우리는 학급, 동아리, 지방 자치 단체, 국가 등 여러 단체에 소속되어 있다. 학급 회의나 회장 선거부터 법률 제정이나 대통령 선거까지 어느 단체에서 안건을 처리하거나 대표를 선발할 때 가장 일반적으로 사용하는 방법은 투표이다.

투표는 투표하는 사람을 밝히는 기명 투표와 밝히지 않는 무기명 투표로 나눌 수 있는데, 대부분의 투표는 무기명 투표로 이루어지고 국회의 헌법 개정안 표결 등 일부의 경우에만 기명 투표로 이루어진다. 이때 기명 투표 결과의 경우의 수는 중복순열을 이용하여 구할 수 있고, 무기명 투표 결과의 경우의 수는 중복조합을 이용하여 구할 수 있다.

이 단원에서는 중복조합과 이항정리를 알아본다.

2 조합

준비학습

1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{8}C_{3}$　　(2) ${}_{20}C_{18}$

2 회원이 10명인 어느 동아리에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수를 구하시오.

3 다음 식을 전개하시오.

(1) $(-2a+5b)^2$　　(2) $(3x-y)^3$

1 중복조합

● 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.

중복조합이란 무엇일까

생각 톡

어느 빵집에서 바게트, 도넛, 식빵을 판매하고 있다.

탐구 ⊛ 바게트, 도넛, 식빵 중에서 두 개를 구입하는 방법을 모두 말해 보자.

중복순열과 같이 조합에서도 중복을 허용하여 택하는 경우가 있다. 이러한 조합을 알아보자.

세 개의 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우는

$$aaaa,\quad aaab,\quad aaac,\quad aabb,\quad aabc,$$
$$aacc,\quad abbb,\quad abbc,\quad abcc,\quad accc,$$
$$bbbb,\quad bbbc,\quad bbcc,\quad bccc,\quad cccc$$

의 15가지이다.

이와 같이 중복을 허용하여 만든 조합을 **중복조합**이라 하고, 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 중복조합의 수를 기호로

$${}_n\mathrm{H}_r$$

와 같이 나타낸다.

${}_n\mathrm{H}_r$의 H는 같은 종류를 뜻하는 Homogeneous의 첫 글자이다.

중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_4$를 구해 보자.

위의 중복조합의 각 경우를 문자를 나타내는 ○ 4개와 세 문자 a, b, c 사이의 경계를 나타내는 | 2개를 이용하여 나타내어 보자.

예를 들어 $aabc$는 ○○|○|○로 나타낼 수 있고, 같은 방법으로 위의 15가지 경우를 나타내면 다음과 같다.

○○|○|○에서 첫 번째 |의 왼쪽의 ○는 a, |와 | 사이의 ○는 b, 두 번째 |의 오른쪽의 ○는 c를 나타낸다.

○○○○||	○○○|○|	○○○||○	○○|○○|	○○|○|○
○○||○○	○|○○○|	○|○○|○	○|○|○○	○||○○○
|○○○○|	|○○○|○	|○○|○○	|○|○○○	||○○○○

따라서 구하는 중복조합의 수 ${}_3H_4$는 4개의 ○와 $(3-1)$개의 |를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉 $\{4+(3-1)\}$개의 자리 중에서 ○를 놓을 4개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_{4+(3-1)}C_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4=15$$

이다.

일반적으로 중복조합의 수 ${}_nH_r$는 r개의 ○와 $(n-1)$개의 |를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다. 즉 $\{r+(n-1)\}$개의 자리 중에서 ○를 놓을 r개의 자리를 택하는 조합의 수와 같으므로 다음이 성립한다.

$${}_nH_r={}_{r+(n-1)}C_r={}_{n+r-1}C_r$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

${}_nC_r$에서는 $0\le r\le n$이어야 하지만 ${}_nH_r$에서는 중복하여 택할 수 있기 때문에 $r>n$일 수도 있다.

