1회 정답 및 해설

1	①	2	④	3	④	4	④	5	③
6	⑤	7	②	8	①	9	④	10	④
11	②	12	①	13	①	14	③	15	③
16	①	17	④	18	⑤	19	⑤	20	③
21	①	22	6	23	10	24	432	25	162
26	32	27	17	28	80	29	40	30	15

1. 정답 ①

$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{e^x}=1\cdot1=1$

2. 정답 ④

$(x^2-1)^7$ 의 전개식에서 일반항은 ${}_7C_r(x^2)^{7-r}(-1)^r$ 이므로

x^6의 계수는 ${}_7C_4(-1)^4=35$ 이다.

3. 정답 ④

$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{7}{9}P(B)=\frac{2}{9}$

$P(B)=\frac{2}{7}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{63}$

4. 정답 ④

$P(2,\ 2,\ 3)$를 yz평면에 대하여 대칭이동시킨 점은 $Q(-2,\ 2,\ 3)$ 이다.
따라서
$\overline{PQ}=\sqrt{(2-(-2))^2+0+0}=4$

5. 정답 ③

$f'(x)=3(2e^x+1)^2\times2e^x$ 이므로

$f'(0)=3(2e^0+1)^2\times2e^0=3\cdot3^2\times2=54$

6. 정답 ⑤

$\overrightarrow{OA}=(4,\ 2)$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(2,\ 0)-(0,\ 2)=(2,\ -2)$

따라서

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,\ 2)\cdot(2,\ -2)=8-4=4$

7. 정답 ②

주어진 식의 진수 조건에 의해

$-4<x<4$ 이다.

$\log_2(4+x)+\log_2(4-x)=3$

$\log_2(16-x^2)=\log_2 8$

따라서 $x^2=8$, $x=\pm2\sqrt{2}$ 이고

두 근 모두 진수조건의 범위 안에 들어간다.

따라서, 두 근의 곱은 -8

8. 정답 ①

이차곡선의 정의와 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{F'P}=a$, $\overline{FP}=b$ 라 하면 $a-b=4$

$\angle F'PF=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $a^2+b^2=(2\sqrt{10})^2=40$

따라서 $a=6$, $b=2$ 이므로 $\cos(\angle PFF')=\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$

9. 정답 ④

곡선 $y=\ln5x$ 위의 점 $\left(\frac{1}{5},\ 0\right)$에서의 접선을 구하면

$y'=\frac{1}{x}$ 이므로 기울기는 5이므로 접선은

$y=5\left(x-\frac{1}{5}\right)=5x-1$

따라서 y 절편은 -1

10. 정답 ④

$x-y-1=0$ 의 기울기를 m_1,

$ax-y+1=0$ 의 기울기를 m_2라 하면

$m_1=1$, $m_2=a$ 이고

$\tan\theta=\left|\frac{1-a}{1+a}\right|=\frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{6}$ $(\because a>1)$

$6a-6=1+a$

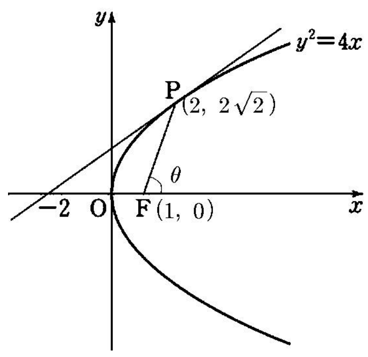
$\therefore a=\frac{7}{5}$

11. 정답 ②

점 $P(x_1,\ y_1)$라 하면 주어진 접선의 방정식은

$y_1y=2(x+x_1)$ 이고 x절편이 -2 이므로

$x_1=-2$ 이고 $y_1=2\sqrt{2}$



직선 PF의 기울기를 $\tan\theta$라 하면

$\tan\theta=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-1}=2\sqrt{2}$

따라서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cos(\angle PFO)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=-\frac{1}{3}$

12. 정답 ①

주어진 조건에 의해 신뢰구간의 길이를 구해 보면

$l=2\times1.96\times\frac{10}{\sqrt{n}}=45.92-38.08$

$=7.84=4\times1.96$

$\therefore\ \sqrt{n}=5$

$\therefore n=25$

13. 정답 ①

지수함수의 그래프를 이해하여 지수함수의 밑을 구한다.

곡선 $y=a^x$ 이 y축과 만나는 점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$ 이고,

점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 1 이다.

$\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)=1$, $x=\frac{3}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},1\right)$이다.

점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표와 같으므로

점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ a^{\frac{3}{2}}\right)$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\left(a^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{21}{4}$

그러므로 $a^{\frac{3}{2}}=8$에서 $a=4$ 이다.

14. 정답 ③

$g(x)=a^x$ 에 대하여 $g'(x)=a^x\ln a$ 이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2},\ a^{\frac{3}{2}}\right)$에서 이 곡선에 접하는 직선의 방정식은

$y-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\ln a\left(x-\frac{3}{2}\right)$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$-a^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}\ln a\left(x-\frac{3}{2}\right)$

$x-\frac{3}{2}=-\frac{1}{\ln a}$

$x=\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}$

따라서 점 D의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}\ ,\ 0\right)$ … ㉠

조건에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$ 이므로

점 D 는 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},1\right)$에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선과 x축의 교점이다.

그러므로 점 D 의 좌표는 $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$이다.

㉠에서 $\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$ 이므로

$\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$, $\ln a=\frac{4}{3}$, $a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$ 이므로 $g(2)=e^{\frac{8}{3}}$ 이다.

[참고]

$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},1\right)$, $\mathrm{D}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}\ ,\ 0\right)$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2=\overline{\mathrm{BD}}^2$ 이므로

$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}\right)^2+1^2=\left(\frac{1}{\ln a}\right)^2+1^2$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$

$\frac{1}{\ln a}=\frac{3}{4}$, $\ln a=\frac{4}{3}$, $a=e^{\frac{4}{3}}$

따라서 $g(x)=e^{\frac{4}{3}x}$ 이므로

$g(2)=e^{\frac{8}{3}}$

15. 정답 ③

[출제의도] 수의 분할을 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $4=1+3=2+2$ 이므로 $P(4,2)=2$ (참)

ㄴ. $P(10,3)=8$, $P(7,1)=1$, $P(7,2)=3$, $P(7,3)=4$ 이므로 $P(10,3)=P(7,1)+P(7,2)+P(7,3)$ (참)

ㄷ. [반례] $P(4,2)=2$, $P(4,3)=1$ (거짓)

16. 정답 ①

(i) 1을 두 개 포함한 경우 (1, 1, □, □)

1의 공 두 개를 다른 것으로 계산한다.

$\frac{{}_2C_2\times{}_3C_2\times 2!}{{}_5P_4}$

(ii) 1을 한 개 포함한 경우(1,2,3,4)

$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_3}{{}_5P_4}$

(i), (ii)에 의하여

$\therefore \frac{1}{20}+\frac{1}{60}=\frac{1}{15}$

17. 정답 ④

점 A를 원점, 직선 AD 를 x 축, 직선 AB 를 y 축으로 하면

점 C 의 좌표는 $\mathrm{C}(2\sqrt{3},-2)$ 이다.

원 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\sqrt{3}x-2y$

$2\sqrt{3}x-2y=k$ 라 하면 $10\le k\le 18$ 일 때, 직선과 원이 만나므로

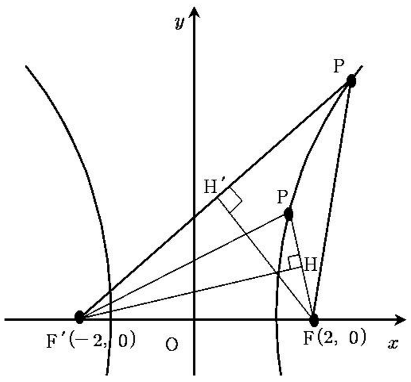
k의 최댓값은 18이다.

18. 정답 ⑤

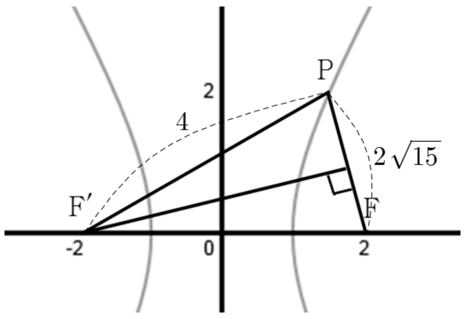
삼각형 $PF'F$ 에서 $|PF'-PF|=2$ 이므로

$\overline{FF'}=\overline{PF'}$ 인 경우와 $\overline{F'F}=\overline{PF}$ 인

두 개의 이등변삼각형이 생긴다.



(i) $\overline{FF'}=\overline{PF'}$ 인 경우



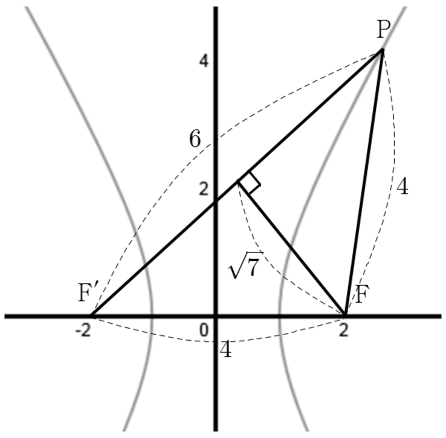
$\overline{FF'}=\overline{PF'}=4$ $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$ 이므로 $\overline{PF}=2$

F'에서 $\overline{PF}$에 내린 수선의 발을 H이라 하면

$\overline{F'H}=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$

삼각형 $PF'F$의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{F'H}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{15}=\sqrt{15}$

(ii) $\overline{F'F}=\overline{PF}$ 인 경우



$\overline{F'F}=\overline{PF}=4$, $\overline{PF'}-\overline{PF}=2$ 이므로

$\overline{PF'}=6$ F에서 $\overline{PF'}$ 에 내린

수선의 발을 H'이라 하면

$\overline{FH'}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

삼각형 $PF'F$의 넓이$=\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

$\therefore$ 넓이 a 의 곱은 $\sqrt{15}\times 3\sqrt{7}=3\sqrt{105}$

19. 정답 ⑤

$g(x)=-\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+\cos x\cdot f(x)$

ㄱ. $g(0)=0$ ($\because f(0)=0$) (참)

ㄴ. $g(-x)=-\sin(-x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\cos(-x)\cdot f(-x)$

$=\sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x}f(t)dt+\int_{-x}^{x}f(t)dt\right)-\cos x\cdot f(x)$

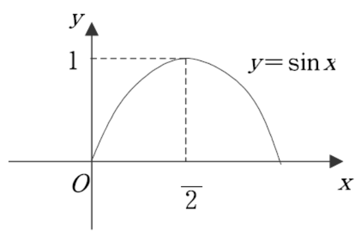
$=\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt-\cos x\cdot f(x)$ $=-g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$ 이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$에서
$g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.
마찬가지로 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. (참)

20. 정답 ③

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

위의 표에서 $x<1$, $1<x<3$ 일 때, $f''(x)>0$ 이므로 $f'(x)$는 증가하고
이 구간에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다.
또한, $x=1$ 일 때, $f'(x)=0$ 이므로 $x=1$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가
− 에서 + 로 바뀌게 된다.
따라서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖고 그래프는 아래로 볼록하다.
ㄱ. $g(x)=\sin(f(x))$ 에서 $g'(x)=\cos(f(x))\times f'(x)$
$\therefore\ g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)=\cos\pi\times f'(3)$
$=(-1)\times 1=-1$ (참)
ㄴ. $1<x<3$ 에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하며 증가하므로
$\frac{\pi}{2}<f(x)<\pi$
이때 $g(x)=\sin(f(x))$ 의 그래프는 감소하면서 위로 볼록하다.



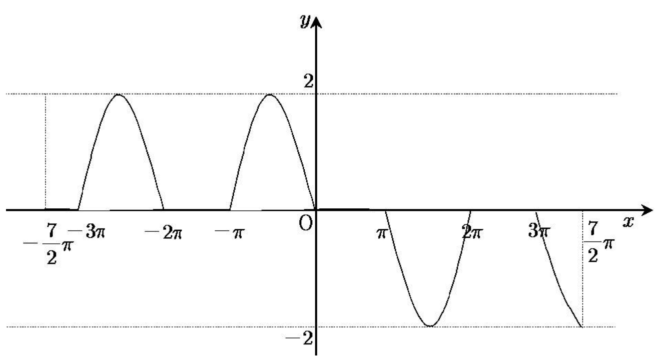
$x=1$ 일 때, $g'(1)=\cos(f(1))\times f'(1)=\cos\frac{\pi}{2}\times 0=0$
$x=3$ 일 때, $g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)\ =\cos\pi\times 1=-1$
따라서 $1<a<b<3$ 에서 $-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$ (참)
ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))\times f'(x)\times f'(x)\ +\cos(f(x))\times f''(x)$
$x=1$ 일 때,
$g''(1)=-\sin(f(1))\times f'(1)\times f'(1)\ +\cos(f(1))\times f''(1)$
$=-\sin\frac{\pi}{2}\times 0\times 0+\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=0$
이지만 $x<1$ 과 $x>1$ 에서 $g''(x)$ 의 부호가 같으므로
$x=1$ 에서 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. 정답 ①

$f(x)$를 범위에 따라 정리해보면

$$f(x)=\begin{cases}0\ \ (-\frac{7\pi}{2}\le x\le -3\pi,\ -2\pi\le x\le -\pi,\ 0\le x\le\pi,\ 2\pi\le x\le 3\pi)\\ -2\sin x\ (-3\pi\le x\le -2\pi,\ -\pi\le x\le 0)\\ 2\sin x\ \ (\pi\le x\le 2\pi,\ 3\pi\le x\le\frac{7\pi}{2})\end{cases}$$

그래프는 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여
$\int_a^x f(t)dt\ge 0$ 이 되도록 하는 실수 a의
최솟값 $\alpha=-\frac{7}{2}\pi$, 최댓값 $\beta=-3\pi$
$\therefore\ \beta-\alpha=-3\pi-\left(-\frac{7}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\pi$

22. 정답 6

$\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{16}=8-2=6$

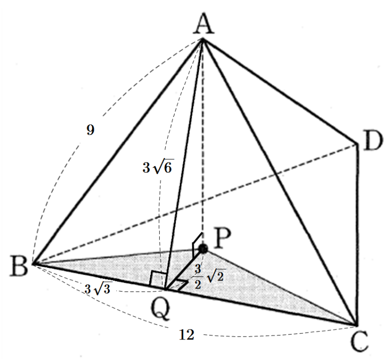
23. 정답 10

$f(x)=\ln\sqrt[3]{x}$ 이므로 $g(x)=e^{3x}$ 이다.
$\lim_{x\to +0}\frac{f(g(x))}{g(x)-1}=\lim_{x\to +0}\frac{30x}{e^{3x}-1}=\frac{30}{3}=10$

24. 정답 432

순열과 조합을 이해하고 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
(1) $|f(2)-f(1)|=|f(3)-f(2)|=1$ 일 때 $2\times 5\times 4!$
(2) $|f(2)-f(1)|=|f(3)-f(2)|=2$ 일 때 $2\times 3\times 4!$
(3) $|f(2)-f(1)|=|f(3)-f(2)|=3$ 일 때 $2\times 1\times 4!$
$\therefore 240+144+48=432$

25. 정답 162



삼수선의 정리에 의하여 선분 PQ 와 선분 BC 는 수직이고,
주어진 조건에 의하여
$\overline{BQ}=3\sqrt{3}$, $\overline{AQ}=3\sqrt{6}$, $\overline{PQ}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ 이다.
삼각형 BCP 의 넓이($=k$)는
$k=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{PQ}=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=9\sqrt{2}$ 이고 $k^2=162$

26. 정답 32

$d=2$ 일 때,
$a=2p,\ b=2q,\ c=2r$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)로 놓으면
$2p+2q+2r=18$
$p+q+r=9$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)를 만족시키는
순서쌍 $(p,\ q,\ r)$ 의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 의 개수와 같으므로
${}_3H_{9-3}={}_8C_6={}_8C_2=28$ 가지이다.
$d=3$ 일 때,
$a=3p,\ b=3q,\ c=3r$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)로 놓으면
$3p+3q+3r=17$ 을 만족시키는 자연수 $p,\ q,\ r$ 은 존재하지 않는다.
$d=4$ 일 때,
$a=4p,\ b=4q,\ c=4r$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)로 놓으면
$4p+4q+4r=16$
$p+q+r=4$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)를 만족시키는
순서쌍 $(p,\ q,\ r)$ 의 개수가 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 의 개수와 같으므로
${}_3H_{4-3}={}_3C_1=3$ 가지이다.
$d=5$ 일 때,
$a=5p,\ b=5q,\ c=5r$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)로 놓으면
$5p+5q+5r=15$
$p+q+r=3$ (단, $p,\ q,\ r$ 은 자연수)를 만족시키는
순서쌍 $(p,\ q,\ r)$ 은 $(1,\ 1,\ 1)$ 밖에 없으므로
순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 의 개수는 1 가지이다.
$d\ge 6$ 이면 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 은 존재하지 않는다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 의 개수는
$28+3+1=32$ 가지이다.

27. 정답 17

점 P가 1초에 π씩 움직이므로 점 H는 1초에 $\frac{4}{5}\pi$ 씩 움직인다.

따라서 점 H가 t초 동안 움직인 거리는 $\frac{4}{5}\pi t$이다.

좌표공간에서 선분 AB의 중점을 원점 O라 하고
점 A$(4, 0, 0)$, t초 후의 점 H, P는

$$\mathrm{H}\left(4\cos\frac{\pi t}{5},\ 4\sin\frac{\pi t}{5},\ 0\right),\ \mathrm{P}\left(4\cos\frac{\pi t}{5},\ 4\sin\frac{\pi t}{5},\ \frac{3\pi t}{5}\right)$$

$$\overline{\mathrm{HA}} = \sqrt{\left(4\cos\frac{\pi t}{5}-4\right)^2+\left(4\sin\frac{\pi t}{5}\right)^2} = 8\sin\frac{\pi t}{10}$$

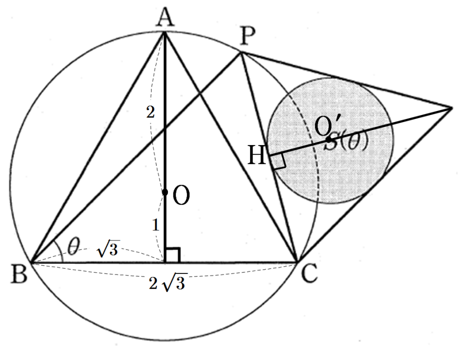
$$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{HA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}} = 4\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}$$

$$\frac{dS}{dt}=4\left(\cos\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{\pi}{10}\cdot\frac{3\pi t}{5}+\sin\frac{\pi t}{10}\cdot\frac{3\pi}{5}\right)$$

따라서 $t=5$일 때 $\frac{dS}{dt}=\frac{12}{5}\pi=\frac{q}{p}\pi$

$\therefore p+q=17$

28. 정답 80



삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 중심을 O', O'에서 선분 PC에 내린 수선의 발을 H라 하자.
사인법칙에 의하여
$\overline{PC}=2R\sin\theta$ (단, R은 삼각형 ABC의 외접원의 반지름길이)
$\quad=4\sin\theta$
선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형에 내접하는 원의 반지름 길이는

$\overline{\mathrm{O'H}}=\overline{\mathrm{PC}}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}\sin\theta$ 이므로

$S(\theta)=\frac{4}{3}\pi\sin^2\theta$ 이다.

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{4}{3}\pi\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\frac{4}{3}\pi$$

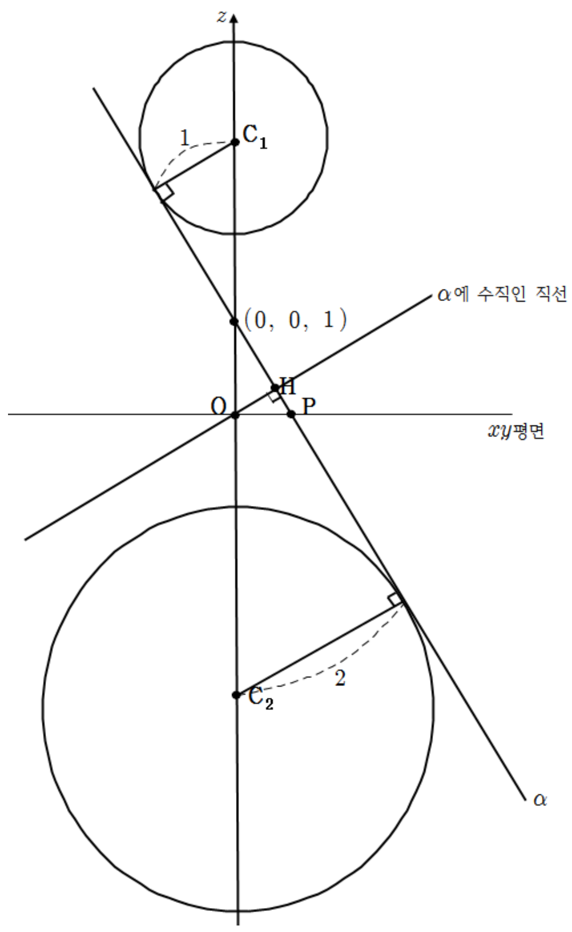
따라서 $a=\frac{4}{3}$이고, $60a=80$ 이다.

29. 정답 40

두 구 S_1과 S_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하자.
두 구의 중심 C_1, C_2와 점 P를 지나는 평면으로 자른 단면을 그려보면
평면 α는 반드시 점 $(0,\ 0,\ 1)$을 지남을 알 수 있다.
원점 O에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면
H는 점 $(0,\ 0,\ 1)$와 점 P를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)=\frac{1}{8}(3,\ \sqrt{3},\ 2)\ \ //(3,\ \sqrt{3},\ 2)\text{ 이다.}$$

따라서 평면 α의 법선벡터 $(\vec{n})$를
$\vec{n}=(3,\ \sqrt{3},\ 2)$로 잡을 수 있고
평면 α의 방정식을 $3x+\sqrt{3}y+2z+d=0$로 설정할 수 있다.
여기에 평면 α 위의 점$(0,\ 0,\ 1)$을 대입하면
$d=-2$ 임을 알 수 있다.
평면 α의 방정식은 $3x+\sqrt{3}y+2z-2=0$ 이다.
한편 $\mathrm{Q}(k,\ -\sqrt{3},\ 2)$가 평면 α위의 점이므로 대입하면
$k=\frac{1}{3}$이고 $120k=40$이다.



30. 정답 15

$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ 을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$
$f(x)$가 $x=\sqrt{3}$, $x=-\sqrt{3}$ 에서 극값을 가지므로
$ax^2+(2a+b)x+b+c=0$ 의 근이 $x=\sqrt{3},-\sqrt{3}$

근과 계수와의 관계에서 $-\frac{2a+b}{a}=0$, $\frac{b+c}{a}=-3$ 이므로

$b=-2a$, $c=-a$
$\therefore f'(x)=a(x^2-3)e^x$, $f(x)=a(x^2-2x-1)e^x$
$0\le x_1<x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
$f(x_1)-f(x_2)+x_2-x_1\ge 0$ 이므로 양변을 $x_2-x_1(>0)$로

나누어 식을 정리하면 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}\ge -1$

$f(x)$가 $x\ge 0$ 에서 연속이고 미분 가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}=f'(c)\quad(0\le x_1<c<x_2)$이다.

$\therefore f'(c)\ge -1$
즉, $x\ge 0$ 에서 $f'(x)$의 최솟값이 -1이고 $f(x)$의 변곡점에서
$f'(x)$의 최솟값을 가지므로
$f''(x)=a(x^2+2x-3)e^x=0$ 에서 $x=-3, 1$
$x\ge 0$ 을 만족하는 $x=1$ 에서 $f'(x)$의 최솟값을 갖는다.

$f'(1)=-2ae=-1$ 에서 $a=\frac{1}{2e}$

$\therefore a\le\frac{1}{2e}$

따라서, $abc=a(-2a)(-a)=2a^3\le 2\left(\frac{1}{2e}\right)^3=\frac{\frac{1}{4}}{e^3}$ 이므로 $k=\frac{1}{4}$

$\therefore 60k=15$

2회 정답 및 해설

1	②	2	①	3	③	4	①	5	⑤
6	⑤	7	④	8	①	9	③	10	②
11	②	12	④	13	②	14	③	15	③
16	②	17	①	18	①	19	③	20	⑤
21	④	22	4	23	12	24	64	25	16
26	6	27	26	28	32	29	134	30	50

1. 정답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

2. 정답 ①

$$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

3. 정답 ③

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x\,dx = 3\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=3$$

4. 정답 ①

$\log_3 x = t$ 라 하면

$\log_9 x = \frac{1}{2}\log_3 x = \frac{1}{2}t$ 이므로

$t^2+2t-3=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\log_3 x=-3$ 또는 $\log_3 x=1$

$\therefore x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=3$

따라서 모든 실근의 곱은 $\frac{1}{9}$

5. 정답 ⑤

$\vec{a}+\vec{b}=(2,3)+(1,1)=(3,4)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

6. 정답 ⑤

곡선 $y=3e^{x-1}$ 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ 3e^{a-1})$ 으로 놓으면

$y'=3e^{x-1}$ 이므로 접선의 기울기는 $3e^{a-1}$ 이다.

그러므로 접선의 방정식은

$y=3e^{a-1}(x-a)+3e^{a-1}$

이 접선이 원점 O$(0,\ 0)$을 지나므로

$0=3e^{a-1}(-a)+3^{a-1}$

$\therefore\ a=1$

따라서 A$(1,\ 3)$ 이므로

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

7. 정답 ④

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B) = \frac{7}{12}$$
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{4}{7}$$

8. 정답 ①

신뢰도 95% 의 신뢰구간은

$$\left[0.2-1.96\times\frac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}},\ 0.2+1.96\times\frac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}\right]$$

$2\times1.96\times\frac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}=0.112$ 이므로 $n=196$

9. 정답 ③

$x^2=t$ 라 하면 $2x=\frac{dt}{dx}$ 이고

$x=1$일 때 $t=1$, $x=n$일 때 $t=n^2$ 이므로

$$f(n)=\int_1^n (x^2e^{x^2}\times x)dx=\int_1^{n^2}\frac{1}{2}te^t dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[te^t-e^t\right]_1^{n^2}=\frac{1}{2}\left(n^2e^{n^2}-e^{n^2}\right)$$
$$=\frac{e^{n^2}}{2}(n^2-1)$$

따라서 $\frac{f(5)}{f(3)}=\frac{12\times e^{25}}{4\times e^9}=3e^{16}$

10. 정답 ②

$a^{f(t)}=t$ 이므로 $f(t)=\log_a t$

$b^{g(t)}=t$ 이므로 $g(t)=\log_b t$

$2f(a)=3g(a)$ 이므로 $2\log_a a=3\log_b a$ 에서

$\log_b a=\frac{2}{3}$ 즉, $\log_a b=\frac{3}{2}$

$f(c)=g(27)$

$$=\log_b 27=\frac{\log_a 27}{\log_a b}$$
$$=\frac{2}{3}\log_a 27=\log_a 27^{\frac{2}{3}}$$
$$=\log_a 9$$

$\therefore c=9$

11. 정답 ②

$\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0.25\times0.75}{300}=0.025^2$ 에서 표본비율 $\hat{p}$는

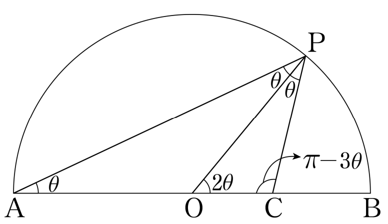
정규분포 $N(0.25,\ 0.025^2)$ 를 따른다.

