계산하면 $a-70=70$

$\therefore \ a=140$

28. 정답 15

원점 O 를 통과하는 직선을 $y=mx$ (단, $m>0$)이라 놓으면



$x^2(3-x)=mx$ 에서 $x(x^2-3x+m)=0$ 이다.

여기에서 $x\neq0$ 이므로 $x^2-3x+m=0$ 이다.

$x^2-3x+m=0$ 의 서로 다른 두 양의 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

$D=9-4m>0$ 이므로 $0<m<\dfrac{9}{4}$

$\triangle$APQ 의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle\text{OAQ}-\triangle\text{OAP}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot m\beta-\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot m\alpha=\dfrac{3m}{2}(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-4m}$

$\therefore S=\dfrac{3}{2}\sqrt{-4m^3+9m^2}$

여기에서 $f(m)=-4m^3+9m^2$ 이라 하면, $0<m<\dfrac{9}{4}$ 에서

$f'(m)=-6m(2m-3)$

S는 $m=\dfrac{3}{2}$ 일 때, 최댓값 $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ 을 갖는다

따라서 $10m=10\times\dfrac{3}{2}=15$

29. 정답 127

$50=2\times5^2$ 이므로 집합 B의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

(나)에서 $X\cap B=\varnothing$ 이므로 집합 X의 모든 원소는

2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.

(다)에서 $12=2^2\times3$ 이므로 집합 X의 모든 원소는

2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서

2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.

따라서 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

이다. (가)에서 집합 X는 집합

$\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$

의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^7-1=128-1$

$=127$

[다른 풀이]

집합 A를 전체집합으로 생각하자.

(가)에서 $X\subset A$ 이므로 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 자연수이다.

집합 A의 부분집합 중에서 2의 배수의 집합을 A_2, 3의 배수의 집합을 A_3,

5의 배수의 집합을 A_5 라 하자.

(나)에서 $X\cap B=\varnothing$ 이고, $50=2\times5^2$ 이므로 집합 X의 모든 원소는

2의 배수이거나 5의 배수이다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 $A_2\cup A_5$ 에 속한다.

(다)에서 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는

$A_2^C\cap A_3^C=(A_2\cup A_3)^C$ 에 속한다.

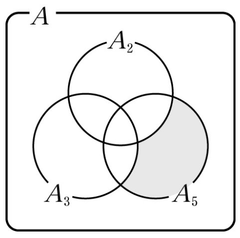
(가), (나), (다)에서 집합 X의 모든 원소는

$(A_2\cup A_5)\cap(A_2\cup A_3)^C=A_5-(A_2\cup A_3)$

에 속한다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서

2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.



그러므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95 이다.

(가)에서 집합 X는 집합

$\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$

의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^7-1=128-1$

$=127$

30. 정답 184

조건 (가)에서 두 원소의 합이 31이 아니므로 집합 A에 속하지 않는 원소는 $31-a_i\ (1\le i\le15)$이다.

그러므로 $\sum_{i=1}^{15}a_i^2$ 과 $\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2$ 의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같다.

$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2+\sum_{i=1}^{15}(31-a_i)^2=\sum_{i=1}^{30}i^2$$

$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2+\sum_{i=1}^{15}31^2-62\sum_{i=1}^{15}a_i+\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{30\times31\times61}{6}$$

조건 (나)에 의해

$$2\sum_{i=1}^{15}a_i^2+15\times31^2-62\times264=5\times31\times61$$

$$\sum_{i=1}^{15}a_i^2=\frac{1}{2}(5\times31\times61-15\times31^2+62\times264)$$
$$=\frac{31}{2}(5\times61-15\times31+2\times264)$$
$$=\frac{31}{2}(-5\times32+2\times264)$$
$$=31\times184$$

따라서 $\dfrac{1}{31}\sum_{i=1}^{15}a_i^2=184$

[참고]

두 원소의 합이 31 이 되는 쌍은 (1, 30), (2, 29), $\cdots$, (15, 16) 이므로

집합 A는 각 순서쌍에서 원소를 하나씩 택하여 얻을 수 있다.

이와 같은 방법으로 찾은 집합 A의 여러 예 중 하나는 다음과 같다.

$\{5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 23, 25, 27, 28, 29, 30\}$