중복조합의 수

서로 다른 n개에서 r개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

보기

❶ ${}_5H_4={}_{5+4-1}C_4={}_8C_4=\dfrac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

❷ ${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

문제 1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_4H_2$　　(2) ${}_2H_3$　　(3) ${}_5H_5$

문제 2 어느 분식집에서 김치김밥, 치즈김밥, 참치김밥만을 판매하고 있다. 이 분식집에서 김밥 7줄을 구매하는 경우의 수를 구하시오.

예제 1 **방정식 $x+y+z=9$에서 다음을 구하시오.**

(1) x, y, z가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수
(2) x, y, z가 모두 양의 정수인 해의 개수

풀이 (1) 구하는 해의 개수는 x, y, z에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$ {}_3H_9 = {}_{3+9-1}C_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 $$
$$ = \frac{11\times10}{2\times1} = 55 $$

(2) x, y, z가 양의 정수이므로

$$ x-1=a,\ y-1=b,\ z-1=c $$

로 놓으면 a, b, c는 음이 아닌 정수이다. $x+y+z=9$에서

$$ a+b+c=6 \text{ (단, } a, b, c\text{는 음이 아닌 정수)} $$

따라서 구하는 해의 개수는 a, b, c에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$ {}_3H_6 = {}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 $$
$$ = \frac{8\times7}{2\times1} = 28 $$

답 (1) 55 (2) 28

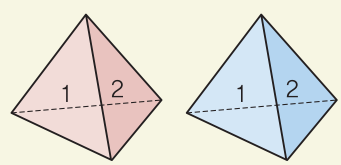
문제 3 **방정식 $x+y+z+w=10$에서 다음을 구하시오.**

(1) x, y, z, w가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수
(2) x, y, z, w가 모두 양의 정수인 해의 개수

문제 4 **다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하시오.**

문제 해결하기

오른쪽 그림과 같이 각 면에 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 두 개의 정사면체가 있다. 두 정사면체를 동시에 던져 밑면에 적힌 수를 각각 a_1, a_2라고 하자.



1 $a_1 \le a_2$인 경우를 순서쌍 (a_1, a_2)로 나타내어 보자.

2 1의 순서쌍의 개수를 중복조합을 이용하여 구하는 방법을 설명해 보자.

수학 역량 플러스

추론 문제 해결

접시에 나누어 담는 경우의 수

같은 종류의 사과 5개를 3개의 접시에 나누어 담는 경우의 수는 접시의 종류가 같은지 또는 다른지, 그리고 접시를 일부만 사용해도 되는지 또는 모두 사용해야 하는지와 같은 조건에 따라 달라진다.

❶ 같은 종류의 접시를 사용하는 경우

각 접시에 담는 사과의 개수는

(i) 접시를 1개만 사용하는 경우는 $(5,\ 0,\ 0)$

(ii) 접시를 2개만 사용하는 경우는 $(4,\ 1,\ 0)$, $(3,\ 2,\ 0)$

(iii) 접시 3개를 모두 사용하는 경우는 $(3,\ 1,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 1)$

➡ 접시를 일부만 사용해도 되는 경우는 5가지, 모두 사용해야 하는 경우는 2가지이다.

❷ 서로 다른 종류의 접시를 사용하는 경우

각 접시에 담을 사과의 개수를 각각 x, y, z라고 하면

$$x+y+z=5$$

➡ 접시를 일부만 사용해도 되는 경우에는 x, y, z가 모두 음이 아닌 정수이므로

$${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21(\text{가지})$$

접시를 모두 사용해야 하는 경우에는 x, y, z가 모두 자연수이므로

$${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6(\text{가지})$$

이와 같이 같은 종류의 접시를 사용할 때의 경우의 수는 사용하는 접시의 개수를 나누어 구할 수 있고, 서로 다른 종류의 접시를 사용할 때의 경우의 수는 중복조합을 이용하여 구할 수 있다.

활동 같은 종류의 초콜릿 8개를 서로 다른 3개의 접시에 나누어 담는 경우의 수를 구하려고 한다. 접시를 일부만 사용해도 되는 경우와 모두 사용해야 하는 경우로 나누어 각각의 경우의 수를 구해 보자.