$\frac{\alpha}{100}=\beta$ 라 하면

$$P\left(\hat{p}\geq\frac{\alpha}{100}\right)=P(\hat{p}\geq\beta)=P\left(Z\geq\frac{\beta-0.25}{0.025}\right)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

$\therefore\ \alpha=100\beta=30$

12. 정답 ④



삼각형 POC 에서 사인법칙을 적용하면

$\overline{OC}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$ 이므로

$$\lim_{\theta\to+0}\overline{OC}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}$$

13. 정답 ②

$\overline{OP}=t+\frac{1}{t}$, $\overline{OQ}=\frac{\sqrt{2}}{2t}$

$f(t)=\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2t^2}$

$f'(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{t^3}$ 이므로 $f'(\sqrt{2})=-\dfrac{1}{2}$

14. 정답 ③

$\angle\mathrm{QOP}=\theta$ 라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2t}\right)^2\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4t^2}\cos\theta$$

직각삼각형 PQO 에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{\sqrt{2}}{2(t^2+1)}$$ 이므로

$$S(t)=\frac{\sqrt{2}}{8(t^4+t^2)}$$

$$\int_0^1 t^2S(t)dt=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{8(t^2+1)}dt$$

$t=\tan x$ 라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=\sec^2x$ 이고 $t=0$ 일 때 $x=0$, $t=1$ 일 때, $x=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{8(t^2+1)}dt=\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2x}{\tan^2x+1}dx$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{32}$$

15. 정답 ③

오른쪽으로 이동(→)할 확률은 $\dfrac{1}{2}$, 왼쪽으로 이동(←)할 확률은 $\dfrac{1}{3}$,

위로 이동(↑)할 확률은 $\dfrac{1}{6}$ 이고,

→3번, ←1번, ↑1번 이동해야 하므로

$$\frac{5!}{3!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

$\therefore\ p+q=41$

16. 정답 ②

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 x, y, z, w

라 하면 $x+y+z+w=14$

x, y, z, w 가 모두 홀수이므로

$x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$, $w=2d+1$

(단, a, b, c, d 는 0 이상 4 이하의 정수)

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$a+b+c+d=5$

a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 5 개를 택한다.

이때 a, b, c, d 는 4 이하의 정수이므로

한 가지만 5 번 택하는 4 가지 경우는 제외한다.

$${}_4\mathrm{H}_5-4={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5-4={}_8\mathrm{C}_5-4=\frac{8!}{5!3!}-4=52$$

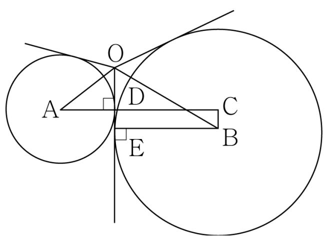
17. 정답 ①

그림과 같이 세 평면과 두 구의 평면 π 위로의 정사영을 생각하자.

오른쪽 그림에서

$\angle\mathrm{OAD}=\angle\mathrm{OBE}=30^\circ$ 이므로

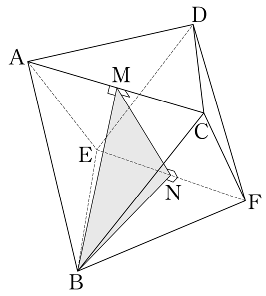
$\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{\mathrm{OE}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.



따라서 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ 이다.

$d=\sqrt{1+\dfrac{28}{3}}=\sqrt{\dfrac{31}{3}}$ 이므로 $3d^2=31$ 이다.

18. 정답 ①



선분 AC 와 EF 의 중점을 각각 M, N 이라 하면

사각형 AEFC 가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=2$

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt{3}$

$\cos(\angle\mathrm{MBN})=\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$ 이므로

$S_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

두 평면 BEF 와 CBF 가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD 와 ABC 가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 BEF 와 평면 ACD 가 평행하므로

$S_2=S_1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ S_1+S_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

19. 정답 ③

학생 A 와 B 가 서로 다른 구역의 좌석을 배정받는 사건을 T, 학생 C 와 D 가 같은 구역에 같은 열의 좌석을 배정받는 사건을 U 라 하자.

$\mathrm{P}(T)=\dfrac{2\times(2\times3\times3!)}{5!}=\dfrac{3}{5}$

두 학생 A, B 가 서로 다른 구역에 배정받을 때,

두 학생 C, D 가 (나) 구역의 2 열에 배정받아야 하므로

$\mathrm{P}(U\cap T)=\dfrac{2\times(2\times1\times2!)}{5!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(U|T)=\dfrac{\mathrm{P}(U\cap T)}{\mathrm{P}(T)}=\dfrac{1}{9}$

20. 정답 ⑤

함수 $f(x)$ 는 주기가 2 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

실수 t 와 정수 k 에 대하여

$$\int_t^{t+2k}f(x)dx=0,\ \int_{-t}^{t+2k}f(x)dx=0$$

따라서 구간 $[-1,1]$ 에서 방정식 $h(x)=0$

즉 $\displaystyle\int_{g(x)}^{g(x+1)}f(t)dt=0$ 을 만족시키려면

$g(x+1)-g(x)=2n$ (n 은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m 은 정수)이어야 한다.

$g(x)=x(x+1)$ 이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

구간 $[-1,1]$ 에서 두 함수 $y=2(x+1)$,

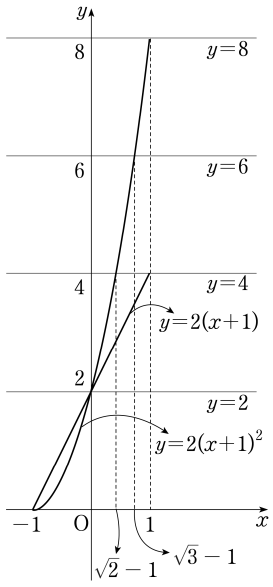
$y=2(x+1)^2$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$2(x+1)=2n$ (n 은 정수)를 만족시키는 x 의 값은 -1, 0, 1 이고,

$2(x+1)^2=2m$ (m 은 정수)를 만족시키는 x 의 값은

-1, 0, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-1$, 1 이다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



21. 정답 ④

맨 위 가로줄에 모자를 거는 방법의 수는 $4!$ 이다.
맨 위에 ABCD 의 순서로 배열할 때 A 의 아래에 B 가 오는 경우는 다음과 같이 3 가지 경우가 있다.

맨 위	A	B	C	D
가운데	B	A	D	C
	B	C	D	A
	B	D	A	C

위의 경우 중에서

맨 위	A	B	C	D
가운데	B	A	D	C

인 경우 맨 아래 줄에 배열하는 방법이 4가지이고, 나머지 경우는 각각 2가지씩 있으므로 구하는 방법의 수는 $4! \times 3 \times 8 = 576$ 이다.

22. 정답 4

$7=1+1+5=1+2+4=1+3+3=2+2+3$
으로 분할 할 수 있으므로 4가지이다.

23. 정답 12

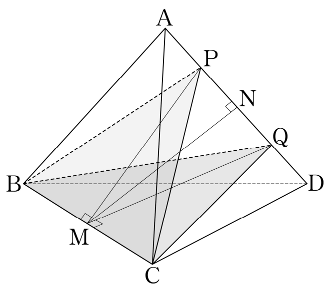
점 $A(1, 4, 2)$ 는 직선 $\dfrac{x+1}{a} = \dfrac{y-2}{b} = \dfrac{z-1}{2}$ 위에 있으므로 $a=4$, $b=4$
따라서 점 $A(1, 4, 2)$ 와 평면 $4x+4y+2z+48=0$
사이의 거리는
$$\frac{|4\times1+4\times4+2\times2+48|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{72}{6} = 12$$

24. 정답 64

기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 인 접선의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x+8$ 이므로

구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times16\times8=64$

25. 정답 16



두 선분 BC, AD 의 중점을 각각 M, N 이라 하면,
$\overline{AM}=\overline{DM}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{MN}=2\sqrt{2}$
$\overline{PN}=\overline{QN}=1$ 이므로 $\overline{PM}=\overline{QM}=3$
$\theta=\angle PMQ$ 이고, $\overline{PQ}=2$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\frac{7}{9}$$
따라서 $p+q=16$

26. 정답 6

$\displaystyle\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx=-4$ 에서 $x+1=t$ 로 놓으면

$\dfrac{dx}{dt}=1$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-1)f'(x+1)dx &= \int_1^2 (t-2)f'(t)dt \\ &= \Big[(t-2)f(t)\Big]_1^2 - \int_1^2 f(t)dt \\ &= f(1) - \int_1^2 f(t)dt \\ &= 2 - \int_1^2 f(t)dt = -4\end{aligned}$$

따라서 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=6$

27. 정답 26

$P(\overline{X}=1)=\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{49}$ 에서 $n=6$
$E(\overline{X})$ 는 모평균과 같으므로
$E(\overline{X})=\dfrac{1+3n}{7}=\dfrac{19}{7}$ 이므로 $p+q=26$

28. 정답 32

직선 l 의 기울기가 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고,
세 직선 l, m, n 으로 둘러싸인 삼각형이 정삼각형이므로
두 접선 m, n 과 직선 l 이 이루는 예각의 크기는 $60°$ 이다.
직선 l 과 이루는 예각의 크기가 $60°$ 인 직선의 기울기를 k 라 하면
삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\left|\frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-k}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}k}\right|=\sqrt{3}\ ,\ k=\frac{\sqrt{3}}{5} \text{ 또는 } k=3\sqrt{3}$$

$f(x)=\sqrt{3}\ln x$ 에서 $f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{x}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\beta}=3\sqrt{3}$

$\alpha=5$, $\beta=\dfrac{1}{3}$ 이므로 $6(\alpha+\beta)=32$

29. 정답 134

원 C의 중심을 O' 이라 하면
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}\right) \\ &= \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}\end{aligned}$$
평면 $x-y+z-6=0$ 을 α 라 하면 구의 중심과 점 O' 을 지나는 직선 위의 점의 좌표가 $(t,\ -t,\ t+3)$ 이고 점 O' 이 평면 α 위의 점이므로
$O'(1,\ -1,\ 4)$ 이다. 따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OO'}=12$
구 S의 중심에서 평면 α 까지의 거리 $\sqrt{3}$, 구의 반지름의 길이 2에서 원 C의 반지름의 길이는 1 평면 α 와 직선 OA 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{(1,-1,1)\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2},3)}{\sqrt{1+1+1}\ \sqrt{2+2+9}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$$

$\overline{OA}=\sqrt{13}$, $\overline{O'B}=1$ 이고, $\overrightarrow{OA}$ 와 $\overrightarrow{O'B}$ 가 이루는 각의 크기를 β 라 하면
$\theta\le\beta\le\pi-\theta$ 이므로
$\cos(\pi-\theta)\le\cos\beta\le\cos\theta$

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$, $\overline{OA}=\sqrt{13}$, $\overline{O'B}=1$ 이고

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{O'B}|\cos\beta$ 이므로
$-\sqrt{10}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}\le\sqrt{10}$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 의 최댓값은 $12+\sqrt{10}$, 최솟값은

$12-\sqrt{10}$ 이므로 곱은 134

30. 정답 50

벡터 $\overrightarrow{AP}$를 시점이 원점이 되도록 옮겼을 때, 종점을 P'이라 하자.

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{AQ}$
$=\overrightarrow{OP'}\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA})$
$=\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$

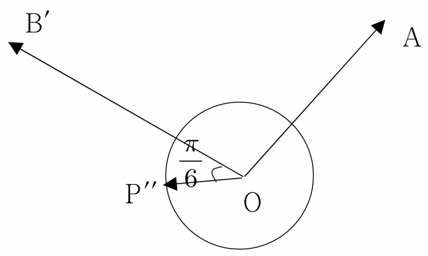
이때, 점 Q가 점 P′이 되도록 잡으면 최댓값을 가지므로

$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}\le\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$
$=1-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$ …… ㉠

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(1,\ -\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})-(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$
$=(-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3})$

이고 점 B′을 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB'}$이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{AP}$와 벡터 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$이므로 그림과 같이 점 P′이 세 점 O, A, B′에 의하여 결정된 평면 위에 그림과 같이 P″에 있을 때, $\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}$는 최솟값을 갖는다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}$이 이루는 각의 크기를 α라 하면

$\cos\alpha=\dfrac{(2,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})\cdot(-1,\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{3})}{\sqrt{4+2+3}\sqrt{1+8+3}}$
$=\dfrac{(-2)+(-4)+3}{6\sqrt{3}}$
$=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP''}$이 이루는 각의 크기는 $\alpha+\frac{\pi}{6}$이고

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}$
$=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{33}}{6}\times\dfrac{1}{2}$
$=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{33}}{12}$

그러므로

$\overrightarrow{OP''}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OP''}||\overrightarrow{OA}|\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$
$=1\times\sqrt{4+2+3}\times\left(-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{33}}{6}\right)$
$=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{33}}{4}$

그러므로 ㉠에서

$1-\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OA}\le1-\overrightarrow{OP''}\cdot\overrightarrow{OA}$
$=\dfrac{7}{4}+\dfrac{\sqrt{33}}{4}$

따라서 최댓값은 $\dfrac{7}{4}+\dfrac{\sqrt{33}}{4}$ 이므로

$a=\dfrac{7}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ 16(a^2+b^2)=50$

3회 정답 및 해설

1	②	2	⑤	3	②	4	⑤	5	③
6	④	7	③	8	①	9	⑤	10	④
11	④	12	③	13	①	14	③	15	①
16	③	17	④	18	⑤	19	③	20	③
21	③	22	2	23	40	24	12	25	9
26	50	27	88	28	18	29	18	30	17

1. 정답 ②

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-1=\dfrac{3}{5}$

2. 정답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{2}$

3. 정답 ②

$y'=2\ln2\times2^{2x-3}$

따라서 곡선 $y=2^{2x-3}+1$ 위의 점 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\ln2$

4. 정답 ⑤

[출제의도] 삼각함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to0}x^2f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\dfrac{x^2}{1-\cos\frac{x}{2}}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\dfrac{x^2\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}{\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{f(x)\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\times\dfrac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}\times4\times\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)\right\}$

$=1\times1\times4\times2=8$

5. 정답 ③

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 순서쌍 $(|a|,\ |b|,\ |c|)$의 개수는 5 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 a, b, c는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $(|a|,\ |b|,\ |c|)$의 개수의 2^3배와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

${}_5H_3\times2^3={}_{5+3-1}C_3\times8$
$={}_7C_3\times8$
$=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times8$
$=280$

6. 정답 ④

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 두 눈의 수가 모두 짝수인 사건을 B라 하자.

$P(A)=1-P(A^C)=1-\dfrac{3\times3}{36}=\dfrac{3}{4}$

$P(A\cap B)=\dfrac{3\times3}{36}=\dfrac{1}{4}$

따라서 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1}{3}$

7. 정답 ③

원 $x^2+y^2=8$ 과 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 이 만나는 네 점이 원의 둘레를 4등분하므로

쌍곡선이 점 (2, 2)를 지난다.

$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$ … ㉠

쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\sqrt{2}x$ 이므로

$b=\sqrt{2}a$ … ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $a^2+b^2=6$

8. 정답 ①

6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수와 같다.

(6명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)

=(5명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)×2+(5명을 한 팀으로 나누는 경우의 수)

(5명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)

=(4명을 두 팀으로 나누는 경우의 수)×2+(4명을 한 팀으로 나누는 경우의 수)

$=7\times2+1=15$

이므로 $15\times2+1=31$ 이다.

<다른풀이>

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3\times\dfrac{1}{2!}=6+15+10=31$

9. 정답 ⑤

$$\int_0^1 f(x)dx=k\int_0^1(x-x^4)dx$$
$$=k\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$
$$=k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$
$$=\frac{3}{10}k$$
$$=1$$

$k=\dfrac{10}{3}$

$\therefore\ 24k=24\times\dfrac{10}{3}=80$

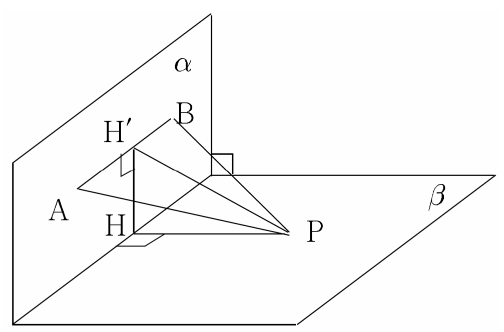
10. 정답 ④

그림과 같이 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{PH}\perp\alpha$, $\overline{HH'}\perp$(직선 AB)

그러므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PH'}\perp$(직선 AB)



한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β와 평행하므로

$\overline{HH'}=2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$\overline{PH}=4$

그러므로 직각삼각형 OHH′ 에서

$$\overline{PH'}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HH'}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+2^2}$$
$$=2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH'}=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$

11. 정답 ④

$\hat{p}=0.2$ 이므로 $2\times2\times\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=2\times2\times\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{400}}=0.08$

12. 정답 ③

벡터 $\overrightarrow{OP}=(a,\ b)$, $\overrightarrow{OQ}=(c,d)$ 라 하면

$\overrightarrow{OP'}=(a+3,\ b+1)$, $\overrightarrow{OQ'}=(c+3,d+1)$

ㄱ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}=(a,b)-(a+3,b+1)\ =(-3,-1)$

이므로 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP'}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$ (참)

ㄴ. $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$

$\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}=(a+3,b+1)-(c+3,d+1)$

$=(a-c,b-d)$

이므로 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OQ'}|$ (참)

ㄷ. (반례)

$\overrightarrow{OP}=(1,1)$, $\overrightarrow{OQ}=(1,2)$ 일 때,

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=1\cdot1+1\cdot2=3$ 이다.

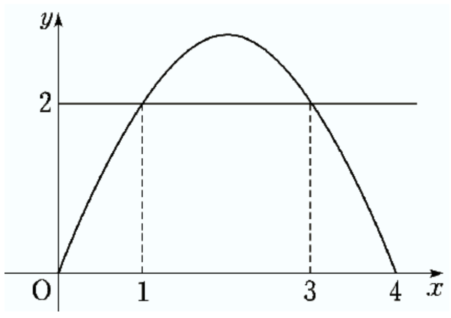
그런데, $\overrightarrow{OP'}=(4,2)$, $\overrightarrow{OQ'}=(4,5)$ 이므로

$\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}=4\cdot4+2\cdot5=26$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\neq\overrightarrow{OP'}\cdot\overrightarrow{OQ'}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13. 정답 ①



$f(x)=f(2-x)$ 이므로 $f(x)$와 $g(x)$의 교점의 x좌표는 1, 3이다.

$$\int_1^3(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x)dx-4\ =\left[-\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cdot\cos\frac{\pi}{4}x\right]_1^3-4$$
$$=\frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cdot\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}-4$$
$$=\frac{16}{\pi}-4$$

14. 정답 ③

일차함수 $g(x)$에 대하여

$f(x)\le g(x)$ 이려면 $g(x)$는 $x=1$에서 $f(x)$의 접선이다.

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot\dfrac{\pi}{4}x$

$f'(1)=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{\pi}{2}(x-1)+2$

$\therefore g(3)=\pi+2$

15. 정답 ①

점 P의 xy평면 위로의 정사영 Q의 좌표는

(1, 1, 0)이므로 $\overline{PQ}=4$

점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면 삼수선 정리에 의하여

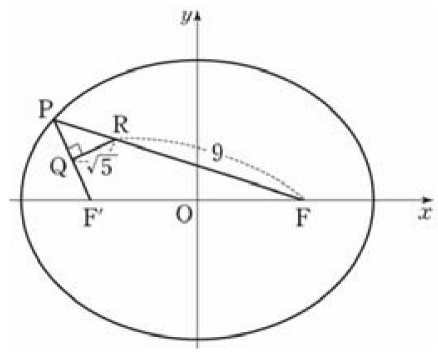
$\overline{PR}\perp\overline{BC}$

점 Q가 이등변삼각형 ABC 의 무게중심이므로

$\overline{QR}=\dfrac{1}{3}\overline{AR}=\sqrt{2}$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 $3\sqrt{2}$

16. 정답 ③



직각삼각형 PQR 에서 $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{PF}}=3$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF'}}=k$ 라 하면

$k^2+5=9$

$\therefore\ k=2(\because\ k>0)$

이때 $\overline{\mathrm{PF'}}=2\times2=4$, $\overline{\mathrm{PF}}=3+9=12$ 이고

$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}=12+4=16$

이므로 주어진 타원의 장축의 길이는 16이다.

따라서 $2a=16$ 이므로 $a=8$

직각삼각형 PQR 에서 $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ 라 하면

$\cos\theta=\frac{2}{3}$

따라서 삼각형 FPF′ 에서 코사인 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FF'}}^2&=12^2+4^2-2\times12\times4\times\cos\theta\\&=160-96\times\frac{2}{3}\\&=160-64=96\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{FF'}}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

따라서 $c=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{6}$ 이므로

$a^2-b^2=(2\sqrt{6})^2$

$b^2=64-24=40$

$\therefore\ a^2+b^2=64+40=104$

17. 정답 ④

$F(x)+xf(x)=F(x)+xF'(x)=\{xF(x)\}'$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

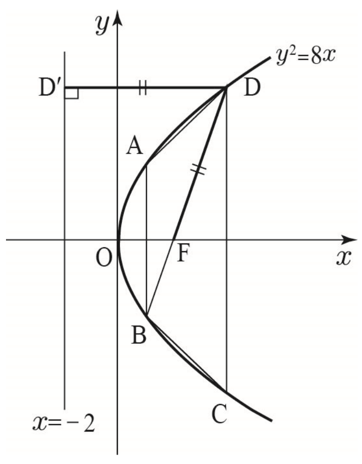
$$\begin{aligned}xF(x)&=\int(2x+2)e^x dx\\&=(2x+2)e^x-\int 2e^x dx\\&=(2x+2)e^x-2e^x+C\\&=2xe^x+C\ \ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

$F(1)=2e+C=2e$ 에서 $C=0$

$F(x)=2e^x$

따라서 $F(3)=2e^3$

18. 정답 ⑤



포물선 $y^2=8x$ 의 초점 F의 좌표는 $(2,0)$

점 D에서 포물선의 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 D′이라 하면

$\overline{\mathrm{DD'}}=\overline{\mathrm{FD}}=6$ 이므로 점 D의 x좌표는 4이고 점 D의 좌표는 $(4, 4\sqrt{2})$

점 B의 좌표를 (a, b)라 하면

직선 BF의 기울기와 직선 FD의 기울기가 같으므로

$\frac{-b}{2-a}=\frac{4\sqrt{2}}{2}$

$b=2\sqrt{2}a-4\sqrt{2}$

$b^2=8a$, $a^2-5a+4=0$

$a<2$ 이므로 $a=1$

따라서 사각형 ABCD 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(8\sqrt{2}+4\sqrt{2})\times3=18\sqrt{2}$

19. 정답 ③

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가

2 이하일 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$

3 이상일 사건을 B라 하면 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

3번째 시행에서 4가 적혀 있는 카드가 뒤집어질 경우는 다음과 같다.

(i) ABA 또는 ABB인 경우의 확률

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$

(ii) AAB인 경우의 확률

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

(iii) BAA 또는 BAB인 경우의 확률

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{9}=\frac{14}{27}$

20. 정답 ③

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x<-\frac{\pi}{2}$ 에서 0이므로

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-}g(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-}0=0$ (참)

ㄴ. $a=2$ 이므로 $f(x)=\sin^2x+2\cos x$ 이다.

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

임의의 실수 α에 대하여

$\lim\limits_{x\to\alpha-}f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+}f(x)=f(\alpha)$ 를 만족한다.

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-}(f\circ g)(x)=f(0)=\sin^2 0+2\cos 0=2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}(f\circ g)(x)&=\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)\\&=\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}-}(f\circ g)(x)\neq\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+}(f\circ g)(x)$

이므로 합성함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=-\frac{\pi}{2}$ 에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi-}(f\circ g)(x)&=\lim_{x\to\pi-}f(x)\\&=\sin^2\pi+a\cos\pi=-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi+}(f\circ g)(x)&=\lim_{x\to\pi+}f(bx)\\&=\sin^2 b\pi+a\cos b\pi\end{aligned}$$

$(f\circ g)(\pi)=f(b\pi)=\sin^2b\pi+a\cos b\pi$

합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=\pi$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to\pi-}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to\pi+}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(\pi)$

그러므로

$\sin^2b\pi+a\cos b\pi=-a$

$1-\cos^2b\pi+a\cos b\pi+a=0$

$1-\cos^2b\pi+a(1+\cos b\pi)=0$ ⋯ ㉠

㉠이 a에 대한 항등식이므로

$1-\cos^2b\pi=0$ 이고 $\cos b\pi+1=0$ 이다.

$\cos b\pi=-1$ 이므로 $b\pi=(2n-1)\pi$ (n은 정수)

$b=2n-1$ (n은 정수) (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. 정답 ③

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열한 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(ⅰ) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만들기 위해서는 새로운 1개의 ○을 나열되어 있는 ○에 이웃하도록 나열하고, 4번의 <A형>을 만들기 위해서는 새로운 4개의 ●을 나열되어 있는 ●에 이웃하도록 나열하면 되므로

${}_2C_1 \times {}_3H_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 30$

(ⅱ) ○●○●○인 경우

같은 방법으로

${}_3C_1 \times {}_2H_4 = {}_3C_1 \times {}_5C_4 = 15$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 경우의 수는 45

22. 정답 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=2$$

23. 정답 40

$x'(t)=1-\dfrac{40}{\pi}\sin(2\pi t)$

$x''(t)=-80\cos(2\pi t)$

따라서 시각 $t=\dfrac{1}{3}$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\left|x''\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\left|-80\cos\frac{2\pi}{3}\right|=40$$

24. 정답 12

$f(0)=1$ 이므로 $g(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2$ 에서 $f'(0)=2$ 이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $24g'(1)=12$

25. 정답 9

$A(1,0,\sqrt{3}), B(0,3,2\sqrt{3})$ 이므로 $\overline{AC}=\sqrt{3}$, $\overline{BD}=2\sqrt{3}$

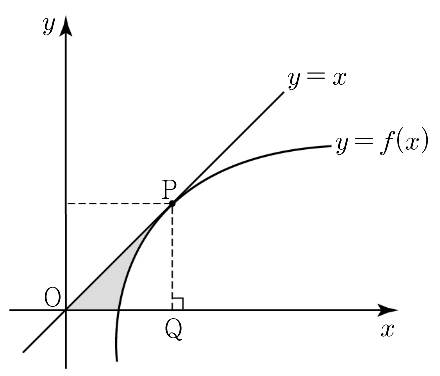
$l: 4x+3y+1=0$, $z=0$ 에서 $\overline{CE}=1$, $\overline{DF}=2$

$\therefore \overline{EF}=3$

$\overline{AE}=2$, $\overline{BF}=4$ 이므로 □AEFB $=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times3=9$

26. 정답 50

$f(x)=k\ln x$ 라 하자.