2 이항정리

● 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

이항정리란 무엇일까

생각 톡

오른쪽 그림과 같이 세 주머니에 a와 b가 적힌 공이 각각 1개씩 들어 있다. 각 주머니에서 공을 1개씩 꺼내어 공에 적힌 문자를 곱하려고 한다.

탐구 ① 곱이 a^2b가 되는 경우의 수를 구해 보자.

탐구 ② 탐구 ①에서 구한 경우의 수와 ${}_3\mathrm{C}_1$을 비교해 보자.

다항식 $(a+b)^n$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내어 보자.

다항식 $(a+b)^3$을 전개하면

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

이다.

이때 a^2b는 세 개의 $(a+b)$ 중 한 개에서 b를 택하고, 남은 두 개에서 a를 택하여 곱한 것이다.

즉 a^2b의 계수는 세 개의 $(a+b)$ 중에서 b를 택할 한 개를 뽑는 조합의 수인 ${}_3\mathrm{C}_1=3$과 같다.

같은 방법으로 a^3, ab^2, b^3의 계수는 각각 ${}_3\mathrm{C}_0$, ${}_3\mathrm{C}_2$, ${}_3\mathrm{C}_3$과 같음을 알 수 있다.

$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	
a	a	a	➡ ${}_3\mathrm{C}_0a^3=a^3$
a	a	b	➡ ${}_3\mathrm{C}_1a^2b=3a^2b$
a	b	a	
b	a	a	
a	b	b	➡ ${}_3\mathrm{C}_2ab^2=3ab^2$
b	a	b	
b	b	a	
b	b	b	➡ ${}_3\mathrm{C}_3b^3=b^3$

따라서 $(a+b)^3$의 전개식을 조합의 수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$(a+b)^3={}_3\mathrm{C}_0a^3+{}_3\mathrm{C}_1a^2b+{}_3\mathrm{C}_2ab^2+{}_3\mathrm{C}_3b^3$$

일반적으로 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식은 n개의 $(a+b)$ 중에서 각각 a 또는 b를 하나씩 택하여 곱한 항을 모두 더한 것이다.

이때 $a^{n-r}b^r$은 n개의 $(a+b)$ 중 r개에서 b를 택하고, 남은 $(n-r)$개에서 a를 택하여 곱한 것이므로 $a^{n-r}b^r$의 계수는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수인 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같다.

따라서 다음과 같은 전개식을 얻을 수 있고, 이것을 **이항정리**라고 한다.

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

또 $(a+b)^n$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ \cdots,\ {}_nC_r,\ \cdots,\ {}_nC_n$$

을 **이항계수**라 하고, ${}_nC_ra^{n-r}b^r$을 $(a+b)^n$의 전개식의 일반항이라고 한다.

$a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^0=1$, $b^0=1$로 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이항정리

n이 자연수일 때,

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b^1+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_nb^n$$

보기 이항정리를 이용하여 $(a+2b)^5$을 전개하면

$$\begin{aligned}(a+2b)^5&={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4\times2b+{}_5C_2a^3\times(2b)^2+{}_5C_3a^2\times(2b)^3\\&\quad+{}_5C_4a\times(2b)^4+{}_5C_5(2b)^5\\&=a^5+10a^4b+40a^3b^2+80a^2b^3+80ab^4+32b^5\end{aligned}$$

문제 1 **이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하시오.**

(1) $(2a-b)^4$ (2) $(x+1)^6$ (3) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^5$

예제 1 $(x^2-2x)^4$**의 전개식에서** x^6**의 계수를 구하시오.**

풀이 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}(-2x)^r={}_4C_r(-2)^rx^{8-r}$$

$x^{8-r}=x^6$에서

$$8-r=6,\qquad r=2$$

따라서 x^6의 계수는

$${}_4C_2\times(-2)^2=24$$

답 24

문제 2 $(2x^3-3x)^6$**의 전개식에서 다음 항의 계수를 구하시오.**

(1) x^{10} (2) x^{16}

예제 2 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n} $$

증명 이항정리를 이용하여 $(1+x)^n$을 전개하면

$$ (1+x)^{n}={}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}x+{}_{n}\mathrm{C}_{2}x^{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}x^{n} $$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}=2^{n} $$

문제 3 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}\times 2+{}_{n}\mathrm{C}_{2}\times 2^{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}\times 2^{n}=3^{n}$

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}-{}_{n}\mathrm{C}_{1}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}-\cdots+(-1)^{n}{}_{n}\mathrm{C}_{n}=0$

(3) ${}_{2n}\mathrm{C}_{0}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2}+{}_{2n}\mathrm{C}_{4}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_{1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{3}+{}_{2n}\mathrm{C}_{5}+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$

파스칼의 삼각형이란 무엇일까

이항계수 사이의 관계와 특징을 알아보자.

자연수 n의 값이 1, 2, 3, 4, …일 때, $(a+b)^n$의 전개식에서 이항계수를 다음과 같이 배열하고 가장 위쪽에 자연수 1을 놓아 삼각형 모양으로 만들 수 있다.

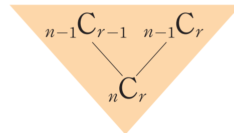
파스칼(Pascal, B., 1623~1662)
프랑스 수학자로 『수 삼각형론』에서 파스칼의 삼각형을 소개하였다.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & \\
(a+b)^{1} & & & & {}_{1}\mathrm{C}_{0} & & {}_{1}\mathrm{C}_{1} & & & \\
(a+b)^{2} & & & {}_{2}\mathrm{C}_{0} & & {}_{2}\mathrm{C}_{1} & & {}_{2}\mathrm{C}_{2} & & \\
(a+b)^{3} & & {}_{3}\mathrm{C}_{0} & & {}_{3}\mathrm{C}_{1} & & {}_{3}\mathrm{C}_{2} & & {}_{3}\mathrm{C}_{3} & \\
(a+b)^{4} & {}_{4}\mathrm{C}_{0} & & {}_{4}\mathrm{C}_{1} & & {}_{4}\mathrm{C}_{2} & & {}_{4}\mathrm{C}_{3} & & {}_{4}\mathrm{C}_{4} \\
\vdots & & & & & \vdots & & & &
\end{array}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

이와 같이 이항계수를 배열한 것을 **파스칼의 삼각형**이라고 한다.

한편 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$이므로 $a^{n-r}b^{r}$의 계수와 $a^{r}b^{n-r}$의 계수는 같다. 따라서 파스칼의 삼각형에서 각 단계의 배열은 좌우 대칭임을 알 수 있다.

또 ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}={}_{n}\mathrm{C}_{r}$이므로 각 단계에서 이웃하는 두 수의 합은 그 다음 단계에서 두 수의 중앙에 있는 수와 같음을 알 수 있다.