접점의 좌표를 $P(p, p)$ 라 하면

$f(p)=k\ln p=p$ … ㉠

$f'(x)=\dfrac{k}{x}$ 이므로 $f'(p)=\dfrac{k}{p}=1$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=e$, $k=e$

$f(x)=e\ln x$

구하고자 하는 넓이 S는

$S=(\text{삼각형 OPQ의 넓이})-\int_1^e f(x)dx$

$=\dfrac{1}{2}e^2-\int_1^e e\ln x\,dx$

$=\dfrac{1}{2}e^2-e[x\ln x-x]_1^e$

$=\dfrac{1}{2}e^2-e(e\ln e-e+1)$

$=\dfrac{1}{2}e^2-e$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$ 이므로

$100ab=50$

27. 정답 88

직선 $x=2$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로

$p=k^2\log 2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로

$k^2\log 2=k\log a$ 를 정리하면 $a=2^k$

직선 $x=2$와 곡선 $y=h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로

$q=4k^2\log 2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로

$4k^2\log 2=k^2\log b$ 를 정리하면 $b=2^4$

세 점 $P(2,0)$, $Q(2^k, k^2\log 2)$, $R(2^4, 4k^2\log 2)$ 가 한 직선 위에 있으므로

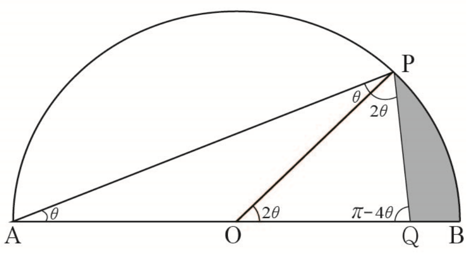
$\dfrac{k^2\log 2}{2^k-2}=\dfrac{4k^2\log 2}{14}$ 를 정리하면 $2^k=\dfrac{11}{2}$

$a=\dfrac{11}{2}$, $b=16$

따라서 $ab=88$

28. 정답 18

반원의 중심을 O라 하자.



$\overline{OP}=6$, $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

$\angle POQ=\angle OPQ=2\theta$, $\angle OQP=\pi-4\theta$

삼각형 OQP 에서 $\dfrac{\overline{PQ}}{\sin 2\theta}=\dfrac{6}{\sin(\pi-4\theta)}$

$\overline{PQ}=\dfrac{6\sin 2\theta}{\sin 4\theta}=\dfrac{6\sin 2\theta}{2\sin 2\theta\cos 2\theta}=\dfrac{3}{\cos 2\theta}$

삼각형 OQP 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times6\times\dfrac{3}{\cos 2\theta}\times\sin 2\theta=\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$S(\theta)=(\text{부채꼴 OBP의 넓이})-(\text{삼각형 OQP의 넓이})$

$=\dfrac{1}{2}\times6^2\times2\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$=36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{36\theta-\dfrac{9\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}{\theta}=18$

29. 정답

$\tan(\angle AOB)=\tan(\angle AOC)=\sqrt{3}$

$\angle AOB=\angle AOC=\dfrac{\pi}{3}$

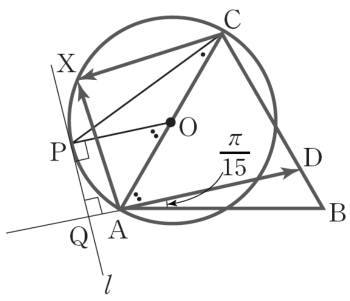
맞꼭지각의 성질에 의하여

$\angle DOE=\angle DOF=\dfrac{\pi}{3}$

$\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}=2$ 이므로 $\overline{DE}=\overline{DF}=2$

$\overline{OB}=\overline{OC}=4$ 이므로
삼각형 OBC 와 삼각형 OEF 의 닮음비가 $2:1$ 이고
$\overline{EF}=\sqrt{6}$
선분 EF 의 중점을 H라 하자.
$\overline{DH}=\overline{OH}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$
그러므로 삼각형 DEF 의 넓이 S'은
$$S'=\frac{1}{2}\times\overline{DH}\times\overline{EF}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$
평면 OBC 와 평면 OEF 는 같은 평면이므로
두 평면 DEF 와 OBC 가 이루는 예각의 크기는
두 평면 DEF 와 OEF 가 이루는 예각의 크기와 같다.
두 평면 DEF 와 OEF 가 이루는 예각의 크기 θ는
두 직선 DH, OH가 이루는 예각의 크기와 같다.
$$\cos\theta=\frac{\overline{DH}^2+\overline{OH}^2-\overline{OD}^2}{2\times\overline{DH}\times\overline{OH}}=\frac{1}{5}$$
삼각형 DEF 의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이
$$S=S'\times\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{10}$$
따라서 $100S^2=15$

30. 정답 17



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$
$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ …㉠
세 점 A, C, D 는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.
따라서 ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$ 의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$ 의 값이 최소가 되어야 한다.
두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AX}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$ 이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로
$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$ 의 값이 최소이어야 한다.
오른쪽 그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선 l이 원과 접할 때의 접점을 P라 하고 그때 직선 AD와 만나는 점을 Q라 하면
$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta\ge|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=-|\overrightarrow{AQ}|$
이때, $\overline{PO}//\overline{QD}$ 이므로
$$\angle AOP=\angle OAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$$
$2\angle ACP=\angle AOP$ 에서
$$\angle ACP=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$$
$\therefore p+q=15+2=17$
[다른 풀이]
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OC}$
이때 네 점 O, A, C, D 는 고정된 점이므로
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}$ 의 값이 최소가 되어야 한다.
두 벡터 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{OX}|\cos\theta$ 에서
$-1\le\cos\theta\le1$
$\cos\theta=-1$ 일 때, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OX}$ 의 값은 최소가 된다.
이때, $\cos\theta=-1$ 을 만족시키는 점 X를 P라 하면
두 선분 OP, AD가 서로 평행하므로
$$\angle AOP=\angle OAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$$
$$\therefore\angle ACP=\frac{1}{2}\angle AOP=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$$
$\therefore p+q=15+2=17$

4회 정답 및 해설

1	④	2	⑤	3	①	4	①	5	⑤
6	①	7	②	8	②	9	②	10	③
11	⑤	12	①	13	④	14	①	15	③
16	④	17	④	18	③	19	③	20	③
21	③	22	9	23	160	24	55	25	14
26	40	27	503	28	23	29	30	30	20

1. 정답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2\times1=2$$

2. 정답 ⑤

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ 일 때,
$f(x)=\sqrt{3^2+4^2}\sin(x+\alpha)=5\sin(x+\alpha)$
이므로 $f(x)$의 최댓값은 5이다.

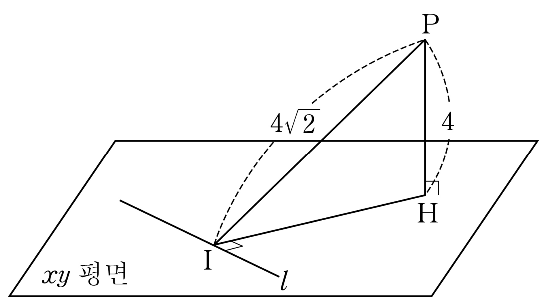
3. 정답 ①

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx$$
$$=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

4. 정답 ①

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.
$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
이므로 $\dfrac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}$ 에서 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$
따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

5. 정답 ⑤



점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 I라 하자.
직선 PH가 xy 평면에 수직이고, $\overline{PI}\perp l$ 이므로
삼수선의 정리에 의해 $\overline{HI}\perp l$ 이다.
$\overline{PH}=4$, $\overline{PI}=4\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{HI}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=\sqrt{16}=4$
따라서 구하는 거리는 4이다.

6. 정답 ①

$t=a-x$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$ 이고,
$x=a+1$일 때 $t=-1$, $x=a-1$일 때 $t=1$이므로
$$\int_{a-1}^{a+1}f(a-x)dx=\int_1^{-1}f(t)(-1)dt=\int_{-1}^1 f(t)dt$$
함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로
$$\int_{-1}^1 f(t)dt=2\int_0^1 f(t)dt=24$$

따라서 $\int_0^1 f(x)dx = 12$

7. 정답 ②

오른쪽 그림과 같이 선분 O_1O_2의 연장선 위에 O_3를 잡고

반지름의 길이가 1인 그려 원 O_1과 만나는 점을 각각 A_1, B_1이라 하자.

이때, $\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1Q_1}$ 인 점 Q_1을 잡고

두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q_1}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2Q} = \overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_1Q_1}$

$= |\overrightarrow{O_1P}||\overrightarrow{O_1Q_1}|\cos\theta = \cos\theta$ ----㉠

이 때, 오른쪽 그림에서 네 삼각형 O_1O_2A, O_1BO_2, $O_1A_1O_3$, $O_1O_3B_1$가 정삼각형이므로

$\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5}{3}\pi$

따라서, ㉠은 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때, 최댓값 $\frac{1}{2}$, $\theta = \pi$일 때, 최솟값 -1을 가지므로

$M + m = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$

8. 정답 ②

표본의 크기가 16이므로

$\overline{X}$는 정규분포 $N\left(70, \left(\frac{2.5}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$P(|\overline{X} - 70| \le a) = P\left(\left|\frac{\overline{X}-70}{\frac{2.5}{4}}\right| \le \frac{a}{\frac{2.5}{4}}\right) = P\left(|Z| \le \frac{8}{5}a\right)$

$P(|Z| \le 2) = 0.9544$ 이므로 $\frac{8}{5}a = 2$에서 $a = 1.25$

9. 정답 ②

꺼낸 3개의 공에 적힌 수 중 네 수 0, 2, 3, 5의 개수를 각각 a, b, c, d라 하자.

세 수의 곱은 0 또는 $2^b3^c5^d$이고

$a+b+c+d = 3$ $(a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0,\ d \ge 0)$

이다.

(i) $a \ne 0$일 때

세 수의 곱은 항상 0이므로 구하는 정수는 1개이다.

(ii) $a = 0$일 때

순서쌍 (b, c, d)가 다르면 $2^b3^c5^d$의 값도 다르므로 구하는 정수의 개수는 $b+c+d = 3$을 만족시키는 순서쌍 (b, c, d)의 개수와 같다. 즉, ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$

이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 정수의 개수는 11이다.

10. 정답 ③

삼각형 ABC에서

$\frac{1}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{AB}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{AC}}{\sin\theta}$ 이므로

$\overline{AB} + \overline{AC} = \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin 3\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sin 3\theta}$

$= \frac{\sin\theta(2\cos\theta + 1)}{\sin 3\theta}$

이때 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 이므로

$\overline{AB} + \overline{AC} = a$ 에서

$a = \frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\sin\theta(3-4\sin^2\theta)} = \frac{2\cos\theta+1}{3-4\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta+1}{4\cos^2\theta-1} = \frac{1}{2\cos\theta-1}$

따라서 $\cos\theta = \frac{a+1}{2a}$이다.

위의 과정에서

$f(\theta) = 2\cos\theta + 1$, $g(\theta) = 2\cos\theta - 1$, $h(a) = \frac{a+1}{2a}$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) + g\left(\frac{\pi}{6}\right) + h(2) = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1) + \frac{3}{4} = 2\sqrt{3} + \frac{3}{4}$

11. 정답 ⑤

$x^2 + (y-3)^2 = 5^2$에서 $y = 0$일 때, $x = 4$ 또는 $x = -4$

따라서 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

각각 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$으로 놓을 수 있다.

그런데 이 두 점은 타원의 초점이고 점 P는 타원 위의 점이므로

$\overline{AP} + \overline{BP} = 10$ … ㉠

삼각형 APB에서 $\angle APB = \theta$라 하면

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 - 2\times\overline{AP}\times\overline{BP}\times\cos\theta = 8^2$ … ㉡

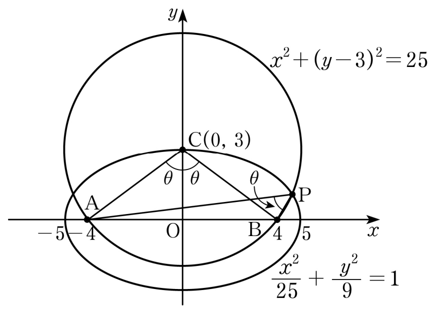
각 $\angle APB$는 호 AB의 원주각이고, 원의 중심을 $C(0, 3)$이라 하면

각 $\angle ACB$는 호 AB의 중심각이다.

따라서 $\angle ACB = 2\theta$에서 $\angle OCA = \angle APB = \theta$

이때 $\overline{AC} = 5$, $\overline{OC} = 3$이므로 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $\overline{AP}\times\overline{BP} = \frac{45}{4}$



12. 정답 ①

한 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

예를 들어 각 상자에는 상자의 색과 다른 색의 공을 담아야 하므로 빨간 상자에 파란 공 1개와 노란 공 4개를 담으면 노란 상자에는 파란 공 4개와 빨간 공 1개를, 파란 상자에는 노란 공 1개와 빨간 공 4개를 담아야 한다.

즉, 빨간 상자에 공을 담는 경우가 결정되면 다른 상자에 공을 담는 경우도 한 가지로 결정된다.

그러므로 노란 공 5개와 파란 공 5개 중에서 빨간 상자에 담을 5개의 공을 선택하는 방법의 수가 구하는 경우의 수이다.

따라서 노란 공과 파란 공 2종류의 공에서 중복을 허락하여 5개의 공을 빨간 상자에 담는 방법의 수는 ${}_{2+5-1}C_5 = 6$ 이다.

13. 정답 ④

직선 l의 방정식은 $y = (\tan\theta)x$이므로

$-x^3 + x = (\tan\theta)x$ 에서 $x(x^2 + \tan\theta - 1) = 0$

$x \ge 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{1-\tan\theta}$ 이다.

따라서 곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S(\theta) = \int_0^{\sqrt{1-\tan\theta}} \{(-x^3 + x) - (\tan\theta)x\}dx$

$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(1-\tan\theta)x^2\right]_0^{\sqrt{1-\tan\theta}}$

$= \frac{1}{4}(1-\tan\theta)^2$

이므로 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} \frac{1}{4}\left(\frac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}}\right)^2$ 이다.

$f(\theta) = \tan\theta$라 하면 $f'(\theta) = \sec^2\theta$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$이므로

$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} \frac{\tan\theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} \frac{f(\theta) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\theta - \frac{\pi}{4}} = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

따라서 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-} \frac{S(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\left(f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\times 2^2 = 1$

14. 정답 ①

ㄱ. $\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ $(0 \le t \le 1)$이므로

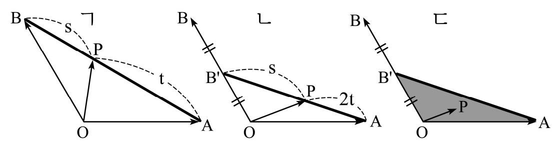
점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다. [참]

ㄴ. $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = s\overrightarrow{OA} + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$ 이므로

점 P 가 그리는 도형은 선분 AB′ (이 때, $\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$)이고,

그 길이는 선분AB 의 길이보다 작은 경우도 있다. [거짓]

ㄷ. 양수 s, t 가 $s+2t \le 1$ 이면 점 P 가 그리는 영역은 삼각형OAB′ 이므로 삼각형OAB 에 포함된다. [거짓]



15. 정답 ③

점 P 가 원점으로 다시 돌아오는 경우는

(짝, 짝, 홀, 홀)이 배열되는 경우

$\frac{4!}{2!2!}=6$ (가지),

이때, 점 A(1) 을 들러 왔을 경우는

(짝, ×, ×, ×): $\frac{3!}{2!}=3$ (가지),

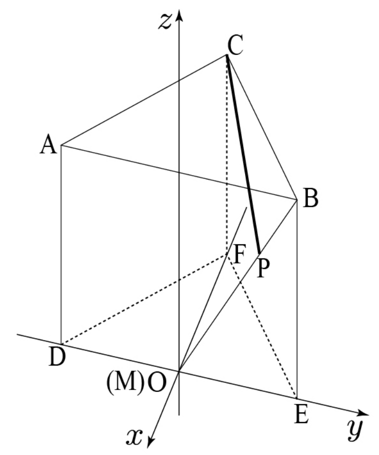
(홀, 짝, 짝, 홀) : 1 (가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{3+1}{6}=\frac{2}{3}$ 이고

$a^2+b^2=13$

16. 정답 ④

그림과 같이 점 M을 좌표공간의 원점으로 하면



점 B(0, 3, 6), 점 C$(-3\sqrt{3}, 0, 6)$ 에서

점 P는 $\overline{BM}$ 를 1 : 2 로 내분하므로 P(0, 2, 4)

$\overline{CP}=l=\sqrt{35}$

따라서 $10l^2=350$

17. 정답 ④

전반기의 자동차 판매 대수를 X, 후반기의 자동차 판매 대수를 Y 라 하면,

X 는 정규분포 $N(32, 8^2)$,

Y 는 정규분포 $N(38, 10^2)$ 을 따른다.

$P(X \ge 44)=P(Y \ge k)$

$P(X \ge 44)=P\left(Z \ge \frac{44-32}{8}\right)=P(Z \ge 1.5)$

$P(Y \ge k)=P\left(Z \ge \frac{k-38}{10}\right)=P(Z \ge 1.5)$

$\therefore \frac{k-38}{10}=1.5$

$\therefore k=53$

18. 정답 ③

$y=\cos^n x$

$y'=-n\cos^{n-1}x\sin x$

$y''=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2 x-n\cos^{n-1}x\cos x$

$=n(n-1)\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)-n\cos^{n-1}x\cos x$

$=n(n-1)\cos^{n-2}x-n(n-1)\cos^n x-n\cos^n x$

$=n(n-1)\cos^{n-2}x-n^2\cos^n x$

$=\cos^{n-2}x(n^2-n-n^2\cos^2 x)$

$=\cos^{n-2}x(n^2\sin^2 x-n)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x \ne 0$ 이므로

$y''=0$ 에서 $n^2\sin^2 x-n=0$, $\sin^2 x=\frac{1}{n}$

꼭짓점의 좌표를 (b_n, a_n) 이라 하면

$\sin^2 b_n=\frac{1}{n}$ 이므로

$a_n=\cos^n b_n=(\cos^2 b_n)^{\frac{n}{2}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{e}}$

19. 정답 ③

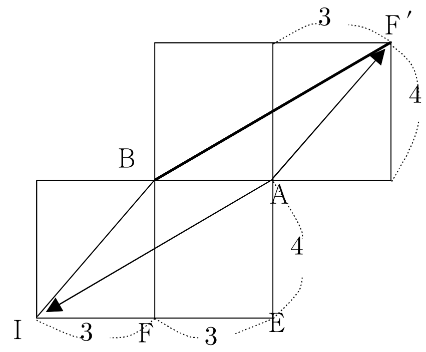
$\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AB}+(1-k)\overrightarrow{GD}$ (단, $0 \le k \le 1$) 에서

$\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{AF}$ 을 대입하면

$\overrightarrow{AX}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})-\overrightarrow{AF}$ (단, $0 \le k \le 1$) 이다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AI}$, $-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AF'}$ 라 두면

아래 그림에서



$\overrightarrow{AX}=k\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AF'}$ (단, $0 \le k \le 1$)

∴ X 의 자취는 $\overline{BF'}$ 이므로 자취의 길이는

∴ $\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$

20. 정답 ③

ㄱ. $y=-\log_2 x$ 의 그래프 위의 점 $\left(\frac{1}{2},1\right)$과 $P(x_1, y_1)$ 의 위치를 비교하면

$y_1<1$ 이므로 $\frac{1}{2}<x_1<1$ [참]

ㄴ. $y=2^x$ 의 역함수는 $y=\log_2 x$ 이고,

$y=-\log_2 x$ 의 역함수는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로

$y=2^x$ 와 $y=-\log_2 x$ 의 교점 $R(x_3, y_3)$ 와

$y=\log_2 x$ 와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 교점 $Q(x_2, y_2)$ 는

직선 $y=x$에 대해 대칭이다.

$\therefore x_3=y_2, x_2=y_3$ …… (*)

$\therefore x_2y_2-x_3y_3=0$ [참]

ㄷ. 점 (1,0)을 S라 하면

($\overline{RS}$의 기울기) < ($\overline{PS}$의 기울기) 이므로

$\frac{y_3}{x_3-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$ 이고, 여기에 위의 (*)을 대입하면

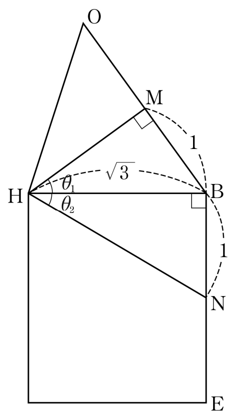
$\frac{x_2}{y_2-1}<\frac{y_1}{x_1-1}$ 이 성립하므로

$x_2(x_1-1)<y_1(y_2-1)$ $(\because x_1-1<0, y_2-1<0)$ [거짓]

따라서, 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

21. 정답 ③

점 M에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,
주어진 도형을 평면 OBH로 자른 단면은 그림과 같다.



$\overline{MB}=1$, $\overline{HB}=\sqrt{3}$

$\overline{HN}$

$\overline{HM}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}=\sqrt{2}$

$\overline{HN}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}=2$

$\cos\theta_1=\dfrac{\overline{HM}}{\overline{BH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos\theta_2=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{HN}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\cos(\theta_1+\theta_2)$

$=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

22. 정답 9

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$ 이므로 $f'\left(\dfrac{1}{10}\right)=10-1=9$ 이다.

23. 정답 160

점 P와 평면 사이의 거리가 최대일 때는 구의 중심 C$(0,0,1)$을 지나고 평면에 수직인 직선이 구와 만나는 두 점 중 평면과의 거리가 더 먼 점이 P일 때이다.
점 C$(0,0,1)$과 평면 $2x-y+2z-7=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|2\times0-1\times0+2\times1-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$

이므로 거리의 최댓값은 $\dfrac{5}{3}+1=\dfrac{8}{3}$ 이다.

따라서 $60d=60\times\dfrac{8}{3}=160$

24. 정답 55

포물선 $y^2=4x$ 와 접하고 기울기가 a_n인 접선의 방정식은 $y=a_nx+\dfrac{1}{a_n}$ 이다.

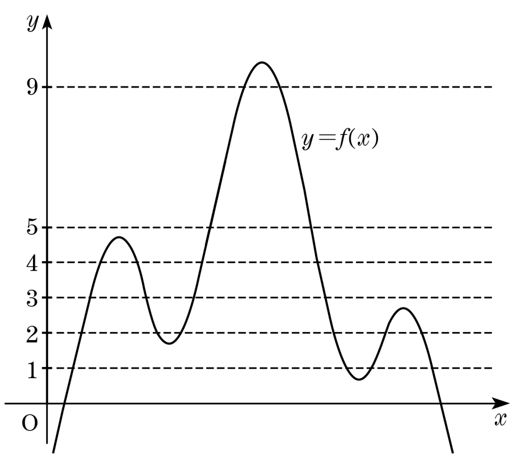
이 접선이 점 $(-n,0)$을 지나므로

$0=a_n\times(-n)+\dfrac{1}{a_n}$, $a_n^{\ 2}=\dfrac{1}{n}$

접선이 제1사분면에서 접하므로 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{a_n}\right)^2=\sum_{n=1}^{10}n=55$

25. 정답 14



확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{6}$	1

$E(X)=2\cdot\dfrac{1}{3}+4\cdot\dfrac{1}{2}+6\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{11}{3}$

따라서 $p=3$, $q=11$ 이므로 $p+q=14$ 이다.

26. 정답 40

A가 2번 가위바위보를 하여 최종 승자가 되는 사건을 X, 2번째 가위바위보를 한 학생이 2명인 사건을 Y라 하자.
(ⅰ) 첫 번째에 이긴 학생이 없을 때
세 학생이 첫 번째에 모두 다른 것을 내거나 모두 같은 것을 내고, 2번째에 A가 이길 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\dfrac{3!+3}{3^3}\times\dfrac{3}{3^3}=\dfrac{1}{27}$ 이다.

(ⅱ) 첫 번째에 이긴 학생이 2명일 때
첫 번째에 A를 포함한 2명이 이기고, 2번째에 A가 이길 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{3\times2}{3^3}\times\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{2}{27}$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X\cap Y^C)+\mathrm{P}(X\cap Y)=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}$

따라서 $\mathrm{P}(Y|X)=\dfrac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore 60p=60\times\dfrac{2}{3}=40$

27. 정답 503

점프대를 출발한지 t초 후의 탄력줄의 길이를 $l(\geq 20)$,
반지름의 길이를 r라 하면
탄력줄의 부피 V는 $V=\pi r^2 l$ (일정)이고 l과 r는 모두 t의 함수이다.
이 식을 시각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dV}{dt}=\pi\left(r^2\dfrac{dl}{dt}+2rl\dfrac{dr}{dt}\right)=0$

$r^2\dfrac{dl}{dt}+2rl\dfrac{dr}{dt}=0$

A 지점을 지나는 순간 $l=25(\mathrm{m})$, $r=\dfrac{3}{100}(\mathrm{m})$,

$\dfrac{dl}{dt}=10(\mathrm{m}/초)$ 이므로

$\left(\dfrac{3}{100}\right)^2\times10+2\times\dfrac{3}{100}\times25\,\dfrac{dr}{dt}=0$ 에서

$\dfrac{dr}{dt}=-\dfrac{3}{500}\ (\mathrm{m}/초)$

$\therefore a+b=500+3=503$

28. 정답 23

7개의 점 중 서로 다른 2개의 점을 선택하는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$ 이다.
서로 다른 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}$ 가 이루는 각의 크기를 θ_k라 하면

$\theta_k=\dfrac{k}{6}\pi$ $(k=1,2,3,4,5,6)$이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}|=|\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}|=1$ 이므로
$X=\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_j}|\cos\theta_k=\cos\theta_k$
가 되는 두 점의 순서쌍은
$(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_k)$, $(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_{k+1})$, $\cdots$, $(\mathrm{P}_{6-k},\mathrm{P}_6)$
으로 $7-k$가지이고, $\cos\theta_k$ 의 값은 차례로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{1}{2}$, 0, $-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, -1

이다. 따라서 확률변수 X의 확률분포를 나타내는 표는 다음과 같다.

X	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{21}$	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{3}{21}$	$\dfrac{4}{21}$	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{6}{21}$	1

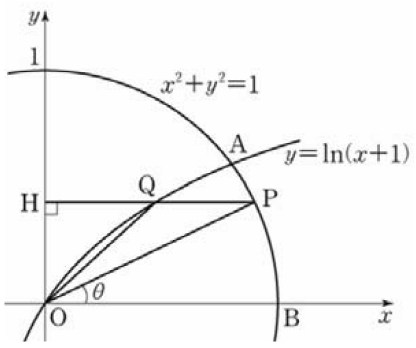
$E(X)=(-1)\times\dfrac{1}{21}+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{2}{21}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{21}+0\times\dfrac{4}{21}$

$\quad+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{21}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{6}{21}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{21}$

따라서 $p+q=21+2=23$

29. 정답 30



$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ 이므로 점 Q 의 x 좌표는 $\sin\theta = \ln(x+1)$ 에서

$x = e^{\sin\theta} - 1$

따라서 $Q(e^{\sin\theta}-1,\ \sin\theta)$ 이므로

$S(\theta) = \frac{1}{2}\times(\cos\theta - e^{\sin\theta}+1)\times\sin\theta$

한편 $H(0,\ \sin\theta)$ 이므로

$L(\theta) = e^{\sin\theta}-1$

$\therefore\ k = \lim\limits_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to+0}\frac{(\cos\theta - e^{\sin\theta}+1)\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$

$= \frac{1}{2}\times\lim\limits_{\theta\to+0}(\cos\theta - e^{\sin\theta}+1)\times\lim\limits_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}$

$= \frac{1}{2}\times(1-1+1)\times 1 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ 60k = 60\times\frac{1}{2} = 30$

30. 정답 20

원점 O 에서 평면 PQR 에 내린 수선의 발은 삼각형 PQR 의 무게중심 G 와 같으므로 $\overrightarrow{OG}$ 는 평면 PQR 의 법선벡터이다. 또, 면 PQR 와 z축이 만나는 점을 A 라 하면 $\overrightarrow{OA}$ 는 xy평면의 법선벡터이다.

따라서 평면 PQR 와 xy평면이 이루는 각의 크기 θ는 두 벡터 $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OA}$ 가 이루는 각의 크기와 같다.

$\overline{OP}=1$, $\overline{PG} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$\overline{OG} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PG}^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

삼각형 OAG 는 직각삼각형이고 $\overline{OA} \le \overline{OP} = 1$ 이므로

$\cos\theta = \frac{\overline{OG}}{\overline{OA}} \ge \frac{\sqrt{6}}{3}$

정삼각형 PQR 의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\cos\theta \ge \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(단, 등호는 $\overline{OA}=1$, 즉 점 A 가 세 꼭짓점 P, Q, R 중 하나일 때 성립한다.)