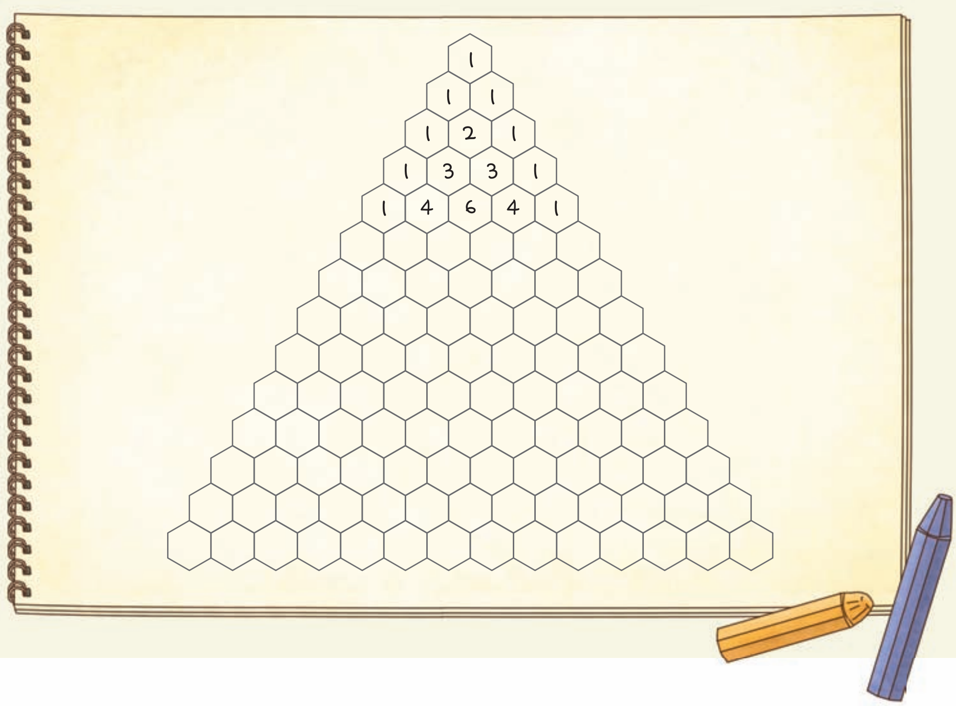


문제 4 **파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 식을 전개하시오.**

(1) $(a+b)^{5}$　　　　(2) $(a-b)^{6}$

규칙 찾기

파스칼의 삼각형에서 일정한 규칙에 따라 수가 적힌 칸을 색칠하면 여러 가지 모양이 나온다. 다음 파스칼의 삼각형을 완성하고, 5의 배수가 적힌 칸을 색칠해 보자.



수학 역량 플러스

하키 스틱 패턴

추론 / 문제 해결

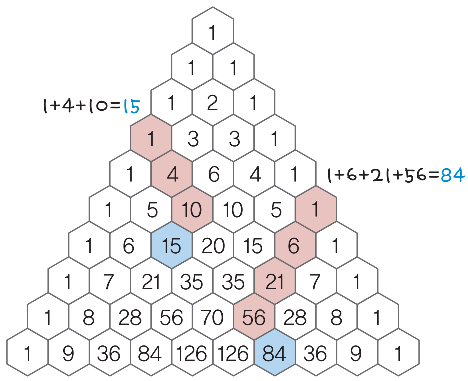
파스칼의 삼각형은 수학자 파스칼(Pascal, B., 1623~1662)의 이름을 딴 것이지만 그가 파스칼의 삼각형을 알리기 수 세기 전인 1303년 중국 수학자 주세걸(朱世傑, 1270?~1330?)이 쓴 『사원옥감』에 오른쪽과 같이 파스칼의 삼각형 모양이 실려 있다.

다음은 파스칼의 삼각형에서 찾을 수 있는 여러 가지 성질 중 하나이다.

> 파스칼의 삼각형에서 각 단계의 첫 번째나 마지막 수인 1에서 시작하여 대각선 방향으로 배열된 n개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 n 번째 수와 같다.

예를 들어 파스칼의 삼각형에서 제4단계의 첫 번째 수인 1부터 대각선 방향으로 세 개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 세 번째 수인 15와 같다. 또 제6단계의 마지막 수인 1부터 시작하여 대각선 방향으로 네 개의 수를 더한 값은 그 다음 단계의 네 번째 수인 84와 같다.

이를 파스칼의 삼각형에 표시하면 오른쪽 그림과 같이 하키 스틱 모양이 되어 이 성질을 '하키 스틱 패턴'이라고 한다.



한편 하키 스틱 패턴을 조합의 수로 나타내면 다음과 같다.

$$_{n}C_{0}+{}_{n+1}C_{1}+{}_{n+2}C_{2}+{}_{n+3}C_{3}+\cdots+{}_{n+m}C_{m}={}_{n+m+1}C_{m}$$

$$_{n}C_{n}+{}_{n+1}C_{n}+{}_{n+2}C_{n}+{}_{n+3}C_{n}+\cdots+{}_{n+m}C_{n}={}_{n+m+1}C_{n+1}$$

(출처: 김정하, 『파스칼이 들려주는 수학적 귀납법 이야기』)

활동 1 위의 두 등식을 증명해 보자.

활동 2 하키 스틱 패턴을 이용하여 다음 값을 구해 보자.

$$_{2}C_{0}+{}_{3}C_{1}+{}_{4}C_{2}+{}_{5}C_{3}+{}_{6}C_{4}+{}_{7}C_{5}$$

중단원 마무리

❶ 중복조합

(1) 서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 조합을 $\boxed{}$이라 하고, 그 수를 기호로 $\boxed{}$와 같이 나타낸다.

(2) ${}_{n}\mathrm{H}_{r}=\boxed{}$

❷ 이항정리

(1) n이 자연수일 때,

$$(a+b)^{n}={}_{n}\mathrm{C}_{0}a^{n}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}a^{n-1}b^{1}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{r}a^{n-r}\boxed{}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}b^{n}$$

(2) $(a+b)^{n}$의 전개식에서 각 항의 계수

$${}_{n}\mathrm{C}_{0},\ {}_{n}\mathrm{C}_{1},\ \cdots,\ {}_{n}\mathrm{C}_{r},\ \cdots,\ {}_{n}\mathrm{C}_{n}$$

을 $\boxed{}$라고 한다.

❸ 파스칼의 삼각형

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때, $(a+b)^{n}$의 전개식에서 이항계수를 다음과 같이 삼각형 모양으로 배열한 것을 $\boxed{}$이라고 한다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & {}_{1}\mathrm{C}_{0} & & {}_{1}\mathrm{C}_{1} & & & \\
 & & {}_{2}\mathrm{C}_{0} & & {}_{2}\mathrm{C}_{1} & & {}_{2}\mathrm{C}_{2} & & \\
 & {}_{3}\mathrm{C}_{0} & & {}_{3}\mathrm{C}_{1} & & {}_{3}\mathrm{C}_{2} & & {}_{3}\mathrm{C}_{3} & \\
{}_{4}\mathrm{C}_{0} & & {}_{4}\mathrm{C}_{1} & & {}_{4}\mathrm{C}_{2} & & {}_{4}\mathrm{C}_{3} & & {}_{4}\mathrm{C}_{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

기본 문제

1 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{5}\mathrm{H}_{3}$　　　(2) ${}_{2}\mathrm{H}_{4}$

2 같은 종류의 볼펜 9자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 볼펜을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

3 이항정리를 이용하여 다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b)^{4}$　　　(2) $(1-x)^{5}$

4 $(x-2y)^{6}$의 전개식에서 $x^{4}y^{2}$의 계수를 구하시오.

5 다음 값을 구하시오.

(1) ${}_{10}\mathrm{C}_{0}+{}_{10}\mathrm{C}_{1}+{}_{10}\mathrm{C}_{2}+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$

(2) ${}_{13}\mathrm{C}_{0}-{}_{13}\mathrm{C}_{1}+{}_{13}\mathrm{C}_{2}-\cdots+(-1)^{r}{}_{13}\mathrm{C}_{r}+\cdots-{}_{13}\mathrm{C}_{13}$

표준 문제

6 주사위 한 개를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례대로 a, b, c, d라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) $a<b<c<d$인 경우의 수
(2) $a\le b\le c\le d$인 경우의 수

7 9명의 회원들이 어떤 안건에 대하여 찬반 투표를 하려고 한다. 무기명 투표로 진행할 때, 투표 결과의 경우의 수를 구하시오.
(단, 기권이나 무효표는 없다.)

8 같은 종류의 사탕 16개를 4개의 상자 A, B, C, D에 나누어 담으려고 한다. A 상자에는 1개 이상, B 상자에는 2개 이상, C 상자에는 3개 이상의 사탕을 담는 경우의 수를 구하시오. (단, D 상자에는 사탕을 담지 않을 수 있다.)

서술형 **9** 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

> (가) $f(3)=4$
> (나) $x_1\in A$, $x_2\in A$일 때, $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.

10 $(\sqrt{3}+\sqrt{2}x)^6$의 전개식에서 계수가 무리수인 모든 항의 계수의 합을 구하시오.

11 다음 부등식을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$$1000 < {}_{n}\mathrm{C}_0 + {}_{n}\mathrm{C}_1 + {}_{n}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n}\mathrm{C}_n < 10000$$

추론

12 ${}_{10}\mathrm{C}_0 + {}_{10}\mathrm{C}_1 \times 3 + {}_{10}\mathrm{C}_2 \times 3^2 + {}_{10}\mathrm{C}_3 \times 3^3 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_{10} \times 3^{10} = p^q$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p는 소수, q는 자연수이다.)