$k = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 $160k^2 = 20$ 이다.

5회 정답 및 해설

1	③	2	⑤	3	③	4	③	5	④
6	②	7	②	8	③	9	③	10	②
11	③	12	⑤	13	①	14	④	15	①
16	④	17	⑤	18	④	19	③	20	②
21	③	22	16	23	10	24	10	25	288
26	50	27	10	28	49	29	11	30	13

1. 정답 ③

$(\log_3 x)(\log_3 x + 1) \le 20$

$t = \log_3 x$ 라 하면

$t(t+1) \le 20,\ t^2+t-20 \le 0$

$(t+5)(t-4) \le 0$

$\therefore\ -5 \le t \le 4$

$-5 \le \log_3 x \le 4$

따라서, $3^{-5} \le x \le 3^4$ 이므로

자연수 x의 개수는 81개다.

2. 정답 ⑤

$(1+\tan\theta)\tan 2\theta = (1+\tan\theta)\times\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan\theta} = 3$

따라서 $\tan\theta = \frac{3}{5}$

3. 정답 ③

두 사건 A 와 B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$, $P(A) = \frac{1}{2}$

따라서 $P(A^C) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

4. 정답 ③

$f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 $f(g(x)) = x$

$g(2) = \theta$ 라 하면 $f(\theta) = 2$

$f(\theta) = 2\sin\theta + 1 = 2$ 에서 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $g(2) = \frac{\pi}{6}$

$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 정답 ④

X가 이항분포 $B(9,\ p)$를 따르므로

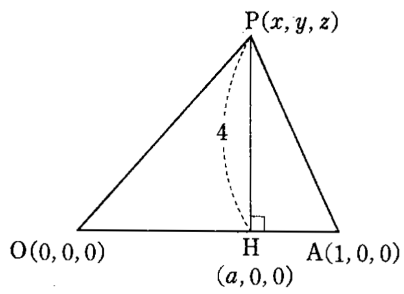
$E(X) = 9\cdot p$, $V(X) = 9\cdot p\cdot(1-p)$

$\therefore\ \{9\cdot p\}^2 = 9\cdot p\cdot(1-p)$ 에서

$9p = 1-p$ $(\because\ 0 < p < 1)$

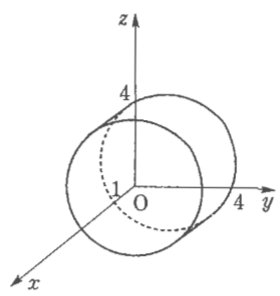
$\therefore\ p = \frac{1}{10}$

6. 정답 ②



$P(x,\ y,\ z)$ 에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 $H(a,\ 0,\ 0)$ 라 하면

$\overline{OA} = 1$ 로 일정하므로 $\overline{PH} = 4$



$\overline{PH} = \sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2} = 4$

$(x-a)^2+y^2+z^2 = 16$

한편, $\overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{OA}$ 이므로

$(x-a,\ y,\ z) \cdot (1,\ 0,\ 0)=0$

$x-a=0$

$\therefore x=a$

$y^2+z^2=16$

$0 \le x \le 1$ 이므로

옆면의 넓이는 $2\pi \times 4 \times 1 = 8\pi$

7. 정답 ②

$x \ge 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1$ 이고 $x+y+z=6$ 이므로

$x-1=X,\ y-1=Y,\ z-1=Z$ 로 치환하면

$X+Y+Z=3$ 인 음이 아닌 정수해 $(X,\ Y,\ Z)$ 의 개수와 일치하므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

8. 정답 ③

사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ 의 꼭짓점의 좌표는

$\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$, $\mathrm{Q}_n\left(n,\ \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $\mathrm{Q}_{n+1}\left(n+1,\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1,\ 2^{n+1})$

이므로 사다리꼴 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ 의 넓이

$$A_n=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left\{\left(2^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+\left(2^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right\}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_n}{2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n+2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=3$

9. 정답 ③

$3km$ 를 달리는 시간을 t 분이라 하면,

$$3=\int_0^t\left(\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t\right)dt=\left[\frac{t^3}{4}+\frac{t^2}{4}\right]_0^t=\frac{t^3}{4}+\frac{t^2}{4}$$

$\therefore\ t^3+t^2=12 \Rightarrow t^3+t^2-12=0$

$(t-2)(t^2+3t+6)=0$ 에서

$t^2+3t+6>0$ 이므로 $t=2$

따라서, 2분 후에 $3km$ 를 가고 2분 후의 속도는

$v(2)=\frac{3}{4}\times 2^2+\frac{1}{2}\times 2=3+1=4$

따라서, 5분까지는 3분을 더 가야 하므로

$3+4\times 3=15(km)$

10. 정답 ②

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=x\cos x$ 에서

$\int\{xf(x)\}'dx=\int x\cos x\,dx$

$xf(x)=x\sin x+\cos x+C$ (단, C 는 적분상수)

(가)에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ 이므로

$\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C$

$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+C$ 이므로 $C=0$

$\pi f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi$ 에서

$f(\pi)=-\frac{1}{\pi}$

11. 정답 ③

시험 점수의 분포 X 가 정규분포 $\mathrm{N}(\mathrm{m},\ \sigma^2)$ 을 따르므로

$\mathrm{P}(m \le \mathrm{X} \le \mathrm{m}+\sigma)=\mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le 1)$

(단, $\mathrm{Z}=\frac{\mathrm{X}-m}{\sigma}$)$=0.34$

12. 정답 ⑤

점 A를 원점으로 하고 직선 AB를 x 축으로 하는 좌표평면을 생각하면

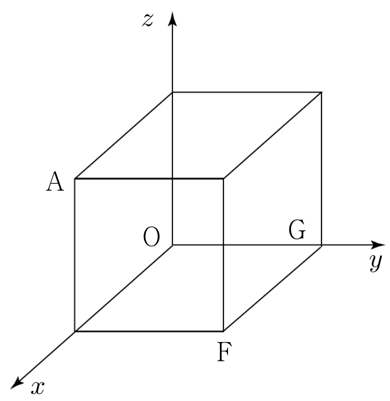
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

13. 정답 ①

점 H를 좌표공간의 원점으로 하면



점 A(3, 0, 3), 점 G(0, 3, 0)에서

내분점 I의 좌표는 (2, 1, 2)

점 F(3, 3, 0)이므로 $\overline{\mathrm{FI}}=3$

14. 정답 ④

두 점 사이의 거리가 무리수일 사건을 A 라 하고

두 점 사이의 거리가 $3\sqrt{3}$ 일 사건을 B 라 하자.

정육면체의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 택하는 모든 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times 7}{2}=28$

두 점 사이의 거리가 무리수인 경우의 수는 16

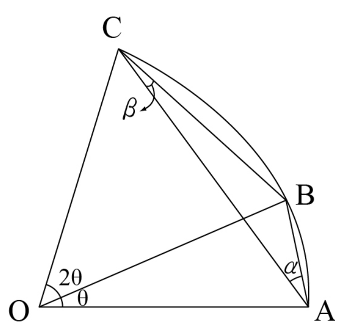
두 점 사이의 거리가 $3\sqrt{3}$ 인 경우의 수는 4

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{7}$ 이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{7}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{4}$

15. 정답 ①

O를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{OA}}$ 인 원을 그리면



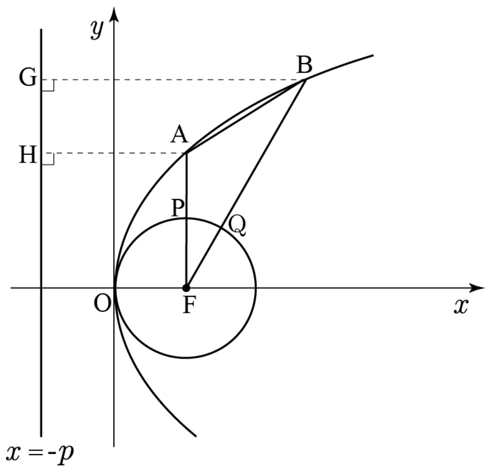
원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ 이므로 $\alpha=\theta$

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ 이므로 $\beta=\frac{\theta}{2}$

따라서 $\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{20}$

16. 정답 ④



원의 반지름의 길이가 $\overline{FP}=p$ 이므로 $\overline{AP}=p$

$\overline{AF}=\overline{AH}$ 이므로 점 A의 x 좌표는 p

$\overline{FQ}=p$ 이므로 $\overline{BQ}=\frac{5}{2}p$

$\overline{BF}=\overline{BG}$ 이므로 점 B의 x 좌표는 $\frac{5}{2}p$

삼각형 AFB 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2p\times\left(\frac{5}{2}p-p\right)=24$ 따라서 $p=4$

17. 정답 ⑤

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{2k}{n}\right)-f\left(\frac{2k-2}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)\right\}+\frac{2}{n}\left\{f\left(\frac{4}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right)\right\}+\frac{3}{n}\left\{f\left(\frac{6}{n}\right)-f\left(\frac{4}{n}\right)\right\}+\cdots$$

$$+\frac{n-1}{n}\left\{f\left(\frac{2n-2}{n}\right)-f\left(\frac{2n-4}{n}\right)\right\}+\frac{n}{n}\left\{f\left(\frac{2n}{n}\right)-f\left(\frac{2n-2}{n}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)-\frac{1}{n}f\left(\frac{4}{n}\right)-\cdots-\frac{1}{n}f\left(\frac{2n-2}{n}\right)+f(2)$$

$$=f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$\frac{k}{n}=x_k$ 라 하면 $\frac{1}{n}=\Delta x$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f(2x_k)\Delta x=\int_0^1 f(2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{f(2)-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=f(2)-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{2k}{n}\right)\frac{1}{n}$$

$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

18. 정답 ④

초점 $F(1,0)$, $F'(-1,0)$

$P(x_1,\ y_1)$ 에서 접선의 방정식은 $3x_1x+4y_1y=12$

접선의 x 절편은 $\frac{4}{x_1}$

$P(x_1,\ y_1)$ 에서 접선에 수직인 직선의 방정식은 $y-y_1=\frac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$

접선에 수직인 직선의 방정식의 x 절편은 $\frac{x_1}{4}$

세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$\overline{RF}=1-\frac{x_1}{4}$, $\overline{F'R}=\frac{x_1}{4}+1$, $\overline{FQ}=\frac{4}{x_1}-1$

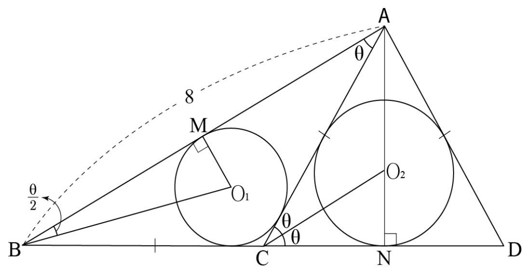
$$2\left(\frac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\frac{x_1}{4}\right)+\left(\frac{4}{x_1}-1\right)$$

양변에 $4x_1$ 을 곱하여 정리하면

$3x_1^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$

따라서 $x_1=\frac{4}{3}$

19. 정답 ③



삼각형 ABC 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1,
삼각형 ACD 에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 BO_1M 에서 $r_1=4\tan\frac{\theta}{2}$

삼각형 BCM 에서 $\overline{BC}=\frac{4}{\cos\theta}=\overline{AC}$

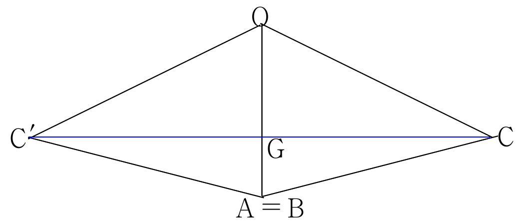
삼각형 ACN 에서 $\overline{CN}=\frac{4}{\cos\theta}\times\cos2\theta$

삼각형 CNO_2 에서 $r_2=\overline{CN}\tan\theta=\frac{4\tan\theta\cos2\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\lim_{\theta\to+0}\frac{r_1r_2}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{16\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta\cos2\theta}{\theta^2\cos\theta}=8$

20. 정답 ②

O, C, C′를 지나는 평면으로 자른 단면도는 다음과 같다.



C(C′)에서 △OAB 에 내린 수선의 발을 G 라 하면
G는 △OAB 의 무게중심과 일치한다.

$\therefore\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OC}}{2}$ 이므로 $\overrightarrow{OC'}=2\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}$

이 때, $\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$ (∵G가 무게중심)

$\therefore\overrightarrow{OC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$

$\therefore p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{2}{3}$, $r=-1$ 이므로 $p+q+r=\frac{1}{3}$

[다른 풀이]
좌표로 해결하는 방법
$O(0,0,0)$ $A(0,1,1)$ $B(1,1,0)$ $C(1,0,1)$ $C'(a,b,c)$ 라 두면
$a^2+b^2+c^2=2$, $a^2+(b-1)^2+(c-1)^2=2$,
$(a-1)^2+(b-1)^2+c^2=2$
이 식을 연립해서 풀면 $C'\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$

$\therefore p+q=\frac{4}{3},\ q+r=-\frac{1}{3},\ r+p=-\frac{1}{3}$

$2(p+q+r)=\frac{2}{3}$

$\therefore p+q+r=\frac{1}{3}$

21. 정답 ③

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3 이라 하고
곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4 라 하자.

(i) a_3 이 b_2 보다 왼쪽에 있는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ii) a_3 이 b_2 보다 오른쪽에 있는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 13

22. 정답 16

$(g\circ f)(x)=x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.
$y=1+3\log_2 x$ 에서 x, y 를 서로 바꾸면

$x=1+3\log_2 y$, $\frac{x-1}{3}=\log_2 y$

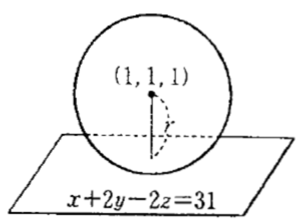
$\therefore\ y=2^{\frac{x-1}{3}}$

따라서 $g(x)=2^{\frac{x-1}{3}}$ 이므로

$g(13)=2^{\frac{13-1}{3}}=2^4=16$

[다른 풀이]
$f(x)=13$ 을 만족하는 x 의 값을 구하면
$1+3\log_2 x=13$ 에서 $\log_2 x=4$
$\therefore\ x=2^4=16$
$\therefore\ g(f(16))=g(13)=16$

23. 정답 10



구의 중심 (1, 1, 1) 에서 평면 $x+2y-2z=31$ 에 이르는 거리가
구의 반지름의 길이와 같으므로 구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$r=\frac{|1+2-2-31|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{30}{3}=10$

24. 정답 10

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ 이므로
$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(1)f'(0)$

$f'(x)=\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 이므로 $f'(0)=1$

$15=g'(1)\times\frac{3}{2}$ 에서 $g'(1)=10$

25. 정답 288

모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한
신뢰도 95% 의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{10}-c,\ \frac{1}{10}+c\right]$ 이므로

$c=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}=1.96\times\frac{3}{100}$ 이다.

또, 모집단에서 임의로 n명을 추출하여 구한 모비율에 대한
신뢰도 95% 의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9}-s(n),\ \frac{1}{9}+s(n)\right]$ 이므로

$s(n)=1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{9}\times\frac{8}{9}}{n}}=1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}$ 이다.

이 때, $1.96\times\frac{\sqrt{8}}{9\sqrt{n}}=\frac{50}{81}\times1.96\times\frac{3}{100}$ 이므로

$\sqrt{n}=6\sqrt{8}$
$\therefore\ n=36\times8=288$

26. 정답 50

조건(나)에서
$\cos x\int_0^x f(t)\,dt=-\sin x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt$

양변을 x 에 대하여 미분하면
$-\sin x\int_0^x f(t)\,dt+\cos x\cdot f(x)\quad=-\cos x\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)\,dt-\sin x\cdot f(x)$

등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)\ =-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt-\frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(t)\,dt+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$

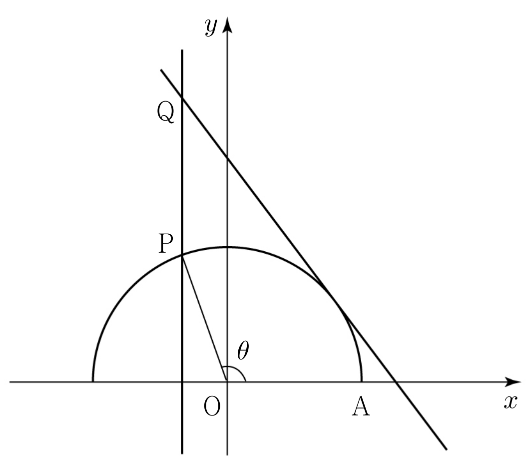
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times1$ ($\because$ 조건(가))

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\therefore 100f\left(\frac{\pi}{4}\right)=50$

27. 정답 10



$\angle$AOP $=\theta$ 라 하면 호의 길이 $l=10\theta$
점 P$(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$ 가 매초 5 의 일정한 속력으로 이동하므로
양변을 시각 t 에 대해 미분하면

$\frac{dl}{dt}=10\frac{d\theta}{dt}=5$, $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=L=20-10\sqrt{3}\cos\theta-10\sin\theta$
따라서 L을 시각 t 에 대해 미분하면

$\frac{dL}{dt}=(10\sqrt{3}\sin\theta-10\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$

$= 10\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

따라서 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 일 때, 최댓값은 10

28. 정답 49

[실행 3]까지 할 때, 상자 B 의 흰 공의 개수가 홀수가 되려면
(i) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 2개를 상자 A 로 넣고
[실행 3]에서는 상자 A 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 B 로 넣는 경우

$$\frac{{}_{10}C_2}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_8C_1 \times {}_2C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{8}{33}$$

(ii) [실행 2]에서 상자 B 에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 상자 A 로 넣고
[실행 3]에서는 상자 A 에서 흰 공 2개를 상자 B 로 넣는 경우

$$\frac{{}_{10}C_1 \times {}_2C_1}{{}_{12}C_2} \times \frac{{}_9C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{8}{33}$$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{8}{33} + \frac{8}{33} = \frac{16}{33}$

따라서 $p + q = 49$

29. 정답 11

도형 C 위의 점 $P(p, 0, q)$라 두면 $p^2 + (q-1)^2 \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$을 만족한다.
주어진 도형의 자취는 결국 두 점 A와 P를 지나는 직선의 방정식이 xy평면과 만나서 생기는 점들의 자취라 볼 수 있다.
여기서, 두 점을 지나는 직선의 방정식을 유도해보면

$\frac{x-0}{p-0} = \frac{y-(-1)}{0-(-1)} = \frac{z-2}{q-2} \Rightarrow \frac{x}{p} = y+1 = \frac{z-2}{q-2}$ 라 둘 수 있다.

이 직선 위의 임의의 점을 매개변수 t를 활용해 표기하면
$x = pt, y = t-1, z = 2 + (q-2)t$ 라 둘 수 있다.
이때, xy평면과의 교점은 결국 $z = 0$인 점들이므로 $2 + qt - 2t = 0$ 을 만족시킨다.

여기서, $a = \frac{x}{t}$, $t = y+1$, $b = \frac{2(t-1)}{t}$ 가 성립한다.

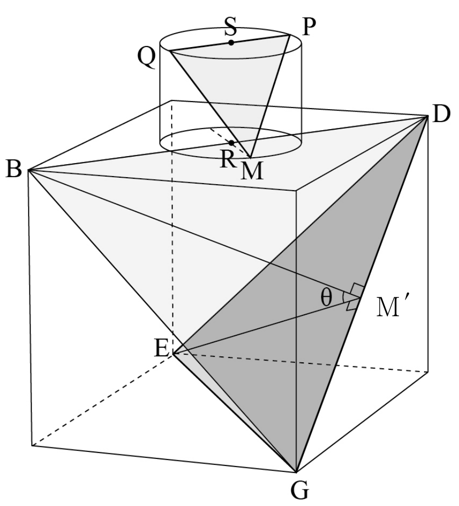
$\therefore a = \frac{x}{y+1}$, $b = \frac{2y}{y+1}$

이 식을 위의 원의 방정식에 넣어서 정리하면 $y \geq \frac{1}{4}x^2$, $0 \leq y \leq 1$ 이 된다.

그러므로 주어진 자취의 넓이는 $4 - 2\int_0^2 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{8}{3} = \frac{b}{a}$

$\therefore a + b = 11$

30. 정답 13



원기둥의 밑면 α, β의 중심을 각각 R, S라 하자.
$\overline{PQ} /\!/ \overline{DB}$ 이고, $\overline{SM} /\!/ \overline{RG}$ 이므로 평면 MPQ 와 평면 GDB 는 평행하다.
삼각형 GDB 와 삼각형 DEG 는 모두 정삼각형이고
두 삼각형이 만나서 생기는 선분은 $\overline{DG}$ 이다.
선분 DG 의 중점을 M′이라 하고 $\theta = \angle BM'E$ 라 하면
$\overline{BM'} = \overline{EM'} = 2\sqrt{6}$, $\overline{BE} = 4\sqrt{2}$ 이므로
삼각형 BM′E 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \cos(\angle BM'E) = \frac{24 + 24 - 32}{2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$$

삼각형 MPQ 의 넓이 S는

$S = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$ 이므로

삼각형 MPQ 의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는

$S\cos\theta = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a = 3$, $b = 2$
따라서 $a^2 + b^2 = 13$

6회 정답 및 해설

1	④	2	⑤	3	②	4	⑤	5	③
6	②	7	②	8	⑤	9	⑤	10	③
11	⑤	12	①	13	①	14	④	15	②
16	⑤	17	④	18	②	19	⑤	20	②
21	①	22	12	23	16	24	10	25	30
26	40	27	61	28	100	29	25	30	25

1. 정답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x + \tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x}{x} + \frac{\tan x}{x}\right)$$
$$= 3 + 1 = 4$$

2. 정답 ⑤

두 벡터는 수직이므로 내적은 0이다.
$\vec{a} = (9,\ x+1,\ -12)$, $\vec{b} = (-8,\ x,\ 7)$ 로부터
$\vec{a} \circ \vec{b} = 9 \times (-8) + (x+1) \times x + (-12) \times 7$
$= -72 + x^2 + x - 84 = 0$
$x^2 + x - 156 = 0$, $(x+13)(x-12) = 0$
$\therefore\ x = 12$ ($\because\ x > 0$)

3. 정답 ②

$\tan\theta = \frac{1}{4}$ 이므로

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{16} = \frac{17}{16}$

$\cos^2\theta = \frac{1}{\sec^2\theta} = \frac{16}{17}$, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{1}{17}$

$\sin^2 2\theta = 4\sin^2\theta\cos^2\theta$
$= 4 \times \frac{1}{17} \times \frac{16}{17}$
$= \left(\frac{8}{17}\right)^2$

$\tan\theta = \frac{1}{4} > 0$ 이므로 $\sin\theta\cos\theta > 0$

$\therefore\ \sin 2\theta = \frac{8}{17}$

4. 정답 ⑤

$f(x) = 4\sin x + 6\cos^2\frac{x}{2} + 1$
$= 4\sin x + 6 \times \frac{1 + \cos x}{2} + 1$
$= 4\sin x + 3\cos x + 4$
$= 5\left(\sin x \times \frac{4}{5} + \cos x \times \frac{3}{5}\right) + 4$
$= 5\sin(x + \alpha) + 4$ $\left(\text{단, } \sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5}\right)$

$5\sin(x+\alpha)$ 의 최댓값이 5 이므로 $f(x)$ 의 최댓값은 9 이다.

5. 정답 ③

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지므로 $f'(a)=0$ 이어야 한다.

$f(x)=e^{-x}(\ln x-2)$ 이므로

$$f'(x)=-e^{-x}(\ln x-2)+e^{-x}\times\frac{1}{x}$$
$$=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ln x+2\right)$$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$ 이므로

$g(x)=\frac{1}{x}-\ln x+2$ 라 하면 $g(a)=0$ 이어야 한다.

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{1+x}{x^2}<0 \quad (\because\ x>0)$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$ 에서 연속이고 감소한다.

$g(1)=1-\ln 1+2=3>0$

$g(e)=\frac{1}{e}-\ln e+2=\frac{1}{e}+1>0$

$g(e^2)=\frac{1}{e^2}-\ln e^2+2=\frac{1}{e^2}>0$

$g(e^3)=\frac{1}{e^3}-\ln e^3+2=\frac{1}{e^3}-1<0$

그러므로 중간값의 정리에 의하여 $g(c)=0$ 인

실수 c가 열린 구간 $(e^2,\ e^3)$ 에 오직 하나 존재한다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가질 때, a가 속하는 구간은 $(e^2,\ e^3)$ 이다.

6. 정답 ②

3 번 시행에서 빨간 공, 노란 공, 파란공이 각각 하나씩 나오는 경우의 수는 ${}_3P_3$ 이므로 구하는 확률은

$${}_3P_3\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{20}\cdot\frac{2}{20}=6\cdot\frac{1}{200}=\frac{3}{100}$$

7. 정답 ②

점 $(a,\ b,\ c)$가 구 $x^2+y^2+x^2=4$ 위에 있으므로 $a^2+b^2+c^2=4$

한편, 두 평면 $ax+by+cz=1,\ ax+by+cz=3$ 은 서로 평행하므로

이 두 평면 사이의 최단거리 d는

평면 $ax+by+cz=3$ 위의 한 점 $\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$로부터

평면 $ax+by+cz-1=0$ 에 이르는 거리와 같다.

$$d=\frac{\left|a\cdot\frac{1}{a}+b\cdot\frac{1}{b}+c\cdot\frac{1}{c}-1\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

8. 정답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 의 주축의 길이는 $2\times4=8$ 이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'}-\overline{PF}=\overline{QF}-\overline{QF'}=8$

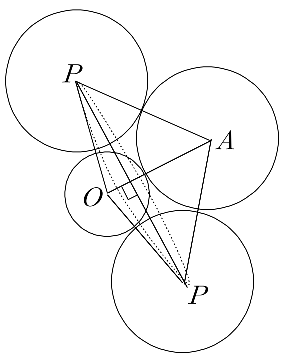
$\therefore\ \overline{PF'}=\overline{PF}+8\ \cdots㉠$

$\overline{QF'}=\overline{QF}-8\ \cdots㉡$

㉠-㉡에서 $\overline{PF'}-\overline{QF'}=\overline{PF}-\overline{QF}+16$

$\overline{PF'}-\overline{QF'}=3$ 이므로 $\overline{QF}-\overline{PF}=16-3=13$

9. 정답 ⑤



두 구 $x^2+y^2+z^2=1$,

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4$

의 중심을 각각 $O(0,0,0)$, $A(2,-1,2)$ 라 하면 두 구의 중심 사이의 거리 d는

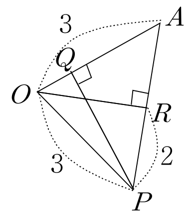
$d=\overline{OA}=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3$

이고, 두 구의 반지름의 길이가 각각 $r_1=1$, $r_2=2$ 이므로

$d=r_1+r_2$

따라서, 두 구는 외접한다.

조건을 만족하는 점 P의 자취는 선분 OA 로부터 일정한 거리에 있는 점의 자취 즉, 원을 나타낸다. 오른쪽 그림에서



$\overline{OR}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

이므로

$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=\frac{1}{2}\times3\times\overline{PQ}$

에서 $\overline{PQ}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$

따라서, 점 P의 자취는 반지름의 길이가 $\frac{4}{3}\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi\times\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\pi$$

10. 정답 ③

X는 이항분포 $B\left(180,\ \frac{1}{3}\right)$를 따른다.

$$V(X)=180\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=40$$

11. 정답 ⑤

버스로 등교하는 사건을 A, 지각하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 조건부확률이므로

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^c\cap B)}$$
$$=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{1}{20}}{\frac{6}{10}\times\frac{1}{20}+\frac{4}{10}\times\frac{1}{15}}$$
$$=\frac{\frac{3}{100}}{\frac{3}{100}+\frac{2}{75}}=\frac{9}{17}$$

12. 정답 ①

$y=\log_2(x+a)+b$ 의 점근선은 $x=-a$,

포물선 $y^2=x$ 의 준선은 $x=-\frac{1}{4}$ 이므로 $a=\frac{1}{4}$

$y=\log_2(x+a)+b$ 가

$y^2=x$ 의 초점 $\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$을 지나므로

$0=\log_2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+b=\log_2\frac{1}{2}+b=-1+b$

$\therefore\ b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{5}{4}$

13. 정답 ①

곡선 $y=2^x$ 이 y축과 만나는 점은 $A(0,1)$

곡선 $y=-2^x+a$ 가 y축과 만나는 점은 $B(0,a-1)$

두 곡선 $y=2^x$ 과 $y=-2^x+a$ 가 만나는 점은

$2^x=-2^x+a$, $2^{x+1}=a$

$x=\log_2 a-1=\log_2\frac{a}{2}$, $y=2^{\log_2\frac{a}{2}}=\frac{a}{2}$

$C\left(\log_2\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$

$a=6$ 일 때, $B(0,5)$, $C(\log_2 3,\ 3)$ 이므로 삼각형 ACB 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times\log_2 3=2\log_2 3$

14. 정답 ④

$A(0,1)$, $C\left(\log_2\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 이므로 직선 AC 의 기울기는

$$f(a)=\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}-0}=\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}}$$

$\mathrm{B}(0,\ a-1)$, $\mathrm{C}\left(\log_2\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 이므로 직선 BC 의 기울기는

$$g(a)=\frac{\frac{a}{2}-(a-1)}{\log_2\frac{a}{2}-0}=-\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}}$$

$$\therefore\ f(a)-g(a)=2\times\frac{\frac{a}{2}-1}{\log_2\frac{a}{2}}$$

$\frac{a}{2}-1=t$ 라 하면 $a\to 2+0$ 일 때 $t\to +0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 2+0}\{f(a)-g(a)\} &= 2\lim_{t\to +0}\frac{t}{\log_2(t+1)}\\ &= 2\lim_{t\to +0}\frac{1}{\frac{\log_2(t+1)}{t}}\\ &= 2\lim_{t\to +0}\frac{1}{\log_2(t+1)^{\frac{1}{t}}}\\ &= 2\times\frac{1}{\log_2 e}=2\ln 2\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$a\to 2+0$ 이면 점 C 는 곡선 $y=2^x$ 을 따라 점 A 에 한없이 가까워진다. 따라서 직선 AC 의 기울기는 곡선 $y=2^x$ 위의 점 A 에서의 접선의 기울기에 한없이 가까워진다.

$y'=2^x\times\ln 2$ 이므로

$\lim_{a\to 2+0}f(a)=2^0\times\ln 2=\ln 2$

한편, 점 C 를 지나고 x 축에 평행한 직선을 l이라 하면 곡선 $y=-2^x+a$ 와 곡선 $y=2^x$ 은 항상 직선 l에 대하여 대칭이다.

따라서 직선 BC 와 직선 AC 도 항상 직선 l에 대하여 대칭이다.

$\lim_{a\to 2+0}g(a)=-\lim_{a\to 2+0}f(a)=-\ln 2$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{a\to 2+0}\{f(a)-g(a)\} &= \lim_{a\to 2+0}f(a)-\lim_{a\to 2+0}g(a)\\ &=\ln 2-(-\ln 2)=2\ln 2\end{aligned}$$

15. 정답 ②

$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^6}dt$ 이므로 $f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$

$e^{f(x)}=t$ 로 치환하면

$$\int_0^a\frac{e^{f(x)}}{1+x^6}dx=\int_1^{\sqrt{e}}1\,dt=\sqrt{e}-1\qquad(\because\ e^{f(x)}f'(x)dx=dt\ )$$

16. 정답 ⑤

ㄱ. $\mathrm{P}(E)=\frac{1}{2}$ 이므로

$I(E)=-\log_2\mathrm{P}(E)=-\log_2\frac{1}{2}=1$ (참)

ㄴ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$$\begin{aligned}\therefore\ I(A\cap B) &=-\log_2\mathrm{P}(A\cap B)=-\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\ &=-\{\log_2\mathrm{P}(A)+\log_2\mathrm{P}(B)\}\\ &=-\log_2\mathrm{P}(A)-\log_2\mathrm{P}(B)\\ &=I(A)+I(B)\quad(\text{참})\end{aligned}$$

ㄷ. $2I(A\cup B)=-2\log_2\mathrm{P}(A\cup B)=-\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2$

$$\begin{aligned}I(A)+I(B) &=-\log_2\mathrm{P}(A)-\log_2\mathrm{P}(B)\\ &=-\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(A)>0$, $\mathrm{P}(A\cup B)\ge\mathrm{P}(B)>0$ 이므로

$\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2\ge\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2\ge\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$-\log_2\{\mathrm{P}(A\cup B)\}^2\le-\log_2\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ 2I(A\cup B)\le I(A)+I(B)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17. 정답 ④

표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{400}{1000}=0.4$ 이므로

신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이 N은

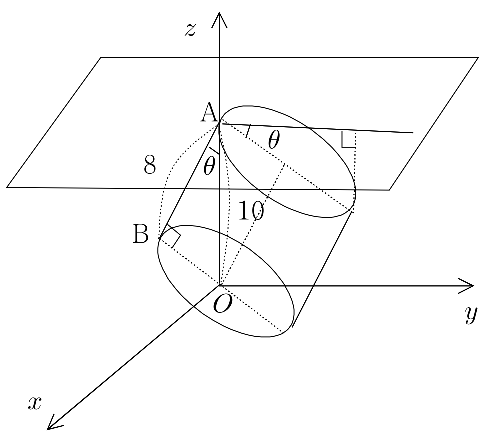
$$N=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{1000}}$$

한편 이 때의 최대 허용 표본 오차 M은

$$M=1.96\times\sqrt{\frac{1}{4n}}=1.96\times\sqrt{\frac{1}{4000}}$$

$$\therefore\ \frac{N}{2M}=\frac{2\times 1.96\times\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{1000}}}{2\times 1.96\times\sqrt{\frac{1}{4000}}}=\frac{\sqrt{\frac{0.4\times 0.6}{1000}}}{\sqrt{\frac{1}{4000}}}$$

18. 정답 ②



그림의 직각삼각형 ABO에서 $\overline{\mathrm{OA}}=10$, $\overline{\mathrm{AB}}=8$ 이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

원기둥의 한 밑면과 평면 $z=10$ 이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

각 OAB의 크기도 θ이므로

$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

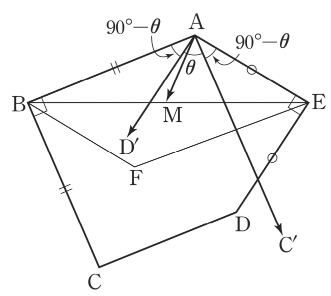
이때, 원기둥의 한 밑면의 넓이를 S,

이 밑면의 평면 $z=10$ 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$S=\pi\times 6^2=36\pi$

$S'=S\times\cos\theta=36\pi\times\frac{4}{5}=\frac{144}{5}\pi=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

19. 정답 ⑤



ㄱ. (참) $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AE}}$ 를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABFE 에서 $\overline{\mathrm{AF}}$ 와 $\overline{\mathrm{BE}}$ 의 교점이 M이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$

ㄴ. (참) 그림에서 $\overline{\mathrm{AD}'}\,/\!/\,\overline{\mathrm{ED}}$, $\overline{\mathrm{AC}'}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AC}'}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}'}$이 이루는 각의 크기도 θ이다.

또, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$가 이루는 각의 크기는

$(90^\circ-\theta)+\theta+(90^\circ-\theta)=180^\circ-\theta$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}} &=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|\cos(180^\circ-\theta)\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AE}}|(-\cos\theta)\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{ED}}|(-\cos\theta)\quad(\because\ \overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}\ ,\ \overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{ED}}\ )\\ &=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}\end{aligned}$$

ㄷ. (참) $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}+|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2 &=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\\ &=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\end{aligned}$$

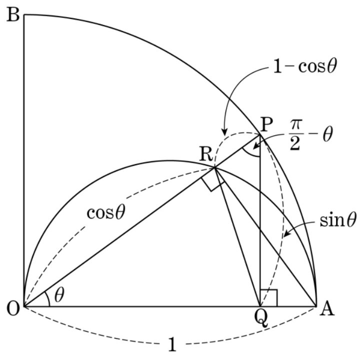
이때, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$, $|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$ 이고

ㄴ에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ED}}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2$

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

20. 정답 ②



$\overline{PR}=\overline{OP}-\overline{OR}=1-\cos\theta$, $\overline{PQ}=\sin\theta$

$\angle QPR=\frac{\pi}{2}-\theta$ 이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(1-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

(삼각형 PRQ 의 넓이)=(삼각형 POQ 의 넓이)−(삼각형 ROQ 의 넓이)

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)$$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta\cos\theta}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}=\frac{1}{4}$$

21. 정답 ①

(i) $n=2k$ (k는 자연수)일 때

두 자연수 (n_1,n_2)의 순서쌍은

$(2k-1,1),(2k-2,2),\cdots,(k,k)$ 이므로 모두 k개이다.

$\therefore P(2k)=k$

(ii) $n=2k-1$ (k는 자연수)일 때

두 자연수 (n_1,n_2)의 순서쌍은

$(2k-2,1),(2k-3,2),\cdots,(k,k-1)$ 이므로 모두 $(k-1)$개이다.

$\therefore P(2k-1)=k-1$

ㄱ. $P(2k)=k=\left[\frac{2k}{2}\right]$

$P(2k-1)=k-1=\left[\frac{2k-1}{2}\right]$

이므로 모든 자연수 n에 대하여 $P(n)=\left[\frac{n}{2}\right]$ 이 성립한다. [참]

ㄴ. m,n이 홀수일 때, $m=2k-1$, $n=2l-1$ (k,l은 자연수)이라 두면

$P(m)=P(2k-1)=k-1$

$P(n)=P(2l-1)=l-1$

$P(m+n)=P(2k+2l-2)=k+l-1$

$\therefore P(m+n)=k+l-1$

$\neq(k-1)+(l-1)=P(m)+P(n)$ [거짓]

ㄷ. $n=2k$일 때

$P(n^2)=P(4k^2)=2k^2$ 이고

$\{P(n)\}^2=\{P(2k)\}^2=k^2$ 이므로

$P(n^2)\neq\{P(n)\}^2$ [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

22. 정답 12

$f'(x)=8-\left(-\frac{4}{x^2}\right)=8+\frac{4}{x^2}$ 이므로

$f'(1)=8+\frac{4}{1}=12$

23. 정답 16

(i) 한 섬에 다리를 1개 또는 2개를 건설하는 경우는

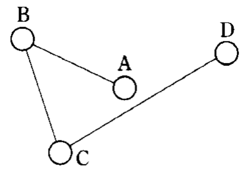
$A\to B\to C\to D$,

$A\to C\to D\to B$,

…

$D\to C\to B\to A$,

$B\to D\to C\to A$, …



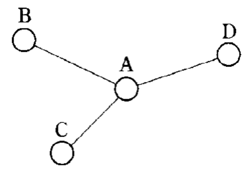
$4\times3\times2\times1=24$(가지)

$A\to B\to C\to D$ 와 $D\to C\to B\to A$,

$A\to C\to D\to B$ 와 $B\to D\to C\to A$ 와 같은 것이

2가지씩 있으므로 $\frac{24}{2}=12$(가지)

(ii) 아래의 그림과 같이 한 섬에 세 개의 다리를 건설하는 경우는 4가지이다.



$\therefore\ 12+4=16$(가지)

24. 정답 10

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$ (단, $0\le r\le n$)이므로

x^2의 계수는 ${}_nC_2=45$

$\frac{n(n-1)}{2}=45$, $n(n-1)=90$

$\therefore\ n=10$

25. 정답 30

세 직선의 방향벡터가 모두 평면의 법선벡터와 수직이므로

내적의 값은 0 이어야 한다.

$\vec{h}=(p,\ q,\ r)$ 이라 하고 내적을 계산하면

$p-q+2r=0$ …… ㉠

$p+q+2ar=0$ …… ㉡

$p-2q+ar=0$ …… ㉢

㉡−㉠에서 $2q+2ar-2r=0$ …… ㉣

㉡−㉢에서 $3q+ar=0$ …… ㉤

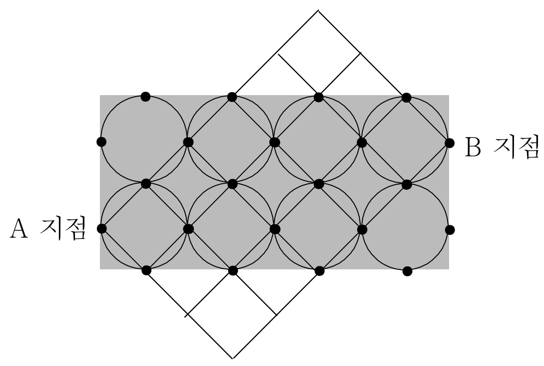
㉣×3−㉤×2에서 $4ar-6r=0$, $r(2a-3)=0$

$r=0$ 이면 $p=q=0$ 이므로 평면이 존재하지 않는다.

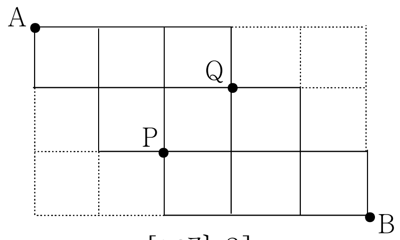
$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 20a=30$

26. 정답 40



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 A 지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수는 [그림 2]에서 A 지점에서 출발하여 실선을 따라 최단 거리로 B 지점에 도착하는 경우의 수와 같다.

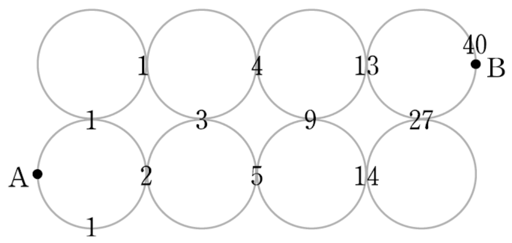
(1) A → P → B의 경우

$\left(\dfrac{4!}{2!\,2!}-1\right)\times\dfrac{4!}{3!}=5\times4=20$ (가지)

(2) A → Q → B의 경우

$\dfrac{4!}{3!}\times\left(\dfrac{4!}{2!\,2!}-1\right)=4\times5=20$ (가지)

따라서 구하는 경우의 수는 $20+20=40$ (가지)



27. 정답 61

점 P 가 선분 AB 를 $4:1$ 로 내분하는 점이므로

$\overline{PR}=\dfrac{1}{5}\overline{AC}=\dfrac{3}{5}$, $\overline{RC}=\dfrac{4}{5}\overline{BC}=\dfrac{4}{5}$

삼각형 PRC 가 직각삼각형이므로

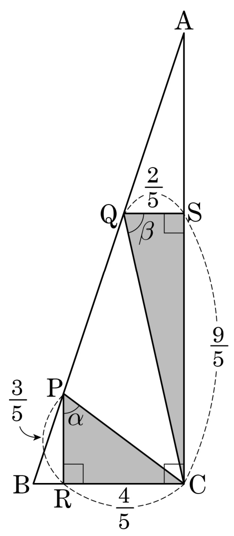
$\tan\alpha=\dfrac{\overline{RC}}{\overline{PR}}=\dfrac{4}{3}$

점 Q 가 선분 AB 를 $2:3$ 으로 내분하는 점이므로

$\overline{QS}=\dfrac{2}{5}\overline{BC}=\dfrac{2}{5}$, $\overline{SC}=\dfrac{3}{5}\overline{AC}=\dfrac{9}{5}$

삼각형 QCS 가 직각삼각형이므로

$\tan\beta=\dfrac{\overline{SC}}{\overline{QS}}=\dfrac{9}{2}$



따라서

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{27-8}{6}}{\frac{6+36}{6}}=\frac{19}{42}$$

이므로 $p+q=42+19=61$ 이다.

28. 정답 100

$$S_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\right|dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx$$

이때, $y=|\sin x|$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로 임의의 자연수 n 에 대하여

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}=2$$

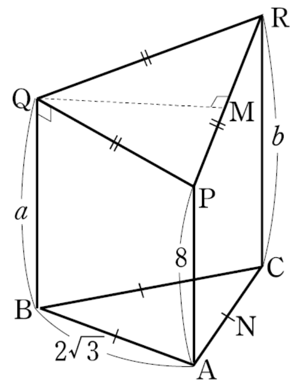
$$\therefore\ S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|\,dx=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$\therefore\ \alpha=2$

$\therefore\ 50\alpha=100$

29. 정답 25



세 점 P, Q, R 에서 α에 내린 수선의 발을 각각 A, B, C 라 하면 △ABC 는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이다.

$\overline{AP}=8$, $\overline{BQ}=a$, $\overline{CR}=b$ 라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{12+(a-8)^2}$, $\overline{QR}=\sqrt{12+(b-a)^2}$,

$\overline{RP}=\sqrt{12+(b-8)^2}$ 이고

$(b-8)^2>(b-a)^2$, $(b-8)^2>(a-8)^2$ 이므로

$\overline{RP}>\overline{PQ}$, $\overline{RP}>\overline{QR}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{QR}$ 이고 $a-8=b-a$ …… ㉠

$a=8+t$, $b=8+2t$ 라 하면 $(t>0)$

$\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{12+t^2}$,

$\overline{PR}=\sqrt{12+4t^2}=2\sqrt{t^2+3}$ 이므로

$\overline{PR}$ 의 중점을 M이라 하면 $\overline{QM}\perp\overline{PR}$ 이므로

$\overline{QM}=\sqrt{12+t^2-(t^2+3)}=3$

$\therefore\ \triangle PQR=3\sqrt{t^2+3}$

$\triangle PQR\times\cos60^\circ=\triangle ABC$ 에서

$\dfrac{3}{2}\sqrt{t^2+3}=3\sqrt{3}$

따라서 $a=11$, $b=14$ 이고 $a+b=25$

[다른 풀이]

$\overline{PR}$ 이 최대이므로 $\triangle PQR$ 이 이등변삼각형이 되려면

$\overline{PQ}=\overline{QR}$

$a-8=c$ 라 놓으면 $\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{12+c^2}$

그리고 $b-8=2c$ 이므로 $\overline{PR}=\sqrt{12+4c^2}$

$\triangle P'Q'R'=\triangle PQR\cos60^\circ$ 이므로

$$\triangle PQR=\frac{\triangle P'Q'R'}{\cos60^\circ}=2\triangle P'Q'R'$$

$$=2\times\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=6\sqrt{3}$$

$\angle PQR=\theta$ 라 놓으면

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\overline{PQ}\,\overline{QR}\sin\theta=\frac{1}{2}(12+c^2)\sin\theta=6\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{12\sqrt{3}}{12+c^2}$$

또 $\triangle PQR$ 에서

$$\cos\theta=\frac{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2-\overline{PR}^2}{2\,\overline{PR}\,\overline{QR}}$$

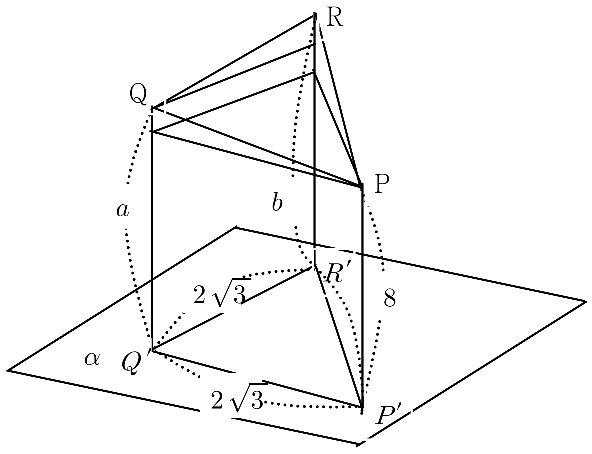
$$=\frac{12+c^2+12+c^2-12-4c^2}{2(12+c^2)}$$

$$=\frac{6-c^2}{12+c^2}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 을 이용하면

$$\frac{432}{(12+c^2)^2}+\frac{(6-c^2)^2}{(12+c^2)^2}=1$$

$$432+36-12c^2+c^4=144+24c^2+c^4$$



$\therefore c^2=9 \Leftrightarrow c=3$

$\therefore a-8=3,\ b-8=6 \Leftrightarrow a=11,\ b=14$

$\therefore a+b=25$

30. 정답 25

원점을 지나고 기울기가 $\tan(\sin t)$ 인 직선의 방정식은 $y=\tan(\sin t)x$ … ㉠

점 P 는 원과 직선의 교점이므로

원의 방정식 $x^2+y^2=e^{2t}$ 과 연립하면

$x^2+\{\tan(\sin t)x\}^2=e^{2t}$

$\{1+\tan^2(\sin t)\}x^2=e^{2t}$

$\dfrac{x^2}{\cos^2(\sin t)}=e^{2t}$

$x^2=e^{2t}\cos^2(\sin t)$

$x=e^t\cos(\sin t)$ $(\because x>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$y=e^t\sin(\sin t)$

그러므로 점 P 의 좌표를 $(x,\ y)$ 라 하면

$x=e^t\cos(\sin t)$, $y=e^t\sin(\sin t)$

$\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos(\sin t)-\{e^t\sin(\sin t)\}\cos t$

$=e^t\{\cos(\sin t)-\sin(\sin t)\times\cos t\}$

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin(\sin t)+\{e^t\cos(\sin t)\}\cos t$

$=e^t\{\sin(\sin t)+\cos(\sin t)\times\cos t\}$

$t=\pi$ 일 때, 점 P 의 좌표는

$(e^\pi\cos(\sin\pi),\ e^\pi\sin(\sin\pi))$ 이므로

$\mathrm{P}(e^\pi,\ 0)$

$t=\pi$ 일 때, 곡선 C 위의 점 P 에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{e^\pi\{\sin(\sin\pi)+\cos(\sin\pi)\times\cos\pi\}}{e^\pi\{\cos(\sin\pi)-\sin(\sin\pi)\times\cos\pi\}}$

$=\dfrac{-e^\pi}{e^\pi}=-1$

그러므로 점 P 에서의 접선의 방정식은

$y=-(x-e^\pi)$

이때 접선의 x 절편은 e^π , y 절편은 e^π 이므로

접선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times e^\pi\times e^\pi=\dfrac{1}{2}e^{2\pi}$

따라서 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=2$ 이므로

$10(a+b)=10\left(\dfrac{1}{2}+2\right)=25$

[참고]

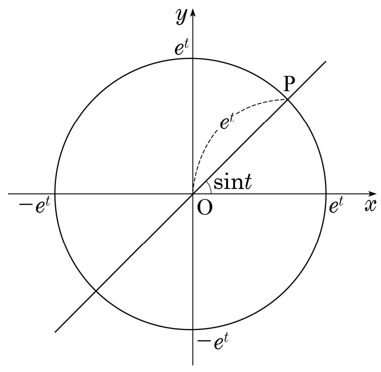
원 $x^2+y^2=(e^t)^2$ 은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 e^t 인 원이고,

점 P 가 원 위의 점이므로 $\overline{\mathrm{OP}}=e^t$ 이다.

직선 OP 의 기울기가 $\tan(\sin t)$ 이므로

직선 OP 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $\sin t$ 이다.

따라서 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(e^t\cos(\sin t),\ e^t\sin(\sin t))$ 이다.



7회 정답 및 해설

1	⑤	2	③	3	⑤	4	②	5	④
6	②	7	①	8	③	9	⑤	10	④
11	④	12	②	13	③	14	④	15	②
16	③	17	②	18	⑤	19	①	20	③
21	①	22	1	23	60	24	18	25	12
26	256	27	105	28	16	29	72	30	24

1. 정답 ⑤

$2^x+2^{2-x}=5$ 에서 $2^x=t\,(t>0)$ 라 하면 $t+\dfrac{4}{t}=5$

$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서, 모든 실근의 합은 $0+2=2$

2. 정답 ③

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\theta}-1$

$=\dfrac{2}{1+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}-1=\dfrac{2}{\dfrac{6}{5}}-1=\dfrac{5}{3}-1=\dfrac{2}{3}$

3. 정답 ⑤

내분점의 좌표는 $\left(\dfrac{2a-6}{5},\ \dfrac{10}{5},\ \dfrac{4+21}{5}\right)=(0,\ b,\ 5)$ 이므로

$\therefore a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=5$

4. 정답 ②

$y=\dfrac{\ln x}{x}$ 에서 $y'=\dfrac{(\ln x)'(x)-\ln x(x)'}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

도함수 $y=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x>e$ 이면 $y'<0$

$0<x<e$ 이면 $y'>0$ 이므로

함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 는 $x=e$ 에서 극대이며 최대이다.

5. 정답 ④

X가 이항분포 $\mathrm{B}(9,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=9\cdot p$, $\mathrm{V}(X)=9\cdot p\cdot(1-p)$

$\therefore \{9\cdot p\}^2=9\cdot p\cdot(1-p)$ 에서

$9p=1-p$ $(\because 0<p<1)$

$\therefore p=\dfrac{1}{10}$

6. 정답 ②

$\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)=\dfrac{4}{5}$ 에서

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}((A\cap B)^c)=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\frac{1}{4}$ 이므로

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{9}{20}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{11}{20}$

7. 정답 ①

두 직선이 수직이므로, 방향벡터의 내적이 0이다.
$(5, 5, a-3)\cdot(1, -1, 1)=0$ 에서 $5-5+a-3=0$
$\therefore\ a=3$

8. 정답 ③

$f(x)=2\cos^2 x+k\sin 2x-1$
$=2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+k\sin 2x-1$
$=\cos 2x+k\sin 2x=\sqrt{1+k^2}\sin(2x+\alpha)$
$\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},\ \cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$
최댓값 $\sqrt{10}=\sqrt{1+k^2}$ 에서
$\therefore\ k=\pm3$
그런데, k는 양수이므로 $k=3$

9. 정답 ⑤

3명의 학생이 흰색 탁구공을 각각 x, y, z개씩 받는다면
$x+y+z=8(x\ge1,\ y\ge1,\ z\ge1$ 인 자연수)
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$ …… ㉠
주황색 탁구공을 각각 x', y', z'개씩 받는다면
$x'+y'+z'=7(x'\ge1,\ y'\ge1,\ z'\ge1$ 인 자연수)
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $21\times15=315$

10. 정답 ④

$2x^2-3x+1=0$, $(2x-1)(x-1)=0$

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

따라서 $\{m_1, m_2\}=\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

$y^2=8x$ 의 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx+\frac{2}{m}$ 이므로

구하는 두 접선은 $y=\frac{1}{2}x+4$, $y=x+2$

두 식을 연립하면 교점의 x좌표는 4이다.

11. 정답 ④

경우를 분류해보면
(ⅰ) 숫자 4가 한 개일 때
(ⅱ) 숫자 4가 한 개도 없을 때의 두 가지 경우이다.
숫자 4가 한 개일 때는
1, 2, 3을 중복하여 4개를 뽑으면 되므로 1, 2, 3의 개수를 a, b, c라 하면
$a+b+c=4$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$
숫자 4가 한 개도 없을때는
1, 2, 3을 중복하여 5개를 뽑는 경우이므로
$a+b+c=5$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$
따라서 두 가지 경우를 합하면 36가지가 된다.