발전 문제

서술형

13 방정식 $x+y+z=11$을 만족시키는 홀수인 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

14 빨간 공 6개, 노란 공 10개, 파란 공 10개 중에서 10개의 공을 택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.)

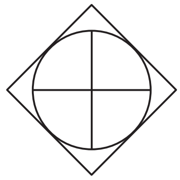
문제 해결

15 41^{15}을 80으로 나눈 나머지를 구하시오.

대단원 마무리

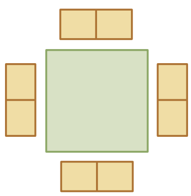
• 정답 및 풀이 131쪽

01 오른쪽 그림은 정사각형에 내접하는 원을 4등분 한 도형이다. 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 이 도형의 각 영역을 칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 영역에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



02 남자 2명과 여자 6명이 보드게임을 하기 위해 오른쪽 그림과 같은 정사각형 모양의 탁자에 둘러앉으려고 한다. 이때 남자 2명이 탁자의 서로 다른 모서리에 앉는 경우의 수를 구하시오.

(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



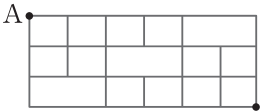
03 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f 중에서 $f(3)\neq 7$을 만족시키는 함수의 개수를 구하시오.

04 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 4개를 뽑아 네 자리 자연수를 만들 때, 천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 6인 자연수의 개수를 구하시오.

05 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구하시오.

(가) $f(4)$의 값은 짝수이다.
(나) $x<4$이면 $f(x)\geq f(4)$이다.
(다) $x>4$이면 $f(x)\leq f(4)$이다.

06 다음 그림과 같은 도로망이 있다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 구하시오.



07 자연수 n을 순서를 고려하여 2 이하의 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수를 $N(n)$이라고 하자. 예를 들어

$$\begin{aligned}4&=1+1+1+1\\&=1+1+2=1+2+1=2+1+1\\&=2+2\end{aligned}$$

이므로 $N(4)=5$이다. 이때 $N(7)$의 값을 구하시오.

08 세 종류의 카드가 각각 3장씩 총 9장의 카드가 들어 있는 주머니에서 5장의 카드를 동시에 꺼낼 때, 세 종류의 카드가 적어도 1장씩 포함되도록 하는 경우의 수를 구하시오.

(단, 같은 종류의 카드는 구별하지 않는다.)

09 다음 조건을 모두 만족시키는 세 자연수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

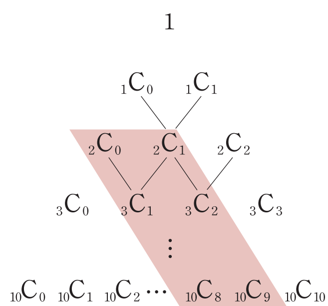
> ㈎ 세 수 a, b, c의 합은 홀수이다.
> ㈏ $a \le b \le c \le 10$

10 $1 \le |a| \le b \le |c| \le 8$을 만족시키는 세 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오.

11 $(x+1)^2(x+a)^4$의 전개식에서 x^5의 계수가 10일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

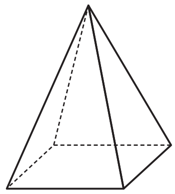
12 오늘이 일요일일 때, 오늘로부터 15^7일 후는 무슨 요일인지 구하시오.

13 다음 파스칼의 삼각형에서 색칠한 부분의 모든 수의 합을 구하시오.



• 정답 및 풀이 132쪽

14 오른쪽 그림과 같이 밑면이 정사각형이고 옆면이 모두 합동인 사각뿔의 5개의 면에 서로 다른 5개의 색을 모두 사용하여 칠하는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. (단, 한 면에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



풀이

15 1, 2, 3, 4에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 만들 수 있는 모든 세 자리 자연수의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

16 experience에 있는 10개의 문자 중에서 4개의 문자를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

17 부등식 $x+y+z\leq5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 ${}_{n}\mathrm{H}_{5}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.