12. 정답 ②

구간 $(-1, \infty)$에서 $g(x)$는 $x=0$이 아닌 모든 곳에서 연속이고
$f(x)$는 실수 전체에서 연속이다.
따라서 $f(x)g(x)$가 구간 $(-1, \infty)$에서 연속이려면
$x=0$에서 연속이기만 하면 된다.
$f(x)=x^2+ax+b$ 라하면 $f(0)g(0)=8b$ 이고

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}$ 이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)}=8b$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to0}\ln(x+1)=0$ 이므로 $\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)=0$

$\therefore\ b=0$

$\lim_{x\to0}\frac{x^2+ax}{\ln(x+1)}=0$ 이므로 $\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\ln(x+1)}\times(x+a)\right)=0$

$\therefore\ a=0$

따라서 $f(x)=x^2$ 이고 $f(3)=9$

13. 정답 ③

$2=4^x$ 에서 $x=\log_4 2=\frac{1}{2}$ 이므로 점 A 의 좌표는

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$2=2^x$ 에서 $x=1$이므로 점 B 의 좌표는
$\mathrm{B}(1, 2)$
C 의 y좌표는 $y=4^1=4$ 이므로
$\mathrm{C}(1, 4)$
$4=2^x$ 에서 $x=2$이므로 점 D 의 좌표는
$\mathrm{D}(2, 4)$
따라서 직선 AD 의 기울기는

$\frac{4-2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$

14. 정답 ④

네 점 A, B, C, D 의 좌표는
$\mathrm{A}(\log_4 a,\ a)$, $\mathrm{B}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{C}(\log_2 a,\ a^2)$, $\mathrm{D}(2\log_2 a,\ a^2)$
$\overline{\mathrm{CD}}=\log_2 a$, $\overline{\mathrm{BC}}=a^2-a$ 이므로
삼각형 ADC 의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}(a^2-a)\cdot\log_2 a$

$\therefore\ S'(a)=\frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\frac{1}{2}(a^2-a)\frac{1}{a\ln2}$

$=\frac{1}{2}(2a-1)\log_2 a+\frac{1}{2\ln2}(a-1)$

$\therefore\ S'(4)=7+\frac{3}{2\ln2}$

이때 $\frac{dS}{dt}=S'(a)\frac{da}{dt}$ 이고 $\frac{da}{dt}=1$ 이므로
구하는 순간변화율은

$\left(7+\frac{3}{2\ln2}\right)\times1=7+\frac{3}{2\ln2}$

[다른 풀이]
점 P가 점 (0, 2)를 출발한 지 t초 후의 점 P의 좌표는 $(0, 2+t)$이므로
삼각형 ADC 의 넓이는

$S(t)=\frac{1}{2}(t^2+3t+2)\cdot\log_2(t+2)$

$\therefore\ S'(t)=\frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\frac{1}{2}(t^2+3t+2)\frac{1}{(t+2)\ln2}$

$=\frac{1}{2}(2t+3)\log_2(t+2)+\frac{1}{2\ln2}(t+1)$

점 P가 점 (0,4)를 지나는 순간은 $t=2$일 때이므로 구하는 순간변화율은

$\therefore\ S'(2)=\frac{1}{2}(2\times2+3)\log_2(2+2)+\frac{1}{2\ln2}(2+1)$

$=7+\frac{3}{2\ln2}$

15. 정답 ②

한 병의 용량을 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 10^2)$ 을 따른다. 이 때, 크기 25

인 표본의 평균을 $\overline{X}$라고 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\ge 2000)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2000-m}{2}\right)$$
$$=0.9772=0.5+0.4772$$
$$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5+\mathrm{P}(-2\le Z\le 0)$$
$$\therefore\ \frac{2000-m}{2}=-2$$
$$\therefore\ m=2004$$

16. 정답 ③

$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)\,dt=1$ 에서

① $f(0)-0=1\quad\therefore\ f(0)=1$

② $f'(x)-2e^x\cdot f(x)=0$ 이므로 $f'(0)-2f(0)=0$
$\therefore\ f'(0)=2$

③ $f''(x)-2(e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x))=0$ 이므로
$f''(0)-2(f(0)+f'(0))=0$
$\therefore\ f''(0)=2(1+2)=6$

17. 정답 ②

닫힌구간 $[0,\ a]$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자.
$\mathrm{P}(0\le X\le x)=kx^2$ 에서

$\int_0^x f(x)dx=kx^2\ \cdots㉠$

$\int_0^a f(x)dx=1$ 이므로 $ka^2=1\ \cdots㉡$

㉠의 양변을 미분하면 $f(x)=2kx$

$\mathrm{E}(X)=\int_0^a x\cdot f(x)dx=\int_0^a 2kx^2dx=\frac{2}{3}ka^3=1\quad\cdots㉢$

㉡, ㉢을 연립하면 $a=\frac{3}{2},\ k=\frac{4}{9}$

18. 정답 ⑤

주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 경우와 검은 공을 꺼내는 경우로 나누어 생각하면

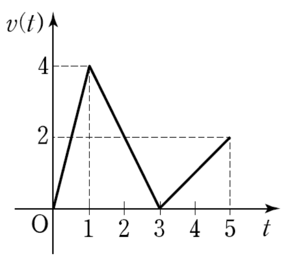
(ⅰ) 흰 공을 꺼내는 경우 ; $\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

(ⅱ) 검은 공을 꺼내는 경우 : $\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 : $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$

19. 정답 ①

시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리를 l_1
시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리를 l_2
시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리를 l_3 이라 하자.



ㄱ. $x=1$ 인 경우
$l_1=2,\ l_2=4,\ l_3=2$ 이므로 $f(1)=2$ [참]

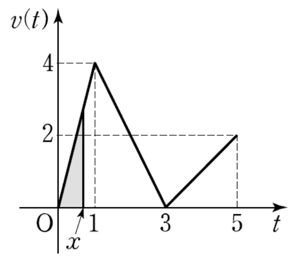
ㄴ. $x=2$ 인 경우
$l_1=5,\ l_2=\frac{3}{2},\ l_3=\frac{3}{2}$ 이므로 $f(2)=\frac{3}{2}$

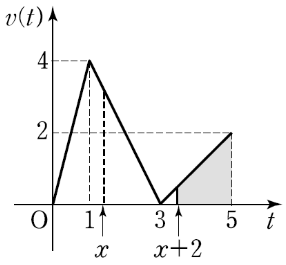
따라서 $f(2)-f(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(-2t+6)dt=3$

$\therefore\ f(2)-f(1)\ne\int_1^2 v(t)dt$ [거짓]

ㄷ. h가 충분히 작은 양수일 때 그림에서 보는 것처럼





$1-h<x<1$ 에서

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2\to f'(x)=4x\ \xrightarrow{x\to1-0}\ 4$

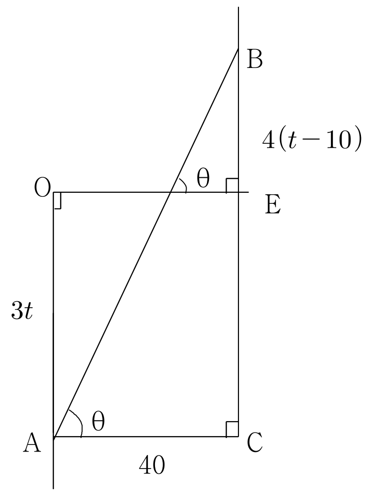
$1<x<1+h$ 에서

$f(x)=2-\frac{1}{2}((x+2)-3)^2\to f'(x)=-x+1\ \xrightarrow{x\to1+0}\ 0$

따라서 $f'(x)$ 의 $x=1$ 에서의 좌우 미분계수가 다르므로 미분불능 [거짓]

20. 정답 ③

지점 O로부터 갑이 출발한 지 t초가 지난 후 갑과 을의 위치를 각각 $A,\ B$라 하면 $\overline{OA}=3t,\ \overline{OB}=4(t-10)$ 이다.



따라서 위의 그림에서 $\overline{BC}=7t-40$, $\overline{AC}=40$ 이므로

$\tan\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{7t-40}{40}\ \cdots\cdots\ ㉠$

양변을 t 에 대하여 미분하면 $\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{7}{40}$

$\therefore\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{7}{40}\cdot\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{7}{40}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\theta}\ \cdots\cdots\ ㉡$

㉠에 $t=20$을 대입하면

$\tan\theta=\frac{5}{2}$ 이므로 이를 ㉡에 대입하면

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{7}{40}\cdot\frac{1}{1+\frac{25}{4}}=\frac{7}{40}\cdot\frac{4}{29}=\frac{7}{290}$ (라디안/초)

21. 정답 ①

$y=f(x)$의 그래프가 연속이고 원점에 대하여 대칭이므로
$f(0)=0$이고 $f(-1)=-f(1)=-1$

$f(x)=\frac{\pi}{2}\int_1^{x+1}f(t)dt$ 에서 양변을 미분하면

$f'(x)=\frac{\pi}{2}f(x+1)$, $f(x+1)=\frac{2}{\pi}f'(x)$ 에서

$$\pi^2\int_0^1 x\cdot f(x+1)dx=\pi^2\int_0^1\frac{2}{\pi}xf'(x)dx$$
$$=2\pi\int_a^1 xf'(x)dx$$
$$=2\pi\left\{[x\cdot f(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)dx\right\}$$
$$=2\pi\left(f(1)-\int_0^1 f(x)dx\right)$$

$\int_0^1 f(x)dx$를 구하기 위해 $x=t+1$이라고 치환하면

$\int_0^1 f(x)dx=\int_{-1}^0 f(t+1)dt=\int_{-1}^0 f(x+1)dx$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{2}{\pi} \cdot f'(x)dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{0} f'(x)dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot (f(0) - f(-1)) = \frac{2}{\pi}$$
$$\therefore\ \pi^2 \int_0^1 xf(x+1)dx = 2\pi \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = 2(\pi - 2)$$

22. 정답 1

$|\vec{a}| = 2,\quad |\vec{b}| = 3,\quad |\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b}$$
$$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$
$= 4 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 36$ 이므로

$36 = 4 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 36$

$\therefore\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$

23. 정답 60

여성일 사건을 W, 완주할 사건을 A라 하자.

$$p = \mathrm{P}(A|W) = \frac{\mathrm{P}(A \cap W)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{n(A \cap W)}{n(W)}$$
$$= \frac{n(A \cap W)}{n(A \cap W) + n(A^C \cap W)}$$
$$= \frac{9}{9+6} = \frac{3}{5}$$
$$\therefore\ 100p = 100 \times \frac{3}{5} = 60$$

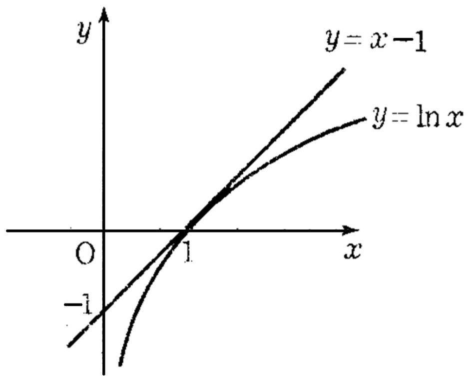
24. 정답 18

$y = \ln x$, $y = x + n - 20$ 의 교점으로 해석한다.

$y = \ln x$에서 기울기 1인 접선은 $y = x - 1$ 이므로

서로 다른 두 근을 가지려면 $n - 20 < -1$ 이어야 한다.

$\therefore\ 0 < n < 19$ 에서 자연수 n은 18이다.



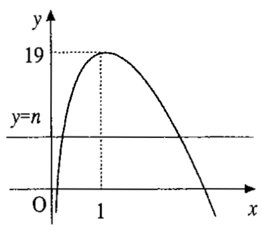
[별해]

$\ln x - x + 20 - n = 0$ 에서

$y = \ln x - x + 20$ 과 $y = 20$이 서로 다른 두 점에서 만나면 된다.

$y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \Rightarrow x = 1$ 일 때 $y' = 0$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	19	↘



x는 진수이므로 $x > 0$

$\therefore\ n < 19$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

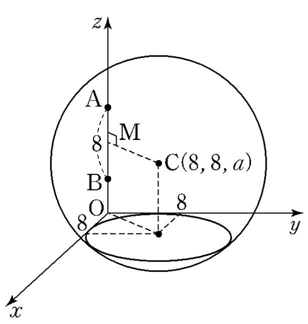
따라서 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 18 로 18개다.

25. 정답 12

S가 x축, y축에 접하면서 xy평면과 만나서 생긴 원의 반지름이 8이므로 구의 중심을 $\mathrm{C}(8,\ 8,\ a)$, 반지름을 r라 두면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$S:\ (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z-a)^2 = r^2$

z축과 만나는 현의 길이가 8이므로 현의 수직이등분선 중 하나는 구의 중심을 지난다.



현의 양 끝점을 각각 A, B (A의 z좌표 > B의 z좌표)

그 중점을 M이라 두면 $\overline{\mathrm{AM}} = 4$, $\overline{\mathrm{MC}} = 8\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{AC}} = r$ 이므로 $4^2 + (8\sqrt{2})^2 = r^2$

$\therefore\ r = 12$

26. 정답 256

n명 중 중앙공원을 이용한 경험이 있는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면

주어진 조건에서 $\hat{p} = 0.8$, $1 - \hat{p} = 0.2$

n이 충분히 크다고 가정하면 모비율의 신뢰구간의 길이는

$2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.098$ 이므로

$$2 \times 0.98 \times 2 \times \frac{\sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{10} \times 0.98$$
$$\sqrt{n} = 10 \times 4 \times \sqrt{\frac{4}{25}} = 16$$
$\therefore\ n = 256$

27. 정답 105

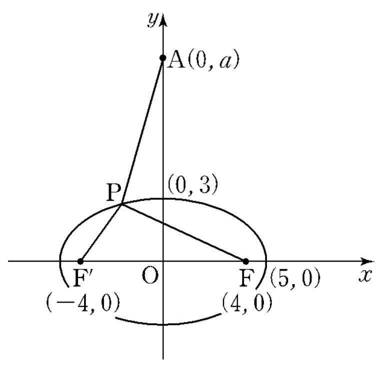
타원의 장축의 길이가 10이므로 $\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF'}} = 10$

$$\overline{\mathrm{AP}} - \overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{FP}}$$
$$= \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PF'}} - (\overline{\mathrm{PF'}} + \overline{\mathrm{PF}})$$
$$= \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PF'}} - 10$$
$$\geq \overline{\mathrm{AF'}} - 10$$
(등호는 점 P가 $\overline{\mathrm{AF'}}$ 위에 있을 때)

이므로, $\overline{\mathrm{AF'}} = 11$

$\mathrm{F}(-4,\ 0)$, $\mathrm{A}(0,\ a)$ 에서 $16 + a^2 = 11^2$

$\therefore\ a^2 = 105$



28. 정답 16

$\triangle\mathrm{ABC}$ 가 이등변삼각형이므로 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2}{\overline{\mathrm{AC}}}$

따라서, $\overline{\mathrm{AC}} = \frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$

점 P에서 $\overline{\mathrm{AD}}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{AP}}\sin 2\theta = \overline{\mathrm{AC}}\sin 2\theta$

따라서,

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} \cdot \overline{\mathrm{PH}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BD}} \cdot \overline{\mathrm{AC}}\sin 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}} - 4\right) \cdot \frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \sin 2\theta \quad (\because\ \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AD}} - \overline{\mathrm{AB}})$$
$$= \frac{2\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \left(1 - 2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\therefore\ \lim_{\theta \to +0}(\theta \times S(\theta)) = \lim_{\theta \to +0} \frac{2\theta \cdot \sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \left(1 - 2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= \lim_{\theta \to +0} \frac{4 \cdot \frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \left(1 - 2\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 4 \times 4 \times 1 = 16$$

29. 정답 72

$(1,\ g(1))$, $(4,\ g(4))$가 $y = g(x)$의 변곡점이므로 $g'(x)$와 $g''(x)$를 구해보면

$$g'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) \cdot e^{-x}$$
$$= e^{-x} \cdot (-f(x) + f'(x))$$
$$g''(x) = -e^{-x}(-f(x) + f'(x)) + e^{-x} \cdot (-f'(x) + f''(x))$$
$$= e^{-x} \cdot (f(x) - f'(x) - f'(x) + f''(x))$$
$$= e^{-x} \cdot (f(x) - 2f'(x) + f''(x))$$
$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면 $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$ 이므로

$g''(x) = e^{-x}(ax^2 + bx + c - 2(2ax + b) + 2a)$

$= e^{-x}(ax^2+(b-4a)x+(2a-2b+c))$

$(1,\ g(1))$, $(4,\ g(4))$가 변곡점이므로

$g''(1)=g''(4)=0$

$\therefore\ ax^2+(b-4a)x+(2a-2b+c)=0$ 의 근이 $x=1,\ 4$이다.

$\therefore\ b=-a,\ c=0$

$\therefore\ f(x)=a(x^2-x)$ 이므로

$g(x)=a\cdot e^{-x}(x^2-x)$ 이고

$g'(x)=a\cdot e^{-x}(-x^2+x+2x-1)$

$\quad\ =a\cdot e^{-x}(-x^2+3x-1)$

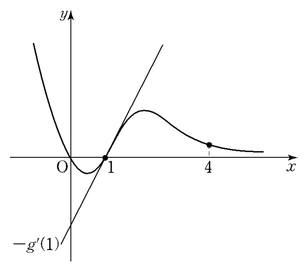
$g(1)=0,\ g(4)=\dfrac{a}{e^4}\cdot 12$

$g'(x)=0$에서 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ 에서 극소, $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ 에서 극대이다.

그리고 $\lim\limits_{x\to\infty} a\cdot e^{-x}(x^2-x)=0$

$\lim\limits_{n\to-\infty} a\cdot e^{-x}(x^2-x)=+\infty$

따라서, $g(x)$의 그래프 개형은 그림과 같다.



$y=g(x)$에서 $(1,\ 0)$에서 접선을 구하면

$y=g'(1)\cdot(x-1)$

이 접선의 y절편이 $-g'(1)$이므로 접선의 개수가 3인 k값의 범위가 $-1<k<0$이 되려면 $-g'(1)=-1$ 이 되어야 한다.

$\therefore\ g'(1)=\dfrac{a}{e}=1$ 에서 $a=e$

$g(x)=\dfrac{e}{e^x}(x^2-x)$ 이므로

$g(-2)=e^3\cdot 6$, $g(4)=\dfrac{1}{e^3}\cdot 12$

$\therefore\ g(-2)\times g(4)=e^3\times 6\times\dfrac{1}{e^3}\times 12=72$

30. 정답 24

$\overrightarrow{PQ}=(a,\ b,\ c)$ 라 하자. 평면 α : $y=4$의 법선벡터를 $\vec{v_1}=(0,\ 1,\ 0)$,

평면 β : $y+\sqrt{3}z+8=0$ 의 법선벡터를 $\vec{v_2}=\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이라 하자.

$\overrightarrow{PQ}$와 $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$가 이루는 각을 각각 $\theta_1,\ \theta_2$ 라 하면

$|\overrightarrow{P_1Q_1}|=|\overrightarrow{PQ}|\sin\theta_1$, $|\overrightarrow{P_2Q_2}|=|\overrightarrow{PQ}|\sin\theta_2$

$2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2(2-\sin^2\theta_1-\sin^2\theta_2)$

$= |\overrightarrow{PQ}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)\quad \cdots ㉠$

두 평면 $\alpha,\ \beta$가 이루는 각 θ는 $\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=\dfrac{1}{2}$ 에서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 이다.

각의 삼각부등식에서 $\theta_1+\theta_2\ge\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta_2\ge\dfrac{\pi}{3}-\theta_1$ 이고

$f(x)=\cos^2x$ 는 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$ 에서 감소함수이므로

$\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2\ \le\ \cos^2\theta_1+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_1\right)$

$=\cos^2\theta_1+\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1\right)^2$

$=\dfrac{5}{4}\cos^2\theta_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1\sin\theta_1+\dfrac{3}{4}\sin^2\theta_1$

$=1+\dfrac{1}{4}\cos2\theta_1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin2\theta_1\ =1+\dfrac{1}{2}\sin\left(2\theta_1+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\le\dfrac{3}{2}$ (단, 등호는 $\theta_1=\dfrac{\pi}{6}$ 일 때)

$\therefore\ 2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)$

$\le\dfrac{3}{2}|\overrightarrow{PQ}|^2$ (단, 등호는 $\theta_1=\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ 일 때)

$\le\dfrac{3}{2}\times16$ (단, 등호는 $|\overrightarrow{PQ}|=4$ 일 때) $=24$

[다른 풀이] ㉠에 이어

$|\overrightarrow{PQ}|^2\cos^2\theta_1=\left(\dfrac{1}{2}b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2$, $|\overrightarrow{PQ}|^2\cdot\cos^2\theta_2=b^2$

이므로 $|\overrightarrow{PQ}|^2(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)=\left(\dfrac{1}{2}b+\dfrac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2+b^2$

$\dfrac{1}{4}(5b^2+3c^2+2\sqrt{3}bc)$

$=\dfrac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b^2+2\sqrt{3}bc+3c^2)\}$

$=\dfrac{1}{4}\{6(b^2+c^2)-(b+\sqrt{3}c)^2\}$

$\le\dfrac{6}{4}\cdot(b^2+c^2)$ (단, 등호는 $b=-\sqrt{3}c$ 일 때)

$\le\dfrac{6}{4}(a^2+b^2+c^2)$ (단, 등호는 $a=0$일 때)

$=\dfrac{6}{4}\times16=24$

$\therefore\ a=0,\ b=\pm2\sqrt{3},\ c=\mp2$ 일 때 최댓값 24를 가진다.

8회 정답 및 해설

1	⑤	2	④	3	⑤	4	①	5	②
6	③	7	⑤	8	②	9	④	10	①
11	④	12	③	13	④	14	②	15	③
16	②	17	④	18	⑤	19	④	20	②
21	②	22	32	23	21	24	400	25	73
26	26	27	150	28	16	29	27	30	10

1. 정답 ⑤

$f(x)=x\ln x$ 의 도함수는 $f'(x)=\ln x+1$ 이다.

$\therefore\ f'(e)=\ln e+1\ =2$

2. 정답 ④

$\cos^2 2x=1-\sin^2 2x=\dfrac{8}{9}$

$0<2x<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos2x>0$

$\therefore\ \cos2x=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos^2x-\sin^2x=\cos2x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

3. 정답 ⑤

$\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

${}_7C_r(x^2)^{7-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r={}_7C_r x^{14-3r}$

$14-3r=2$ 에서 $r=4$

따라서 x^2 의 계수는 ${}_7C_4=35$ 이다.

4. 정답 ①

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 이므로

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore\ P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}}=\dfrac{1}{9}$

5. 정답 ②

$\int_0^0 f(t)dt=0$ 이므로 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$\cos 0+a\times 0^2+a=0$

$\therefore\ a=-1$

$\int_0^x f(t)\,dt=\cos 2x-x^2-1$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-2\sin 2x-2x$

$\therefore\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\pi-\pi=-\pi$

6. 정답 ③

세 개의 주머니 A, B, C 에 넣은 공의 수를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면

$a+b+c=5$ 이므로 가능한 모든 경우의 수는

${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=21$

(i) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1 개와 4 개로 나누어 넣는 경우의 수

${}_3P_2=6$

(ii) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경 우의 수

${}_3C_1=3$

따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$ 이다.

[다른 풀이]

한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면

(i) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3!=6$

(ii) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

(iii) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+3+3=12$ 이다.

7. 정답 ⑤

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{x}=10$ 이고, $\lim_{x\to 0}x=0$ 이므로

$\lim_{x\to 0}\ln\{1+f(2x)\}=0$

$\lim_{x\to 0}f(2x)=0$ 이므로 $t=f(2x)$ 로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(2x)\}}{f(2x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}=\ln e=1$$

따라서 $x=2y$ 로 놓으면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{f(2y)}{2y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(2y)}{\ln\{1+f(2y)\}}\cdot\frac{\ln\{1+f(2y)\}}{y}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1\times 10\times\frac{1}{2}=5$$

8. 정답 ②

점 $A(1,4,2)$ 는 직선 $\frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z-1}{2}$ 위에

있으므로 $a=4$, $b=4$

따라서 점 $A(1,4,2)$ 와 평면 $4x+4y+2z+48=0$

사이의 거리는

$$\frac{|4\times 1+4\times 4+2\times 2+48|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{72}{6}=12$$

9. 정답 ④

생수 1 병의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(500,\ 10^2)$ 을 따른다.

한 세트를 이루는 생수 4 병의 무게의 평균을 확률변수 $\overline{X}$ 라 하면

$E(\overline{X})=500$, $V(\overline{X})=\frac{10^2}{4}=25=5^2$ 이고

$\overline{X}$ 는 정규분포 $N(500,\ 5^2)$ 을 따른다.

$$\therefore\ P\left(\overline{X}\geq\frac{2030}{4}\right)=P(\overline{X}\geq 507.5)$$

$$=P\left(Z\geq\frac{507.5-500}{5}\right)$$

$$=P(Z\geq 1.5)$$

$$=0.5-P(0\leq Z\leq 1.5)$$

$$=0.5-0.4332$$

$$=0.0668$$

10. 정답 ①

곡선과 직선의 교점의 좌표를 구한다.

$\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}=\frac{2}{3}x$ 에서

$xe^{x^2}=\frac{2}{3}xe^{x^2}+\frac{2}{3}x$, $\frac{1}{3}x\left(e^{x^2}-2\right)=0$

$x=0$ 또는 $e^{x^2}-2=0$

$e^{x^2}=2$ 에서 $x^2=\ln 2$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{\ln 2}$

따라서, 구하는 넓이S는

$$S=2\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\left(\frac{2}{3}x-\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\frac{4}{3}x\,dx-\int_0^{\sqrt{\ln 2}}\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}-\left[\ln(e^{x^2}+1)\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$$

$$=\frac{2}{3}\ln 2-(\ln 3-\ln 2)$$

$$=\frac{5}{3}\ln 2-\ln 3$$

11. 정답 ④

$A(4,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 6,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 6)$ 에 대하여

점 D, E 의 좌표는 각각 $D(2,\ 3,\ 0)$, $E(0,\ 2,\ 4)$ 이다.

점 P가 선분 DE 위를 움직이므로

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{DE}=(2,\ 3,\ 0)+t(-2,\ -1,\ 4)$

$=(-2t+2,\ -t+3,\ 4t)$ (단, $0\leq t\leq 1$)

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=(-2t-2,\ -t+3,\ 4t)$ 이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=(-2t+2,\ -t+3,\ 4t)\cdot(-2t-2,\ -t+3,\ 4t)$

$=(4t^2-4)+(t^2-6t+9)+16t^2=21t^2-6t+5$

$=21\left(t-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{32}{7}$

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 최솟값은 $t=\frac{1}{7}$ 일 때 $\frac{32}{7}$ 이다.

12. 정답 ③

갑이 상자 B 를 선택하였을 때, 을의 판단이 틀리는 경우는 을이 (가)를 판단하는 경우이다. 즉, 을의 판단이 틀릴 확률은 갑이 상자 B를 선택하여 주어진 조건의 시행을 할 때, 빨간 공이 3 회 이하 나오는 경우이다. 따라서 구하는 확률은 여사건의 확률을 이용하면

$$1-\left\{{}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)+{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}=\frac{131}{3^5}$$

13. 정답 ④

$A(0,1)$, $B(1,0)$ 이고 선분 AB 가 정사각형의 한 변이므로

$C(1,2)$, $D(2,1)$ 이다.