풀이

자기 평가

	만족	보통	미흡
❶ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다.			
❷ 중복조합을 이해하고, 중복조합의 수를 구할 수 있다.			
❸ 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.			

보충 계획

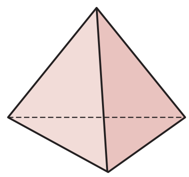
부족한 부분을 어떻게 채울지 계획을 세워 보세요.

창의·융합 프로젝트

정다면체로 주사위 만들기

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체의 5가지가 있다. 각 면에 1부터 n까지의 자연수를 하나씩 적어 만들 수 있는 서로 다른 정n면체의 개수를 원순열을 이용하여 구해 보자.

❶ 정사면체

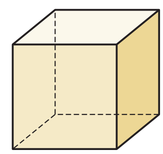


한 면에 1을 적은 후 나머지 세 면에 2, 3, 4의 3개의 수를 적는다.

➡ 서로 다른 정사면체의 개수는

$1\times(3-1)!=2$

❷ 정육면체

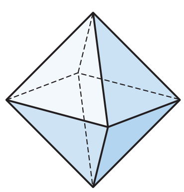


한 면에 1을 적은 후 마주 보는 면에 2, 3, 4, 5, 6의 5개의 수 중 하나를 택하여 적는다. 그리고 나머지 네 면에 남은 4개의 수를 적는다.

➡ 서로 다른 정육면체의 개수는

$1\times5\times(4-1)!=30$

과제 1 다음과 같은 방법으로 각 면에 1부터 8까지의 자연수를 하나씩 적어 만들 수 있는 서로 다른 정팔면체의 개수를 구해 보자.



❶ 한 면에 1을 적고, 평행한 면에 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개의 수 중 하나를 택하여 적는다.

❷ 1을 적은 면과 모서리를 공유하는 세 면에 남은 6개의 수 중 3개를 택하여 적는다.

❸ 나머지 세 면에 남은 3개의 수를 적는다.

과제 2 각 면에 1부터 12까지의 자연수를 하나씩 적어 만들 수 있는 서로 다른 정십이면체의 개수를 구해 보자.

과제 3 각 면에 1부터 12까지의 자연수를 하나씩 적어 정십이면체를 만들 때, 마주 보는 면에 적힌 수의 합이 13인 서로 다른 정십이면체의 개수를 구해 보자.

Math X Biotechnology

인간 게놈 프로젝트

인간의 유전 정보는 23쌍의 염색체를 구성하는 DNA에 담겨 있다. DNA는 아데닌(A), 타이민(T), 구아닌(G), 사이토신(C)의 네 종류의 염기를 갖는 이중 나선 구조의 물질로 AGG, AGT, TCA 등과 같이 3개의 염기가 한 조를 이루어 유전 정보를 저장한다. 이 3개의 염기 배열을 3염기 조합이라고 하는데, 3염기 조합이 특정 아미노산을 지정하고 이에 따라 만들어지는 단백질의 종류가 달라지면서 유전 정보가 결정된다.

이때 3염기 조합의 종류는 4개의 염기에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

이다.

인간 게놈 프로젝트는 인간의 DNA를 구성하는 약 30억 개의 염기 배열의 정보를 파악하여 인간 게놈 지도를 완성하는 연구로 1990년에 시작하여 2003년에 완료되었다. 이 프로젝트의 결과로 인간 게놈의 대부분의 염기 배열을 알아냈다.

인간 게놈 지도를 이용하면 질병과 관련된 유전자를 분석할 수 있어 신약 개발과 유전병 치료에 큰 도움이 될 것으로 기대된다.

(출처: 『동아일보』, 2011. 2. 11.)

진로 탐색

유전 공학 연구원 | 식물이나 동물의 유전 방식을 연구하고 유전자를 재조합하여 인류에게 유익한 의약 물질, 기능성 물질, 공업 원료 물질 등을 생산하거나 실용화하는 첨단 과학 기술을 연구한다.

(출처: 커리어넷, 2017)