이때 직선 $y=-x+k$ 가 점 $C(1,2)$ 를 지나므로

$2=-1+k$

$\therefore\ k=3$

14. 정답 ②

주사위의 눈의 수를 n이라 하면

$C(n, 2^n)$, $D(2^n, n)$ 이므로

$\overline{CD} = \sqrt{(2^n-n)^2+(n-2^n)^2} = \sqrt{2}(2^n-n)$

1부터 6까지의 값을 가지는 n에 대하여 선분 CD의 길이 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

n	1	2	$\cdots$	6	계
X	$\sqrt{2}(2^1-1)$	$\sqrt{2}(2^2-2)$	$\cdots$	$\sqrt{2}(2^6-6)$	
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 X의 기댓값은

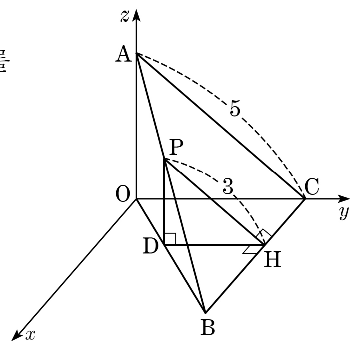
$$E(X) = \sum_{n=1}^{6} \sqrt{2}(2^n-n)\times\frac{1}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\left\{\frac{2(2^6-1)}{2-1}-\frac{6\times7}{2}\right\}$$
$$= \frac{35\sqrt{2}}{2}$$

15. 정답 ③

$\overline{AC} = \sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{AC}\perp\overline{BC}$

이므로 평면 ABC 와 xy평면이 이루는 각의 크기를

θ라 하면 $\cos\theta = \frac{4}{5}$ 이다.



두 직각삼각형 ABC , PBH 는 서로 닮은 도형이고

$\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{PH} : \overline{AC} = 3:5$

$\overline{BH} = \frac{3}{5}\overline{BC} = 3$

$\therefore\ \triangle PBH = \frac{1}{2}\times3\times3 = \frac{9}{2}$

따라서 삼각형 PBH 의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S라 하면

$S = \triangle PBH\cdot\cos\theta = \frac{9}{2}\times\frac{4}{5} = \frac{18}{5}$

[다른 풀이]

점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 D라 하자.

$\overline{PD}\perp(xy$평면), $\overline{PH}\perp\overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH}\perp\overline{BC}$ 이다.

따라서 두 직각삼각형 ABC , PBH 는 서로 닮은 도형이고

$\overline{AC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, $\overline{PH} = 3$ 이므로

$\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{PH} : \overline{AC} = 3:5$

$\therefore\ \overline{BH} = \frac{3}{5}\overline{BC} = 3$

또, 두 직각삼각형 OBC , DBH 는 서로 닮은 도형이고

$\overline{OC} = 4$, $\overline{BH} = 3$ 이므로

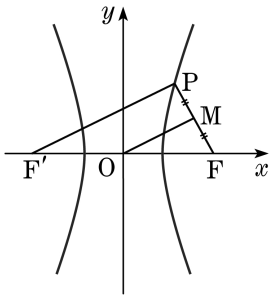
$\overline{DH} : \overline{OC} = \overline{BH} : \overline{BC} = 3:5$

$\therefore\ \overline{DH} = \frac{3}{5}\overline{OC} = \frac{12}{5}$

따라서 삼각형 PBH 의 xy평면 위로의 정사영인 삼각형 DBH 의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{DH} = \frac{1}{2}\times3\times\frac{12}{5} = \frac{18}{5}$

16. 정답 ②



쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식이

$y=2x$, $y=-2x$ 이므로

$\frac{b}{a}=2$, $b=2a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F′이라 하면 삼각형 PF′F 에서 점 O 는 변 F′F 의 중점이고 점 M 은 변 PF 의 중점이므로

$\overline{PF'} = 2\overline{OM} = 12$

$\overline{PF} = 2\overline{MF} = 6$

$|\overline{PF'}-\overline{PF}| = 12-6 = 6 = 2a$

$\therefore\ a=3,\ b=2a=6$

$\therefore\ \overline{OF} = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$

17. 정답 ④

딸기의 무게 X가 평균이 m이고 표준편차가 σ인

정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따른다고 하자.

임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}=20$,

표본표준편차 $s=5$ 의 결과를 이용하여 모평균 m을

신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은

$$\left[20-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}},\ 20+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\right]$$

조건에서 신뢰구간이 $[19.02,\ a]$ 이므로

$20-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}} = 19.02$, $20+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}} = a$

위의 식을 풀면 $n=100$, $a=20.98$

$\therefore\ n+a = 120.98$

18. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x)>0$ 이므로 $\int_n^{n+1} f(x)dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선

$x=n,\ x=n+1$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

두 점 $P_n,\ Q_n$ 에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 $P'_n,\ Q'_n$ 이라 하면

직사각형 $P_nP'_nQ'_nQ_n$ 의 넓이는 $(n+1-n)\times f(n) = f(n)$ 이다.

$\therefore\ \int_n^{n+1} f(x)dx = f(n)-(A_n-B_n)$ (참)

ㄴ. $A_n = \frac{1}{2}\cdot1\cdot\{f(n)-f(n+1)\}$

$$= \frac{1}{2}(e^{-n}-e^{-n-1}) = \frac{e^{-n-1}}{2}(e-1)$$
$$= \frac{e-1}{2}\cdot\frac{1}{e^{n+1}}$$

따라서 수열 $\{A_n\}$은 첫째항이 $\frac{e-1}{2e^2}$, 공비가 $\frac{1}{e}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{\frac{e-1}{2e^2}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{2e} \quad (참)$$

ㄷ. $\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_n^{n+1}$

$= -e^{-n-1}+e^{-n} = 2A_n$

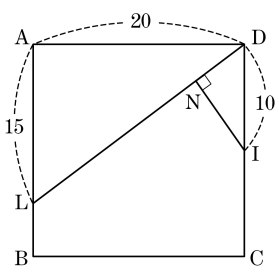
이므로 ㄱ에서 $B_n = f(n)-3A_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - 3\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{e-1}-\frac{3}{2e}$$
$$= \frac{2e-3(e-1)}{2e(e-1)} = \frac{3-e}{2e(e-1)} \quad (참)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19. 정답 ④



점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의해서

$\overline{\mathrm{LD}} \perp \overline{\mathrm{NI}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AL}} = \frac{3}{4}\overline{\mathrm{AB}} = 15$, $\overline{\mathrm{DI}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}} = 10$,

$\overline{\mathrm{LD}} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$

이고, 두 삼각형 NDI, ALD 는 서로 닮은 도형이므로

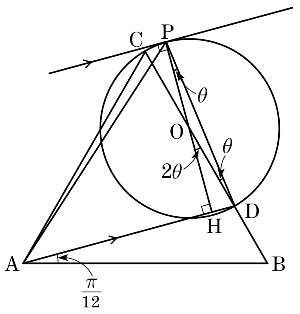
$\overline{\mathrm{NI}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DI}} : \overline{\mathrm{LD}}$

$\overline{\mathrm{NI}} = \frac{\overline{\mathrm{AD}} \cdot \overline{\mathrm{DI}}}{\overline{\mathrm{LD}}} = \frac{20 \times 10}{25} = 8$

삼각형 MIN 은 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{MN}} = \sqrt{20^2 + 8^2} = 4\sqrt{29}$

20. 정답 ②



점 P에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ADP 의 높이 $\overline{\mathrm{PH}}$ 는 그림과 같이 점 P가 직선 AD와 평행한 접선의 접점일 때 최대이다.

$\angle \mathrm{CDA} = \angle \mathrm{DAB} + \angle \mathrm{DBA} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{12}\pi$ 이므로

$\angle \mathrm{HOD} = \frac{\pi}{2} - \angle \mathrm{CDA} = \frac{\pi}{12}$

$\angle \mathrm{HOD} = \angle \mathrm{ODP} + \angle \mathrm{OPD} = 2\theta$

$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{12}$

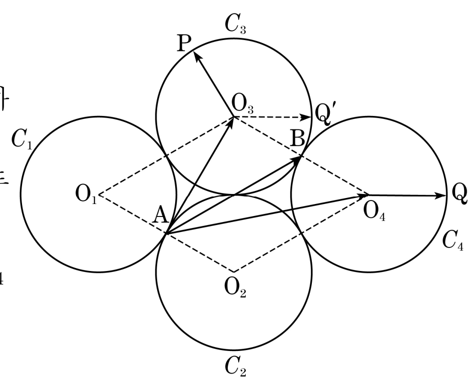
$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$

21. 정답 ②

네 원 C_1, C_2, C_3, C_4의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3, O_4 라 하고, 두 원 C_3, C_4의 접점을 B라 하자.



사각형 $\mathrm{O_1O_2O_4O_3}$ 은 네 변의 길이가 모두 2인 마름모이고,

두 점 A, B는 각각 변 $\mathrm{O_1O_2}$, 변 $\mathrm{O_3O_4}$ 의 중점이다.

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AO_3}} + \overrightarrow{\mathrm{AO_4}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}$

한편, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}$ 를 시점이 $\mathrm{O_3}$이 되도록 평행이동하였을 때, 그 종점을 Q′이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{O_3P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_4Q}} = \overrightarrow{\mathrm{O_3P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_3Q'}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

$= \left(\overrightarrow{\mathrm{AO_3}} + \overrightarrow{\mathrm{O_3P}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AO_4}} + \overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}\right)$

$= \left(\overrightarrow{\mathrm{AO_3}} + \overrightarrow{\mathrm{AO_4}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{O_3P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_4Q}}\right)$

$= 2\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}} + \overrightarrow{\mathrm{O_3P}} + \overrightarrow{\mathrm{O_3Q'}}$

이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 크기가 최대가 되려면 $\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}$ 은 방향과 크기가 일정한 벡터이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_3P}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_3Q'}}$ 이 $\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}$ 과 방향이 같아야 한다.

$\therefore \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right| \le 3\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1O_3}}\right| = 6$

22. 정답 32

$(1+x)^5 = {}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 x + {}_5\mathrm{C}_2 x^2 + {}_5\mathrm{C}_3 x^3 + {}_5\mathrm{C}_4 x^4 + {}_5\mathrm{C}_5 x^5$

양변에 $x = 1$ 을 대입하면

${}_5\mathrm{C}_0 + {}_5\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_2 + {}_5\mathrm{C}_3 + {}_5\mathrm{C}_4 + {}_5\mathrm{C}_5 = 2^5 = 32$

23. 정답 21

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{7}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X) = \frac{n}{7} = 3$

$\therefore n = 21$

24. 정답 400

(i) $0 \le x < 2$ 일 때 $f(x) = 5$ 에서

$3^x = 5$

$\therefore x = \log_3 5$

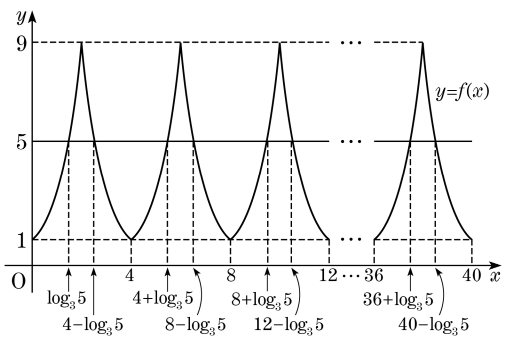
(ii) $2 \le x < 4$ 일 때 $f(x) = 5$ 에서

$3^{-x+4} = 5$, $-x + 4 = \log_3 5$

$\therefore x = 4 - \log_3 5$

함수 $y = f(x)$ 는 주기가 4인 주기함수이므로 닫힌 구간 $[0, 40]$ 에서 $f(x) = 5$ 인 x 값들을 차례대로 구하면 다음과 같다.

$\log_3 5$, $4 - \log_3 5$, $4 + \log_3 5$, $8 - \log_3 5$, $8 + \log_3 5$, $12 - \log_3 5$, $12 + \log_3 5$, ⋯ , $40 - \log_3 5$



따라서 이들을 모두 더하면

$\{\log_3 5 + (4 - \log_3 5)\} + \{(4 + \log_3 5) + (8 - \log_3 5)\}$

$+ \cdots + \{(36 + \log_3 5) + (40 - \log_3 5)\}$

$= 4 + 12 + 20 + \cdots + 76$

$= \frac{10 \times (4 + 76)}{2}$

$= 400$

25. 정답 73

주어진 사각형은 사다리꼴이므로

$S(2) = \frac{1}{2} \times 2(\log_2 2 + \log_2 4) = \log_2 8$

$S(4) = \frac{1}{2} \times 2(\log_2 4 + \log_2 6) = \log_2 24$

$S(a) = \frac{1}{2} \times 2\{\log_2 a + \log_2 (a+2)\} = \log_2 a(a+2)$

$S(2)$, $S(4)$, $S(a)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S(4) = S(2) + S(a)$

$2\log_2 24 = \log_2 8 + \log_2 a(a+2)$

$24^2 = 8a(a+2)$

$a^2 + 2a - 72 = 0$

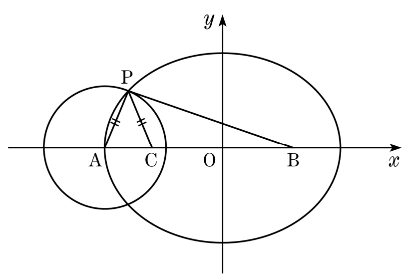
$\therefore a = -1 + \sqrt{73}$ 또는 $a = -1 - \sqrt{73}$

그런데 $a > 1$ 이므로

$a = \sqrt{73} - 1$

$\therefore n = 73$

26. 정답 26



타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점의 좌표를 각각 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ (단, $c > 0$)

이라 하면 $c^2=25-16=9$ 에서 $c=3$
따라서 점 B 는 타원의 한 초점이고 다른 한 초점은 C$(-3,\ 0)$ 이다.
$\overline{PB}+\overline{PC}=10$ 이고, $\overline{PA}+\overline{PB}=10$ 이므로 $\overline{PA}=\overline{PC}$
타원의 장축의 길이는 10이므로 점 A 의 좌표는 $(-5, 0)$ 이다.
즉, 삼각형 PAC 는 이등변삼각형이므로 점 P 의 x좌표는 -4이다.

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 에서 $y^2=16\left\{1-\frac{(-4)^2}{25}\right\}$

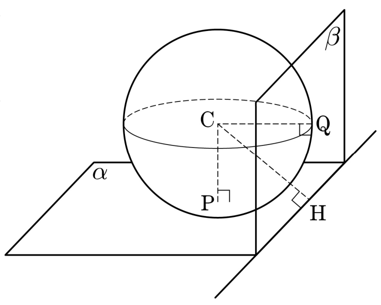
$y=\frac{12}{5}$ 또는 $y=-\frac{12}{5}$

$\mathrm{P}\left(-4,\ \frac{12}{5}\right)$ 또는 $\mathrm{P}\left(-4,\ -\frac{12}{5}\right)$ 이므로

$r=\overline{PA}=\sqrt{(-5+4)^2+\left(0-\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{13}{5}$

$\therefore\ 10r=26$

27. 정답 150



구의 중심 C에서 두 평면의 교선 $x=-y=z$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
H$(t,\ -t,\ t)$이고 $\overrightarrow{CH}$는 교선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ -1,\ 1)$ 과 수직이다.

$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{u}=(t-1,\ -t-2,\ t-1)\cdot(1,\ -1,\ 1)$
$=(t-1)-(-t-2)+(t-1)$
$=3t=0$

$t=0$이므로 $\overrightarrow{CH}=(-1,\ -2,\ -1)$

$\overline{CH}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CQH 에서 $\cos(\angle\mathrm{QCH})=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \angle\mathrm{QCH}=\frac{\pi}{4}$

$\angle\mathrm{PCH}=\angle\mathrm{QCH}=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle\mathrm{QCP}=\frac{\pi}{2}$ 가 되어 삼각형 CPQ는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 직각이등변삼각형이다.

$S=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 100S=150$

28. 정답 16

채워지는 물의 양 V는

$V=\pi\int_{-1}^{h}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{h}=\pi\left(h-\frac{1}{3}h^3+\frac{2}{3}\right)$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dV}{dt}=\pi(1-h^2)\frac{dh}{dt}$

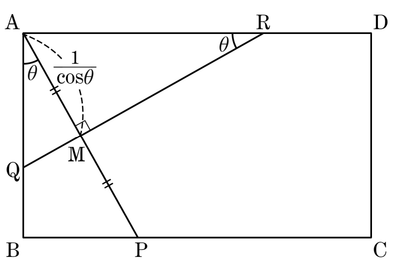
여기에 부피의 증가량 0.2π와 높이가 $\frac{3}{4}$이므로

$h=-\frac{1}{4}$를 대입하면

$0.2\pi=\pi\left(1-\frac{1}{16}\right)\frac{dh}{dt}$

$\therefore\ \frac{dh}{dt}=\frac{16}{75}$ 이므로 $75v=75\times\frac{16}{75}=16$

29. 정답 27



선분 AP 의 중점을 M, $\angle\mathrm{BAP}=\theta$ $\left(0<\theta\le\frac{\pi}{3}\right)$ 라 하면

$\overline{AP}=\frac{2}{\cos\theta}$, $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{1}{\cos\theta}$, $\overline{AQ}=\frac{\overline{AM}}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

삼각형 AQR 에서 $\overline{AM}\perp\overline{QR}$ 이므로 $\angle\mathrm{ARQ}=\theta$

$\therefore\ \overline{QR}=\frac{\overline{AQ}}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta-\sin^3\theta}$

$\sin\theta=t$ 라 하면 $\overline{QR}=\frac{1}{t-t^3}$

$f(t)=t-t^3$ $\left(0<t\le\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이라 하자.

$f'(t)=1-3t^2=0$ 에서 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(t)$ 는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최댓값 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 을 가진다.

$\overline{QR}=\frac{1}{f(t)}\ge\frac{1}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ 4k^2=4\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2=27$

[다른 풀이]

$\overline{AQ}=x$ 라 하면 $\overline{AQ}=\overline{QP}=x$ 이므로

$\overline{BP}=\sqrt{x^2-(2-x)^2}=\sqrt{4x-4}=2\sqrt{x-1}$

$\therefore\ \overline{AP}=\sqrt{2^2+(4x-4)}=2\sqrt{x}$

두 직각삼각형 ABP, RAQ 는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{AQ}:\overline{QR}=\overline{BP}:\overline{PA}$ 에서

$\overline{QR}=\frac{\overline{AQ}\cdot\overline{PA}}{\overline{BP}}=\frac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x-1}}=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

$\overline{QR}^2=f(x)$ 라 하면 $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$ (단, $1<x\le4$)

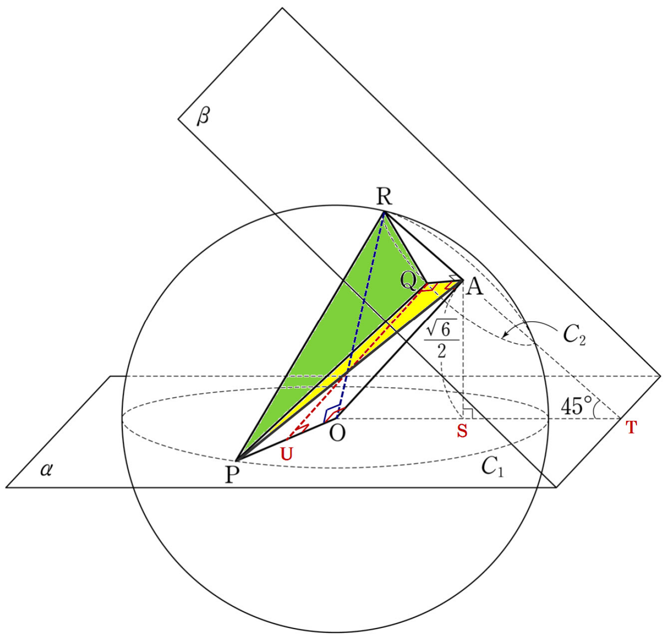
$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗	$\frac{64}{3}$

$\therefore\ 4k^2=4f\left(\frac{3}{2}\right)=27$

30. 정답 10



$\triangle PQR$ 을 평면 $AQPO$ 에 정사영한 도형은 $\triangle PQA$

따라서 $\cos\theta=\frac{\triangle PQA\text{의 넓이}}{\triangle PQR\text{의 넓이}}$

$\overline{OA}\perp\beta$ 에서 $\angle OAT=90^\circ$ 이고

$\triangle AOS$ 는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{OA}=\sqrt{3}$

$\overline{QA}=1$ 이므로 $\therefore$ $\triangle PQA$ 의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

직각이등변삼각형 ARQ 에서 $\overline{QR}=\sqrt{2}$

직각삼각형 PQU 에서 $\overline{PQ}=2$

$\overline{OP}\perp\triangle OAR$ 이므로 $\overline{OP}\perp\overline{OR}$

직각삼각형 OPR 에서 $\overline{PR}=2\sqrt{2}$

$\triangle PQR$ 에서 $\angle PRQ=\gamma$ 라 하면

$\cos\gamma=\dfrac{8+2-4}{8}=\dfrac{3}{4}$, $\sin\gamma=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ $\triangle PQR$ 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$$\cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{3}{7}$

$\therefore\ p+q=10$

9회 정답 및 해설

1	②	2	④	3	⑤	4	①	5	③
6	②	7	①	8	②	9	⑤	10	③
11	②	12	③	13	④	14	③	15	②
16	①	17	②	18	②	19	⑤	20	④
21	⑤	22	12	23	19	24	130	25	12
26	11	27	30	28	52	29	60	30	294

1. 정답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}\cdot\frac{2x}{3x}\right)=\frac{2}{3}$$

2. 정답 ④

$f'(x)=2x+\ln x+1$ 이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{3h}\cdot 3$$
$$=3f'(1)=9$$

3. 정답 ⑤

$(1+2x)^6=\sum_{k=0}^{6}{}_6C_k(2x)^k$ 이므로

$(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는 $k=4$ 일 때이므로

${}_6C_4\times 2^4=240$

$(1+2x)^6$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 $k=3$ 일 때이므로

${}_6C_3\times 2^3=160$

따라서 $(1+2x)^6(1-x)$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

$240-160=80$

4. 정답 ①

$2x-\dfrac{3y}{3}=1$, $y=2x-1$

따라서 y축과 만나는 점의 y좌표는 -1

5. 정답 ③

$\sin x+2\sin x\cos x=0$, $\sin x(1+2\cos x)=0$

(ⅰ) $\sin x=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$

(ⅱ) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ 에서 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $0+\pi+\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{4}{3}\pi=3\pi$

6. 정답 ②

$f(a)=\displaystyle\int_1^a\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

$\sqrt{\ln x}=t$ 라 하면 $\ln x=t^2$

$x=1\to t=0$, $x=a\to t=\sqrt{\ln a}$

$\dfrac{1}{x}dx=2t\,dt$

$f(a)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln a}}2t^2\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{\ln a}}=\frac{2}{3}(\ln a)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore\ f(a^4)=\dfrac{2}{3}(\ln a^4)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}(\ln a)^{\frac{3}{2}}=8f(a)$

7. 정답 ①

주어진 다항식은 세 인수

$(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}),(1+x^3+x^6+x^9)$, $(1+x^4+x^8)$ 에서

각각 단항식을 택해서 곱한 식으로 전개가 된다.

주어진 다항식에서 차수가 각각 2의 배수, 3의 배수, 4의 배수이다.

x^{10} 의 계수는 결국 다음 조건들

$a\in\{0,2,4,6,8,10\}$, $b\in\{0,3,6,9\}$, $c\in\{0,4,8\}$, $a+b+c=10\cdots$ ㉠

을 만족하는 순서쌍 (a,b,c) 의 개수와 같다.

a,b,c 가 각각 $2,3,4$ 의 배수이기 때문에 a,b,c 를 각각 $2,3,4$ 를

여러 번 합한 값으로 생각할 수 있다.

$a=2l(l=0,1,2,3,4,5)$, $b=3m(m=0,1,2,3)$,

$c=4n(n=0,1,2)$ 이라 두면

$10=a+b+c=2l+3m+4n$

이것을 만족하는 음이 아닌 정수해 (l,m,n) 의 개수가 x^{10} 의 계수이다.

그런데 (l,m,n) 은 순서대로 $2,3,4$ 를 합하는 횟수를 의미한다.

따라서 ㉠을 만족하는 경우의 수는 $2,3,4$ 의 합으로 나타내어지는

10의 분할의 수와 같다.

8. 정답 ②

두 사건 A , B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$ 이다.

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\therefore$ $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$ 이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

9. 정답 ⑤

	남학생	여학생	계
전통문화 체험	130	90	220
수학 체험	100	80	180
계	230	170	400

이 학교 학생 400명 중에서 임의로 한 학생을 선택하였을 때, 수학 체험을 희망한 학생일 사건을 A 라 하고, 여학생일 사건을 B 라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{80}{400}}{\frac{180}{400}}=\frac{4}{9}$$

10. 정답 ③

모서리 DE 와 모서리 CB가 평행이므로

두 모서리 AC 와 DE 가 이루는 각은

두 모서리 AC 와 CB 가 이루는 각과 같다.

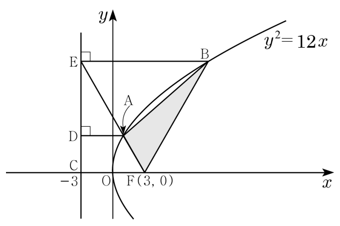
따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

11. 정답 ②

사과의 무게 X는 정규분포 $N(400, 50^2)$을 따른다.
1등급 상품이 될 확률은
$\mathrm{P}(X \geq 442) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{442-400}{50}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 0.84) = 0.2$
사과 100개 중 1등급 상품의 개수 Y는 이항분포 $B(100, 0.2)$를 따르고 근사적으로 $N(20, 4^2)$을 따른다.
$\mathrm{P}(Y \geq 24) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{24-20}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1) = 0.16$

12. 정답 ③



$\angle\mathrm{EFB} = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{BE}}$ 이므로 $\triangle\mathrm{BEF}$ 는 정삼각형이다.
$\overline{\mathrm{FC}} = 6$ 이므로 $\overline{\mathrm{FB}} = \overline{\mathrm{FE}} = 2\overline{\mathrm{FC}} = 12$
$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{AD}}$ 이고 $\angle\mathrm{DAE} = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AE}} = 2\overline{\mathrm{AD}} = 2\overline{\mathrm{AF}}$ 에서
$3\overline{\mathrm{AF}} = 12$ 즉, $\overline{\mathrm{AF}} = 4$
$\therefore\ \triangle\mathrm{AFB} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

13. 정답 ④

(나)에서 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = k$라 두면 $g(x) = k\cos x + 3$
(가)에서 $x=0$을 대입하면 $-k = (k+3+a)\cdot 0 - 2$ 이므로 $k=2$이고,
$x = \frac{\pi}{2}$를 대입하면 $0 = (3+a)\cdot 1 - 2$ 이므로 $a = -1$이다.
따라서 $g(x) = 2\cos x + 3$ 이므로
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt = (2\cos x + 2)\sin x - 2$
$f(x) = -2\sin^2 x + (2\cos x + 2)\cos x$
$\therefore\ f(0) = 4$

14. 정답 ③

평면 AFH 와 평면 EFGH 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
$\triangle\mathrm{AFH}\cos\theta = \triangle\mathrm{EFH}$ 이다.
$\frac{\sqrt{3}}{4}(4\sqrt{2})^2\cos\theta = \frac{1}{2}\cdot 4^2$
$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
이때, 구하는 넓이를 S, 반원의 넓이를 S'이라 하면
$S = \frac{S'}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

15. 정답 ②

직각삼각형 ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{3}$
점 B에서 $\overline{\mathrm{AP}}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABP 에서
$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{3}$
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CH}} \perp \overline{\mathrm{AP}}$ 이다.
따라서 직각삼각형 CBH 에서 $\overline{\mathrm{BC}} = 2$, $\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{3}$ 이므로
$\overline{\mathrm{CH}} = \sqrt{7}$

16. 정답 ①

두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로
$\mathrm{P}(k, k)$, $\mathrm{Q}(2k, 2k)$ 이다.
따라서 $a^k = k$, $a^{2k} = 2k$ 이므로 $2k = a^{2k} = (a^k)^2 = k^2$ 에서 $k=2$ 이다.
$a^2 = 2$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$

17. 정답 ②

뒤집어질 확률을 p 라 하면 도, 개, 걸, 윷, 모가 나올 확률은 이항분포 $B(4, p)$ 로부터 구할 수 있으며 다음과 같다.

	도	개	걸	윷	모
뒤집어진 개수	1	2	3	4	0
확률	${}_4C_1\,p(1-p)^3$	${}_4C_2\,p^2(1-p)^2$	${}_4C_3\,p^3(1-p)$	${}_4C_4\,p^4$	${}_4C_0(1-p)^4$

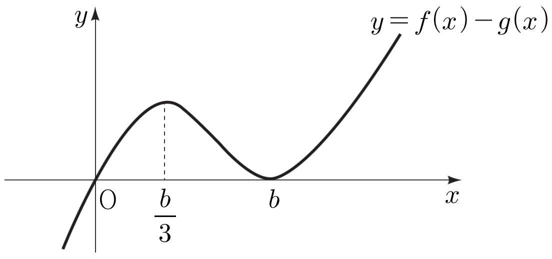
철수의 주장이 참이 되기 위해서
${}_4C_2\,p^2(1-p)^2 > {}_4C_3\,p^3(1-p) > {}_4C_1\,p(1-p)^3 > {}_4C_4\,p^4 > {}_4C_0\,(1-p)^4$
을 만족해야 한다. 각각의 대소를 만족하는 p 값의 범위를 구하면
(ⅰ) ${}_4C_2\,p^2(1-p)^2 > {}_4C_3\,p^3(1-p)$
$6(1-p) > 4p$
$\therefore\ p < \frac{3}{5}$
(ⅱ) ${}_4C_3\,p^3(1-p) > {}_4C_1\,p(1-p)^3$
$(1-p)^2 > p^2$
$\therefore\ p > \frac{1}{2}$
(ⅲ) ${}_4C_1\,p(1-p)^3 > {}_4C_4\,p^4$
$4(1-p)^3 > p^3$, $4(1-p)^3 - p^3 > 0$
$\left\{4^{\frac{1}{3}}(1-p)\right\}^3 - p^3 > 0$
$\left\{4^{\frac{1}{3}}(1-p) - p\right\}\left\{4^{\frac{2}{3}}(1-p)^2 + 4^{\frac{1}{3}}(1-p)p + p^2\right\} > 0$
$\therefore\ p < \frac{1}{1+4^{-\frac{1}{3}}} = 0.61$
(ⅳ) ${}_4C_4\,p^4 > {}_4C_0\,(1-p)^4$
$p > (1-p)$
$\therefore\ p > \frac{1}{2}$
따라서, 공통해는 $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{5}$

18. 정답 ②

$\frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.25\times 0.75}{300} = 0.025^2$ 에서 표본비율 $\hat{p}$는
정규분포 $\mathrm{N}(0.25,\ 0.025^2)$ 를 따른다.
$\frac{\alpha}{100} = \beta$라 하면
$\mathrm{P}\left(\hat{p} \geq \frac{\alpha}{100}\right) = \mathrm{P}(\hat{p} \geq \beta) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{\beta - 0.25}{0.025}\right)$
$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$
$\therefore\ \alpha = 100\beta = 30$

19. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x) = px^3 + qx^2 + rx\ (p > 0)$ 라 하고
$g(x) = mx\ (m \neq 0)$라 하자.
두 곡선 $y = f(x)$ 와 $y = f(x) - g(x)$ 의 변곡점의 x좌표는 $-\frac{q}{3p}$ 이므로
곡선 $y = f(x) - g(x)$ 의 변곡점의 x좌표는 a이다. (참)
ㄴ. 그림과 같이 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 그래프는 원점을 지나고 $x=b$에서 x축에 접하므로 $f(x) - g(x) = px(x-b)^2$ 이다.



$\{f(x)-g(x)\}'=p(x-b)(3x-b)$ 이므로

함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=\frac{b}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)=px(x-b)^2$
이라 하면 ㄱ 에서 $h''(a)=0$ 이다.

$\therefore\ a=\frac{2b}{3}$ 이므로 $\frac{b-a}{a}=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 정답 ④

$\overline{AB}=2$ 이고 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{PB}=2\sin\theta$

$\angle QBP=\frac{\pi}{2}-\angle PQB=\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-\theta$

$\therefore\ \overline{PQ}=\overline{PB}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sin\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cdot 2\sin\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=2$$

21. 정답 ⑤

ㄱ. 구간 $(0,1)$에서 $\frac{d\{f(x)\}^2}{dx}=2f(x)f'(x)$

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}=2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)$ 이므로

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}>0$

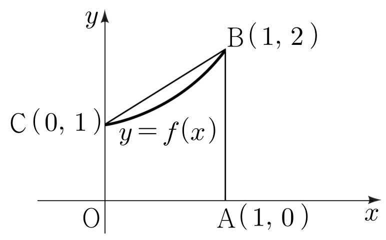
∴ 함수 $y=\{f(x)\}^2$ 의 그래프는 구간 $(0,1)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄴ. $1-x=t$ 라 하면

$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(t)dt$ 이므로

$\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_0^1 f(x)dx$

조건에 의해 구간 $(0,1)$에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고



$\int_0^1 f(x)dx$ 의 값은 사다리꼴 COAB 의 넓이보다 작다.

$\therefore\ \int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해

$$\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\ \ge\ \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2dx$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\ \ge\ \int_0^1\{f(x)\}^2dx\ \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 정답 12

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot2+10\right)=2+10=12$$

23. 정답 19

$a+2a+3a+4a=1$ 에서 $a=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{10}x$, $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{4}k\cdot\frac{k}{10}=\frac{1}{10}\cdot\frac{4\cdot5\cdot9}{6}=3$

$\therefore\ \mathrm{E}(4X+7)=4\mathrm{E}(X)+7=12+7=19$

24. 정답 130

$0\le t\le10$ 에서의 평균속도는

$\frac{f(10)-f(0)}{10-0}=\frac{1280}{10}=128$

$f'(t)=3t^2+6t-2$ 이므로

$t=c$ 에서의 순간속도는 $f'(c)=3c^2+6c-2$

$3c^2+6c-2=128$ 에서

$3c^2+6c=130$

25. 정답 12

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$ 이므로 $|\overrightarrow{ED}|^2=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}|^2=4$

따라서 $|\overrightarrow{AD}|^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+|\overrightarrow{AE}|^2=4$ 이므로

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=12$

26. 정답 11

폐구간 $[-a,\ a]$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{x-5}{(x-5)^2+36}$ 에서

$x-5=t$ 로 놓으면 구하는 함수의 최댓값과 최솟값은 폐구간 $[-a-5,\ a-5]$ 에서 정의된 함수 $f(t)=\frac{t}{t^2+36}$ 의 최댓값과 최솟값과 같다.

$f(t)=\frac{t}{t^2+36}$ 의 그래프의 개형은.

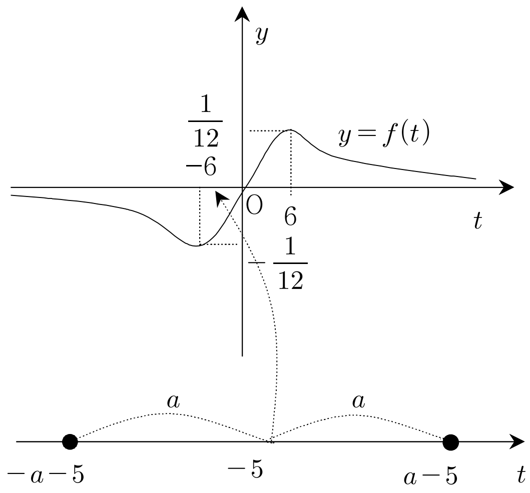
(i) $\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=0$ 이므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 점근선은 x축이다.

(ii) $t>0$ 일 때 $f(t)>0$ 이고, $t<0$ 일 때 $f(t)<0$ 이다.

(iii) $f(-t)=-f(t)$ 이므로
$y=f(t)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(t)=\frac{1(t^2+36)-t\cdot2t}{(t^2+36)^2}=\frac{36-t^2}{(t^2+36)^2}=0$ 에서

$t=6$ 또는 $t=-6$ 이고 $f'(t)$ 의 분모는 항상 0 보다 크므로
$f(x)$ 는 $t=-6$ 에서 극소이고 $t=6$ 에서 극대이다.
따라서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



이때, 폐구간 $[-a-5,\ a-5]$ 은 $t=-5$ 에 대하여 대칭인 구간이므로
함수 $y=f(t)$ 의 최댓값 M과 최솟값 m에 대하여
$M+m=0$ 즉, $m=-M$을 만족하려면
폐구간 $[-a-5,\ a-5]$ 은 $t=-6$ 과 $t=6$ 을 모두 포함해야 한다.

$\therefore\ -a-5\le-6$ 이고 $a-5\ge6$

$\therefore\ a\ge1$ 이고 $a\ge11$

$\therefore\ a\ge11$

따라서 구하는 a의 최솟값은 11 이다.

27. 정답 30

원의 중심을 O라 하면 $\angle\mathrm{POB}=2\theta$
직선 OP와 선분 AC가 만나는 점을 R, $\angle\mathrm{BAC}=\alpha$ 라 하면

$\angle\mathrm{PRQ}=\alpha+2\theta$ 이고 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$

$\angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{PQA}=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle\mathrm{PRQ}=\alpha+2\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\tan2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+1\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $60\tan2\theta=30$

28. 정답 52

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}})=\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$\quad=6\cdot5\cdot\frac{36+25-9}{2\cdot6\cdot5}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=26+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

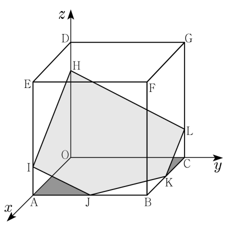
그런데 최대일 때의 점 P를 $\mathrm{P_M}$, 최소일 때의 점 P를 $\mathrm{P_m}$이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CP_M}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CP_m}}$은 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$와 평행하고 방향이 반대이므로 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP_M}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP_m}}=0$
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $26+26=52$

29. 정답 60

1층에 6개를 모두 쌓은 후 남은 6개를 쌓는 방법은 다음과 같다.
(i) 2층 앞줄에 모두 1개씩 쌓는 경우
${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=12$
(ii) 2층 앞줄 두 곳 중 한 곳에만 1개를 쌓는 경우
뒷줄 네 곳 중 한 곳에 3개를 쌓고 나머지 세 곳에 중복을 허락하여 2개를 쌓으면 되므로
${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{H}_2=48$
따라서 $12+48=60$

30. 정답 294

평면 $x+y+2z=6$ 에 의하여 정육면체가 잘린 단면은 그림과 같다.



두 평면 $x+y+2z=6$, $z=0$의 법선벡터가 각각 $(1,\ 1,\ 2)$, $(0,\ 0,\ 1)$이므로
두 평면이 이루는 각 θ에 대하여 $\sqrt{6}\cdot1\cdot\cos\theta=2$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{6}}$
오각형 HIJKL의 정사영이 오각형 OAJKC 이므로
$S\cos\theta=14$
따라서 $S=7\sqrt{6}$ 이므로 $S^2=294$

10회 정답 및 해설

1	④	**2**	②	**3**	⑤	**4**	①	**5**	②
6	②	**7**	④	**8**	②	**9**	⑤	**10**	⑤
11	④	**12**	⑤	**13**	①	**14**	②	**15**	③
16	⑤	**17**	①	**18**	①	**19**	②	**20**	④
21	②	**22**	130	**23**	2	**24**	10	**25**	12
26	720	**27**	15	**28**	7	**29**	7	**30**	8

1. 정답 ④

(주어진 식)$=\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

2. 정답 ②

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$

3. 정답 ⑤

$f(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ (C는 적분상수)
$\therefore f(\pi)-f(0)=-\cos\pi+\cos0=2$

4. 정답 ①

$x^3+xy+y^3-8=0$ 에 $y=0$을 대입하면 $x=2$이다.
$x^3+xy+y^3-8=0$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면
$3x^2+y+xy'+3y^2y'=0$
따라서 점 $(2,0)$에서의 접선의 기울기는 -6이다.

5. 정답 ②

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X라 하면
$\mathrm{P}(X\ge830)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{830-800}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\ge0.6)$
$\quad=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.6)$
$\quad=0.5-0.2257=0.2743$

6. 정답 ②

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $\mathrm{G}(4,5,6)$이다.
$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$ 이다.
이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로 $\mathrm{P}(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 최솟값은 6이다.

7. 정답 ④

임의로 뽑은 한 명이 여학생일 사건을 F, 봄을 선택한 학생일 사건을 A라 하자.
$\mathrm{P}(A)=0.6\times0.55+0.4\times0.65=0.59$
$\mathrm{P}(F\cap A)=0.4\times0.65=0.26$ 이므로
$\mathrm{P}(F|A)=\frac{\mathrm{P}(F\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{26}{59}$

8. 정답 ②

$\mathrm{A}(1,3,2)$, $\mathrm{B}(1,-3,-2)$, $\mathrm{C}(1,3,-2)$ 이므로
삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$

9. 정답 ⑤

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$ 이고,
세로의 길이는 $3^\alpha-(-3^{-\beta})$ 이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면
$S=(\beta-\alpha)(3^\alpha+3^{-\beta})=4(3^\alpha+3^{-\alpha-4})$
$\ge4\times2\sqrt{3^\alpha\cdot3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$
(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)
따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

10. 정답 ⑤

두 점근선의 교점을 원점으로 하고, 두 초점이 x축 위에 있는 좌표평면에서 쌍곡선 H의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이라 하자.
두 초점의 좌표가 $\mathrm{A}(2,0)$, $\mathrm{D}(-2,0)$이므로 $a^2+b^2=2^2$
직선 BE가 점근선이므로 $\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$
$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=2a=2$

11. 정답 ④

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x^2}$ 이고 $f''(x)=e^x+\dfrac{2}{x^3}$ 이다.

ㄱ. $f'(\alpha)=e^\alpha-\dfrac{1}{\alpha^2}=0$ 에서 $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha^2}$ (참)

ㄴ. 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$ 이므로
곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f'(\alpha)=0$ 이고 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$ 이므로
함수 $f(x)$는 $x=\alpha$ 에서 극소이자 최소이다. (참)

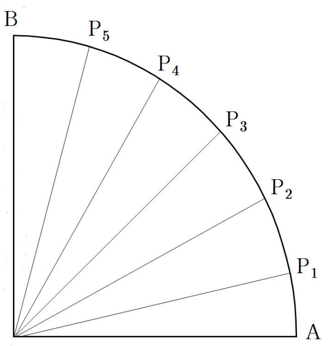
12. 정답 ⑤

$$P(\tfrac{1}{4}<Y\le\tfrac{3}{4})=P(Y>\tfrac{1}{4})-P(Y>\tfrac{3}{4})$$
$$=0.8-0.2=0.6$$
$$P(X>k)=G(k)=-k+1=0.6$$
$$\therefore\ k=0.4=\frac{2}{5}$$

13. 정답 ①

$$S_k=\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2k\pi}{4n}=\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\frac{k\pi}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\frac{1}{2n}$$
$(x_k=\dfrac{k}{2n}$, $\triangle x=\dfrac{1}{2n}$ 로 놓으면)
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\,dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\pi}$$

14. 정답 ②



부채꼴 OPA 의 넓이와 부채꼴 OPB 의 넓이의 차가 확률변수 X이므로 P_3를 선택할 때 넓이의 차는 0

P_1 또는 P_5를 선택할 때 넓이의 차는 $\dfrac{\pi}{12}$

P_2 또는 P_4를 선택할 때 넓이의 차는 $\dfrac{\pi}{6}$

확률분포표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

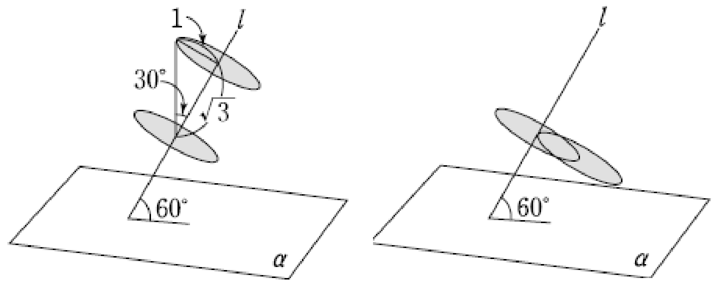
따라서 $E(X)=0\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{\pi}{12}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{\pi}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{10}$ 이다.

15. 정답 ③

두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|^2$ 에서 $|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=|\overrightarrow{AB}|$ 가 성립하므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다.
이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다.
한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$ 에 내린 수선의 발을 $H(t-1,2-t,t)$ 라 하면
$(t-1,2-t,t)\cdot(1,-1,1)=0$ 에서 $t=1$ 이다.
이때, $H(0,1,1)$ 이므로 $\overline{OH}=\sqrt{2}$ 이다.
따라서 구하는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$ 이다.

16. 정답 ⑤

그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.



겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면
$S=2\times\pi\times1^2-2S_1$ 이다.
S_1은 중심각이 $\dfrac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로
$$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times1^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\therefore\ S=2\pi-\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
그런데 구하는 그림자의 넓이 S'은 평면과 이루는 각이 $\dfrac{\pi}{6}$인 정사영이므로
$$S'=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\pi}{6}$$
$$=\left(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$$

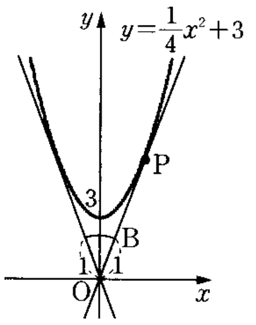
17. 정답 ①

정규분포 $N(50,\ 8^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50,\ \left(\dfrac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$ 즉, $N(50,\ 2^2)$ 을 따른다.
또, 정규분포 $N(75,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(75,\ \left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$ 즉, $N\left(75,\ \left(\dfrac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.
$$P(\overline{X}\le53)=P\left(\frac{\overline{X}-50}{2}\le\frac{53-50}{2}\right)$$
$$=P(Z\le1.5)$$
$$=0.5+P(0\le Z\le1.5)$$
$$P(\overline{Y}\le69)=P\left(\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}\le\frac{53-50}{\frac{\sigma}{5}}\right)$$
$$=P\left(Z\le-\frac{30}{\sigma}\right)$$
$$=0.5-P\left(0\le Z\le\frac{30}{\sigma}\right)$$
이때 $P(\overline{X}\le53)+P(\overline{Y}\le69)=1$ 이므로
$$P(0\le Z\le1.5)=P\left(0\le Z\le\frac{30}{\sigma}\right)$$
$1.5=\dfrac{30}{\sigma}$ 이므로 $\sigma=20$
$$P(\overline{Y}\ge71)=P\left(\frac{\overline{Y}-75}{4}\ge\frac{71-75}{4}\right)$$
$$=P(Z\ge-1)$$
$$=0.5+P(0\le Z\le1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

18. 정답 ①

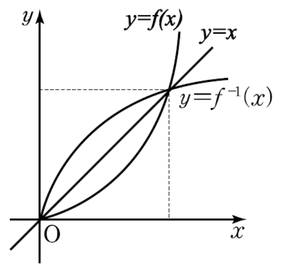
$\overrightarrow{OB}$는 $\overrightarrow{OA}$의 단위벡터이므로 $|\overrightarrow{OB}|=1$
따라서 중점 B가 나타내는 도형은 원점에서
$y=\dfrac{1}{4}x^2+3$ 에 그은 두 접선 사이의 원점을 중심으로 하는 부채꼴의 호이다.
접점 $P\left(\alpha,\ \dfrac{1}{4}\alpha^2+3\right)$ 이라 하면
$$y-\left(\frac{1}{4}\alpha^2+3\right)=\frac{1}{2}\alpha(x-\alpha)\ \cdots\ ①$$
①에 원점 (0, 0)을 대입하면 $-\left(\dfrac{1}{4}\alpha^2+3\right)=-\dfrac{1}{2}\alpha^2$
정리하면 $\alpha=\pm2\sqrt{3}$
따라서 접선의 기울기는

$\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(\pm 2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$ 이므로
부채꼴의 중심각의 크기는 60° 이다.
따라서 구하는 도형의 길이는 $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$



19. 정답 ②

$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$ 이므로 연속함수 $f(x)$의 그래프는
구간 $[0, 1]$에서 아래로 볼록하게 증가한다.
또, 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여
대칭이므로 다음 그래프와 같다.



이때, $\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$ 의 값은 위 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같고, 이는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다. 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 정적분의 정의에 의해

$\int_0^1\{x-f(x)\}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ 이므로

$$\int_0^1\{f^{-1}(x)-f(x)\}dx = 2\int_0^1\{x-f(x)\}dx$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

20. 정답 ④

조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$ 이므로
$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 　또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$ 이다.

$$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx = \int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx$$
$$= [-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a} - \int_a^{2a}-x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx \quad (\because \text{부분적분법})$$
$$= 0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot 2f(x)f'(x)dx$$
$$= \int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx = \int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면 $2dx=dt \Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$\begin{cases} x=a \to t=2a \\ x=20 \to t=4a \end{cases}$ 로 변환되므로

$$= \int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt = \int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt = k$$

21. 정답 ②

삼각형 ABC 는 평면 $z=1$ 위에 있으므로 직선의 방정식에 $z=1$을 대입하면 삼각형 ABC 를 품는 평면과 직선 l의 교점의 좌표는 $(-a-2, 1, 1)$ 이다.
평면 $y=1$과 선분 CA, CB 의 교점의 x좌표가 각각 $2,\ -1$ 이므로
$-1 \le -a-2 \le 2$ 에서 $-4 \le a \le -1$
따라서 구하는 정수 a의 개수는 4이다.

22. 정답 130

${}_4\mathrm{H}_8 - {}_4\mathrm{H}_4 = {}_{11}\mathrm{C}_3 - {}_7\mathrm{C}_3 = 165-35 = 130$

23. 정답 2

$$\int_0^1(1+2e^{-x})dx - \int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$$
$$= \left[x-2e^{-x}\right]_0^1 - \left\{\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e - \int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right\}$$
$$= 2$$

24. 정답 10

$g(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=t$ 라 하면 $-2\le t\le 2$ 이다.
$(f\circ g)(x)=f(t)=t^3-3t^2+15$ 에서
$f'(t)=3t(t-2)$ 이므로 $f(t)$는 $t=0$에서 극대이다.
따라서 $f(0)=15$, $f(-2)=-5$, $f(2)=11$ 이므로
구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $f(0)+f(-2)=\ 10$이다.

25. 정답 12

$\int_0^a 2e^{-x}dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^a = 1$ 에서 $a=\ln 2$이다.

$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\ln 2}2xe^{-x}dx = \left[-2xe^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2}2e^{-x}dx \qquad = 1-\ln 2$

$\therefore\ 10p+q=12$

26. 정답 720

$n\ge k\ge 3$일 때,

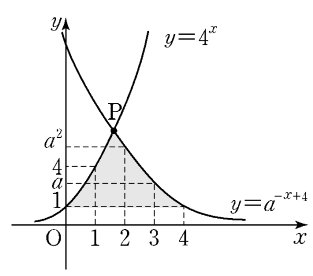
$$k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k = k(k-1)(k-2)\times\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{n!}{(k-3)!(n-k)!}$$
$$= n(n-1)(n-2)\times\frac{(n-3)!}{(k-3)!(n-k)!}$$
$$= n(n-1)(n-2)\,{}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}$$

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k\,p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k-2)\,{}_n\mathrm{C}_k\,p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k=3}^{n}n(n-1)(n-2)\,{}_{n-3}\mathrm{C}_{k-3}\,p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3\sum_{k=0}^{n-3}{}_{n-3}\mathrm{C}_k\,p^{k-3}(1-p)^{n-3-k}$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3\{p+(1-p)\}^{n-3}$$
$$= n(n-1)(n-2)p^3$$

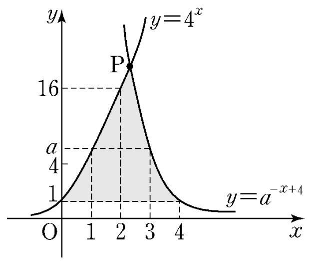
$\therefore\ f(n)=n(n-1)(n-2)$
$\therefore\ f(10)=10\cdot 9\cdot 8=720$

27. 정답 15

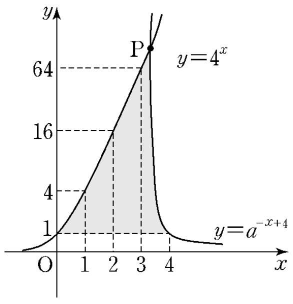
두 지수함수 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$ 의 교점을 $\mathrm{P}(\alpha,\ 4^\alpha)$이라 하면
$4^\alpha = a^{-\alpha+4}$, $\alpha=\frac{4\log a}{\log 4a}$
교점의 위치에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각하면
(i) $1\le\alpha<2$ 일 때
$1\le\frac{4\log a}{\log 4a}<2$ 를 풀면 $\sqrt[3]{4}\le a<4$ 　...... ㉠



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은
$1+4+a^2+a+1$ 이므로 $20 \le a^2+a+6 \le 40$ …… ㉡
㉠, ㉡을 모두 만족하는 자연수 a는 없다.
(ii) $2 \le \alpha < 3$ 일 때
$2 \le \dfrac{4\log a}{\log 4a} < 3$ 을 풀면 $4 \le a < 64$ …… ㉢



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은
$1+4+16+a+1$ 이므로 $20 \le a+22 \le 40$ …… ㉣
㉢, ㉣을 모두 만족하는 a의 범위는 $4 \le a \le 18$ 이므로
자연수 a의 개수는 15개이다.
(iii) $3 \le \alpha < 4$ 일 때



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3인 점의 개수의 합이 $1+4+16+64$ 이므로 조건을 만족하지 않는다.
(i), (ii), (iii)으로부터 a의 개수는 15개이다.

28. 정답 7

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로 두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.
이때, $\overline{AB}=4$ 라 하면 $\overline{BM}=2\sqrt{3}$, $\overline{MP}=\sqrt{3}$ 이고,
직각삼각형 BNP에서 $\overline{BP}=\sqrt{13}$ 이다.
따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \left|\frac{\overline{BM}^2+\overline{MP}^2-\overline{BP}^2}{2\overline{BM}\cdot\overline{MP}}\right| = \frac{1}{6}$$

$\therefore\ p+q=6+1=7$

29. 정답 7

$\overline{PC}=6\tan\theta$, $\overline{CQ}=6\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$
$\overline{PQ}=\overline{PC}+\overline{CQ}=15$
$6\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)+6\tan\theta=15$
$\dfrac{6}{\tan\theta}+6\tan\theta=15$
$2\tan^2\theta-5\tan\theta+2=0$
$(2\tan\theta-1)(\tan\theta-2)=0$
$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\tan\theta=2$
$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ 이므로 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$
따라서 $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{4}{3}$
$\therefore p+q=3+4=7$

30. 정답 8

그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.
따라서 구간 $1 \le x < 2$ 에서 $f(e)=1$, $f'(1)=e$ 이고
(나) 조건에 의하여 $f'(x)$는 증가하는 함수이므로 $e=f'(1)\le f'(x)$ 이다.
이 때, $1 \le x < 2$ 인 구간에서 이 식의 야변을 적분하면

$\displaystyle\int_1^x e\,dx \le \int_1^x f'(x)dx$ 즉 $ex \le f(x)$ 이므로 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^2 ex\,dx \le \int_1^2 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$\ge \int_0^1 e^x dx + \frac{3e}{2} = \frac{5e}{2}-1$$

따라서 구하는 최솟값은 $\dfrac{5e}{2}-1$ 이다

$\therefore 2a-3b=2\times\dfrac{5}{2}-3\times(-1)=8$